ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

J.J. SYLVESTER A JEHO PŘÍNOS ELEMENTÁRNÍ ALGEBŘE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jiří Bloch

Matematika se zaměřením na vzdělávání + Fyzika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2023

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 23. června 2023

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Toto poděkování bych rád věnoval doc. RNDr. Jaroslavovi Horovi, CSc., který mě po dobu psaní práce podporoval a poskytoval mi velmi cenné rady.

OBSAH

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zaměřuje na komplexní analýzu života, přínosu a odkazu Jamese Josepha Sylvestera v oblasti elementární algebry. James Joseph Sylvester byl významný britský matematik, který žil v 19. a na začátku 20. století. Jeho práce zásadně ovlivnila rozvoj algebry a položila základy pro mnoho dalších matematických disciplín.

Práce začíná úvodem do života Jamese Josepha Sylvestera. Představuje jeho rané vzdělání, akademickou kariéru a klíčové vztahy, které ovlivnily jeho matematickou dráhu. Je zde také představena jeho spolupráce s významnými matematiky té doby, jako byli Augustus De Morgan nebo Arthur Cayley.

Dále práce představuje příspěvky Jamese Josepha Sylvestera v oblasti elementární algebry. Jsou podrobně analyzovány jeho klíčové myšlenky a teorie, které obohatily tento matematický obor. James Joseph Sylvester představil nové přístupy k řešení lineárních rovnic a systémů rovnic, vyvinul metody pro faktorizaci polynomů a prozkoumal vlastnosti kvadratických forem. Jsou prezentovány i jeho práce v oblasti teorie determinantů, teorie invariantů a teorie rovnic.

Dalším aspektem práce je analýza vlivu Sylvesterových příspěvků na další generace matematiků a jejich aplikace v různých oblastech. Jeho práce ovlivnila rozvoj algebry jako celku, a to jak teoreticky, tak i aplikovaně. Sylvesterovy teorie a metody našly uplatnění v matematické fyzice, kryptografii, teorii čísel a dalších oblastech matematiky. Jsou zde také diskutovány příklady konkrétních aplikací jeho teorií.

Práce také zkoumá Sylvesterovu pedagogickou činnost a jeho vliv na vzdělávání a rozvoj matematiky. Jsou popsány jeho přednášky, publikace a studenti, které ovlivnil. Je zde také diskutováno jeho působení na univerzitách v Anglii a Spojených státech.

Na závěr práce shrnuje celkový přínos Jamese Josepha Sylvestera pro elementární algebru a vysvětluje, jak jeho myšlenky a teorie ovlivnily další vývoj v této oblasti. Je zdůrazněna jeho důležitost a jeho místo mezi významnými matematiky své doby. Jsou také diskutovány případné nedostatky či kontroverze spojené se Sylvesterovými přístupy.

Tato práce je komplexním a důkladným průzkumem života a přínosu Jamese Josepha Sylvestera v oblasti elementární algebry. Je určena pro matematické studenty, kteří mají zájem o historii matematiky a o příspěvky Jamese Josepha Sylvestera v této oblasti. Práce poskytuje hlubší porozumění jeho práci a jejímu vlivu na současnou matematiku.

KLÍČOVÁ SLOVA

Elementární algebra, James Joseph Sylvester, Kvadratické formy, Lineární rovnice, Matematická historie, Matematická publikace, Pedagogická činnost, Teorie čísel, Teorie determinantů, Teorie invariantů, Univerzity

KEYWORDS

Determinant theory, Elementary algebra, James Joseph Sylvester, Linear equations, Mathematical history, Mathematical publications, Number theory, Pedagogical activities, Quadratic forms, Theory of invariants, Universities

SEZNAM ZKRATEK

UCL – University College London

CMJ – Cambridge Mathematical Jurnal

ÚVOD

Tato bakalářská práce s názvem James Joseph Sylvester a jeho přínos elementární algebře se zabývá životem a vědeckým působením matematika, Jamese Josepha Sylvestera, který se narodil ve Spojeném království a za svůj život dal jméno velkému počtu matematických termínů. James Joseph Sylvester vedl velmi zajímavý život, a i přes všechny překážky, které mu život přichystal nikdy nezanevřel na matematiku, a celý život se jí věnoval. Pro matematiku byl velmi důležitý a bez jeho práce v oblasti algebry, ale také v dalších odvětvích matematiky, by dnešní moderní matematika vypadala úplně jinak.

James Joseph Sylvester byl významným matematikem 19. století, jehož přínos elementární algebře, a i dalším matematickým oborům, zanechal trvalý otisk v oblasti matematického výzkumu. Sylvesterova práce překračovala hranice jedné konkrétní disciplíny a ovlivňovala široké spektrum matematických oblastí, včetně teorie matic, teorie polynomů a teorie čísel.

Tato bakalářské práce, se hlavně zaměřuje na Jamese Josepha Sylvestera a jeho významný přínos v oblasti elementární algebry. Cílem práce je analyzovat a shrnout jeho klíčové myšlenky a objevy, které velice ovlivnily elementární algebru. Práce se také zabývá historickým kontextem, ve kterém Sylvester pracoval, a poukazuje na problematiku náboženství v 19. století v Anglii, a na politické problémy Spojených státu amerických, ve kterých James Joseph Sylvester působil jako učitel matematiky velice dlouhou dobu, a kde díky jeho náboženskému přesvědčení ale také jeho názoru na otrokářství čelil velké kritice tehdejší rozdělené americké společnosti.

První kapitola této práce představuje život Jamese Josepha Sylvestera, jeho vzdělání a významné milníky a životní momenty, ať už dobré nebo špatné, kterých v Sylvesterovo životě bylo mnoho. Dále se také zaměřuje na spolupráci Sylvestera a dalších významných matematiků té doby. Je nutné dodat, že James Joseph Sylvester nebyl pouze výborným matematikem, ale také pedagogem a propagátorem matematiky, mnoho Sylvesterových studentů a spolupracovníků se stalo vlastními předními matematiky a předávalo jeho myšlenky a přístupy dalším generacím.

Druhá kapitola práce krátce shrnuje a poukazuje na Sylvesterovo přínos do matematických oborů jako je geometrie, kombinatorika a další, ve kterých zanechal Sylvester stopu stejně velkou jako v algebře.

Třetí kapitola uvádí některé přínosy Jamese Josepha Sylvestera, které vytvořil v elementární algebře. Od výzkumu v oblasti teorie matic, kde představil nové metody a techniky pro manipulaci s maticemi a jejich aplikace v různých oblastech matematiky, a dokonce i fyziky, po Sylvesterův největší a nejznámější objev, který je zákon setrvačnosti kvadratických forem, který objevil a popsal.

Poslední, čtvrtá kapitola je soupisem některých problémů a úloh Jamese Josepha Sylvestera, které jsem navrhl. Na těchto matematických úlohách je vidět, že Sylvester byl doopravdy výborným propagátorem matematiky, protože jeho úlohy jsou napsány a sestaveny tak, aby je na první pohled pochopil každý, ale k jejich vyřešení je vždy potřeba poněkud hlubší studium matematiky.

Tato bakalářská práce o Jamesi Josephu Sylvesterovi a jeho přínosu elementární algebře se snaží přiblížit čtenáři, jako komplikovaný život Sylvester vedl a jak se i přes všechny životní problémy dokázal nesmazatelně zapsat do historie, ale i do přítomnosti matematiky. Je to právě James Joseph Sylvester a jeho práce, která položila základy pro moderní matematiku, kterou známe dnes.

1 ŽIVOT JAMESE JOSEPHA SYLVESTERA

1.1 MLÁDÍ

James Joseph Sylvester se narodil dne 3. září 1814 v Londýně, do rodiny židovského obchodníka Abrahama Josepha. Již od útlého věku byl vychováván v židovské víře a židovském způsobu života. Díky této skutečnosti měl v budoucnosti, nejen kvůli náboženským zákonům v Anglii, velké problémy, které musel překonávat až do konce svého života.

Obrázek 1: James Joseph Sylvester (1814-1897)

(Zdroj: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/ dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sylvester/)

Sylvester navštěvoval do svých třinácti let internátní školu v Highgate a posléze studoval dalších osmnáct měsíců na škole v Islingtonu. V roce 1828, ve svých čtrnácti letech, začal studovat na UCL, což od něj byl velice chytrý krok. UCL totiž jako jedna z mála univerzit v Anglii nerozdělovala studenty podle náboženského vyznání. Na UCL navíc učil matematiku dnes známý Augustus De Morgan[1]. Po pár měsících studia na UCL byl Sylvester nařčen z napadení jiného studenta. Dle tohoto nařčení měl Sylvester napadnout daného studenta pomocí nože v menze. Hned po tomto nařčení byl mladý Sylvester odhlášen jeho rodiči ze studií, a tak se musel vrátit zpět na Královskou společnost v Liverpoolu.

Navzdory finančním potížím jeho rodiny dokázal navštěvovat školu a získal stipendium na studium na Cambridgeské univerzitě. Dne 7. července 1831 byl Sylvester imatrikulován na Univerzitě svatého Jana v Cambridge, kde studoval pod vedením velmi slavných matematiků, včetně George Peacocka[2] a Johna Herschela[3]. I přesto, že musel svá studia mezi lety 1833 až 1835 přerušit, z důvodu dlouhé nemocnosti, tak v roce 1837 podstoupil

[1] Augustus De Morgan (1806-0871), anglický matematik, slavný pro tzv. De Morganovy zákony
[2] George Peacocka (1791-1858), anglický matematik
[3] Sir John Frederick William Herschela (1792-1871), anglický astronom, matematik a chemik

závěrečné zkoušky z matematiky. Tyto zkoušky s ním skládali také další dva později slavní matematici, Duncan Gregory[4] a George Green[5]. Sylvester skončil ve zkoušce druhý, Green byl čtvrtý a Gregory skončil pátý. Sylvester v roce 1837 podstoupil a splnil závěrečné zkoušky, přesto však nebyl v tomto roce oficiálně promován, protože v rámci promocí na Univerzitě svatého Jana se požadovalo po studentovi, aby podepsal a uznal tzv. „třicet-devět článků“[6], což z důvodu svého náboženského přesvědčení udělat nechtěl, a nevyznával Anglikánskou církev.

V roce 1838 Sylvester získal pozici na katedře přírodních věd na Londýnské Univerzitě. Sylvester měl v oblibě matematiku a s ní i velmi úzce spojenou fyziku. Proto do roku 1841, kdy odstoupil z tohoto místa na katedře přírodních věd Londýnské Univerzity, publikoval na patnáct prací o dynamice kapalin a algebraických rovnicích. Sylvester byl vysokoškolským učitelem, a to i přesto, že neměl žádný vysokoškolský titul, což se ale napravilo roku 1841, kdy mu Trinity College v Dublinu udělila tituly B. A[7] a M. A[8]. Trinity College díky legislativě mohla udělovat tituly i římským katolíkům, a to tedy znamenalo, že byly tyto tituly udělovány také Židům. Tyto náboženské problém v Anglii zažívalo mnoho židů, a to nejen v Anglii. Naštěstí se toto utlačování židů ukončilo roku 1874 tak zvanou emancipací židů, která dala židům svobodu.

[4] Duncan Farquharson Gregory (1813-1844), skotský matematik, zakladatel CMJ
[5] George Green (1793-1841), britský matematik a fyzik, autor Greenovy věty
[6] V angličtině: „Thirty-Nine Articles“, byl soubor doktrín a praktik anglikánské církve napsán v roce 1571
[7] Bachelor of Arts („Bakalář uměleckých věd“)
[8] Master of Arts („Magistr uměleckých věd“)

1.2 SYLVESTEROVO PŮSOBENÍ VE VIRGINII

Když bylo Sylvesterovi sedmadvacet let, tedy hned po odstoupení z pozice v Cambridge, napsal Sylvester žádost o místo profesora na University of Virginia, která se nacházela ve městě Charlottesville. V návaznosti na jeho podanou písemnou žádost napsal De Morgan do Virginie doporučení, které pomohlo Sylvesterovi tuto pozici získat.

Na konci podzimu v roce 1841 přijíždí Sylvester do Virginie. Dodnes se vlastně přesně neví, jestli na univerzitě ve Virginii byl veden přímo jako profesor, nebo zda zde byl pouze návštěvníkem, který měl za úkol pomáhat s výukou.

Feuer o příjezdu napsal: *„Na konci listopadu v roce 1841 přijíždí mladý anglický matematik, člen Královské společnosti, do Charlottesvillu ve Virginii. Upovídaný a energický sedmadvacetiletý oplácaný J.J. Sylvester s tmavými kudrnatými vlasy, bez vousů a s brýlemi, byl už v té době jeden z nejuznávanějších matematiků v Británii.“* (Sylvester in Virginia, 1987 str. 1)

Sylvester se díky těmto sledům událostí stal prvním židovským profesorem v Americe. Tato skutečnost však rozdělila společnost na dva tábory. Některým lidem jeho náboženská příslušnost nevadila, a dokonce Sylvestera přivítali. Na druhé straně ovšem stáli lidé, kterým to, že byl žid, vadilo. V místním časopise ve Virginii dokonce vyšel článek o Sylvesterovi, který kritizoval jeho náboženské přesvědčení včetně jeho postavení k otrokářství.

Na University of Virginia studovali různí studenti. Někteří byly z průmyslnických rodin, podnikajících a živících se vlastní prací a také studenti z rodin plantážníků, kteří měli i stovky otroků a pro něž by byl zákaz otroctví zničující. Toto napětí muselo být citelné již v době Sylvesterova příjezdu. Za dvacet let poté se stane Virginie jedním ze států, nejvíce zasažených válkou severu proti jihu neboli občanské válce v USA, která se odehrávala od roku 1861 a skončila roku 1865. Museli tedy být studenti, kteří vůči Sylvesterovi měli averzi již jen proto, že Sylvester, jakožto žid a rodilý Angličan, byl naprosto proti otrokářství, které bylo v Anglii a anglických koloniích zakázáno v roce 1833. Navíc jsou doklady, že si vedení univerzity již před Sylvesterovým příjezdem nedovedlo poradit s nedisciplinovanými studenty a nedokázalo je vylučovat ze studia na univerzitě. Toto tedy byly ideální podmínky pro nějaký incident, který se doopravdy stal a je popsán na dalších stránkách.

Sylvesterovi přiřadili sedmačtyřicet studentů matematiky. Studenti prvního ročníku měli pod vedením Sylvestera studovat aritmetiku a algebru, a to za pomoci Lacroixsových[9] učebnic. Studenti druhého ročníku měli se Sylvestrem studovat Legendreho[10] geometrii, trigonometrii, projektivní geometrii a základy diferenciálního počtu. Studenti posledního ročníku byli následně vyučováni složitějšímu diferenciálnímu počtu. Sylvester dostal hned ze začátku velké množství hodin matematiky, při kterých musel studenty učit.

V této pozici však Sylvester dlouho nezůstal, protože po pár měsících jeho vyučování se na jedné hodině dostal do sporu s jedním z jeho studentů. Tento spor se rozrostl natolik, že si Sylvester v jednom momentě vzal svoji hůl, která byla rozkládací, a skrýval se v ní nůž, a bodl tohoto studenta do hrudi. Student v šoku po neočekávaném napadení upadl do bezvědomí a Sylvester si myslel, že ho na místě zavraždil. Po tomto incidentu Sylvester utíká do New Yorku za svým starším bratrem. Naštěstí pro Sylvestera se nejednalo o vraždu, neboť nůž, který měl Sylvester schovaný v holi, se zasekl o studentovo žebro, a tak mu nezpůsobil žádné velké zranění.

Tuto událost popisuje Feuer ve svém článku takto: *„V Sylvesterově třídě byla dvojice bratrů, kteří byli hloupí a velmi pyšní. Když Sylvester poukázal na chyby, které udělal jeden z nich v hodině, tak to mladšího z bratrů velmi ponížilo, a cítil, že byla uražena čest jeho rodiny. Okamžitě požadoval omluvu od Sylvestera. V té době u sebe Sylvester nosil hůl, kterou si koupil, a ve které byl ukryt meč. Okamžitě po tom, co po něm student požadoval omluvu, se na Sylvestera rozmáchl obuškem a srazil mu klobouk. Poté se napřáhl ještě jednou a bouchl Sylvestera do hlavy. Sylvester tasil meč, který byl ukryt v holi, a okamžitě bodal ve směru mladšího bratra. Bodl ho do hrudníku, těsně nad místo, kde je srdce. Mladší bratr hned padl do náručí svého staršího bratra, a začal řvát: „On mě zabil“, „Jsem mrtev“. Sylvester po tomto incidentu, aniž by si sbalil svoje věci, odjíždí do New Yorku.“* (Sylvester in Virginia, 1987 str. 3)

Již tři dny po této události Sylvester z New Yorku posílá dopis s rezignací do Virginie. U svého bratra v New Yorku se Sylvester z počátku pokoušel ucházet o jiná místa na jiných univerzitách v Americe. Po odmítnutí z Univerzity v americkém státě Kolumbii a Harvardu

[9] Sylvester François Lacroix (1765-1843), francouzský matematik
[10] Andrie-Marie Legendre (1752-1833), francouzská matematička

odmítla Sylvestera ještě žena, do které se mladý Sylvester v New Yorku zamiloval a požádal jí o ruku. Dne 20. listopadu 1843 Sylvester nastupuje na loď a odplouvá zpět do Anglie.

Tento příběh, o útoku Sylvestera na studenta pomocí meče, který byl schovaný v holi je ale z většiny smyšlený, přesto, že se tato událost měla stát v devatenáctém století, tak Sylvester by stěží utekl americké policii a jurisdikci zpět do Anglie bez soudu. Také tomu, že tento příběh je smyšlený nahrává fakt, že v historii jej popsalo několik autorů a každý z nich si příběh lehce poupravil. Tento příběh o Sylvesterovi, kde měl Sylvester pomocí nože zranit studenta nejspíše šířili Sylvesterovi nepřátelé, a proto existuje několik různých verzí, které spolu nesouhlasí.

Pravdou ale je, že Sylvester se doopravdy na univerzitě dohadoval s jedním studentem, který měl na jeho přednášce číst knihu pod lavicí a tato událost donutila Sylvestera podat rezignaci, jelikož student nebyl nikdy, nijak potrestán.

Tento mýtus o Sylvesterově šermování na půdě Virginské univerzity popisuje Yates následovně: *„Tato událost nemůže být brána za pravdivou, a to z několika důvodů. Zaprvé, Sylvester nebyl celé čtyři roky v Charlottesvillu, jeho rezignace byla přijata po čtyřech měsících od jeho příjezdu*[11]*. Za druhé, Ballard neměl žádného bratra, protože v tu dobu bylo jediný student na univerzitě vedený pod tímto příjmením. Hlavní téma tohoto příběhu nemohu předložit, i přesto, že jsem pročítal noviny a dopisy z univerzitního archivu a kongresové knihovny. Možnost, že je tento příběh pravdivý ale nemohu vyvrátit.“* (YATES, 1937)

V tomto incidentu se mělo se jednat o studenta z rodiny plantážníků, který se jmenoval W. H. Ballard, ten na jedné Sylvesterově přednášce četl knihu, kterou měl schovanou pod lavicí. Sylvester si jeho nezájmu všiml a ihned ho upozornil, aby dával pozor, že probírají velmi důležitou látku. Student měl, podle výpovědi Sylvestera, kterou přednesl komisi dne 23. února 1842, Sylvestera hanlivě okřiknout agresivním tonem a vrátil se zpět ke čtení knihy. Dále Sylvester v této výpovědi popisoval, že si s panem Ballardem promluvil po přednášce v soukromí, a že pan Ballard měl pokračovat v urážení Sylvestera. Komise po vyslechnutí studenta H. W. Ballarda, který samozřejmě vypovídal tak, že označil Sylvestera jako agresora v jejich předešlé slovní výměně. Ani další studenti, kteří byli následně

[11] Zde Yates popisuje příběh, který byl napsaný v knize: „Ten British Mathematicians“ od Alexandera Macfarlanea a Johna Wileyho z roku 1916

vyslechnuti nevypovídali v prospěch ani z jedné stran, a tak se komise univerzity ocitla před těžkým úkolem. Musela se rozhodnout buďto v zachování univerzitního klidu a prestiže a nějak potrestat studenta Ballarda, ale pak by univerzita nejspíše přišla o velikou část financí z důvodu Ballardovi rodinné příslušnosti. Anebo otočit se zády ke kolegovy Sylvesterovi, kterého si jinak velice vážila a podporovala ho v jeho učení. Nakonec komise rozhodla tak, že pro nedostatek důkazů se ani jedna ze stran nijak nepotrestá, to samozřejmě naštvalo Sylvestera, který se rozhodnutím komise cítil poškozen, a tak podal rezignaci na jeho místo profesora. Univerzita tak ukončila smlouvu se Sylvesterem dne 29. března 1842. Sylvester následně odcestoval do New Yorku za svým bratrem, ucházel se o místa na univerzitách a pak po neúspěších o získání práce se vrací do Anglie. Ještě je třeba dodat, že po odeslání žádosti o práci na univerzitu v americkém státě Kolumbie, odeslalo vedení univerzity ve Virginii dopis, kde popisovalo onen incident, který se stal Sylvesterovi a Ballardovi. V dopise vedení univerzity popisuje situaci a píše, že James Joseph Sylvester nebyl propuštěn kvůli nějaké jeho nekvalitě, ale byl propuštěn z místa z jeho vlastního rozhodnutí. Ani tak Sylvester nedostal místo ani na jedné univerzitě v Americe a vrátil se zpět do Anglie.

1.3 SYLVESTERŮV NÁVRAT DO ANGLIE

James Joseph Sylvester se po svém návratu do Anglie začal poohlížet po zaměstnání. Nakonec získal místo aktuára[12] a sekretáře v kanceláři Equity Law and Life Assurance Company v Londýně. V této době, kdy se připravoval na kariéru advokáta, dával Sylvester i soukromé hodiny matematiky. Jednou z jeho studentek byla i dnes známá Florence Nightingaleová. Florence byla velmi nadaná na matematiku, především pak na statistiku. To, co se od Sylvestera naučila, také použila v realitě, když jako třiatřicetiletá nastoupila jakožto zdravotní sestra do anglické armády, a

Obrázek 2: Florence Nightingale (1820-1910)

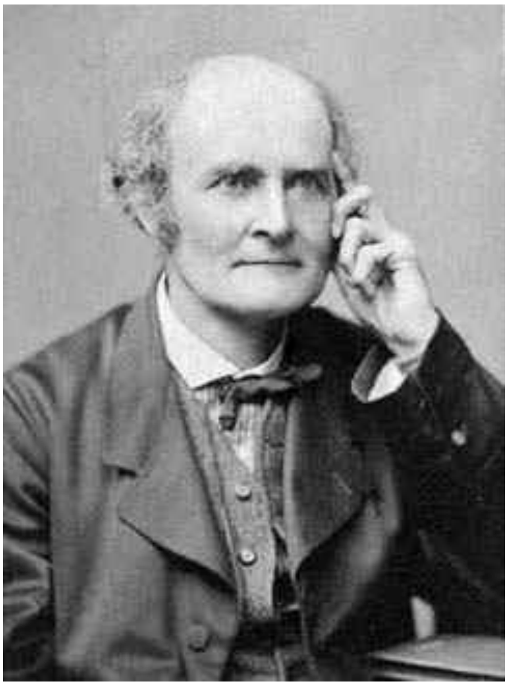
(Zdroj: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/

dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nightingale/)

[12] Aktuár byl dříve nižší úředník, středoškolsky vzdělaný, který se uplatňoval v soudnictví, v berní správě, u policie i v jiných úřadech. Dnes stále existují jako vysokoškolsky vzdělaní pojistní matematici.

sloužila ve válce o Krym v letech 1853 až 1856. Ve válce viděla, jak špatná je péče o zraněné vojáky, a v jak špatných podmínkách se zranění vojáci ošetřují. Díky těmto zkušenostem využila matematiku, kterou ji Sylvester naučil, a jako první člověk vytvořila dnes již velmi dobře známé a hojně využívané koláčové grafy, na kterých demonstrovala generálům a vysokým anglickým politikům, jak by zlepšení podmínek a péče drasticky zmenšily úmrtnost vojáků ve válkách. Díky ní úmrtnost ve válce v roce 1855 klesla z 60 % na 42.7 %, poté za své vlastní peníze nakoupila čistou vodu a ovoce, které zraněným dávala a úmrtnost spadla na pouhých 2.2 %.

Sylvester při jeho úřednických pracích a studiích, kdy se připravoval na práci advokáta, chodil často na procházky s Arthurem Cayleyim. Cayley také studoval, aby se stal advokátem, ale byl stejně, jako Sylvester, zaujat v matematice. Na jejich společných procházkách pokaždé hluboce diskutovali o matematice a stali se z nich celoživotní přátelé. Sylvester v době kdy chodil na procházky s Cayleym, na kterých se bavili o matematice, vymyslel například slovo „Matrix“ (Matice), kterým pojmenoval matematické struktury, kterými se prakticky celý život zabýval. Také v té době vymyslel Sylvester slovo „Graph“ (Graf). Na těchto procházkách Sylvester pokaždé, při diskusi, hluboce přemýšlel o matematice. Ale hlavním dopadem Cayleyho na Sylvesterův život bylo to, že Cayley, na rozdíl od Sylvestera, byl velmi klidný a problémy se často snažil řešit diplomaticky. Sylvester, jak víme, byl spíše horkokrevný a vznětlivý cholerik. Cayley měl na Sylvestera takto pozitivní dopad, kdy dokázal Sylvestera uklidnit, a pomohl mu s klidným a diplomatickým řešením problémů. Až do konce Cayleho života spolu se Sylvesterem úzce spolupracovali v matematice. Někteří autoři dokonce píšou, že Sylvester a Cayley dali opět směr a smysl matematice v Anglii, která se v té době v Anglii pomalu vytrácela z univerzit. Sylvester a Cayley si doplňovali svoje práce a často spolu chodili na procházky kde diskutovali nejen o matematice. Arthur



Obrázek 3: Arthur Cayley (1821-1895)

(Zdroj: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/ dostupné z: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cayley/)

Cayley sice pracoval celých čtrnáct let jako právník ale i tak se, stejně jako Sylvester, vepsal nesmazatelně do historie matematiky. Jeho práce se zajímala velmi o teorii matic a byl prvním matematikem, která podal moderní definici grupy. Nejznámější matematické pojmy, které byly po Cayleyovi pojmenovány jsou například Cayleyho tabulka, což je tabulka výsledků binární operace nad množinou s konečným počtem prvků anebo Cayleyho-Hamiltonova věta. To, že se Sylvester vrátil ze spojených státu amerických zpět do Anglie můžeme dnes vnímat jako šťastnou událost, i když Sylvesterovi se to tak rozhodně nezdálo. Díky tomuto návratu a spřátelení Sylvestera a Cayleyho, má dnes moderní algebra podobu, takovou, jakou má. Mnoho autorů píše, že právě spojení těchto dvou výborných matematiků bylo velikou událostí, i když si to Sylvester a Cayley v té době určitě neuvědomovali. Díky jejich spolupráci dali základy dnešní teorii invariantů, kterou se oba, do konce jejich životů, zabývali.

Sylvester se v té době opětovně pokoušel získat místa profesora matematiky. Nejdříve se ucházel o místo profesora geometrie na Grehams College v Londýně v roce 1854, bohužel byl ale odmítnut. Po tomto neúspěchu se ještě ucházel o místo na katedře matematiky na Royal Military Academy ve Woolwich, které sice nezískal, ale po pár měsících zemřel profesor, který získal práci místo Sylvestera, a uvolněná pozice tak byla nabídnuta Sylvesterovi, který jí vzal a začal učit ve Woolwich. Ještě před prací ve Woolwich, roku 1851, použil jako první slovo „diskriminant“ a objevil diskriminant kubických rovnic. V letech 1852 až 1853 publikoval důležité práce, ve kterých použil teorii matic pro studium geometrie vyšších dimenzí.

V roce 1866 se Sylvester stal v pořadí druhým prezidentem London Mathematical Society, kterou v roce 1865 založil jeho bývalý učitel a kolega Augustus de Morgan. V pětapadesáti letech roku 1869 odchází Sylvester do důchodu. Poté co se v roce 1870 odstěhoval do Londýna, aby mohl trávit čas v Klubu Athenaenum[13], vydává Sylvester svoji první knihu, která však nebyla o matematice, avšak o poezii. Na tuto knihu, která nesla název: *„The Laws of Verse“, (Zákony Verše)* byl Sylvester velmi pyšný. Tento fakt dokazuje i to, že se občasně podepisoval jako: *„James Joseph Sylvester, author of The Laws of Verse“*. *(James Joseph Sylvester, autor Zákonů Verše)*. Sylvester byl zaujatý v poezii stejně tak silně jako

[13] Athenaenum je společenský klub v Londýně, pro muže a ženy s intelektuálními zájmy. Sylvester se stal členem v roce 1856

v matematice, četl a překládal básně z francouzštiny, němčiny, italštiny, a dokonce i z latiny. Mnoho jeho publikací o matematice, obsahovalo výňatky z různých básní.

Posléze se po dobu tří let v Sylvesterově matematické praxi nic nedělo, a mnozí si mysleli, že Sylvester svoji práci v oblasti matematiky vzdal. Naštěstí Sylvestera navštívil Chebyshev[14], který se Sylvesterem diskutoval o mechanických linkách umožňujících kreslení přímých čar. Po společných diskusích, které vedli na toto téma, se s Chebyshevem dali do společné práce, o které později Sylvester vedl přednášku. Na této přednášce se setkal s jedním studentem, se kterým se o tomto tématu rozmluvil. Tímto studentem, který se Sylvesterem hovořil po jeho přednášce byl Kempe[15], který se Sylvesterem na tomto tématu poté pracoval a společně učinili důležité objevy v této oblasti.

1.4 NÁVRAT DO USA A KONEC ŽIVOTA

V roce 1877 se Sylvester vrací zpět do Spojených států amerických, kde přijal místo na Univerzitě Johna Hopkinse v Baltimoru ve státě Maryland. Jeho plat činil v té době pět tisíc dolarů, což na jeho dobu byla velmi vysoká částka. Sylvester chtěl, aby byl jeho plat vyplácen ve zlatě, ale po dlouhé době smlouvání Sylvestera vedení univerzity přesvědčilo a Sylvester tak od vyplácení platu v čistém zlatě upustil. Zde také Sylvester v roce 1878 založil první matematický časopis ve Spojených státech, který se jmenoval *„American Journal of Mathematics“* (Americký časopis matematiky). Na univerzitě v Baltimoru, se u Sylvestera, za jeho prvních sedm let působení, znovu projevil zájem o matematiku. Nejspíš za to mohla skutečnost, že Sylvester poprvé ve své kariéře učil a zkoumal matematiku v pořádných univerzitních podmínkách. To se mimo jiné projevilo i na jeho schopnostech vést své studenty a pracovníky. Poprvé byl schopen jejich práce skutečně směřovat správnými směry. Pod jeho vedením si doktorát z matematiky na univerzitě v Baltimoru, udělalo devět studentů. I přesto, že byl velmi úspěšný na univerzitě v Baltimoru, se Sylvester rozhodl svoje působení ukončit, a navrátil se zpět do Anglie. Dnes se tvrdí, že se Sylvesterovi zdálo, že je málo placen za jeho schopnosti, ale skutečný důvod, proč Sylvester odcestoval zpět do Anglie je dodnes neznámý, jelikož byl pravděpodobně velmi osobní, a tak se o něm nikdy nikomu nezmínil.

---

[14] Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821-1894), ruský matematik
[15] Alfred Bray Kempe (1849-1922), anglický matematik

V roce 1880 udělila Královská společnost v Londýně Sylvesterovi Copleyho medaily, což je vědecké ocenění za vědeckou práci. První, kdo obdržel tuto medaili byl roku 1731 Stephen Gray[16].

Po úmrtí Henryho Smithe[17] v roce 1883 dostal tehdy už osmašedesátiletý Sylvester Smithovo místo v Oxfordu. Bylo to místo, takzvaného Savilliánského profesora geometrie[18]. Na tomto místě Sylvester přednášel. Sylvester však chtěl přednášet pouze o svém výzkumu a nic jiného ho nezajímalo. To se ovšem vedení univerzity nelíbilo, a tak v roce 1892 najmula zastupujícího profesora, který měl Sylvesterovo práci zastat za něj. Sylvester ale držel oficiálně pozici Savilliánského profesora geometrie až do svojí smrti.

Pro Sylvestera už na akademické půdě nebylo uplatnění, a tak částečně slepý a trpící ztrátami paměti, dvaasedmdesátiletý James Joseph Sylvester Oxford opouští a vrací se do Londýna, kde v tichosti dožívá své poslední roky v klubu Athenaenum. James Joseph Sylvester umírá dne 15. března 1897. Na počest jeho celoživotního díla a práce, uděluje dnes Královská společnost Sylvesterovu medaili, kterou od doby jejího zavedení už obdrželo veliké množství slavných matematiků. Také byl na jeho počest pojmenován kráter na měsíci, který se jmenuje Sylvester.

[16] Stephen Gray (1666-1736), Anglický fyzik a astronom
[17] Henry John Stephen Smith (1826-1883), Irský matematik
[18] Savilliánský profesor matematiky je dodnes prestižní pozice na univerzitě v Oxfordu, kterou založil v roce 1619 sir Henry Saville

2 SYLVESTERŮV ODKAZ V MATEMATICE

James Joseph Sylvester byl vynikající matematik, a zabýval se velikou škálou matematických disciplín. Dnes je znám hlavně pro svojí práci v algebře, ale za svůj život přispěl do mnoha jiných odvětví, proto jsem do své práce vložil tuto kapitolu, kde chci krátce popsat Sylvesterovo práci v jiných matematických disciplínách.

2.1 TEORIE ČÍSEL

James Joseph Sylvester se zajímal o teorii čísel, která se zabývá vlastnostmi celých čísel a jejich vztahy mezi sebou. Zavedl mnoho nových pojmů a metod, které měli, a dodnes mají, velký dopad na moderní matematiku.

Práce Sylvestera v teorii čísel, se hlavně zaměřovala na aritmetiku celých čísel, diophantovské rovnice a teorii kvadratických forem. Vyvinul velikou škálu nových technik pro řešení diophantovských rovnic a pro zkoumání kvadratických forem. Zavedl pojem „relativní prosté číslo“, který je dodnes používán v teorii čísel. Také se zabýval teorií primárních čísel a algebry celých čísel. Například rozvinul metody pro faktorizaci celých čísel a navrhl nové algoritmy pro řešení problémů největšího společného dělitele.

Největším přínosem Jamese Josepha Sylvestera k teorii čísel bylo zavedení a definování posloupnosti, která nese jeho jméno. Je definovaná tak, že každý prvek posloupnosti je součinem předcházejících prvků plus jedna.

Formálně se tato posloupnost definuje takto:

$$s_n = 1 + \prod_{i=0}^{n-1} s_i$$

nultý člen této posloupnosti je 2, jelikož prázdný součin má hodnotu 1. Tato posloupnost může výt definována i rekurentním vztahem:

$$s_i = s_{i-1}(s_{i-1} - 1) + 1, kde\ s_0 = 2$$

2.2 KOMBINATORIKA

Kombinatorika se zabývá studiem kombinatorických struktur, jako jsou permutace, variace a grafová teorie. Sylvesterova práce v této oblasti byla značná a mnoho jeho příspěvků se stalo základem moderní kombinatoriky.

Sylvester se v kombinatorice věnoval studiu permutací a kombinací. Zavedl nový pojem „partice“, což je particionovaná permutace neboli permutace rozdělená do skupin tak, že prvky každé skupiny jsou na sebe navzájem permutovatelné. Tyto pojmy se staly základem moderní teorie kombinatorických struktur a nachází uplatnění v mnoha oblastech matematiky, fyziky a informatiky.

Příklad partice:

Když bychom chtěli určit počet všech různých kombinací tří různých prvků z množiny pěti různých prvků, můžeme použít partice k výpočtu. Počet kombinací tří prvků z pěti prvků se rovná deseti, což lze vypočítat pomocí následující partice:

$$C(5,3) = \frac{5!}{(3! \cdot 2!)} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{20}{2} = 10$$

Kde C (5,3) je kombinace tří prvků z pěti různých prvků.

Sylvester také zkoumal různé kombinatorické problémy, jako jsou například problémy vytváření latinských čtverců nebo řešení kombinatorických her. Jeho práce v tomto odvětví matematiky měla velký vliv na rozvoj teorie kombinatorických her, která se dnes využívá například v teorii her, v informatice a v umělé inteligenci.

Dále Sylvester přispěl k teorii inverzních matric, která má také spojitost s kombinatorikou. Jeho práce se zaměřovala na výpočet determinantů a inverzních matic, což je důležitá technika v kombinatorice a lineární algebře.

Sylvesterova práce v kombinatorice přinesla nové myšlenky, metody a výsledky do této oblasti matematiky. Jeho přínos k rozvoji kombinatoriky je dodnes uznáván a jeho práce zůstává inspirací pro další generace matematiků zabývajících se touto disciplínou.

2.3 TEORIE INVARIANTŮ

James Joseph Sylvester měl v teorii invariantů významný přínos, který položil základy pro další vývoj této oblasti matematiky. Teorie invariantů se zabývá studiem objektů, které zůstávají neměnné neboli invariantní při určitých transformacích. Tato oblast matematiky, je ta, kde Sylvester s jeho celoživotním přítelem Cayleym odvedli nejvíce práce. Sylvester vyvinul teorii invariantů jako nástroj pro studium symetrií a transformací v matematických objektech. Jeho práce byla základem pro další vývoj v oblasti teorie invariantů. Společně Sylvester a Cayley rozvíjeli teorii invariantů a přispěli k jejímu rozšíření. Jejich práce měla široký vliv na matematický vývoj a na rozvoj aplikací v různých oblastech, jako je fyzika, chemie a informatika. Teorie invariantů se stala důležitým nástrojem při studiu symetrií a transformací v matematice a její aplikace jsou zásadní pro porozumění mnoha matematickým a vědeckým problémům. Sylvesterova a Cayleyho práce v oblasti teorie invariantů má tak stálé místo v matematické historii.

Jeden ze Sylvesterových významných objevů v této oblasti byl Sylvesterův determinant. Sylvester se zaměřil na systematický způsob výpočtu determinantů formálních matic, které jsou invariantní vůči permutacím jejich prvků. Tím vytvořil nový matematický nástroj, který umožnil efektivnější práci s maticemi a jejich vlastnostmi.

Pro čtvercovou matici A o rozměrech $n \times n$ je Sylvesterův determinant definován jako determinant matice:

$$D(A) = \det(A - \lambda I)$$

kde A je původní matice, λ je proměnná a I je jednotková matice stejného rozměru jako matice A.

Sylvesterův determinanta je polynom v proměnné λ. Jeho hodnoty jsou determinanty matic, které jsou výsledkem dosazení různých hodnot za λ. Tento polynom se často používá v teorii polynomů a algebraických geometriích, zejména při studiu vlastností lineárních operátorů a vyhodnocování vlastních čísel matic. Sylvesterův determinanta má široké využití v matematické analýze a lineární algebře. Je pojmenována po Sylvesterovi, který přispěl k rozvoji teorie determinantů a lineární algebry ve druhé polovině 19. století.

2.4 GEOMETRIE

Významným příspěvkem Jamese Josepha Sylvestera v geometrii, bylo studium algebraické geometrie. Algebraická geometrie je oblast, která studuje geometrické objekty, které jsou definovány algebraickými rovnicemi. Sylvester přispěl k pochopení a rozvoji algebraické geometrie svými přístupy a výsledky. Zejména se zabýval teorií křivek a ploch a zkoumal jejich vlastnosti a interakce s algebrou. Sylvesterova práce také přinesla pokrok v oblasti projektivní geometrie. Projektivní geometrie je oblast, která se zabývá studiem vlastností transformací, které jsou zachovány při projekcích. Sylvester se zajímal o projektivní geometrii jako zobecnění euklidovské geometrie a přispěl k teorii perspektivních center a vlastnostem projektivních transformací.

Nejznámější a nejvýznamnější objev Sylvestera v geometrii bylo stanovení dnes známé Sylvester-Gallaiovy věty. Tento problém navrhl James Joseph Sylvester v roce 1893 a první důkaz publikoval Tibor Gallai[19] v roce 1944.

Věta, kterou James Joseph Sylvester publikoval říká, že každá konečná množina bodů v euklidovské rovině má přímku, která prochází přesně dvěma body, nebo přímku, která prochází všemi z nich. Přímka, které obsahuje přesně dva ze sady bodů, je známá jako obyčejná přímka. Jiným způsobem jako formulovat znění věty je, že každá konečná množina bodů, která není kolineární má obyčejnou přímku.

[19] Tibor Gallai (1912-1992) – maďarský matematik

3 JAMES JOSEPH SYLVESTER A POJMY Z ELEMENTÁRNÍ ALGEBRY

James Joseph Sylvester byl celý svůj život velice zaujatý matematikou jako celkem. Jeho největší příspěvek v matice byla ale jeho práce v algebře. Sylvester za svůj život vymyslel například slovo matice, který dodnes používáme a bez matic si algebru nedokážeme představit. Vymyslel také pojem determinant a s determinanty pracoval prakticky celý život. V této kapitole tak rozvádím pár jeho největších příspěvků do této oblasti matematiky.

3.1 SYLVESTEROVA MATICE A JEJÍ REZULTANT

Sylvesterova matice, je speciální matice, kterou James Joseph Sylvester vytvořil, pro řešení různých dvojic mnohočlenů o jedné neznámé. Koeficienty této matice, tvoří koeficienty daných mnohočlenů a determinant této matice se nazývá rezultant. Sylvesterova matice a rezultant jsou klíčovými nástroji pro studium polynomů a jejich vlastností, jako jsou kořeny, násobnosti kořenů, vzájemná primitivnost a další. Tyto pojmy mají významné aplikace v algebraické geometrii, teorii čísel, numerické analýze a dalších oblastech matematiky.

3.1.1 DEFINICE

Mějme dva mnohočleny stupně m a n:

$$f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \cdots + f_mx^m$$

$$g(x) = \ g_0 + g_1x + g_2x^2 + \cdots + g_nx^n$$

Sylvesterova matice má poté stupeň roven $(\mathrm{m} + \mathrm{n})$ a lze jí sestavit následujícím způsobem:

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} f_m & f_{m-1} & \cdots & f_1 & f_0 & & & \\ & f_m & f_{m-1} & \cdots & f_1 & f_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & & f_m & f_{m-1} & \cdots & f_1 & f_0 \\ g_n & g_{n-1} & \cdots & g_1 & g_0 & & & \\ & g_n & g_{n-1} & \cdots & g_1 & g_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \\ & & & g_n & g_{n-1} & \cdots & g_1 & g_0 \end{pmatrix}$$

Z výše uvedeného vyjádření je vidět, že má tato matice svoji velmi speciální strukturu. přesto je její vytvoření jednoduché a velice intuitivní. Determinant Sylvesterovi matice se nazývá rezultant, a dá se použít například při hledání společných kořenů dvou rovnic o dvou neznámých. Rezultant je tak výpočetním nástrojem, který nám umožňuje analyzovat vzájemné vztahy mezi dvěma polynomy. Jeho vlastnosti a hodnoty mají důležité matematické a algoritmické aplikace.

3.1.2 PŘÍKLAD

Pro ukázku vytváření Sylvesterovi matice a použití rezultantu jsem vymyslel a vyřešil následující příklad.

Určete všechna řešení soustavy rovnic

$$2x^2 + 3y^2 - 3 = 0$$

$$x^2 - xy + 3y^2 - 2 = 0$$

Nejdříve vytvoříme matici polynomů f(x) a g(x). V této matici nebudeme uvažovat y jako proměnnou a budeme počítat pouze s proměnnou x. Proto dále hovořím o polynomech f(x) a g(x) a nikoli o polynomech f(x,y) a g(x,y).

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3y^2 - 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3y^2 - 3 \\ 1 & y & 3y^2 - 2 & 0 \\ 0 & 1 & y & 3y^2 - 2 \end{pmatrix}$$

Rezultant této matice můžeme následně vypočítat za pomoci programu Wolfram Mathematica takto:

Det[{{2,0,-3+3 y^2,0},{0,2,0,-3+3 y^2},{1,y,-2+3 y^2,0},{0,1,y,-2+3 y^2}}]

$15y^4 - 12y^2 + 1$

Rezultant nyní položíme roven nule a v programu Mathematica získáme výsledky:

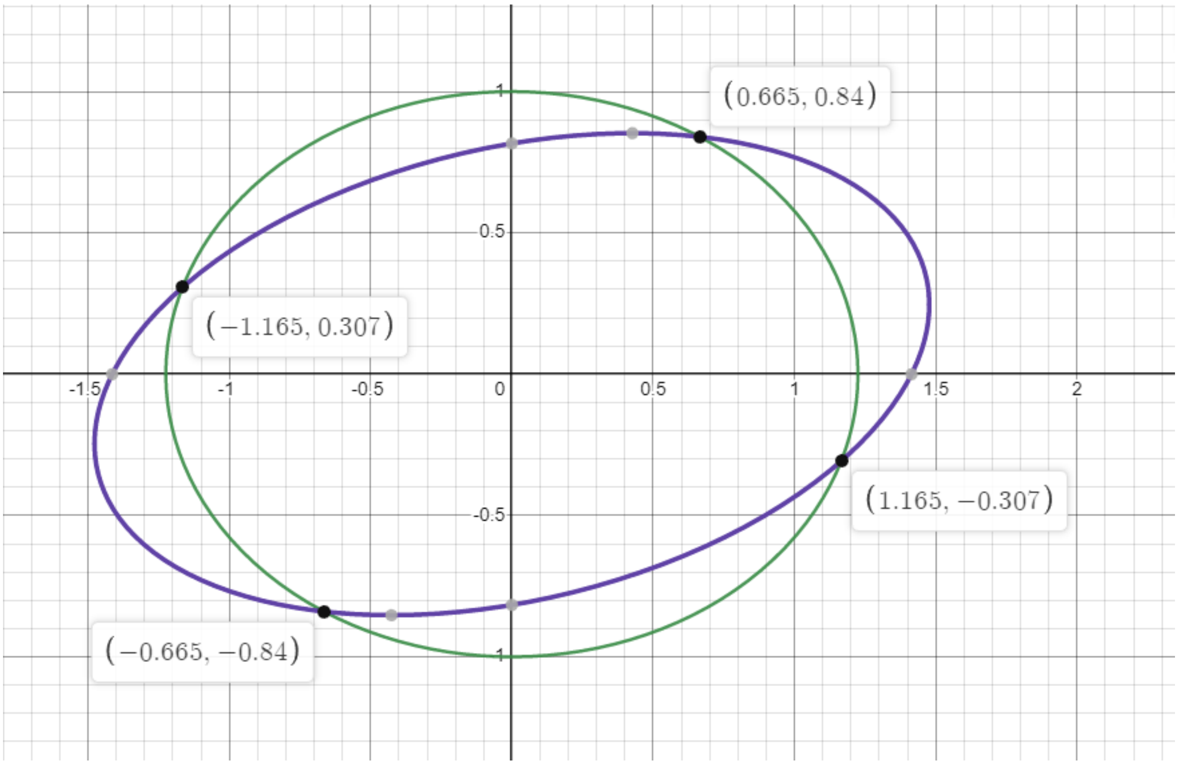
a = 15y^4 – 12y^2 + 1
NSolve[a,y]

$y_1 = -0{,}84; y_2 = -0{,}307; y_3 = 0{,}307; y_4 = 0{,}84$

Tyto hodnoty dosadíme do jedné z rovnic, které byly zadány na začátku a dostaneme výsledky pro složky *x*:

$x_1 = -0{,}665; x_2 = 1{,}165; x_3 = -1{,}165; x_4 = 0{,}665$

Získané hodnoty jsou kořeny soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Pokud bychom nechali vykreslit elipsy, které jsou dány rovnicemi v zadání, pomocí aplikace Desmos, tak bychom viděli, že kořeny soustavy jsou v této situaci průsečíky dvou elips dané v kartézské soustavě souřadnic.



Obrázek 4: Průsečíky dvou elips

Zdroj: Vlastní zpracování

3.2 SYLVESTEROVO KRITÉRIUM

Sylvesterovo kritérium nebo také Sylvesterovo kritérium pozitivní definitnosti, je matematické kritérium, kterým lze určit, zda je reálná symetrická matice nebo komplexní hermitovská matice pozitivně definitní nebo ne.

Sylvesterovo kritérium je užitečným nástrojem při analýze symetrických matic a vlastností, jako je pozitivní definitnost. Pozitivně definitní matice mají mnoho důležitých vlastností a aplikací v matematice a jejich studium je klíčové pro různá matematická a inženýrská odvětví. Sylvesterovo kritérium je jedním z klíčových nástrojů, který nám umožňuje identifikovat a analyzovat pozitivně definitní symetrické matice. Jeho využití je zásadní při řešení různých matematických problémů a při vývoji aplikací ve fyzice, statistice, optimalizaci a dalších oblastech.

3.2.1 VĚTA

Symetrická matice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když determinanty všech hlavních vedoucích podmatic $A_1, \dots \dots, A_n; kde\ n = 1, 2, \dots \dots, n$ jsou kladné.

3.2.2 DEFINICE

Mějme symetrickou čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

a $D_1, D_2, \dots \dots, D_n$ jsou determinanty hlavních podmatic

$$D_1 = |a_{11}|;\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \dots \dots;\ D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

pak matice $\boldsymbol{A}$ je pozitivně definitní, pokud platí, že:

$$D_i\ > 0\ pro\ všechna\ i = 1{,}2, \dots, n$$

matice $\boldsymbol{A}$ je negativně definitní, pokud platí, že:

$$D_i > 0\ pro\ všechna\ sudá\ i\ a\ D_i < 0\ pro\ všechna\ lichá\ i$$

a matice $\boldsymbol{A}$ je indefinitní pokud:

$$existuje\ sudé\ i, že\ D_i < 0, nebo\ dvě\ lichá\ j, k, že\ D_j < 0\ a\ zároveň\ D_k > 0$$

3.2.3 PŘÍKLAD

Tento příklad jsem si vymyslel a vyřešil sám, abych předvedl, jak funguje počítání determinantů podmatic pro řešení Sylvesterova kritéria.

Mějme matici $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

určete, jestli je tato matice pozitivně nebo negativně definitní nebo indefinitní

Řešení:

Budeme postupovat jako v definici:

$$D_1 = |a_{11}| = |2| = \mathbf{2}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = \mathbf{-8}$$

Už po výpočtu prvních dvou determinantů podmatic je zřejmé, že je tato matice indefinitní, protože existuje determinant se sudým indexem, který je záporný. Pro úplnost dopočítám zbývající dva determinanty:

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{8}$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-4) \cdot (-1) \cdot (-15) = \mathbf{-120}$$

Z výsledků jednotlivých determinantů podmatic je patrné, že matice je podle Sylvesterova kritéria indefinitní.

3.3 ZÁKON SETRVAČNOSTI KVADRATICKÝCH FOREM

Jedna ze Sylvesterových nejznámějších matematických objevů. Díky tomuto objevu, je dnes Sylvester známý v celém matematickém světe a získal uznání celého matematického světa.

Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem je užitečným nástrojem při analýze a klasifikaci kvadratických forem. Pomáhá nám porozumět geometrickým a algebraickým vlastnostem těchto forem a umožňuje nám jejich rozklad na jednodušší složky.

Tento zákon má také důležité aplikace v oblastech jako lineární algebra, teorie čísel a teorie forem. Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem je tedy klíčovým pravidlem, které nám umožňuje hlouběji porozumět kvadratickým formám a jejich vlastnostem.

Zákon se zabývá algebrou matice, a to přesněji o koeficientech reálné kvadratické formy, které jsou invariantní při změně báze. Pokud máme matici $\boldsymbol{A}$, která je symetrická a definuje kvadratickou formu, a matici $\boldsymbol{S}$, která je jakákoli invertibilní matice taková, že $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{SAS^T}$ je diagonální, tak počet záporných a kladných koeficientů na diagonále $\boldsymbol{D}$ je neměnný.

3.3.1 VĚTA

Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem se dá formulovat několika způsoby, jeden způsob je tento:

Buď $f(x) = x^T A x$ kvadratická forma. Pak existuje báze, vůči níž má f diagonální matici s prvky $1, -1, 0$. Navíc, tato matice je až na pořadí prvků jednoznačná.

Nebo tento způsob:

Nechť Q je kvadratická forma na $\mathbb{R}^n$ a $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je její polární báze. Bude p, q, r počet kladných nebo záporných anebo nulových členů v posloupnosti $(Q(a_1), Q(a_2), \dots, Q(a_n))$. Potom platí, že trojice p, q, r nezávisí na volbě polární báze.

3.3.2 DEFINICE

Nechť máme kvadratickou formu $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ s n proměnnými, kterou můžeme vyjádřit takto:

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{n-1n}x_{n-1}x_n$$

kde koeficienty a_{ij} jsou reálná čísla.

Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem tvrdí, že při změně souřadnicového systému pomocí lineární transformace ve tvaru:

$$x_i' = c_{1i}x_1 + c_{2i}x_2 + \cdots + c_{ni}x_n$$

kde $c_{1i}, c_{2i}, \dots, c_{ni}$ jsou konstanty. Se počet kladných, záporných a nulových vlastních čísel kvadratické formy $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nezmění.

3.3.3 PŘÍKLAD

Pro ukázání použití Sylvesterova zákonu setrvačnosti kvadratických forem, jsem si vymyslel a následně vyřešil následující příklad

Uvažujme kvadratickou formu:

$$Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$$

Nejdříve si kvadratickou formu musím převést do matice. Pro tento zápis existuje algoritmus, který říká, že na hlavní diagonále matice budou zapsány koeficienty kvadratické formy a_{ij}, zatímco prvky mimo hlavní diagonálu jsou dány polovičními hodnotami koeficientů symetricky, tedy $a_{ij} = \frac{a_{ji}}{2}; pro\ i \neq j$.

V tomto případě budou jednotlivé členy matice vypadat takto:

$$a_{11} = 1;\ a_{22} = 3;\ a_{33} = 1$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_{13} = a_{31} = \frac{2}{2} = 1$$

$$a_{23} = a_{32} = \frac{4}{2} = 2$$

matice dané kvadratické formy bude tedy vypadat takto:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

tato matice nyní reprezentuje kvadratickou formu Q a umožní mi provádět různé operace a analýzy související s touto kvadratickou formou pomocí maticových metod.

Nejdříve musím matici diagonalizovat, k tomu použiji pouze elementární řádkové úpravy a zároveň musím pro každou řádkovou úpravu matice, udělat i odpovídající sloupcovou úpravu.

Jako první úpravu matice A přičtu (-2) násobek prvního řádku k druhému a stejně tak i u sloupců,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dále pak přičtu (-1) násobek prvního řádku ke třetímu řádku, a to samé také samozřejmě pro sloupce,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dostal jsem matici v diagonálním tvaru. Podle Sylvesterova zákonu setrvačnosti kvadratických forem je matice A pozitivně semidefinitní. A má jedno kladné, jedno záporné a jedno nulové vlastní číslo.

Teď musím ještě určit polární bázi kvadratické formy A. Pro kvadratickou formu určenou maticí A je polární báze určena sloupci matice S pro, kterou platí následující vztah:

$$S^T A S = D$$

kde matice D je diagonální.

Pro výpočet polární báze budu postupovat stejně jako při úpravách matice na diagonální tvar, jen s tím rozdílem, že současně budu upravovat i jednotkovou matici, na kterou aplikuji pouze sloupcové úpravy. Budu upravovat tedy matici A a zároveň s ní i matici I_3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S$$

Polární báze je tedy tvořena sloupci matice S.

Teď zkouškou ověřím, že platí

$$S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice A je tedy pozitivně semidefinitní a polární báze je například $(1,0,0)^T$, $(-2,1,0)^T$, $(-1,0,1)^T$. Také hodnost matice A je 2 a její signatura je 0.

Nyní Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem tvrdí, že hodnost a signatura matice je invariantní vůči změně báze pomocí lineární transformace souřadnic. Tudíž, že hodnost a signatura matice A kvadratické formy Q se nezmění při změně polární báze. Proto aplikuji transformaci souřadnic, abych dokázal, že zákon setrvačnosti kvadratických forem doopravdy platí.

Transformace T bude mít předpis:

$$x' = -x - y$$

$$y' = x + y - z$$

$$z' = -y - z$$

matice transformace T bude mít tedy tvar:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

nyní aplikuji transformaci na kvadratickou formu Q a to podle vztahu, který publikoval Sylvester roku 1852:

$$(T^{-1})^T A T^{-1} = A'$$

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1^T} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teď tuto novou matici A' musím opět diagonalizovat, a to za pomoci řádkových a sloupcových úprav.

Nejdříve prohodím první řádek matice A' s druhým řádkem, a to samé udělám i pro sloupce,

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

teď přičtu (-1) násobek prvního řádku ke druhému, stejně tak to udělám se sloupci,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nyní ještě přičtu první řádek matice ke třetímu, a i první sloupec matice ke třetímu,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

jako poslední krok úprav přičtu (-1) násobek druhého řádku ke třetímu a u sloupců stejně tak,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a získal jsem matici v diagonálním tvaru, která je opět pozitivně semidefinitní, má stejně jako před transformací jedno kladné, jedno záporné a jedno nulové vlastní číslo, její hodnost je 2 a její signatura je rovna 0. Je tedy vidět, že Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem je pravdivý a signatura i hodnost matice jsou invariantní vůči změně báze. Pro jistotu mohu pravdivost ověřit za použití ještě jiné transformace souřadnic.

Transformace W bude mít předpis:

$$x' = x - y$$

$$y' = -x - y - z$$

$$z' = -y$$

matice transformace W bude tedy mít tvar:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

opět transformaci aplikuji jako v předešlém případě:

$$(W^{-1})^T A W^{-1} = A''$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1^T} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

převedení do diagonálního tvaru je v tomto případě velice lehké.

Stačí když přičtu (-1) násobek druhého řádku k řádku třetímu a stejně tak i pro sloupce,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

úpravy jsou tímto hotovy a je vidět, že ani další transformace báze nezměnila signaturu, která je opět rovna 0, a ani hodnost matice, které je znovu rovna 2. Také má matice jedno kladné, jedno záporné a jedno nulové vlastní číslo stejně tak jak říká Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem.

Tento zákon, který Sylvester popsal byl jeho nejvýznamnějším příspěvkem do matematiky. Díky tomuto matematickému zákonu je dnes Sylvester známý po celém světě a dodnes se vyučuje po celém světě. Je třeba také napsat, že zákon setrvačnosti kvadratických forem pojmenoval Sylvester čistě díky tomu, že, jak víme, byl velkým básníkem a tento název se mu zdál poeticky hezký.

4 ELEMENTÁRNÍ ÚLOHY J.J. SYLVESTERA A JEJICH ŘEŠENÍ

4.1 ÚLOHA O ZNÁMKÁCH

Slavná úloha, kterou Sylvester poslal do časopisu Educational Times. Z této úlohy, kterou Sylvester navrhl se dá snadno uhádnout, že měl Sylvester velikou zálibu ve vytváření logických hádanek a sbírání známek. Samotná úloha je postavena tak, jako byly skoro všechny Sylvesterovi matematické úlohy a to tak, že problém zprvu pochopí jakýkoli čtenář, ale pro jeho správné vyřešení je nutné, aby se čtenář nějaký čas zabýval matematikou.

Úloha:

Mám velký počet známek, které mají cenu 3 a 11 pencí. Jaká je největší hodnota, kterou nemohu vytvořit kombinováním různých počtů těchto známek? (19 pencí)

(pozn.: Úloha byla originálně napsána s hodnotami 5 a 17 pencí, ale dá se řešit pro jakékoli dvojice čísel, které jsou nesoudělné)

Nejdříve se pokusím úlohu vyřešit zkoušením různých kombinací:

a) Pokud nepoužiji žádnou známku s hodnotou 11 pencí, jsem schopen zaplatit všechny násobky tří, tj. hodnoty 3, 6, 9, 12, …. . Lze vidět, že se jedná o zbytkovou třídu 0 mod 3 a vyplývá z toho, že největší hodnota, kterou nelze zaplatit pomocí kombinace známek, s hodnotou 3 a 11 pencí je 2.

b) Při použití jedné známky s hodnotou 11 pencí, se dostáváme do množiny 11, 14, 17, 20, … . Matematicky můžeme tuto množinu zapsat jako 2 mod 3. Můžeme také vidět, že největší hodnota známek, kterou nelze zaplatit pomocí kombinace známek s hodnotou 3 a 10 pencí, je v tomto případě 10.

c) Při použití dvou známek s hodnotou 11 pencí, se dostáváme do množiny 22, 25, 28, 31, … . Tato množina jde popsat jako 1 mod 3. V tomto případě je největší hodnota, která není možná zaplatit, 19.

Jelikož jsme prozkoumali všechny zbytkové třídy mod 3, zjistili jsme, že největší hodnota, kterou nedokážeme zaplatit pomocí známek s hodnotou 3 a 11 pencí, je hodnota 19 pencí.

Úloha o známkách se dá vyřešit i pomocí složitější matematiky, a to se i tak stalo v dopise s odpovědí na Sylvesterovu úlohu. Řešení použilo tzv. teorii vytvořujících funkcí.

Řešení se dá vysvětlit takhle:

a) V této části, kdy jsme nepoužili ani jednu známku s hodnotou 11 pencí, jsme schopni zaplatit hodnoty 0 (nenalepíme ani jednu známku), 3, 6, 9, 12, … . Ve vytvořujících funkcích to zapíšeme takto:

$$x^0 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \cdots$$

Tuto geometrickou řadu můžeme sečíst a výsledek bude ve tvaru:

$$x^0 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + \cdots = \frac{1}{1 - x^3}.$$

b) V této části bude řada vypadat takto:

$$x^{11} + x^{14} + x^{17} + x^{20} + \cdots = \frac{x^{11}}{1 - x^3}.$$

c) A na konec v této časti takto:

$$x^{22} + x^{25} + x^{28} + x^{31} + \cdots = \frac{x^{22}}{1 - x^3}.$$

Množinu všech hodnot, které jsme schopni zaplatit pomocí známek s hodnotami 3 a 11 pencí, zapíšeme pomocí vytvořující funkce:

$$f(x) = \frac{(1 + x^{11} + x^{22})}{1 - x^3} = \frac{1 - x^{33}}{(1 - x^3)(1 - x^{11})}.$$

A množinu všech přirozených čísel včetně nuly zapíšeme v tomto tvaru:

$$g(x) = x^0 + x^1 + x^2 + \cdots = \frac{1}{1 - x}.$$

Jelikož víme, že existují částky, které nelze zaplatit pomocí známek s hodnotou 3 a 11 pencí, můžeme je najít pomocí následujícího rozdílu:

$$g(x) - f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{33}}{(1-x^3)(1-x^{11})} = \frac{(1-x^3)(1-x^{11}) - (1-x^{33})(1-x)}{(1-x)(1-x^3)(1-x^{11})}.$$

Tyto dva polynomy by bylo potřeba vydělit, můžeme je proto rozepsat takto:

$$\frac{x - x^3 - x^{11} + x^{14} + x^{33} - x^{34}}{1 - x - x^3 + x^4 - x^{11} + x^{12} + x^{14} - x^{15}}.$$

Už teď je vidět, že výsledný polynom bude řádu 19, což je výsledek naší úlohy a říká nám, že největší možná hodnota, kterou nelze zaplatit pomocí známek o hodnotách 3 a 11 je právě hodnota 19.

Jelikož je dělení, polynomů takto velkých řádů, zdlouhavé pomohl jsem si programem Wolfram Mathematica, ve kterém se všechny potřebné operace, vejdou do pár řádků kódu, který vypadá takto:

p = Expand[((1-x^3)(1-x^11)-(1-x^33)(1-x))]

$x - x^3 - x^{11} + x^{14} + x^{33} - x^{34}$

q = Expand [(1-x)(1-x^3)(1-x^11)]

$1 - x - x^3 + x^4 - x^{11} + x^{12} + x^{14} - x^{15}$

Teď musíme ověřit, jestli jsou polynomy dělitelné beze zbytku, to uděláme takto:

PolynomialRemainder[p, q, x]

0

Vidíme, že dělení polynomů probíhá beze zbytku, teď si necháme programem vypsat výsledek dělení:

PolynomialQuotient[p, q, x]

$x + x^2 + x^4 + x^5 + x^7 + x^8 + x^{10} + x^{13} + x^{16} + x^{19}$

Zde je vidět polynom, který je výsledkem dělení polynomů označených *p* a *q*, mocnitele x v tomto polynomu, jsou všechny hodnoty, které nelze zaplatit kombinací známek o hodnotách 3 a 11 pencí. Nejvyšší z nich je hodnota 19, tedy správný výsledek úlohy.

4.2 ÚLOHA O DESETI ŽENÁCH

Sylvesterova úloha o deseti ženách je kombinatorická úloha, která se zabývá rozmístěním deseti žen a deseti mužů do dvou řad sedadel tak, aby žádné dvě ženy nebyly vedle sebe ve stejné řadě. Tato úloha je známá svou elegantností a zároveň obtížností. Úloha sice není přímo algebraického rázu, ale rozhodl jsem se jí do práce přidat, protože mě zaujala.

Úloha:

Představme si dvě řady sedadel vedle sebe. Každá řada má deset sedadel, která budou obsazena ženami nebo muži. Cílem je najít uspořádání tak, aby žádné dvě ženy nebyly vedle sebe ve stejné řadě. To znamená, že mezi dvěma ženami musí vždy sedět muž. Kolik různých uspořádání je možných?

Řešení:

Pro jednoduchost předpokládejme, že v každé řadě je sedadlo pro ženu a poté sedadlo pro muže, a tak střídavě. Na začátku můžeme umístit ženu do prvního sedadla první řady. Nyní už máme pouze devět žen a deset mužů k dispozici pro rozestavení.

Problém nastává, když bychom chtěli umístit druhou ženu. Musíme ji umístit tak, aby nebyla vedle první ženy ve stejné řadě. Existují dvě možnosti.

1. Umístit druhou ženu do první řady: V tomto případě zůstane druhé sedadlo první řady prázdné, protože nesmí být vedle ženy. Máme devět žen a deset mužů k dispozici pro umístění do druhé řady.
2. Umístit druhou ženu do druhé řady: V tomto případě budeme muset umístit prvního muže do prvního sedadla první řady, abychom zajistili, že nebudou dvě ženy vedle sebe. Nyní máme osm žen a devět mužů k dispozici pro umístění do druhé řady.

Postupně bychom pokračovali v umísťování žen a mužů do sedadel, a pokaždé bychom museli brát v potaz podmínku, že nesmějí dvě ženy sedět vedle sebe v jedné řadě. Takový nematematický postup by byl ale velmi zdlouhavý.

Pokud se na tento problém podíváme matematicky musíme si definovat uspořádání jako permutaci, která přiřazuje každému sedadlu konkrétního muže nebo ženu. Označme $P(A)$ počet permutací řady A a $P(B)$ počet permutací řady B.

Počet uspořádání, ve kterých jsou ženy vedle sebe ve stejné řadě, lze vyjádřit jako $P(A) \cdot P(B)$, protože každá permutace řady A může být kombinována s každou permutací řady B. Naopak, počet uspořádání, ve kterých ženy nejsou vedle sebe ve stejné řadě, lze vyjádřit jako celkový počet permutací mínus počet uspořádání s ženami vedle sebe:

$$Počet\ různých\ uspořádání = Celkový\ počet\ permutací - (P(A) \cdot P(B))$$

Celkový počet permutací pro deset mužů a deset žen je $20!$. A pro každou řadu platí, že $P(A) = P(B) = 10!$, protože v každé řadě je deset sedadel.

Po dosazení hodnot do vzorce dostaneme tento výraz:

$$Počet\ různých\ uspořádání = 20! - (10! \cdot 10!)$$

A po vyčíslení dostaneme číslo:

$$\begin{aligned} 20! - (10! \cdot 10!) &= 2432902008176640000 - (3628800 \cdot 3628800) \\ &= 2432902008176640000 - 13168189440000 \\ &= \mathbf{2\,432\,888\,839\,987\,200\,000} \end{aligned}$$

Vidíme, že z velmi snadně vypadajícího problému, se stal problém, který potřebuje logické myšlení, velkou trpělivost a vyšší znalosti matematiky pro vyřešení všech možných různých uspořádání.

ZÁVĚR

V této bakalářské práci jsem se zabýval životem a přínosem Jamese Josepha Sylvestera v oblasti elementární algebry. James Joseph Sylvester byl významný matematik devatenáctého století, jehož práce měly hluboký dopad na vývoj algebry a matematického myšlení obecně.

V průběhu mého výzkumu a bádání jsem se hlavně zaměřil na příspěvky Jamese Josepha Sylvestera právě v oblasti algebry, ale jeho práce přesahovala hranice algebry a často zasahovala do spousta jiných oborů matematiky. James Joseph Sylvester byl průkopníkem v teorii determinantů a výzkumu matic, kde vyvinul nové metody a přístupy k jejich studiu. Jeho práce vedla k důležitým objevům a vytvoření nových teoretických základů, které mají dodnes významný vliv na moderní algebru.

Dalším důležitým přínosem Sylvestera bylo rozšíření teorie invariantů, kde přišel s novými způsoby studia algebry prostřednictvím symetrie a transformací. Tím otevřel možnosti pro aplikace algebry ve fyzice, geometrii a dalších vědních disciplínách. Sylvesterova práce také přispěla k rozvoji teorie polynomů a teorie rovnic, kde představil nové metody pro faktorizaci polynomů a řešení rovnic.

Sylvester byl také jedním z prvních matematiků, kteří aplikovali algebru na studium geometrie. Jeho práce na geometrické interpretaci algebry a algebraických metodách v geometrii měla dalekosáhlý vliv na vývoj obou oblastí matematiky. Sylvesterovy myšlenky na toto téma vedly k rozvoji algebraické geometrie a moderního přístupu k geometrii jako algebře.

Sylvesterův přínos elementární algebře a matematice jako celku, nebyl omezen pouze na jeho vlastní matematické objevy. Byl také vášnivým učitelem a mentorem, který inspiroval a ovlivnil další generace matematiků. Sylvesterova vášeň pro matematiku a jeho schopnost předávat a sdílet své znalosti byly zřejmé z jeho pedagogického působení na předních univerzitách, včetně jeho slavného profesorského místa na Univerzitě Johna Hopkinse. Jeho výjimečná schopnost kombinovat teorii s praktickými příklady a jeho nadšení pro objevování nových myšlenek inspirovali mnoho studentů.

Sylvesterův významný přínos k rozvoji elementární algebry spočívá také v jeho publikacích a rozsáhlém psaní. Jeho práce byla často provokativní a plná nových myšlenek, které vyvolávaly diskuse a podněcovaly další výzkum. Jeho články a knihy se staly důležitými zdroji pro studium algebry a inspirací pro další matematiky.

Navzdory svému významu a přínosu nebyl Sylvester vždy plně uznáván za své úspěchy. I dnes se v matematice učíme o velké části Sylvesterovi práce, aniž bychom věděli, že to byl právě on, kdo vymyslel nebo objevil tyto termíny nebo matematické postupy. James Joseph Sylvester za celý život čelil mnoha výzvám a překážkám, jako byly omezené zdroje, nepochopení a nedostatek uznání anebo náboženská nesnášenlivost, a i přesto se Sylvester nevzdal a nadále se věnoval matematice se stejnou vášní a oddaností.

Celkově lze říct, že James Joseph Sylvester byl významnou osobností v oblasti elementární algebry. Jeho přínosy v teorii determinantů, matic, invariantů, polynomů a rovnic měly trvalý dopad na rozvoj algebry a matematiky jako celku, a jeho vliv lze stále vidět v současném výzkumu a aplikacích. Jeho dědictví je trvalým zdrojem inspirace pro matematiky po celém světě a jeho přínosy v elementární algebře zůstávají klíčové pro porozumění a rozvoj této důležité matematické disciplíny.

RESUMÉ

Tato bakalářská práce pojednává o jednom z nejdůležitějších matematiků 19. století, o jeho životě, celoživotní práci a odkazu, který po sobě zanechal James Joseph Sylvester.

Bakalářská práce je rozdělena na čtyři kapitoly. V první kapitole jsem sepsal celý Sylvesterův životní příběh a poukázal jsem na některé důležité momenty a také na politické a náboženské problém, které ve světě byly za Sylvesterova života. V druhé kapitole jsem krátce shrnul Sylvesterovu práci mimo algebru. Ve třetí kapitole jsem vysvětlil a popsal, některé ze Sylvesterových matematických objevů v elementární algebře. Ve čtvrté kapitole popisuji a následně řeším pár matematických problémů a úloh, které Sylvester sám navrhl.

SUMMARY

This bachelor's thesis discusses one of the most important mathematicians of the 19th century, his life, life's work and the legacy left behind by James Joseph Sylvester.

The bachelor thesis is divided into four chapters. In the first chapter I have written the whole life story of Sylvester and pointed out some important moments as well as the political and religious problems that were in the world during Sylvester's lifetime. In the second chapter, I briefly summarized Sylvester's work outside of algebra. In the third chapter I explained and described some of Sylvester's mathematical discoveries in elementary algebra. In the fourth chapter, I describe and then solve a few mathematical problems and tasks that Sylvester himself proposed.

SEZNAM LITERATURY

BEČVÁŘ, J. 2005. *Lineární Algebra.* Praha : MATFYZPRESS, 2005. ISBN 80-86732-57-6.

HORA, J. 2005. *O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole 3. díl.* Plzeň : autor neznámý, 2005. stránky 53-57. ISBN 80-7020-092-8.

James Joseph Sylvester: life and work in letters. **PARSHALL, K.H. 1998.** 1998, Claderon Press.

JUKL, M. 2000. *Bilineární a kvadratické formy.* Olomouc : Univerzita Palackého v Olomouci, 2000. ISBN 80-244-0170-3.

O'CONNOR, J.J, ROBERTSON, E.F. 2003. *MacTutor.* [Online] 2003. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Nightingale/.

O'CONNOR, J.J, ROBERTSON, E.F. 2014. *MacTutor.* [Online] 2014. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cayley/.

O'CONNOR, J.J., ROBERTSON, E.F. 2005. *MacTutor.* [Online] 2005. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sylvester/.

Sylvester in Virginia. **FEUER, L.S. 1987.** 1987, The Mathematical Intelligencer, vol.9 No.2.

SYLVESTER, J.J. 1870. *The laws of verse.* Londýn : Longmans, Green, and Co., 1870. .

YATES, R.C. 1937. *The American Monthly.* : Taylor & Francis, Ltd., 1937. stránky 196-201. .

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ