Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta pedagogická

Bakalářská práce

SHODNÁ A PODOBNÁ ZOBRAZENÍ V INTERAKTIVNÍCH GEOMETRICKÝCH PROGRAMECH

Hana Holubová

Plzeň 2012

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, …………………. 2012

……………………………….

vlastnoruční podpis

Poděkování

Děkuji za odbornou pomoc a řadu cenných podnětů vedoucímu své bakalářské práce panu Mgr. Lukáši Honzíkovi.

Obsah

1 Úvod

Matematika je věda, která v životě každého jedince hraje nezastupitelnou roli a má velký význam pro vzdělání člověka. V každodenním běžném životě ji všichni využíváme. Učivo matematiky rozvíjí iniciativu, aktivitu a tvořivost dítěte, rozvíjí jeho trpělivost a důslednost, učí ho překonávat překážky při řešení úkolů. V matematice se dítě seznamuje s logikou, odvyká bezmyšlenkovitým tvrzením, učí se logicky zdůvodňovat všechny postupy a závěry, osvojuje si přesné, jasné a stručné vyjadřování.

Mezi mé nejoblíbenější oblasti matematiky patří geometrie, která má důležitou funkci jak při rozvoji prostorové představivosti, orientace, tak i v rozvoji logického myšlení. Proto při výběru tématu své bakalářské práce jsem se zaměřila na tuto oblast matematiky. Vybrala jsem si shodné a podobné zobrazení v rovině, které budu aplikovat a porovnávat ve třech interaktivních geometrických programech.

Se shodným a podobným zobrazením se setkáváme často a všude kolem nás. Například užití podobnosti v běžném životě jsou turistické mapy a plány měst, či jiných objektů. Příkladem shodného zobrazení je otáčivý pohyb na kolotoči, tvorba střihů na ošacení, souměrnost těl živočichů nebo také ve výtvarném umění či výzdobě – ornamenty.

Bakalářskou práci jsem rozdělila do tří částí. První část je více teoretická, zabývala jsem se v ní dynamickou geometrií, pozitivy a negativy nových vzdělávacích technologií, zavedením a využitím projektové výuky a dynamické geometrie v počítači a uvedla vlastnosti dynamické geometrie. Dále jsem představila interaktivní geometrické programy, jako jsou Cabri, GeoGebra a GEONExT, v kterých jsem vypracovávala všechny obrázky a příklady.

V druhé části práce jsem charakterizovala shodná a podobná zobrazení, jejich rozdělení, definice, vlastnosti a uvedla jsem názorné příklady. Ze shodných zobrazení jsem popsala identitu, osovou a středovou souměrnost, otočení a posunutí. Dále jsem se zabývala podobností a stejnolehlostí. Pro lepší názornost jsem již zde vkládala obrázky rýsované v interaktivních programech.

Třetí a poslední část práce je praktická. Řešila jsem v ní konkrétní příklady z učebnic pro základní školy pomocí softwaru pro dynamickou geometrii. Interaktivní programy jsem na základě zkušeností v závěru práce porovnala.

2 Postavení dynamické geometrie

- Vypracováno s použitím [9]

Náčrtky nebo obrázky jsou užitečné pedagogické pomůcky pro výuku geometrie. Počítačová geometrická prostředí přidávají k náčrtkům interaktivitu. Dynamická geometrie používá počítače a speciální výukový software, který umožňuje manipulovat s výsledným počítačovým „obrázkem“. Manipulace s obrázkem poskytuje v krátké době velké množství změn tvarů a vzájemných poloh objektů, ve kterých se dají snadno objevovat vlastnosti zkoumaných objektů.

Počítačové modely geometrických konstrukcí simulují konstrukční postupy pomocí pravítka a kružítka. Interaktivní geometrie navíc nabízí použít funkce, derivace, barvy, náhodné proměnné a jiné než euklidovské způsoby konstruování. V jejich přítomnosti a charakteru se různé geometrické softwary liší a je na uživateli, aby si vybral pro své účely nejvhodnější software.

2.1 Pozitiva nasazení nových vzdělávacích technologií

Počítačové kognitivní technologie umožňují zkvalitňovat poznání při výuce, podporují aktivity spojené s přemýšlením, učením a řešením problémů. Pozitiva využívání kognitivních technologií:

1) Umožňují individuální přístup k žákovi.
   Vyučování je orientované na žáka. Každý žák si může samostatně vyzkoušet, jak zvládne daný problém a úlohu pomocí kognitivních programů názorně vyřešit a pochopit vysvětlované učivo.
2) Přinášejí žákům zážitek z objevování nových závislostí, vlastností a vztahů.
   Z vlastních zkušeností vím, že pokud žák má pocit, že na daný problém přišel sám, lépe se mu poté nové znalosti získané názorně uchovají v paměti a dokáže si spojit souvislosti a prožije pocit spokojenosti z vlastního objevování a chápání nových souvislostí.
3) Nabízejí žákům bezprostřední zpětnou vazbu.
   Zpětná vazba je velmi důležitá. Žáci neztrácejí čas a pozornost rýsováním již známých situací, které program pomocí několika kliknutí připraví za ně. Mohou věnovat svoji pozornost plně probíraným jevům a řešit pouze nové problémy. Žákům se okamžitě projeví, že pochopili novou látku a úlohu vyřešili správně.

4) Žák je nucen aktivně pracovat, stává se zodpovědnějším za svoje vzdělání.

   Pracovní postupy, které žák sám vymyslí a prověří, lépe pochopí a zapamatuje si je. Záleží jen na žákovi, jak je pozorný a aktivně se snaží učivu porozumět a co nejvíce si odnést z názorné vyučovací hodiny. Dynamický software pomáhá žákům rozvíjet jejich geometrickou představivost a abstraktní myšlení, a tím umožňuje komplexně pochopit probírané jevy v širších souvislostech. Žák sám vlastní aktivitou může objevovat nové vztahy mezi vysvětlovanými jevy.

5) Posilují zavádění informačních technologií do výuky matematiky.

   Nové vzdělávací programy vyžadují kvalitní vybavení informačními technologiemi. Zavádění moderních metod do výuky znamená další vzdělávání pedagogů a zvyšování kvality vyučovacího procesu, což má určitě pozitivní přínos pro žáky.

6) Vizualizace problému.

   Mnohé matematické úlohy kladou velké nároky na představivost žáků, což mnohým žákům zcela znemožní úlohu vyřešit. Grafické znázornění řešení úlohy ve své dynamičnosti postupného vzniku mnohým žákům problematiku přiblíží a usnadní její pochopení. Vizualizace problému, názornost jeho řešení je pro žáky zábavná a motivuje je k dalšímu učení. Díky matematickým programům výuka žáky více zajímá a hodina matematiky se tak zefektivní.

2.2 Negativa nasazení nových vzdělávacích technologií

1) Obava z nadužívání technologií na úkor matematického obsahu.

   Učitel je jedním z hlavních článků vzdělávacího procesu, na něm záleží vhodně zvolená strategie probírání matematického celku. Pedagog musí zodpovědně zvážit, kterou látku je vhodné probírat pomocí moderních programů a kdy je nutné žáky vést k rutinním matematickým výpočtům a postupům. Na úkor ovládání nového softwarového prostředí by žákům mohl unikat matematický obsah. Nadužívané dynamické technologie by žákům brzy zevšedněly a ztratily tak svoji motivační roli. Učitel musí vést žáky k tvůrčímu přemýšlení a samostatnému vedení poznámek, používání matematických pomůcek (tabulky, kružítko, pravítko, tužku).

2) Složitost počítačových programů, jejich různé prostředí.

   Používání nových kognitivních technologií předpokládá vybavení školy odpovídající technikou a připravenost pedagogů si nové technologie osvojit. Pro mnohé učitele je to práce navíc, ale mají možnost využívat různé kurzy a semináře zaměřené na tuto problematiku. Příprava na výuku v různých vzdělávacích programech je zpočátku náročná, ale rutinní práce v nich je otázkou času a zvyku.

3) Udržení vhodné míry technologií využívaných ve výuce.

   K výuce geometrie jsou počítačové technologie vhodné a přínosné. Je na učiteli, aby posoudil četnost a účelnost jejich použití při probírání konkrétní matematiky.

4) Nepřipravenost učitelů

   Příprava výuky v nových technologiích je pro učitele náročná nejen časově, ale hlavně po odborné stránce. Myslím si, že by většina pedagogů aktivněji využívala moderní programy, kdyby měla k dispozici metodickou podporu a návod, jak je vhodně využívat v konkrétních úlohách.

3 Projektová výuka

- Vypracováno s použitím [9]

V současném vyučování matematiky se často setkáme s tím, že učitel žákům předává to, co je v učebnicích a školním vzdělávacím programu, a žák má jediný úkol, naučit se, co mu učitel předkládá. Výuka matematiky je často formální – učitel se odvolává na význam matematiky pro žáka, ale neposkytuje mu k tomu přijatelné důkazy. Je na zodpovědnosti žáka, jak se bude učit to, co mu učitel interpretuje. To může vést k absenci nebo snížení vnitřní motivace žáků učit se matematiku.

Projektová výuka umožňuje předkládat žákům problémové situace podobně, jako je tomu v životě, a žák by měl vybrat vhodné metody pro řešení problémů. Projektové vyučování umožňuje žákům plánovat si svojí činnost, učit se pracovat v týmu a aplikovat naučené poznatky, což může přispívat k přesvědčení žáka o užitečnosti matematiky v životě.

Prostředí interaktivní geometrie umožňuje učiteli i žákovi vytvářet si vlastní projekty např. na pochopení pojmu shodné a podobné zobrazení. Projektová výuka by mohla zpřístupnit žákům počítačové technologie a používat výpočetní techniku jako nástroj matematických dovedností a ušetřit čas při rýsování. Samozřejmě to nijak nesnižuje požadavky kladené na žáky a i nadále je důležité umět rýsovat ručně tužkou, pravítkem a kružítkem.

4 Dynamická geometrie v počítači

- Vypracováno s použitím [9]

Prostředí dynamické (interaktivní) geometrie je typem kognitivních technologií, které se využívají v matematice. Je to typ počítačové aplikace, která slouží k rychlému a přesnému rýsování geometrických figur podle zásad konstrukční geometrie. Aplikace obsahují nástroje pro pohyb (režim uchopení a táhnutí objektu, animace, stopa objektu při pohybu a množina objektů vytvářených pohybem). Umožňují manipulaci s hotovou figurou, měří a výsledky výpočtů opět v konstrukcích používají.

Prostředí interaktivní geometrie dokáže oproti možnostem znázornění pomocí tabule a křídy, papíru, pravítka a kružítka nebo vytištěným obrázkem názorně zpřístupnit všem žákům geometrii díky své interaktivitě (reaguje na ovládání uživatelem) a dynamice (schopnost měnit figuru v čase při zachování vztahů mezi geometrickými objekty). Její použití ve výuce uvolní čas pro rozvoj představivosti žáků.

4.1 Nástroje dynamiky

Nástroje dynamiky jsou významnou součástí programu dynamické geometrie. Většina prostředí dynamické geometrie využívá k zachycení změny tvaru figury v čase následující nástroje dynamiky:

1) Manipulace – volný objekt lze uchopit a táhnout s ním myší, a při tom pozorovat změny tvaru. Tento pohyb lze automatizovat nástrojem animace, kdy se vybraný bod (více bodů) plynule pohybuje po objektu, na němž leží.
2) Stopa – vybraný objekt při pohybu zanechává své otisky do nákresny. Nástroj je velice názorný, ukazuje tvar různých množin nebo křivek tak, jak postupně vznikají. S výslednou stopou nelze dále pracovat.
3) Množina – je objekt vzniklý vypočítáním velkého množství poloh vybraného objektu při pohybu. Množina vzniká naráz, na rozdíl od stopy je dynamická, v měnící se figuře, mění také svůj tvar.

(Vaníček, 2009, s. 55)

4.2 Vlastnosti objektů v dynamické geometrii

Z vymezení dynamické geometrie platí, že ve figuře lze dodatečně měnit vlastnosti již sestrojených objektů. Změna vlastností geometrických objektů nesmí mít ovšem dopad na jejich základní určenost, se kterou byly vytvořeny. Touto základní určeností je definovaný typ objektu (přímka, vektor, mnohoúhelník, kuželosečka) a vztahy k dalším objektům, na jejichž základě byl nový objekt definován (volný bod, kolmice, střed úsečky, obraz v osové souměrnosti, bod na polopřímce vzdálený od jejího krajního bodu o určitou vzdálenost danou číslem). Vlastnosti, které se mění, závisí na druhu a stupni nezávislosti objektu a jedná se především o změnu polohy, tvaru, měřených veličin. Změna proměnlivých vlastností se provádí manipulací „uchop a táhni“ pomocí myši.

Zápis situace na nákresně je v počítači uložen u všech aplikací stejným způsobem: objekty jsou popsány svým typem (kružnice, přímka) a základní určeností (kolmice, obraz, kružnice procházející třemi body), souřadnicemi bodů (vztaženými k některé souřadnicové soustavě, prakticky vždy kartézské) a dalšími parametry (vzdálenost, poloměr) doplněné popsaným formátem (barva a styl čar a ploch, viditelnost). Dále jsou doplněny údaje, týkající se nastavení pracovní plochy nákresny.

(Vaníček, 2009, s. 56)

Ve své práci se budu věnovat těmto počítačovým programům: Cabri, GeoGebra a GEONExT.

5 GeoGebra

- Vypracováno s použitím [15]

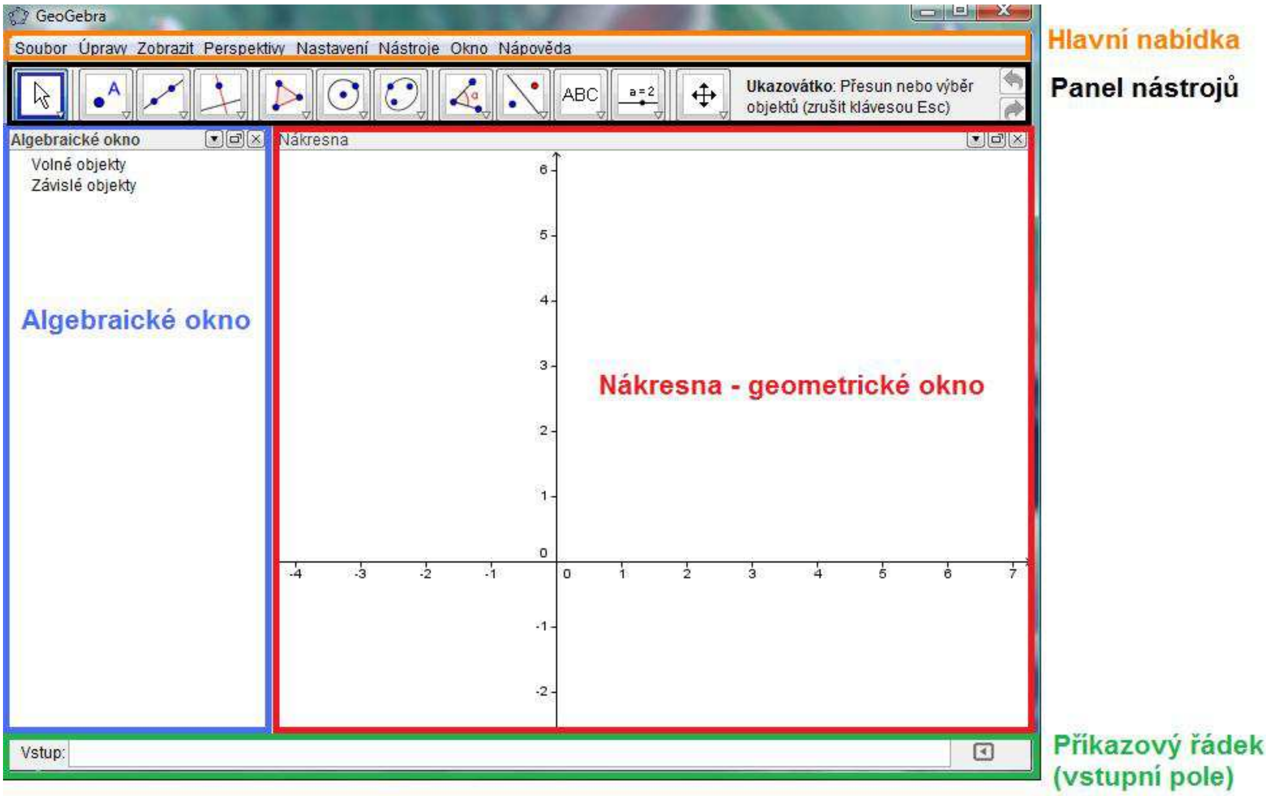
Počítačový program GeoGebra je dynamický matematický software. Jak již název napovídá, tak GeoGebra v sobě zahrnuje dva názvy: **geo**metrický a al**gebra**ický. Lze v něm konstruovat geometrické figury a také je zadávat souřadnicemi. Každý objekt je popsán, jak svou polohou v nákresně tak analyticky.

GeoGebra je volně šiřitelný matematický program, který je určen především pro školy a to jak základní, tak střední ale i pro studenty vysokých škol. GeoGebra se stává ve výuce a učení matematiky stále populárnější. Je možné jí použít pro vizualizaci matematických problémů a také jako kreslící nástroj.

GeoGebra jako interaktivní matematický program přináší nové možnosti pro vyučování matematiky, přípravu písemných prací, názorný výklad látky a také je vhodná k demonstraci různých matematických vztahů a vlastností. S GeoGebrou si každý její uživatel může sám konstruovat nejen body, úsečky, přímky, vektory, kružnice, kuželosečky, rovinné útvary a prostorová tělesa, ale i třeba grafy funkcí, které lze následně interaktivně měnit. V programu je také možné přímé zadání rovnic a souřadnic. GeoGebra též umožňuje počítat s čísly, vektory, souřadnicemi bodů, určovat derivace, integrály, nulové body a extrémy funkcí. GeoGebra, jak už jsem zmínila na začátku, nám poskytuje dva úhly pohledu a to geometrický a algebraický tak, že výraz v algebraickém okně odpovídá objektu v geometrickém okně a naopak.

Program má velice širokou škálu funkcí, proto nám zabere nějaký čas se v GeoGebře naučit orientovat a co nejvíce možností, které program nabízí využít a umět kvalitně zpracovat na určité geometrické úlohy.

Obrázek 1: Prostředí GeoGebry



6 CABRI

- Vypracováno s použitím [10], [12]

Počítačový program Cabri umožňuje spojit tabulkové procesory s nástroji dynamické geometrie. V prostředí programu lze vytvářet interaktivní geometrické konstrukce na obrazovce počítače. Cabri je perspektivní pomůcka pro základní a střední školy k výuce geometrie. Program umožňuje rychlejší a přesnější rýsování, usnadňuje a trénuje geometrické uvažování, je také vhodným prostředím pro projektovou výuku.

Tento program je již řadu let využíván pro přípravu budoucích učitelů matematiky na pedagogických fakultách Univerzity Karlovy, Jihočeské univerzity, Západočeské univerzity a dalších.

Program Cabri je považován za jeden z nejlepších znázornění dynamické geometrie na webových stránkách. Uživatel si může bezplatně stáhnout a vyzkoušet demoverzi. Program lze využít buďto v rovinné geometrii a to jako Cabri II, kde nákresnou je plocha obrazovky monitoru nebo v prostorové verzi Cabri 3D, kde nákresnou je celý prostor za obrazovkou monitoru. Uživatel tak do prostoru nahlíží jakoby oknem obrazovky. V programu se snadno naučíte vytvářet animace geometrických útvarů a i postupné krokování jejich konstrukcí. Výhodou pro využívání programu například na základních školách je, že práce s Cabri je podobná rýsování na papír pomocí pravítka a kružítka nebo na školní tabuli. Na rozdíl od pracného konstruování například rovnoběžky, stačí vybrat nástroj Rovnoběžka, myší označit bod, kterým nová přímka má procházet a přímku, se kterou má být rovnoběžná. Obrázek poté můžeme měnit a deformovat ale rovnoběžnost je zachována.

Vytvořené obrázky je možné si uložit na hard disk. Animační obrázky lze „zabudovat“ do WWW stránky. U rovinné i prostorové verze nám to poskytne doplňková aplikace CabriWeb, která je zdarma stažitelná.

Přestože existuje řada velmi kvalitních programů pro dynamickou geometrii, má Cabri stále řadu výhod, které tento program staví jako velmi výhodný pro školní geometrii.

6.1 CABRI Geometrie II Plus

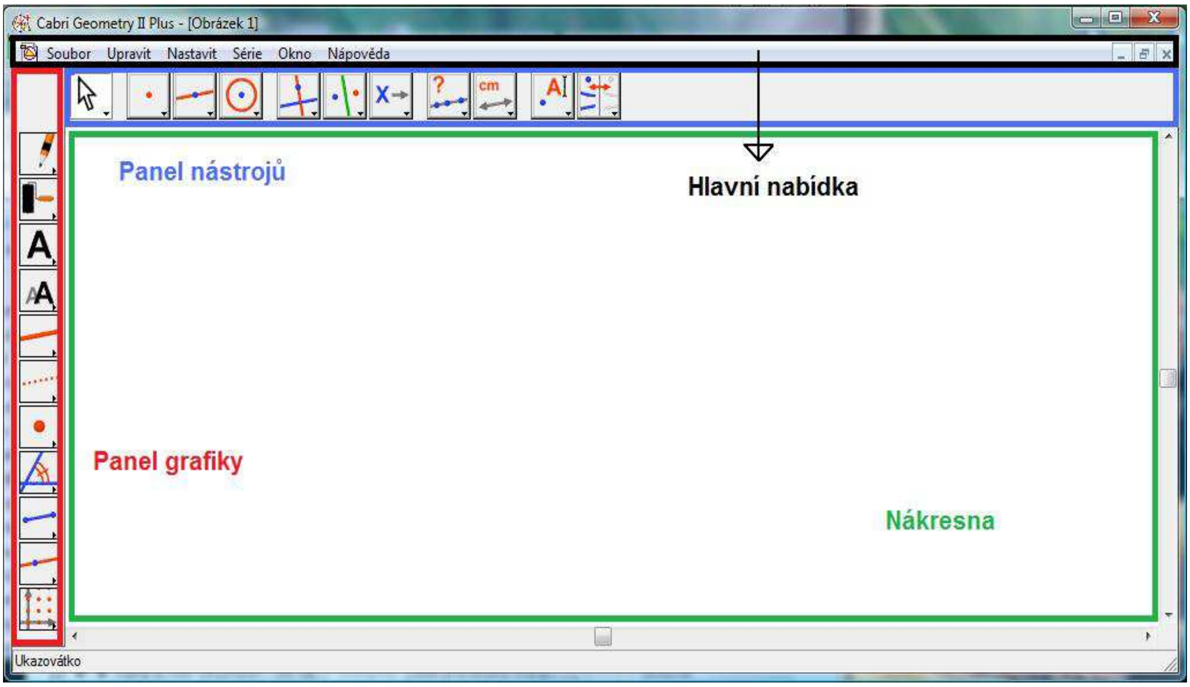
Počítačový program Cabri Geometrie II Plus umožňuje vytvářet na obrazovce počítače geometrické objekty, se kterými se následně může ledajak manipulovat a experimentovat. Program Cabri Geometrie II Plus nabízí:

- konstrukce z bodů, přímek, úseček, vektorů, kružnic a kuželoseček
- geometrická zobrazení, množiny objektů, rovnoběžky, kolmice, osy
- analytická geometrie, měření vzdáleností, obsahů a velikostí úhlů
- dynamické proměny konstrukcí

CABRI 3D v2

Cabri 3D nám představuje kombinaci interaktivní prostorové geometrie a matematického softwaru. Výuka trojrozměrné geometrie byla vždy komplikovaná a nesnadná. Cabri 3D vám umožňuje ulehčit konstrukci složitých objektů a zároveň zahrnuje výhody interaktivní geometrie.

Obrázek 2: Prostředí Cabri



7 GEONExT

- Vypracováno s použitím [13]

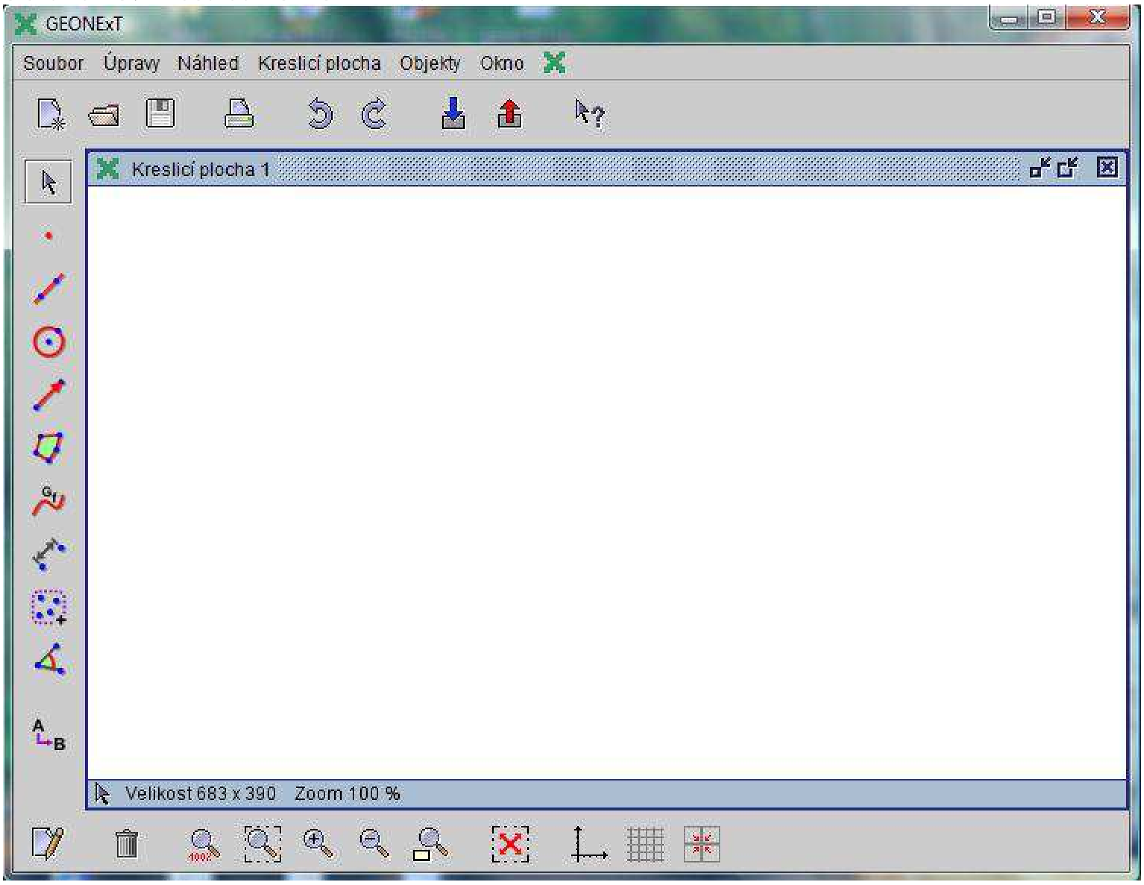
Počítačový program GEONExT je naprostou náhradou na základní škole za komerční software Cabri. Obdobně jako s Cabri, lze s GEONExTem konstruovat dynamické geometrické objekty. Pomocí dynamického konstruování v programu zvládneme věci, které s běžným papírem, pravítkem, tabulí a křídou dělat nelze. Vytvořené objekty v počítačovém programu na obrazovce můžeme libovolně přesouvat, měnit jejich délku, velikost a různě experimentálně zkoumat a objevovat geometrické zákonitosti.

Jak již bylo zmíněno tak ovládání a možnosti GEONExTu jsou velmi intuitivní a logické stejně jako u programu Cabri. Možnosti a funkce programu se značně projeví, když necháme žáky samostatně experimentovat s námi vytvořenými konstrukcemi nebo s objekty, které si vytvoří sami. GEONExT umožňuje samostatnou i kooperativní výuku matematiky ve třídě.

Zkusme to vysvětlit na konkrétním jednoduchém příkladu jako je konstrukce výšek a těžnic trojúhelníku. Žáci tak mají možnost experimentovat s tím, za jakých podmínek se průsečík výšek bude nacházet uvnitř trojúhelníku, kdy splyne s jedním z vrcholů a kdy bude vně trojúhelníku. Podobnou otázku můžeme vyslovit i v případě těžiště. Pro další konstrukci lze zadat otázku, za jakých okolností splynou těžnice a výšky. Pokud žáci sami objekty pohybují, lépe si uvědomí rozdíly mezi výškou a těžnicí, což by se na tabuli nebo papíře těžko představovalo.

Jako pomůcka k samostatnému objevování vztahů mezi geometrickými objekty napomáhá dynamická geometrie, která je určitě dobrým přínosem pro žáky na druhém stupni základní školy. Program GEONExT je volně šiřitelný, což je výhodou pro snadné nainstalování na školní počítače a žáci si program mohou spustit i doma.

Obrázek 3: Prostředí GEONExTu



8 Shodná zobrazení v rovině

Mezi základní shodná zobrazení v rovině patří identita, středová souměrnost, osová souměrnost, posunutí a otočení.

Věta 1:

Každé shodné zobrazení v rovině je prosté.

Důkaz:

V každém shodném zobrazení v rovině je zachována vzdálenost každých dvou bodů, proto platí, že každým dvěma různým vzorům odpovídají dva různé obrazy. Z toho vyplývá, že se jedná o prosté zobrazení.

Shodné zobrazení je speciálním případem podobného zobrazení s poměrem podobnosti k = 1. Stejně tak je shodné zobrazení zvláštním případem stejnolehlosti s koeficientem k = -1 nebo k = 1, kdy se jedná o identitu. Tuto souvislost si žáci uvědomí až v 9. ročníku, kdy probírají podobnost.

Definice shodného zobrazení v rovině

Shodné zobrazení v rovině se nazývá každé zobrazení v rovině, které má tu vlastnost, že pro libovolné body A, B této roviny a jejich obrazy A', B' platí |AB| = |A'B'|.

(Braniš a kol., 1995, s. 76)

Z uvedeného vztahu $AB \cong A'B'$ plyne, že v každém shodném zobrazení v rovině je zachována vzdálenost každých dvou bodů, to znamená, že pro každé dva body A, B roviny ρ platí: $|AB| = |A'B'|$. Dva útvary v rovině jsou tedy shodné, jestliže je lze přemístit v rovině tak, aby se navzájem kryly.

Samodružný bod je bod, jehož obraz splyne se svým vzorem.

Samodružný útvar je takový útvar, který se v daném zobrazení zobrazí sám na sebe.

Vztahy, které se při daném zobrazení nemění (např. velikosti úseček, velikosti úhlů, smysl obíhání vrcholů trojúhelníka apod.), se nazývají invariantní (tj. neměnné); zkráceně invarianty.

(Lávička, 2002, s. 96)

Základní vlastnosti shodných zobrazení vyjadřují následující věty:

V každém shodném zobrazení platí

a) Obrazem každé úsečky *AB* je úsečka *A´B´*s ní shodná.

b) Obrazem každé polopřímky *AB* je polopřímka *A´B´*; obrazy navzájem opačných polopřímek jsou navzájem opačné polopřímky.

c) Obrazem každé přímky *AB* je přímka *A´B´*; obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.

d) Obrazem každé poloroviny *pA* je polorovina *p´A´*, obrazy navzájem opačných polorovin jsou navzájem opačné poloroviny.

e) Obrazem každého konvexního úhlu *AVB* je konvexní úhel *A´V´B´* s ním shodný.

f) Obrazem každého trojúhelníku *ABC* je trojúhelník *A´B´C´* s ním shodný.

Druhy shodností:

1) Přímé shodnosti
   a) Identita
   b) Posunutí (translace)
   c) Otočení (rotace)
   d) Středová souměrnost
2) Nepřímé shodnosti
   a) Osová souměrnost

8.1 Identita

Definice: Identitou v rovině nazýváme zobrazení, které každému bodu X přiřazuje týž bod X. Zapisujeme X = X´. Značíme *I*.

(Lávička, 2002, s. 97)

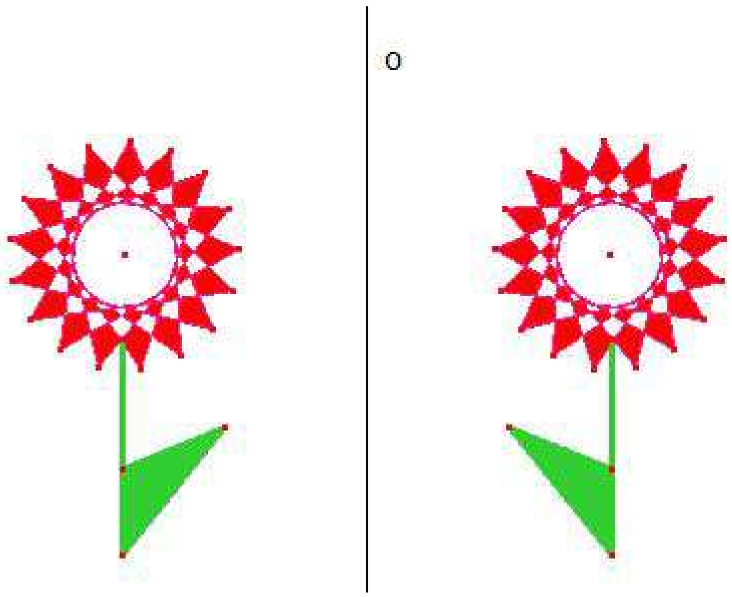
Všechny body a obecně všechny útvary v rovině jsou pak samodružné. Každý vztah je invariantem.

8.2 Osová souměrnost

Definice: Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu A $\in o$, kde o je pevně zvolená přímka, přiřazuje týž bod A a každému bodu X $\notin o$ přiřazuje bod X´ tak, že přímka o je osou úsečky XX´, se nazývá osová souměrnost (souměrnost podle osy). Přímka o se nazývá osa souměrnosti. Značíme $O(o)$ (popř. O_o).

(Lávička, 2002, s. 98)

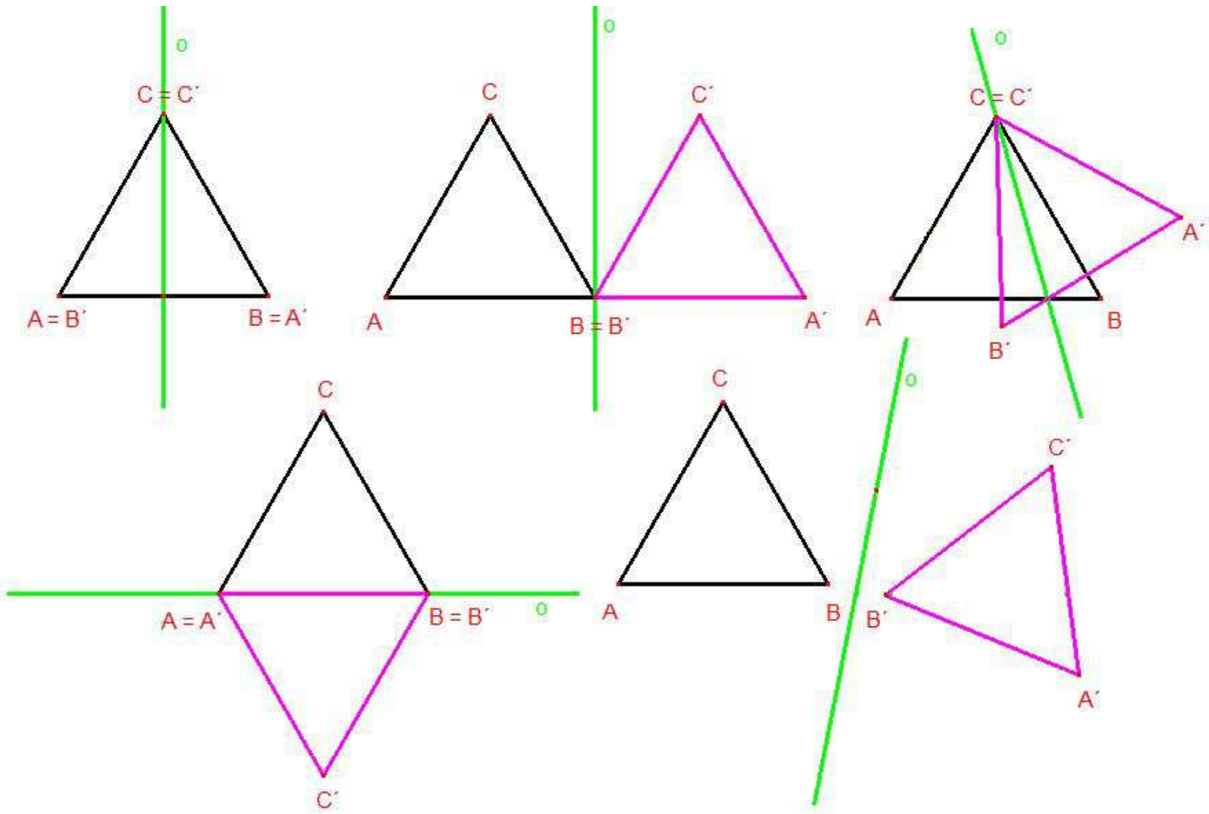
Obrázek 4



Základní vlastnosti osové souměrnosti jsou:

- Bod X a jeho obraz X´ leží na přímce kolmé k ose souměrnosti.
- Obrazem přímky je zase přímka.
- Je-li přímka různoběžná s osou souměrnosti, pak její průsečík s osou je samodružný a náleží také obrazu dané různoběžné přímky.
- Je-li přímka rovnoběžná s osou souměrnosti, pak její obraz je také rovnoběžný s osou souměrnosti.
- Osa souměrnosti je samodružná přímka, je množinou všech samodružných bodů.
- Samodružné přímky jsou také všechny přímky kolmé k ose souměrnosti.

Obrázek 5: Vzor a obraz trojúhelníku ABC v závislosti na poloze osy souměrnosti o.



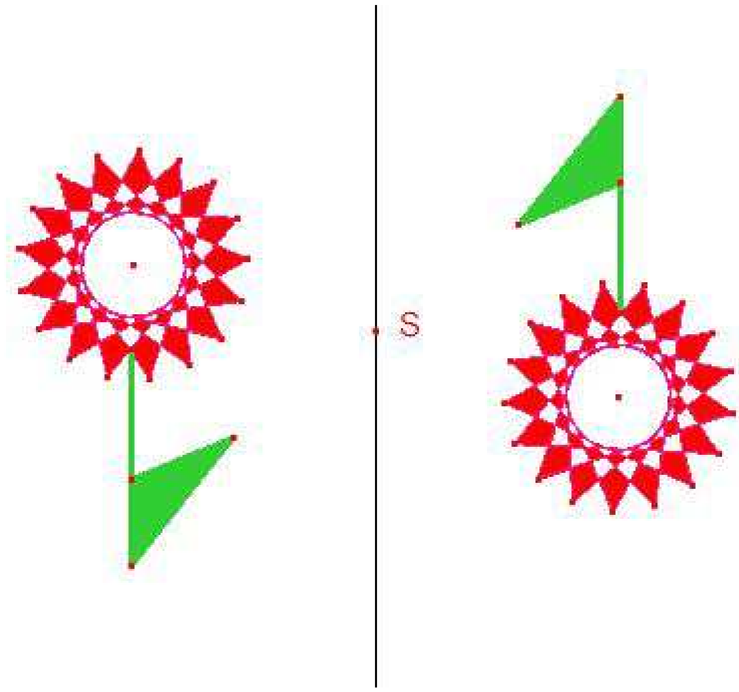
8.3 Středová souměrnost

Definice: Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu S přiřazuje týž bod S a každému bodu X $\neq$ S bod X´ tak, že bod S je středem úsečky XX´, se nazývá středová souměrnost (souměrnost podle středu). Bod S se nazývá střed souměrnosti. Značíme S (S) (popř. S_S).

(Lávička, 2002, s. 99)

Středová souměrnost je určena středem nebo jednou dvojicí odpovídajících si bodů (vzor – obraz).

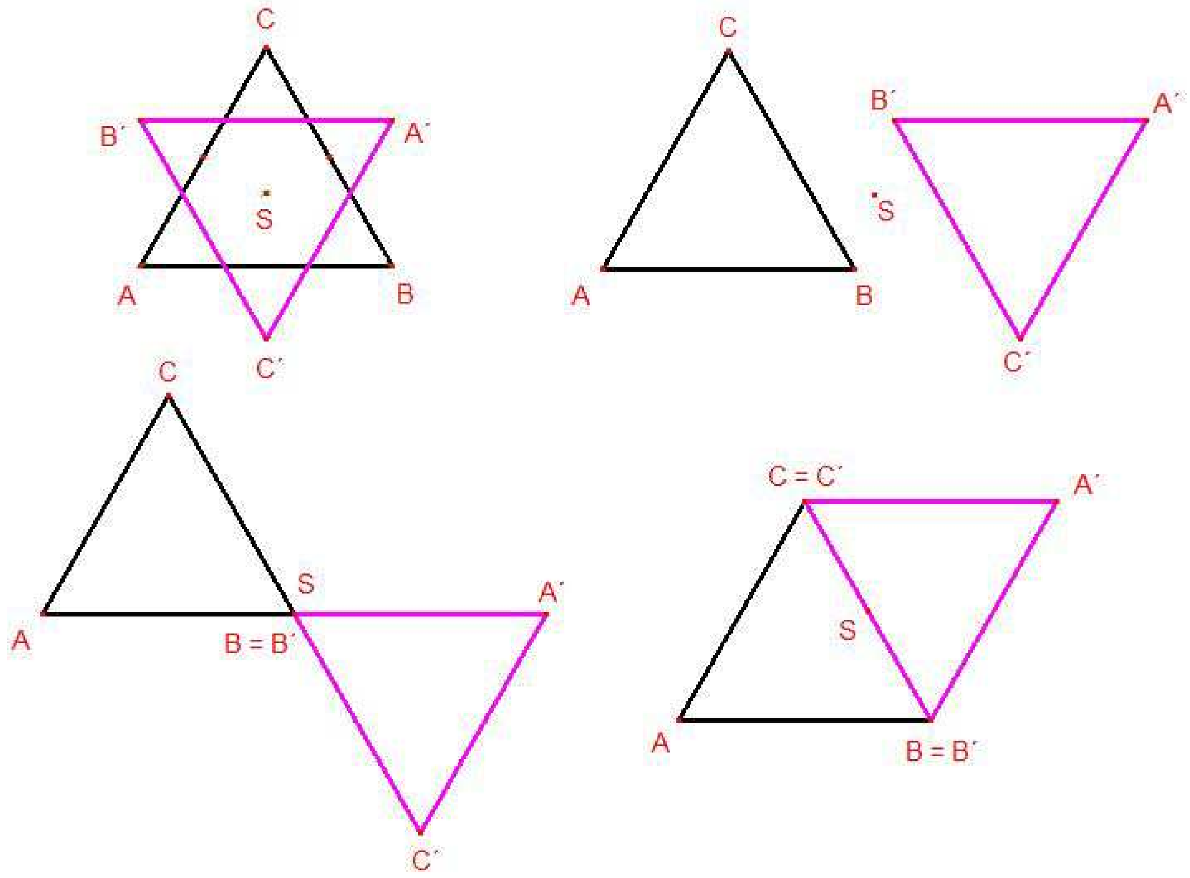
Obrázek 6



Základní vlastnosti středové souměrnosti jsou:

- Odpovídající si body X, X´ leží na přímce procházející středem souměrnosti a mají od něho stejnou vzdálenost.
- Obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.
- Každá přímka procházející středem souměrnosti je samodružná.
- Existuje jediný samodružný bod – střed souměrnosti.

Obrázek 7: Vzor a obraz trojúhelníku ABC v závislosti na poloze středu souměrnosti S.



8.4 Posunutí

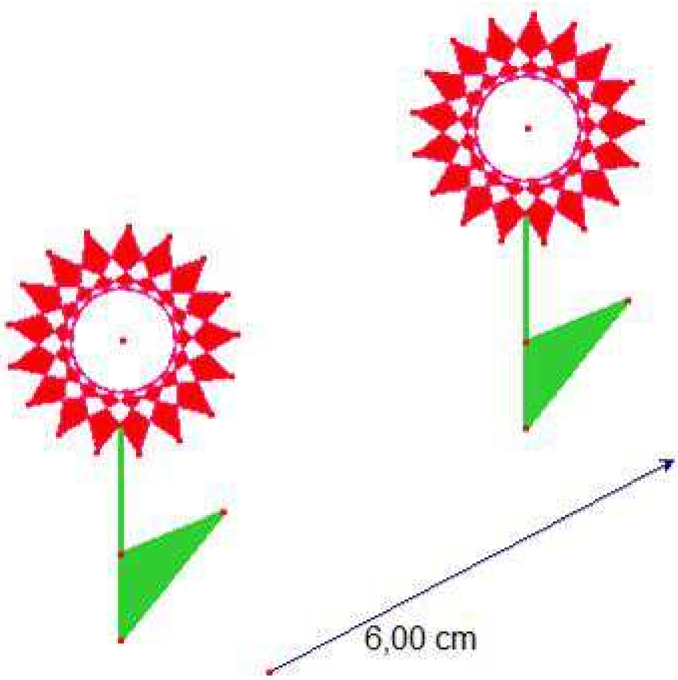
Definice: Geometrické zobrazení v rovině, které každému bodu X přiřazuje bod X´ ≠ X tak, že pro každou další dvojici odpovídajících si bodů Y, Y´ platí, že úsečky XY´ a YX´ mají společný střed, se nazývá posunutí (translace). Směr, který je určen odpovídajícími body XX´ se nazývá směr posunutí, velikost úsečky XX´ velikost posunutí a pořadí bodů X, X´ smysl posunutí. Značíme T (XX´) (popř. T (X → X´) nebo $T_{xx'}$).

(Lávička, 2002, s. 101)

Posunutí je určeno směrem, velikostí a smyslem nebo jednou uspořádanou dvojicí odpovídajících si bodů.

Případ, kdy velikost posunutí je rovna nule, tedy X = X´, je identita.

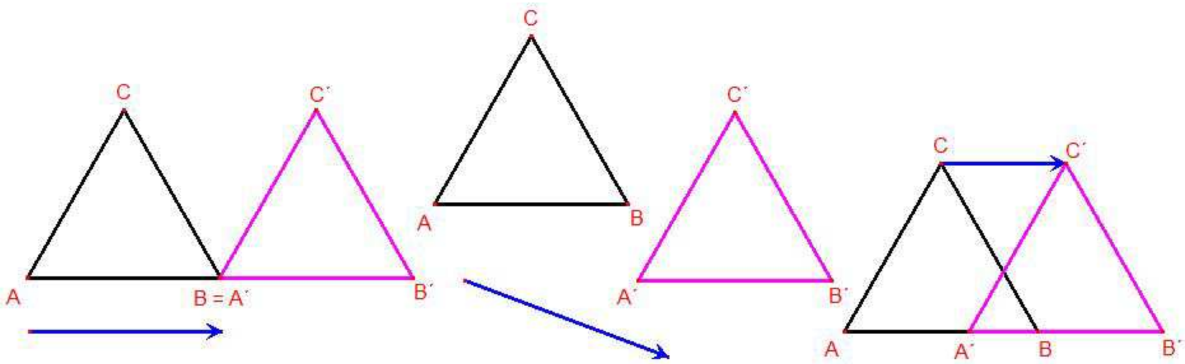
Obrázek 8



Základní vlastnosti posunutí jsou:

- Všechny přímky XX´, YY´, ZZ´,…jsou navzájem rovnoběžné, všechny úsečky XX´, YY´, ZZ´,…jsou navzájem shodné.
- Obrazem přímky, která není rovnoběžná se směrem posunutí, je přímka s ní rovnoběžná.
- Neexistuje žádný samodružný bod.
- Přímky, které jsou rovnoběžné se směrem posunutí, jsou samodružné přímky.

Obrázek 9: Vzor a obraz v závislosti na poloze uspořádané dvojice bodů, která určuje vektor posunutí.



8.5 Otočení

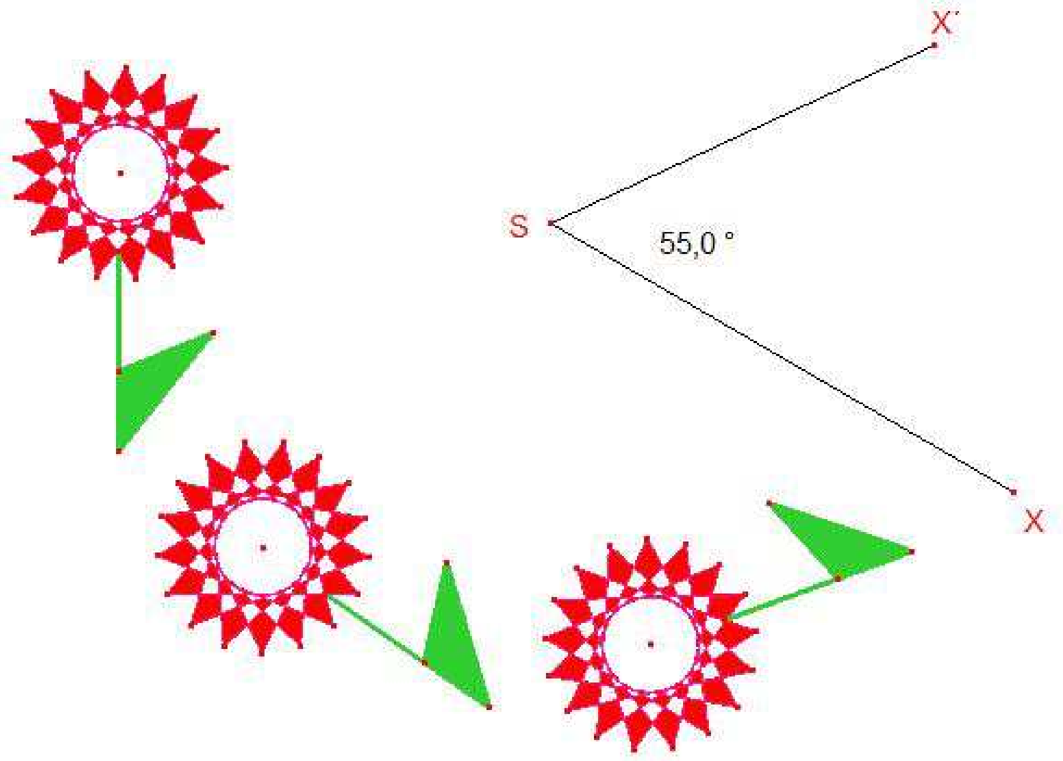
Definice: Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu S přiřazuje týž bod S a každému bodu X $\neq$ S bod X´ tak, že XS $\cong$ X´S a $\angle$X´SX = φ, kde φ je daný orientovaný úhel, se nazývá otočení (rotace) kolem bodu S o orientovaný úhel φ. Bod S se nazývá střed otočení, úhel φ se nazývá úhel otočení a orientace úhlu φ udává smysl otoční. Značíme R (S, φ) (popř. $R_{S,\varphi}$).

(Lávička, 2002, s. 102 – 103)

Otočení je určeno středem otočení S a orientovaným úhlem otočení φ nebo (nikoliv však jednoznačně – jen modulo $2k\pi$) středem S a jednou uspořádanou nesamodružnou dvojicí odpovídajících se bodů X, X´, které leží na téže kružnici se středem S.

Orientovaným úhlem rozumíme uspořádanou dvojici polopřímek VA, VB, které mají společný počátek. Tyto polopřímky nazýváme ramena orientovaného úhlu, polopřímka VA se nazývá počáteční rameno, polopřímka VB rameno koncové. V je vrchol orientovaného úhlu. Takový orientovaný úhel značíme $\widehat{AVB}$, popř. $\widehat{\varphi}$.

Obrázek 10



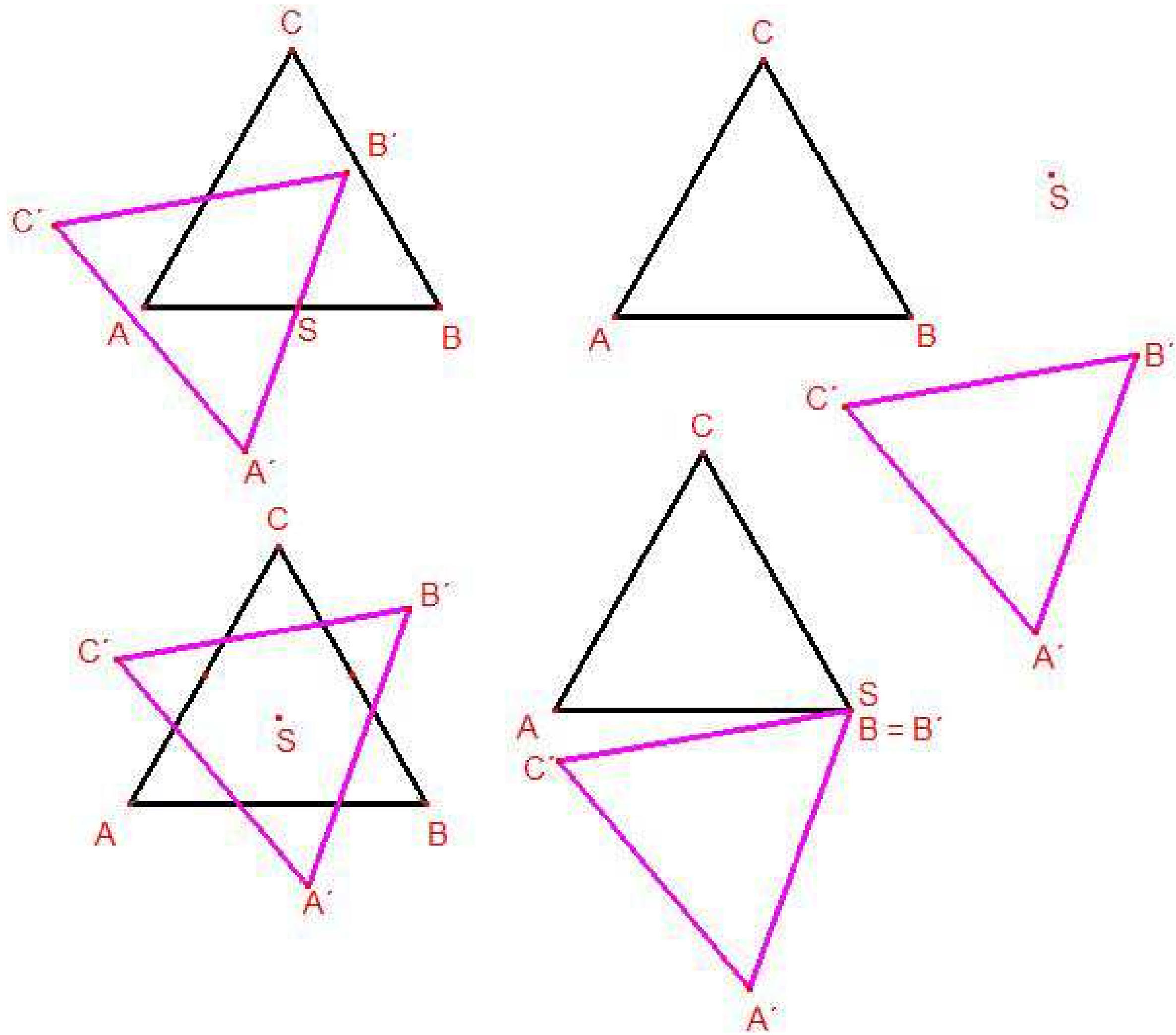
Otočení může být buď v tzv. kladném smyslu (otočení proti směru hodinových ručiček), nebo v záporném smyslu (otočení po směru hodinových ručiček). Při otočení může počáteční rameno orientovaného úhlu provést libovolné množství otáček kolem svého počátku, do doby než splyne s koncovým ramenem orientovaného úhlu. V případě, že φ = 0, mluvíme o nulovém orientovaném úhlu. Jeho počáteční rameno splývá s jeho koncovým ramenem.

Základní vlastnosti otočení jsou:

- Odpovídající si body X $\neq$ S, X´ leží na kružnici se středem S a poloměrem SX, přičemž orientovaný úhel XSX´ je konstantní a rovná se úhlu otočení.
- Obrazem přímky v otočení je přímka, obě jsou stejné vzdálené od středu otočení a svírají úhel rovný úhlu otočení.
- Neidentické otočení ($\varphi \neq 2k\pi$) má jediný samodružný bod, a to střed otočení.
- Samodružné přímky existují pouze v případě $\varphi = k\pi$. Pro k sudé (identita) jsou všechny přímky samodružné; pro k liché (středová souměrnost) jsou samodružné právě všechny přímky procházející středem otočení.

(Lávička, 2002, s. 103)

Obrázek 11: Vzor a obraz trojúhelníku ABC v závislosti na poloze středu otočení S při úhlu otočení α = 70°.



Věty o shodnosti trojúhelníku

- Vypracováno s použitím [2]

Dva trojúhelníky jsou shodné podle věty SSS (Strana, Strana, Strana), když platí: |AB|=|A'B'|, |AC|=|A'C'| a |BC|=|B'C'|. Shodují se ve všech třech stranách.

Dva trojúhelníky jsou shodné podle věty SÚS (Strana, Úhel, Strana), když platí např.: |AB|=|A'B'|, |AC|=|A'C'| a úhel BAC = úhlu B'A'C'. Shodují se ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném.

Dva trojúhelníky jsou shodné podle věty ÚSÚ (Úhel, Strana, Úhel), když platí např.: |AB|=|A'B'|, úhel CAB = úhlu C'A'B' a úhel CBA = úhlu C'B'A'. Shodují se v jedné straně a úhlech přilehlých k této straně.

9 Podobnost a stejnolehlost

9.1 Podobnost

Definice: Podobné zobrazení v rovině je geometrické zobrazení, pro které existuje kladné číslo *k* tak, že pro každé dvě dvojice bodů A, A´ a B, B´ vzoru a obrazu je splněn vztah |A'B'| = |k| · |AB|, kde *k* se nazývá poměr podobnosti.

(Pomykalová, 1999, s. 178)

Základní vlastnosti podobnosti jsou:

- Obrazem přímky AB je přímka A´ B´; obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.
- Obrazem úhlu AVB je úhel A´V´B´, který je shodný s úhlem AVB.
- Obrazem poloroviny *p*A je polorovina *p*´A´; obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny.
- Obrazem polopřímky AB je polopřímka A´B´; obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky.

(Pomykalová, 1999, s. 178)

Věty o podobnosti trojúhelníku

- Vypracováno s použitím [2]

Dva trojúhelníky jsou podobné podle věty SSS (Strana, Strana, Strana), když platí: |AB| = k · |A'B'|, |AC| = k · |A'C'| a |BC| = k · |B'C'|.

Dva trojúhelníky jsou podobné podle věty ÚÚ (Úhel, Úhel), když platí, že úhel BAC je podobný úhlu B'A'C' a úhel ABC je podobný úhlu A'B'C'. Shodují-li se ve dvou úhlech.

Dva trojúhelníky jsou podobné podle věty SÚS (Strana, Úhel, Strana), když platí: |AB| = k · |A'B'|, |AC| = k · |A'C'|, |BC| = k · |B'C'| a úhel BAC je podobný úhlu B'A'C'. Shodují-li se v jednom úhlu a v poměru délek stran ležících na jeho ramenech.

Diskuse o velikosti poměru podobnosti podle *k*:

- |k| = 1 ... podobnost přechází v shodnost
- |k|< 1 ... obraz je menší, jde o zmenšení
- |k| > 1 ... obraz je větší, jde o zvětšení

9.2 Stejnolehlost

Definice: Geometrické zobrazení v rovině, které pevnému bodu S přiřazuje týž bod S a každému bodu $X \neq S$ bod X´ tak, že platí (X´ XS)[1] = κ, kde $\kappa \neq$ 0, 1 je pevně zvolené reálné číslo, se nazývá stejnolehlost (homotetie). Bod S se nazývá střed stejnolehlosti, číslo κ koeficient stejnolehlosti. Značíme H (S, κ) (popř. $H_{S,\kappa}$).

(Lávička, 2002, s. 105)

Stejnolehlost je určena středem S a koeficientem κ nebo středem S a jednou uspořádanou dvojicí odpovídajících si bodů X, X´ (X, X´ $\neq$ S), které leží na přímce procházející bodem S.

Stejnolehlost s koeficientem κ = -1 je středová souměrnost.

[1] Geometrický trojpoměr (*X'XS*), obecně dělící poměr (*ABC*).

Trojpoměrem bodu C přímky AB vzhledem k bodu A, B nazýváme číslo (ABC) definované takto:

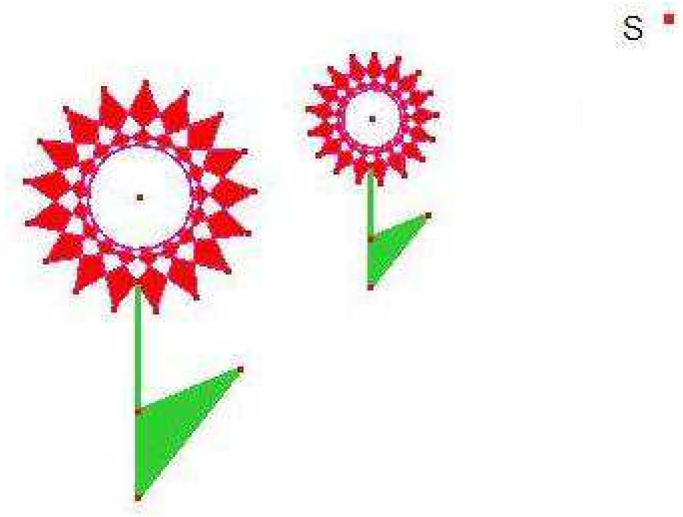
(i) leží-li C na úsečce AB, je (ABC) = $-\frac{|AC|}{|BC|}$

(ii) leží-li C mimo úsečku AB, je (ABC) = $\frac{|AC|}{|BC|}$.

Pro pevná A, B je každému bodu X $\neq$ B na přímce AB přiřazeno číslo (ABX). Naopak, každému reálnému číslu $\lambda \neq 1$ je jednoznačně přiřazen bod X na přímce AB.

Čerpáno z [11].

Obrázek 12

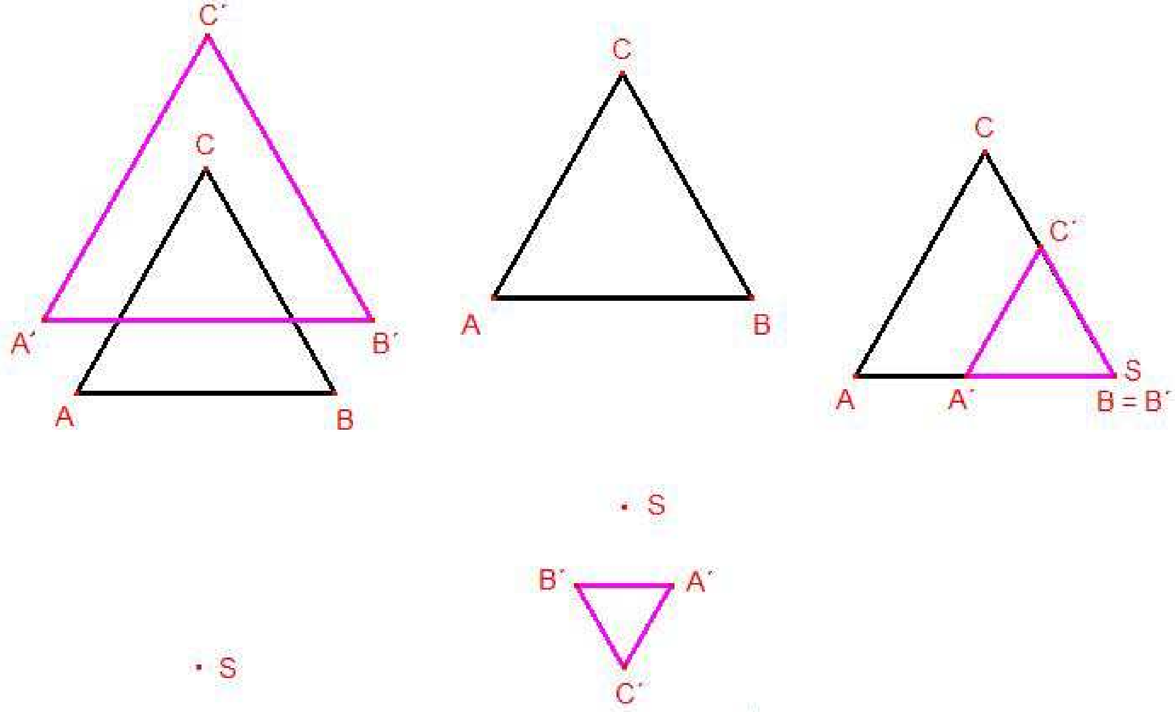


Základní vlastnosti stejnolehlosti jsou:

- Odpovídající si body X, X´ leží na přímce procházející středem stejnolehlosti. Pro jejich vzdálenosti od středu stejnolehlosti S platí |SX´| = $|\kappa| \cdot$ |SX|. Je-li $\kappa > 0$, potom body X, X´ leží na téže polopřímce $\mapsto$ SX; je-li $\kappa < 0$, potom body X, X´ leží na opačných polopřímkách s počátečním bodem S.
- Přímka a její obraz ve stejnolehlosti jsou rovnoběžné.
- Existuje jediný samodružný bod – střed stejnolehlosti.
- Každá přímka procházející středem stejnolehlosti je samodružná; jiné samodružné přímky neexistují.

(Lávička, 2002, s. 105 - 106)

Obrázek 13: Vzor a obraz v závislosti na poloze středu stejnolehlosti a koeficientu stejnolehlosti.



10 Příklady řešených úloh

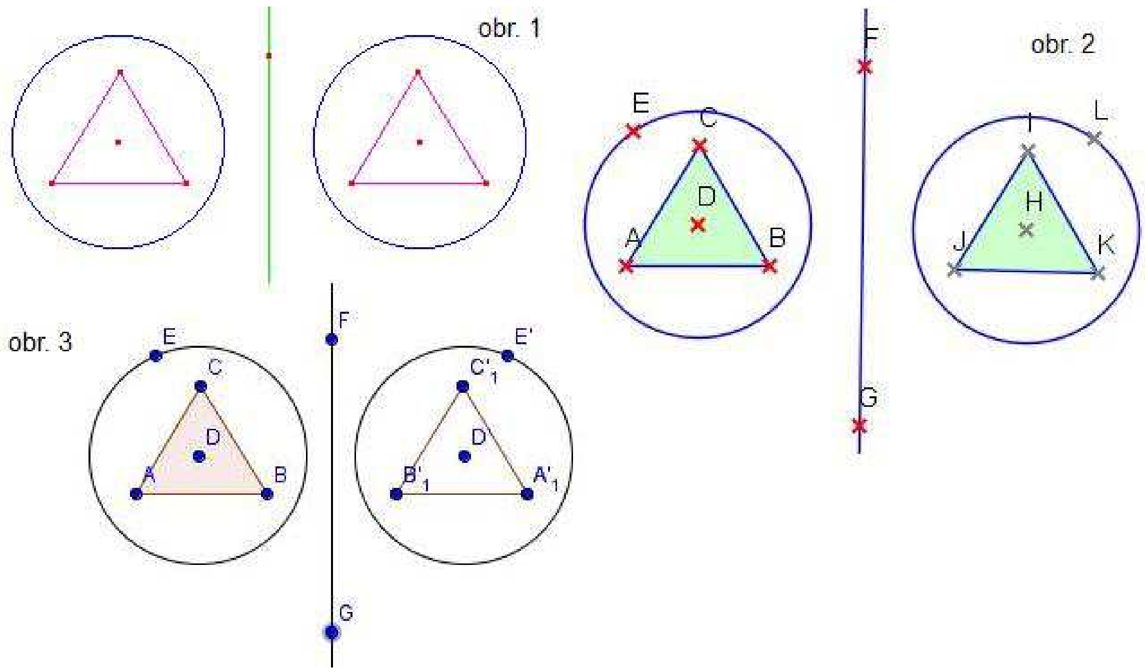
10.1 Příklad 1

Na následujícím příkladu budu demonstrovat řešení jednoduché geometrické úlohy v interaktivních geometrických programech Cabri, GeoGebra a GEONExT. Jako vzor jsem zvolila trojúhelník a kružnici, které jsem postupně zobrazila v osové souměrnosti.

Vytvořené obrázky jsem nijak neupravovala a ani barevně nepozměňovala.

Obrázek 1 vznikl řešením úlohy v programu Cabri, obrázek 2 v GEONExTu a obrázek 3 v GeoGebře.

Obrázek 30



Porovnání výstupů:

Obrázek 1 představuje řešení úlohy v programu Cabri. Samotné sestrojení vzoru libovolného trojúhelníka a kružnice je jednoduché a intuitivní.

V dané úloze považuji za výhodu, že program barevně odlišuje narýsované objekty. Například kružnice je vždy modrá, úsečky, přímky, osy zelené, trojúhelník a mnohoúhelník růžový a body červené. Uživatel si samozřejmě může barevnosti libovolně měnit, zvolit výhodnou tloušťku čáry, případně typ čáry změnit.

Za nevýhodu považuji, že program po sestrojení daného obrazce, u nás trojúhelníka, sám nepojmenovává body (vrcholy). Pojmenování daných geometrických útvarů musíme provést zpětně pomocí nabídky panelu nástrojů.

Při sestrojování obrazu daného vzoru v osové souměrnosti jsem ocenila, že program po zvolení nabídky „osová souměrnost“ se mnou po kliknutí myši na daný objekt komunikoval a vedl mé dílčí kroky ke konečnému obrazu.

Obrázek 2 znázorňuje řešení v programu GEONExT. Sestrojení vzoru trojúhelníka a kružnice obtížné není. Na rozdíl od programu Cabri se na sestrojené kružnici automaticky zobrazil nejen střed ale i bod pro poloměr. Podobně i při konstrukci přímky, kde se zobrazily 2 body.

GEONExT jakýkoli sestrojený bod sám pojmenuje a to od začátku abecedy. Můžeme tedy vysledovat postup konstrukce. Jednotlivé názvy bodů lze měnit, ale nelze s nimi pohybovat. Stává se, že názvy bodů někdy překrývají jiné objekty.

Program GEONExT sám barevně neodlišuje jednotlivé objekty, ale každý bod barevně zvýrazní červeně, přímky, křivky a jejich části zobrazuje modře, mnohoúhelníky vyplní zeleně. Tyto vlastnosti programu GEONExT považuji za užitečné pro názornou výuku žáků, protože vhodně zvolená tloušťka čar a barev útvarů je výrazná a dobře viditelná i ze zadních lavic. Barvy a tloušťky čar se i v programu GEONExT dají libovolně nastavit.

Při sestrojování obrazu v osové souměrnosti program nepřenáší celé útvary ale pouze body, což považuji za nevýhodu ve srovnání s programem Cabri, kde program přenáší celý útvar. V GEONExTu se poté přenesené osově souměrné body musí pomocí nabídky panelu nástrojů ručně spojit, což je nevýhoda i časová.

Úloha na obrázku 3 je vyřešena v programu GeoGebra. Sestrojení trojúhelníka a kružnice je snadné a poměrně stejné ve všech třech programech. Vizuálně se řešení podobá obrázku 2.

Stejně jako v programu GEONExT je kružnice konstruována středem a bodem a přímka dvěma body. Vzor trojúhelníka je automaticky barevně vyplněn.

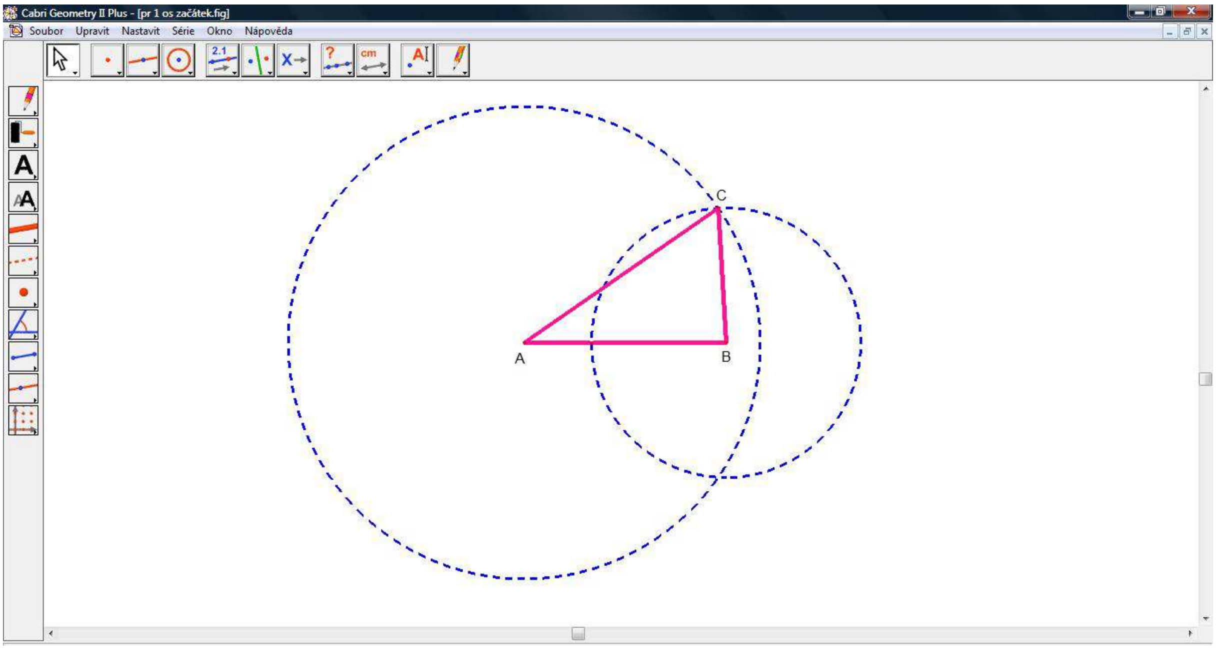
Program sám pojmenovává vzniklé body, ale oproti GEONExTu dokáže poznat, že v osové souměrnosti je obrazem bodu A bod A´.

Při konstrukci obrazu v osové souměrnosti program může vytvořit výsledný obraz buď zobrazením obrazů jednotlivých zadaných bodů, zobrazení jednotlivých úseček nebo po kliknutí do zabarvené plochy daného útvaru celý útvar. V tomto směru nabízí GeoGebra více možností pro práci než Cabri, kde program zobrazuje body nebo celý útvar.

10.2 Příklad 2

Narýsujte trojúhelník ABC, je-li dáno: a = 4 cm, b = 7 cm, c = 6 cm. Sestrojte obraz trojúhelníku ABC v osové souměrnosti O (o), kde osou o je přímka AC. Sjednocení obou trojúhelníků je čtyřúhelník ABCD, kterému se říká deltoid.

Obrázek 14

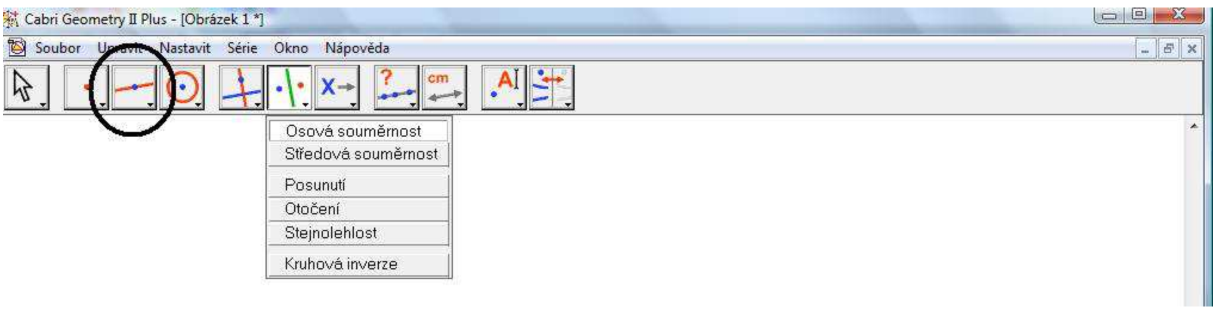


Řešení:

Tento příklad na osovou souměrnost jsem řešila v programu Cabri. Nejprve si připomeneme pravidla pro konstrukci trojúhelníka ABC:

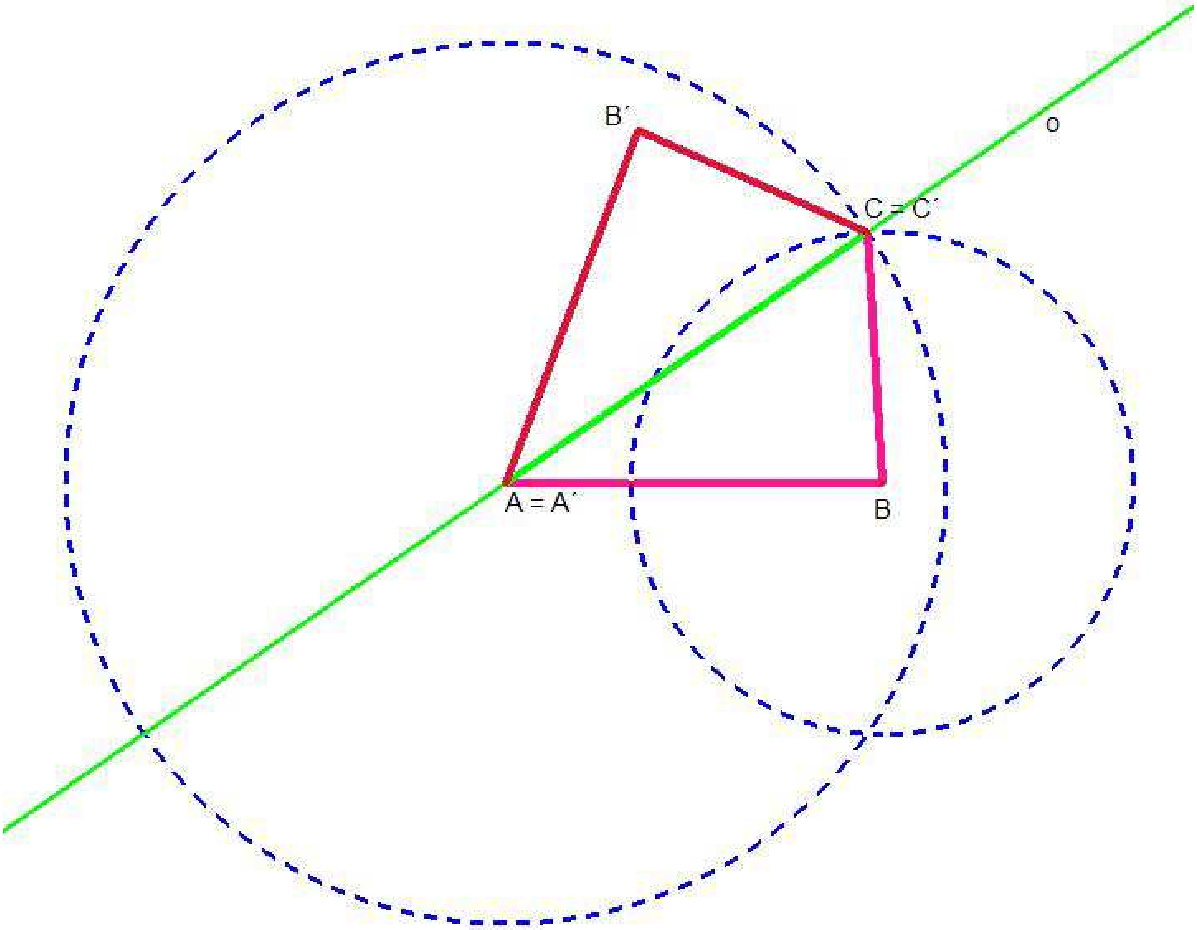
- trojúhelník sestrojíme podle věty SSS – konstrukce strany AB, |AB| = 6 cm, bod C sestrojíme jako průnik kružnic o středu A, B a poloměru 7 cm, 4 cm.

Obrázek 15



Poté sestrojíme obraz k trojúhelníku ABC tak, že v panelu nástrojů vybereme nástroj přímka a povedeme ji body AC. Následně vybereme nástroj osová souměrnost a vytvoříme obraz podle zvolené osy o.

Obrázek 16

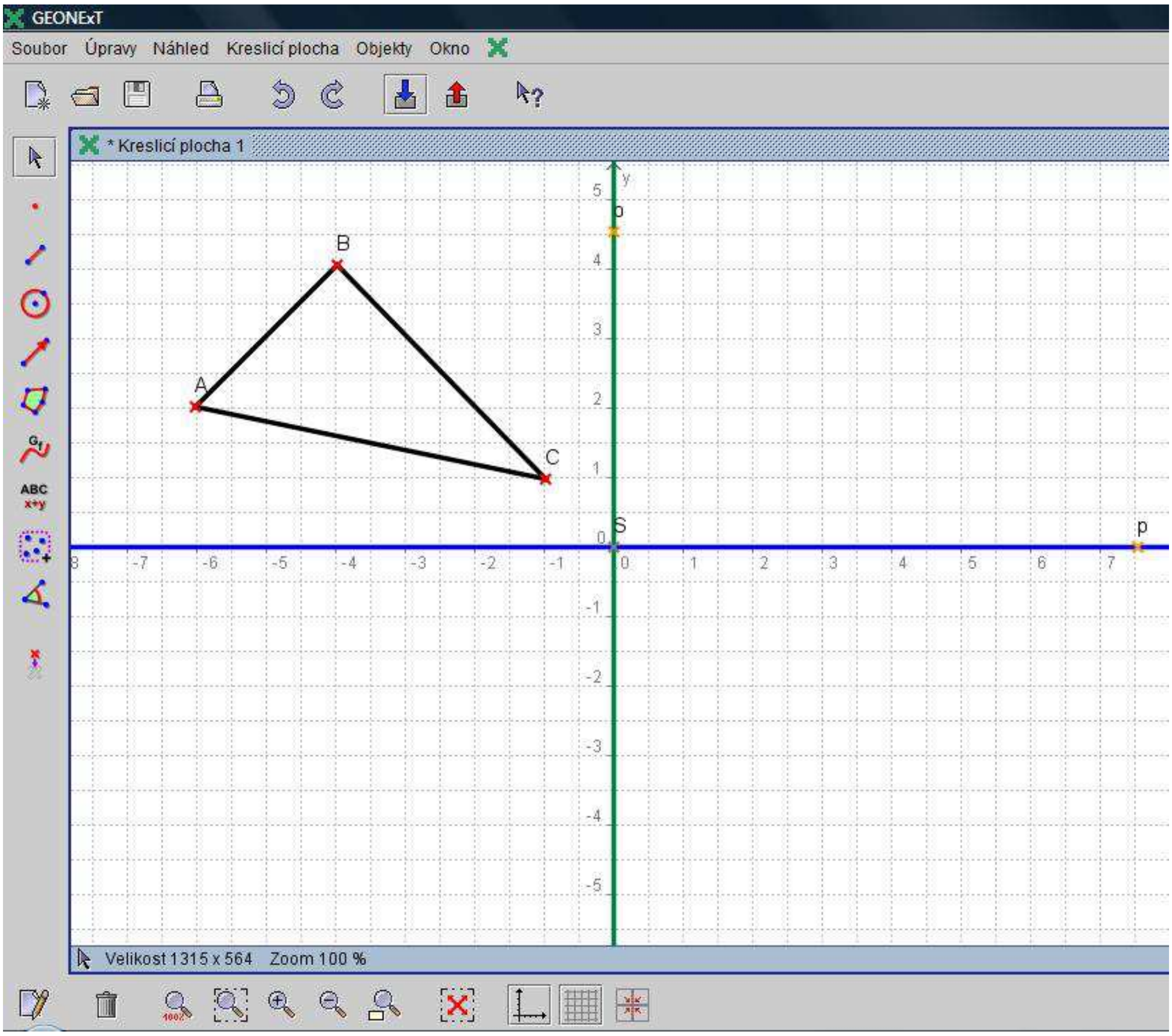


10.3 Příklad 3

Sestrojte trojúhelník ABC dle zadaných souřadnic: bod A = [-6; 2], B = [-4; 4], C = [-1; 1]. Potom sestrojte:

a) jeho obraz v osové souměrnosti O (o), kde osa o je totožná s osou y a vzniklý trojúhelník pojmenujte EFG,
b) obraz trojúhelníka EFG v osové souměrnosti O (p), kde osa p je totožná s osou x, který označte HIJ,
c) obraz trojúhelníka EFG ve středové souměrnosti S (S = O), který označte KLM.

Obrázek 17



Řešení:

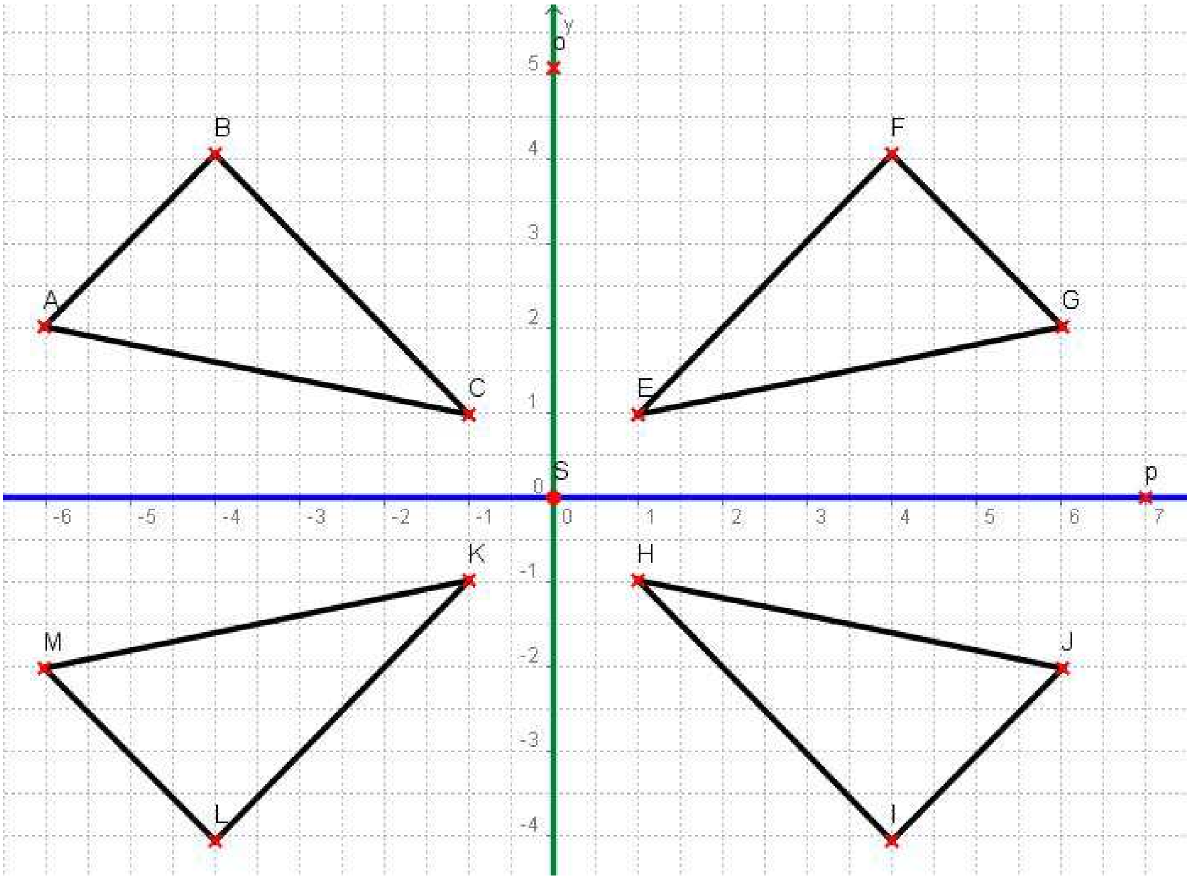
Příklad jsem vypracovávala v programu GEONExT. Body A, B, C jsou dány souřadnicemi, proto jsem si jako kreslící plochu zvolila mřížku společně se souřadnicovou soustavou. Dle zadaných souřadnic bodů A, B, C jsem sestrojila trojúhelník ABC. Nástroj osová souměrnost „přenáší“, zobrazuje pouze body, z kterých jsem zhotovila trojúhelník EFG, který je osově souměrný s trojúhelníkem ABC podle osy o.

Při zhotovení trojúhelníku HIJ jsem postupovala obdobně.

Trojúhelník KLM jsem ve středové souměrnosti sestrojila obdobně jako v předchozích příkladech, ale použila jsem nástroj pro středovou souměrnost.

Na výsledném obrázku vznikly dvojice trojúhelníků souměrné středově (osově).

Obrázek 18



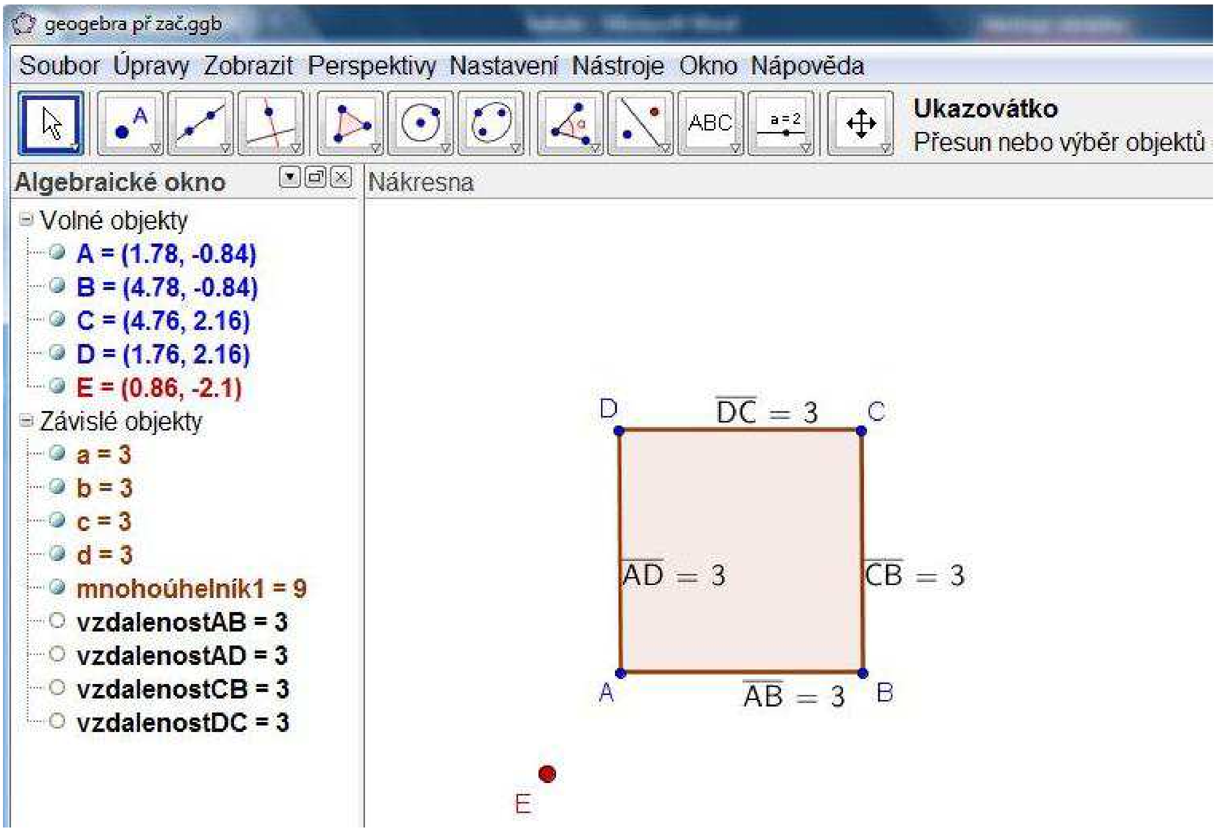
10.4 Příklad 4

Narýsujte čtverec ABCD, kde a = 3 cm. Otočte tento čtverec kolem libovolně zvoleného bodu E.

a) o 45° ve směru pohybu hodinových ručiček, tj. v záporném smyslu,

b) o 65° proti směru pohybu hodinových ručiček, tj. v kladném smyslu.

Obrázek 19

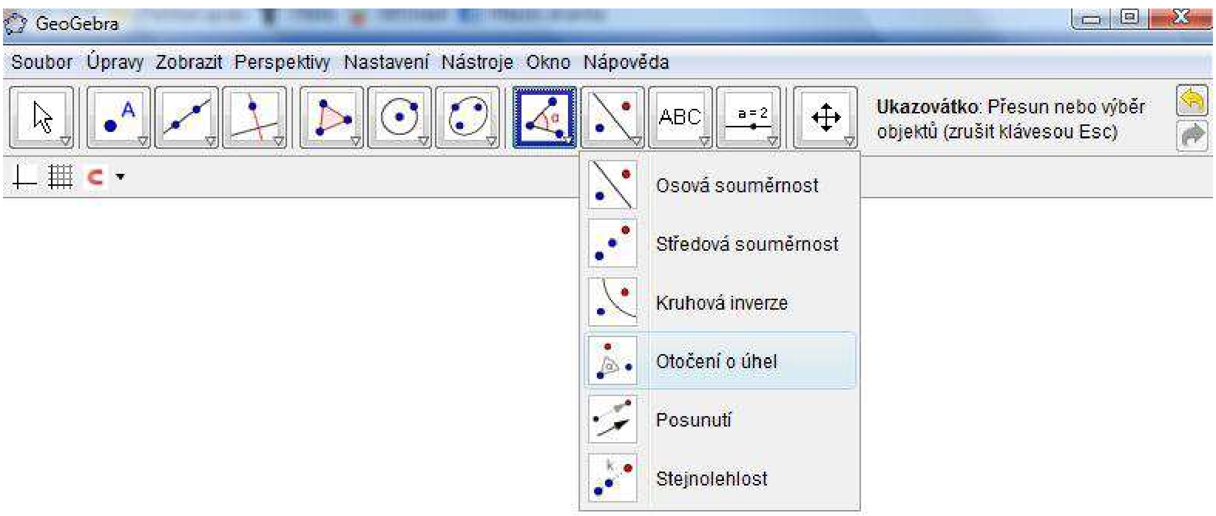


Řešení:

Příklad jsem řešila v programu GeoGebra. Připravila jsem si zadaný čtverec ABCD a zvolila střed otočení E. V průběhu rýsování se v algebraickém okně zaznamenávají jednotlivé zkonstruované objekty.

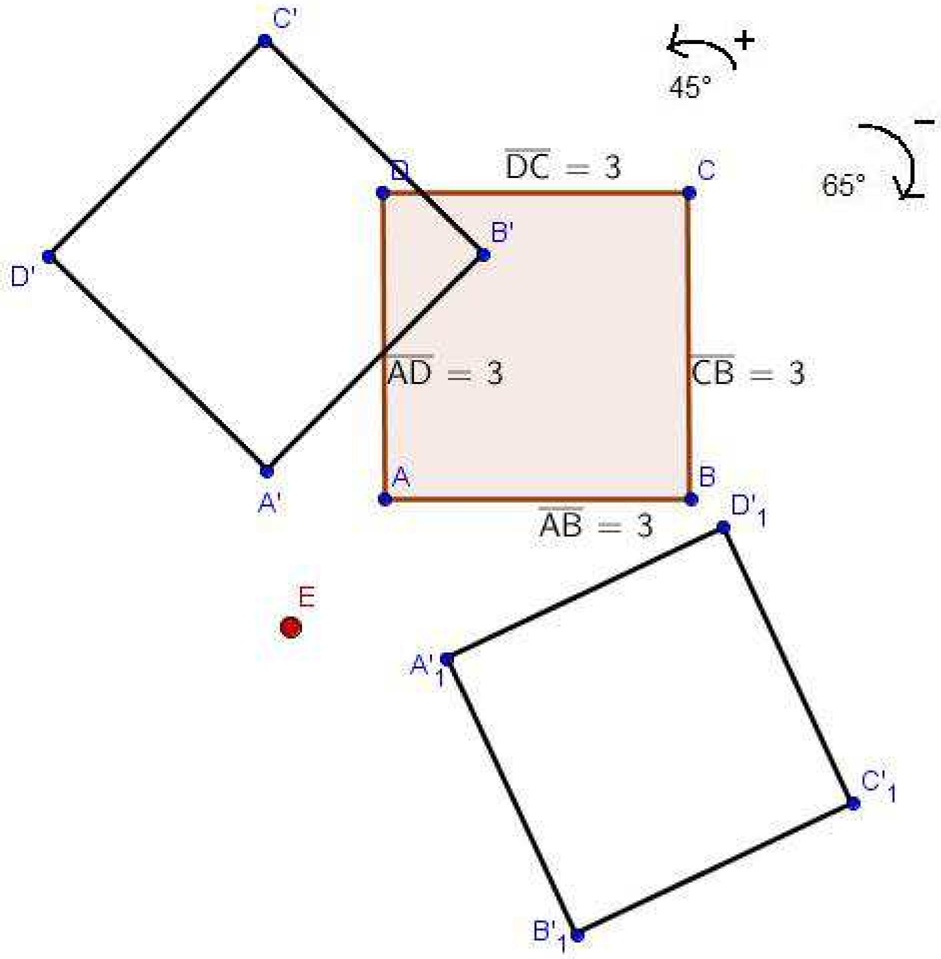
V následujícím obrázku je vidět postup řešení úlohy.

Obrázek 20



Čtverec A´B´C´D´ jsem sestrojila z původního čtverce ABCD s využitím nástroje otočení jednotlivých úseček kolem bodu E o úhel + 45° (proti směru hodinových ručiček). Čtverec A_1´B_1´C_1´D_1´ vznikl z původního čtverce ABCD otočením kolem bodu E o úhel - 65° (po směru hodinových ručiček) obdobným postupem.

Obrázek 21



10.5 Příklad 5

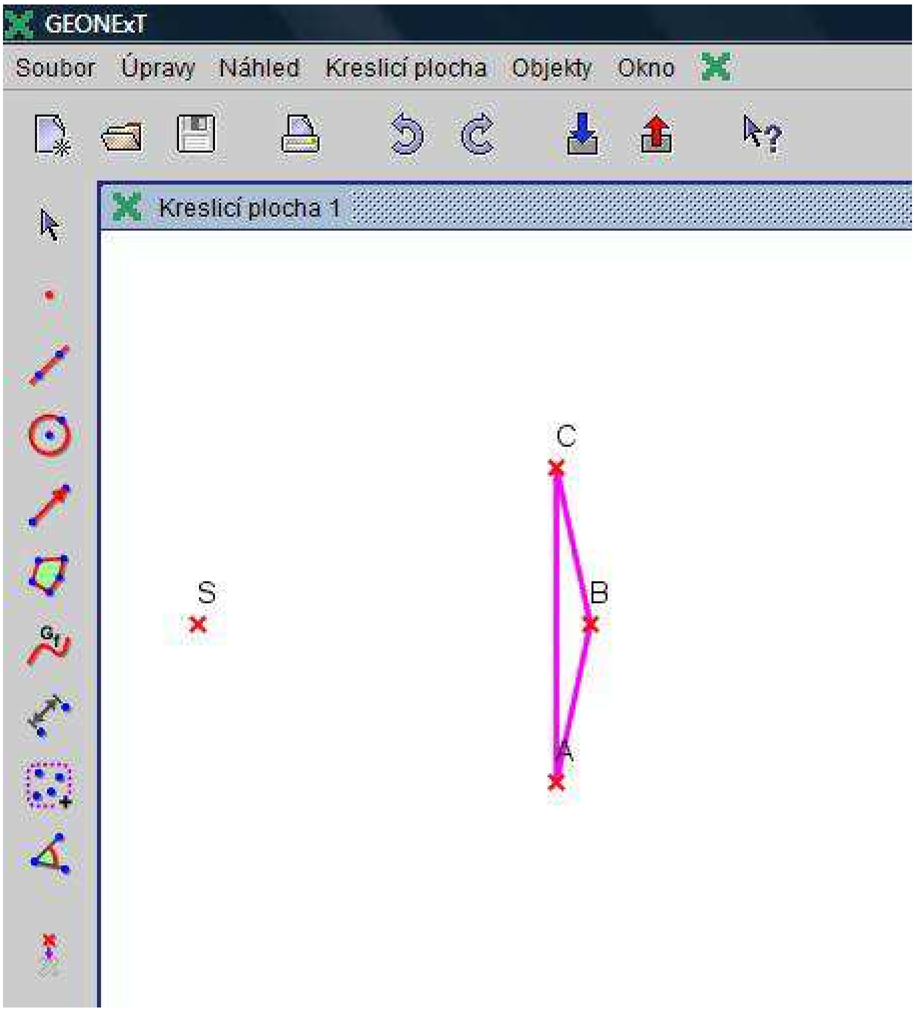
Sestrojte:

a) obraz trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti H (S, κ = 2) a označte jej EFD

b) obraz trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti H (S, κ = -1) a označte jej A´B´C´

Co platí pro dvojici trojúhelníků ABC a A´B´C´ ?

Obrázek 22



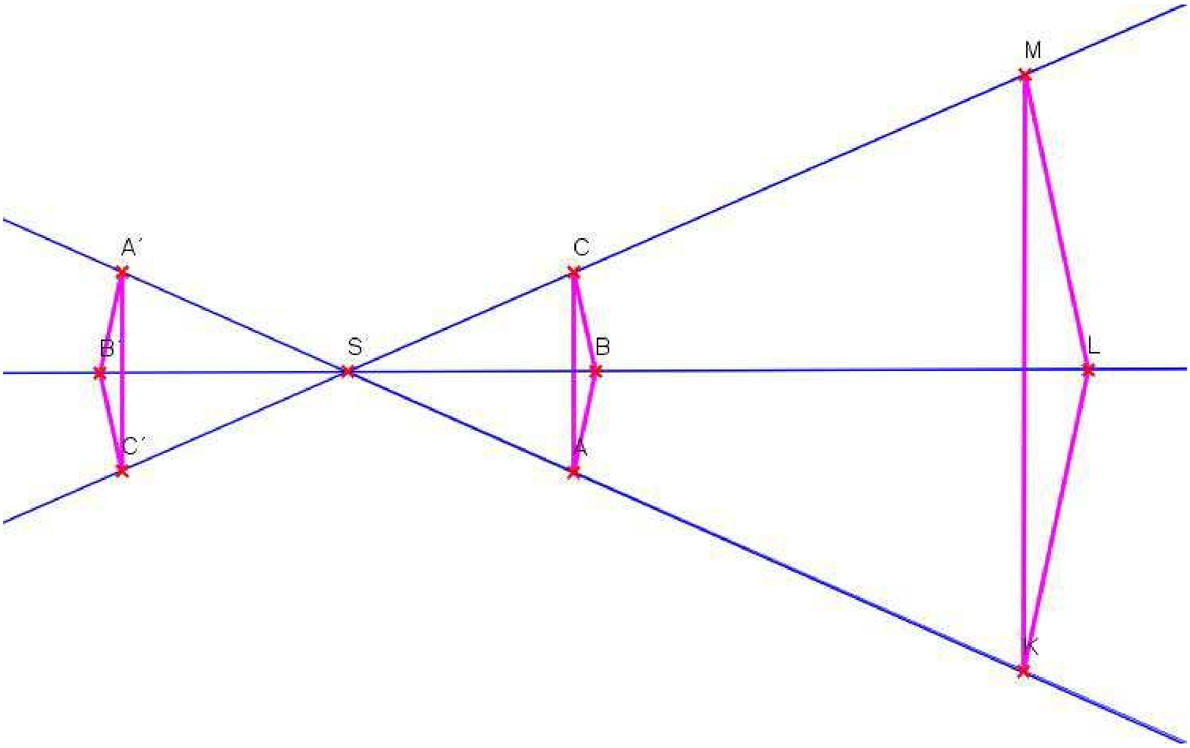
Řešení:

Příklad je vypracován v programu GEONExT. Do zadané situace jsem sestrojila polopřímky SA, SB a SC. Obrazem bodu A v dané stejnolehlosti je bod K, pro který platí |SK| = 2 |SA|, obrazem bodu B je bod L, pro který platí |SL| = 2 |SB|, obrazem bodu C je bod M, pro který platí |SM| = 2 |SC|. Výsledný trojúhelník KLM je stejnolehlý s trojúhelníkem ABC ve stejnolehlosti H (S, κ = 2).

V zadané situaci jsem sestrojila opačné polopřímky SA, SB a SC. Obrazem bodu A v dané stejnolehlosti je bod A´, který leží na opačné polopřímce SA a platí pro něj |SA´| = |SA|, obrazem bodu B je bod B´, který leží na opačné polopřímce SB a platí pro něj |SB´| = |SB|, obrazem bodu C je bod C´ který leží na opačné polopřímce SC a platí pro něj |SC´| = |SC|. Výsledný trojúhelník A´B´C´ je stejnolehlý s trojúhelníkem ABC ve stejnolehlosti H (S, κ = -1).

Trojúhelník A´B´C´je současně obrazem trojúhelníka ABC ve středové souměrnosti S (S).

Obrázek 23



10.6 Příklad 6

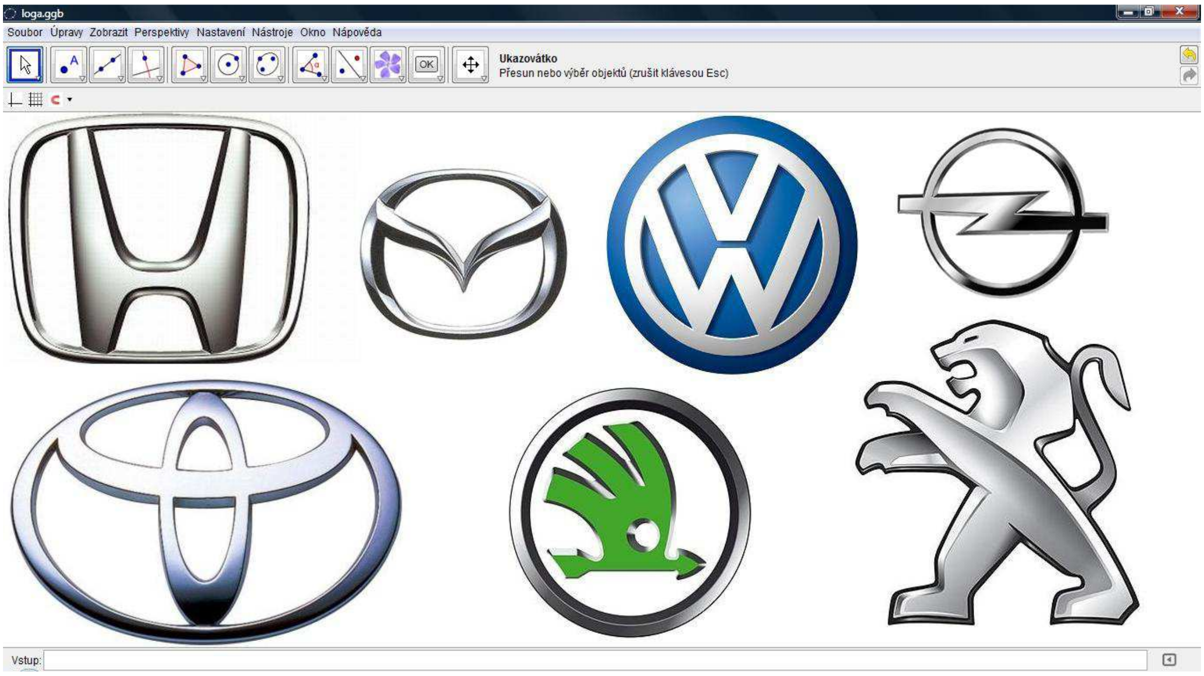
Na obrázku vidíte loga automobilek Honda, Mazda, Volkswagen, Opel, Toyota, Škoda a Peugeot.

a) Určete, která loga jsou osově souměrná a pokuste se správně umístit osu souměrnosti *o*.

b) Jsou na obrázku i jiná shodná zobrazení? Jestli ano, najděte je a správně popište.

Obrázek 24

- Loga automobilek převzaty z [16], [17], [18], [19], [20], [21], [22]

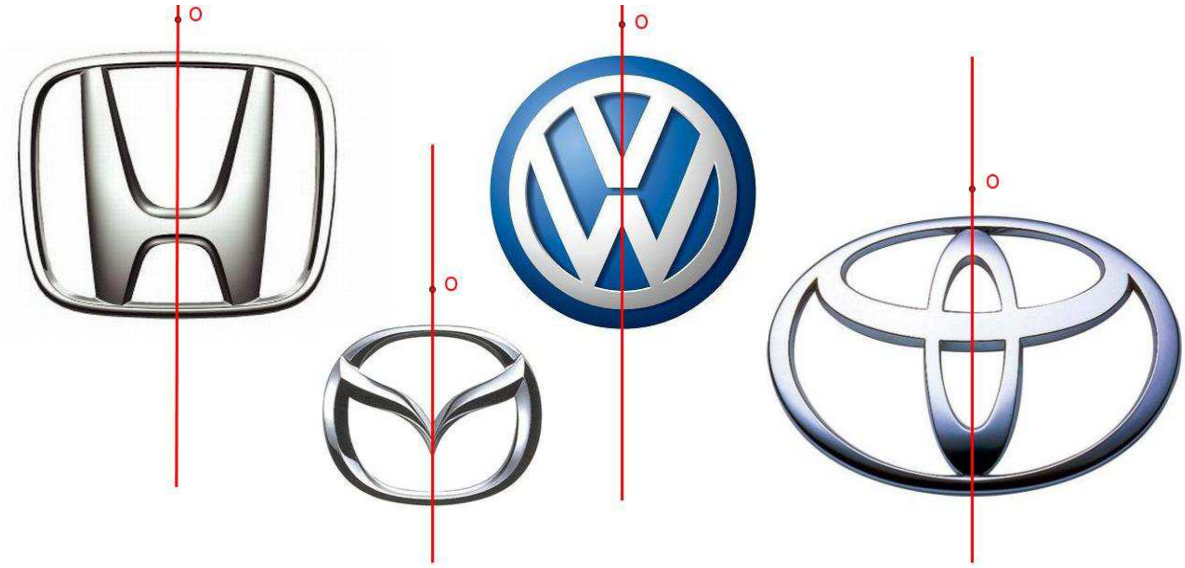


Řešení:

Pro řešení tohoto příkladu jsem si záměrně vybrala program GeoGebra, který umožňuje vkládání obrázků či dokonce fotek.

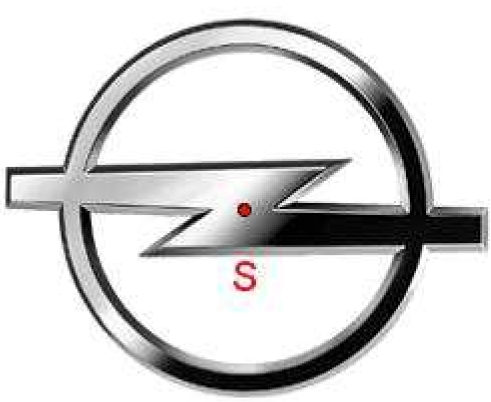
a) Osově souměrné podle osy souměrnosti *o* jsou loga automobilek Honda, Mazda, Volkswagen a Toyota. Osu souměrnosti jsme umístili takto:

Obrázek 25



b) Logo automobilky Opel osově souměrné není. Pokud si vhodně zvolíme bod S, tak obrázek je podle tohoto bodu středově souměrný. (Černé zabarvení loga je způsobené špatnou volbou obrázku).

Obrázek 26



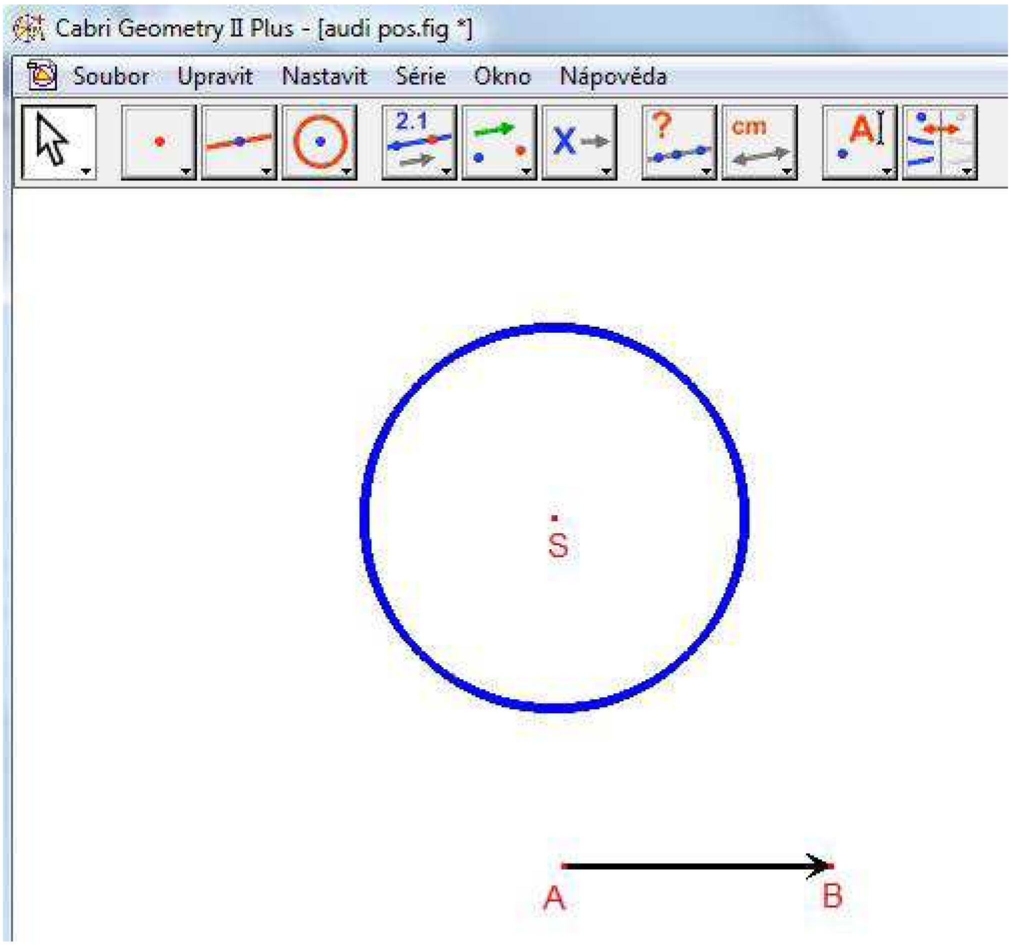
10.7 Příklad 7

Je dána kružnice k (S, r = 2, 5 cm) a vektor posunutí AB (viz obrázek 28).

a) Sestrojte obraz kružnice k´ (S´, r = 2, 5 cm) v posunutí T (AB).
b) Sestrojte obrazy průsečíků kružnic k, k´ ve středové souměrnosti dané bodem S´ a veďte jimi přímku o.
c) Sestrojte obraz vzniklého objektu v osové souměrnosti podle osy o.

d) Určete, které automobilce vzniklé logo patří.

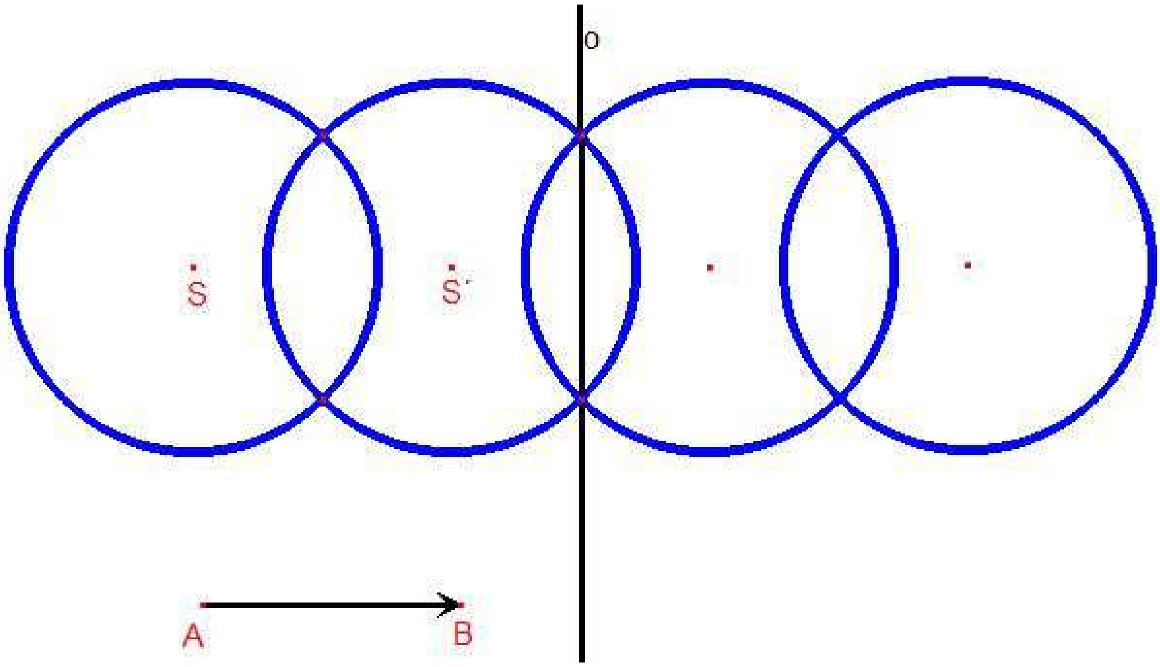
Obrázek 28



Řešení:

a) Tento příklad vypracuji v programu Cabri. Vyberu myší z nabídky panelu nástrojů posunutí, poté kliknu na kružnici k a vektor posunutí. Vznikne obraz kružnice k´ se středem S´.
b) Pomocí nástroje středová souměrnost kliknu na průsečíky kružnic, poté na bod S´. Vzniklé body jsou obrazy průsečíků kružnic ve středové souměrnosti, kterými pomocí panelu nástrojů přímka sestrojím osu o.
c) Z nabídky panelu nástrojů vyberu funkci osová souměrnost. Podle osy o nejprve zobrazím kružnici se středem S´ a poté kružnici se středem S.
d) Vzniklé logo patří automobilce Audi.

Obrázek 29



11 Výhody a nevýhody vybraných programů

Příklady z učiva matematiky základní školy s tématikou shodných a podobných zobrazení jsem řešila s využitím interaktivních geometrických programů Cabri, GeoGebra a GEONExT.

11.1 Interaktivní program Cabri

Výhody:

- První výhodou je české prostředí programu Cabri, včetně webové podpory, což je velkou výhodou pro snadné zorientování a naučení v programu.
- Další výhodou je srozumitelný a přehledný popis funkcí v menu a panelech nástrojů.
- Výhodou programu Cabri je kvalitní práce s množinami bodů a rychlost.
- Cabri měří délky, úhly a obsahy, tyto hodnoty umí dosadit do vzorců a výsledek zanést zpět do konstrukce, lze sestrojit i pohyblivé obrázky - jízdní kolo, automobil s otáčejícími koly, atd.
- Program Cabri má propracovanou práci s čísly, měření délek a úhlů a vepisování výrazů do obrázku.
- Obsahuje nástroje pohybu, umožňující manipulaci s hotovou konstrukcí.
- Umožňuje, aby v jedné konstrukci byly jakékoliv dva objekty stejně pojmenovány. (Při řešení některých typů příkladů to výhoda jistě je, ale pokud jde o složitou úlohu s velkým množstvím objektů, bylo by lepší se tomu kvůli přehlednosti vyhnout).
- U Cabri je kvůli rozšířenosti programu dostupné velké množství příkladů i webových appletů v Javě, například na Cabri portálu http://www.pf.jcu.cz/cabri/.

Nevýhody:

- Program nezobrazuje nápovědu k dílčím nástrojům.
- Jedná se o placený software. Na internetu je k dispozici demoverze, kterou si uživatel může bezplatně stáhnout a vyzkoušet, avšak tu je možné spustit jen na 15 minut, poté se bez varování vypne; další nevýhodou je, že konstrukce nelze ukládat a některé funkce v této verzi nejsou přítomny.
- Nelze použít k označování objektů písmena s indexy ani písmena řecké abecedy; indexy jsou tak psány stejným fontem jako ostatní označení a řecká písmena, například pro názvy úhlů, jsou vypisována slovně.

- Nelze definovat objekty pomocí analytického zápisu.

11.2 Interaktivní program GEONExT

Výhody:

- První výhodou je české prostředí programu GEONExT, což je velkou výhodou pro snadné zorientování a naučení v programu.
- Velkou výhodou tohoto programu je jeho dostupnost, na internetu je k dispozici zcela zdarma.
- Další výhodou je srozumitelný a přehledný popis funkcí v menu, zdá se mi dokonce přehlednější díky většímu počtu vhodně rozmístěných tlačítek oproti programu Cabri.
- výhodou je možnost zobrazení souřadných os a pomocné mřížky a přehledné zobrazení postupu konstrukce.
- Program GEONExT sice tak podrobnou práci s množinami nenabízí, má ale na rozdíl od programu Cabri možnost práce se skupinami objektů.
- Při práci s nakreslenými objekty oceňuji zvýraznění objektu při najetí myší a zobrazení jeho popisu ve spodním pruhu pracovní plochy
- Program GOENExT má propracovanou práci s čísly, měření délek a úhlů a vepisování výrazů do obrázku.
- Velmi kvalitně je provedeno zadávání vlastností objektu (barva, tloušťka čáry apod.).
- propojení s dalšími oblastmi matematiky (grafy), podpora tvorby webovských metodických materiálů a úloh.

Nevýhody:

- Chybí nápověda k jednotlivým nástrojům.
- Schází algebraické okno.
- Přímá nápověda je v angličtině.
- V osové a středové souměrnosti lze zobrazit pouze body, nikoliv složitější geometrické konstrukce.
- Nelze předdefinovávat vázané objekty.
- Chybí rotace, kruhová inverze, výpočet plochy, konstrukce pravidelného mnohoúhelníka a další funkce, které usnadňují konstrukci.

- Parabolu, hyperbolu a jiné kuželosečky lze tvořit jen zadáním rovnice.
- Názvy objektů nelze přesouvat, tím se konstrukce stává méně přehlednou.
- Složitější ovládání výpočtů.

Zajímavé je srovnání výstupních formátů obou programů. Cabri ukládá rysy v podobě textových souborů, jejichž obsah může být analyzován pouhým čtením. Pomocí kopírování a přenesení do jiné aplikace je možné obrázek uložit ve vektorové i rastrové podobě. Prostřednictvím externího programu CabriJava lze z hotové konstrukce vytvořit applet použitelný na internetu. GEONExT kopírování nenabízí, má však vestavěnou možnost exportu a to jednak do internetové stránky s appletem, do rastrového souboru a také do souboru ve formátu SVG.

Čerpáno z [14]

11.3 Interaktivní program GeoGebra

Výhody:

- Hlavní výhoda spočívá v dostupnosti programu, je zdarma a dostupný komukoliv.
- Výhodou je interaktivní propojení geometrické, algebraické i numerické reprezentace.
- GeoGebra umožňuje vstupovat do zadání rovnic a bodů a měnit je.
- V programu je možné si zvolit české menu.
- Program má kvalitní nápovědu v češtině, ale pouze pro verzi 3.2. Pro verzi 4.0. je dostupná pouze nápověda anglická.
- Pokud se zmýlíte v syntaxi, automatická nápověda vás vždy v rámci chybového hlášení usměrní.
- Velkou přednost programu spatřuji v popisu geometrických objektů. Lze nastavit automatický popis, či jiný režim z hlavního menu - Nastavení/Popisovat. Pokud je nastaven automatický popis, jsou objekty popisovány běžným, standardním způsobem. Samozřejmě můžeme popis editovat, pokud máme vlastní požadavky.
- Další z výčtu výhod je, že veškeré možnosti nastavení nákresny vyvoláme pomocí pravého tlačítka myši a není třeba je hledat v panelu nástrojů.

Nevýhody:

- GeoGebra neumožňuje, aby v jedné konstrukci byly jakékoliv dva objekty pojmenovány stejně.

12 Závěr

Ve své bakalářské práci jsem se zabývala možnostmi práce se shodnými a podobnými zobrazeními ve vybraných interaktivních geometrických programech. Cílem této práce bylo popsat výhody a nevýhody v interaktivně geometrických programech. Porovnávala jsem programy Cabri, GeoGebra a GEONExT. Všechny programy jsou intuitivní a poměrně snadno ovladatelné a to hlavně díky českému jazyku a přehlednému prostředí.

V první teoretické části jsem programy stručně popsala a představila jejich geometrické prostředí. V druhé teoretické části jsem uvedla shodná a podobná zobrazení, jejich názorné ukázky jsem vypracovávala v programu Cabri. Cabri jsem si vybrala pro jeho sympatičnost, jednoduchost a barevnost. Program nepopisuje automaticky geometrické obrazce, takže žáky neodradí hned z počátku matematickou problematikou. Nápadité obrázky vytvořené z jednoduchých geometrických obrazců žáka více zaujmou a motivují. Ve třetí, praktické části, jsem se věnovala řešení jednoduchých úloh z učiva matematiky základní školy zaměřených na shodná a podobná zobrazení. Pro názorné srovnání jsem jednu úlohu vyřešila ve všech zadaných interaktivních geometrických programech. Uvedla jsem výhody a nevýhody jednotlivých programů. Pro řešení dalších úloh jsem si vybírala vždy jiný interaktivní program.

Ve všech třech sledovaných programech se mi pracovalo dobře. Jejich funkce byly dostačující pro vyřešení všech příkladů řešených v mé práci. Všechny umožňují rychlé a snadné sestrojení geometrických útvarů, jejich barevnou výplň a ohraničení. Programy Cabri a GeoGebra mají v nabídce panelu nástrojů všechny shodnosti a podobnosti probírané na základní škole ve srovnání s GEONExTem, který přímo v panelu nástrojů nabízí pouze osovou a středovou souměrnost.

Seznámení s geometrickými programy bylo pro mě velmi přínosné a určitě ve své učitelské praxi je budu využívat.

13 Seznam obrázků

[16] Google.com. Logo automobilky Honda [online]. [cit. 2012-04-010]. Dostupné z WWW: http://expresslane.idrivesafely.com/wp-content/uploads/2012/03/honda.jpg>.

[17] Google.com. Logo automobilky Mazda [online]. [cit. 2012-04-010]. Dostupné z WWW: <http://iam.kryspin.net/wp-content/uploads/mazda_logo.jpg>.

[18] Google.com. Logo automobilky Volkswagen [online]. [cit. 2012-04-010]. Dostupné z WWW: <http://www.extrainzerce.eu/galerie/annonce90758/vw_logo_1.jpg>.

[19] Google.com. Logo automobilky Opel [online]. [cit. 2012-04-010]. Dostupné z WWW: <http://www.autodily-kladno.cz/data/loga/opel.jpg>.

[20] Google.com. Logo automobilky Toyota [online]. [cit. 2012-04-010]. Dostupné z WWW: <http://www.znkmaniac0.estranky.cz/img/mid/356/toyota-logo-big.jpg>.

[21] Google.com. Logo automobilky Škoda [online]. [cit. 2012-04-010]. Dostupné z WWW: <http://www.pistonhead.cz/wp-content/uploads/2011/02/skoda-logo.jpg>.

[22] Google.com. Logo automobilky Peugeot t [online]. [cit. 2012-04-010]. Dostupné z WWW:<http://theblogofcars.files.wordpress.com/2010/01/peugeot-811010418282171600x1060.jpg>.

14 Seznam literatury

Knižní zdroje:

[1] Blažek, V. *Geometrie II*. 1. vyd. Ústí nad Labem: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, 1994. 148 s. ISBN 80-7044-070-8.

[2] Braniš, K., Jirásek, F., Horák, S., Vacek, M. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a pro studijní obory SOU, 1. část.* 5. vyd. Praha: Prometheus, spol. s. r. o., 1995. 364 s. ISBN 80-85849-55-0.

[3] Čermák, P., Červinková, P. *Odmaturuj z matematiky*. 2. vyd. Brno: DIDAKTIS, spol. s. r. o., 2003. 208 s. ISBN 80-86285-97-9.

[4] Halouzka, A. Přehled učiva k maturitní zkoušce z matematiky. 1. vyd. Praha: Fortuna, 2002. 240 s. ISBN 80-7168-808-8.

[5] Lávička, M. *Geometrie I. – Základy geometrie v rovině*. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2002. 189 s. ISBN 80-7082-861-7.

[6] Pomykalová, E. *Matematika pro gymnázia – Planimetrie*. Praha: Prometheus, spol. s. r. o., 1999. 208 s. ISBN 80-7196-045-4.

[7] Růžičková, J., Šarounová, A., Väterová, V. *Matematika 7, II. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, spol. s. r. o., 1998. 216 s. ISBN 80-7196-106-X.

[8] Šarounová, A., a kol. *Matematika 9, I. díl.* 1. vyd. Praha: Prometheus, spol. s. r. o., 2002. 136 s. ISBN 80-7196-155-8.

[9] Vaníček, J. *Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2009. 212 s. ISBN 978-80-7290-394-8.

Internetové zdroje:

[10] Creative Commons. *Cabri* [online]. [cit. 2011-08-04]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Cabri>.

[11] Lauschmannová, A. *Trojpoměr v geometrii* [online]. [cit. 2012-27-01]. Dostupné z WWW: <http://mks.mff.cuni.cz/library/TrojpomerAL/TrojpomerAL.pdf>.

[12] Pachner. *CABRI Geometrie II Plus a CABRI 3D v2* [online]. [cit. 2011-08-04]. Dostupné z WWW: <http://www.pachner.cz/html/tipy/cabri-geometrie.htm>.

[13] Prikner, M. Geonext – *Dynamická geometrie zdarma* [online]. 2008 [cit. 2011-08-04]. Dostupné z WWW: < http://www.spomocnik.cz/index.php?id_document=2221>.

[14] Šťastná, B. *Inteligentní sbírka úloh z euklidovské geometrie* [online]. [cit. 2012-15-02]. Dostupné z WWW: <http://is.muni.cz/th/4487/fi_m/html/ch03s02.html>.

[15] Zdarma.org, R.P. *GeoGebra - geometrie a matematika na počítači* [online]. [cit. 2018-08-04]. Dostupné z WWW: <http://www.zdarma.org/1138-geogebra-geometrie-matematika-na-pocitaci/>.

15 Resumé

This bachelor thesis deals with the topic Identical and similar depiction in interactive geometrical programms. During the solution of elementary tasks with the theme of schoolwork of mathematics at primary school, I checked up that the programms Cabri, GeoGebra and GEONExT are inductive and relatively easily controllable.

The beginners appreciate the czech version of these programms, their intelligibility and clear arrangemenet.The offer of instruments and functions for solution of elementary tasks is sufficient and easy available. The exits of all programms are comparable. The use of the geometrical programms in lessons of primary school is very benefical for pupils.