Západočeská univerzita v Plzni

FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY

ANALYTICKY A GEOMETRICKY DEFINOVANÉ KŘIVKY
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Iveta Svobodová

Vedoucí práce: *Mgr. Lukáš Honzík*

Plzeň, 2012

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně
s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, ……………………… 2012

……………………………………………

vlastnoruční podpis

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce, Mgr. Lukášovi Honzíkovi, za věnovaný čas, který mi věnoval, cenné rady a doporučení literatury.

OBSAH

1 ÚVOD

Pro svou bakalářskou práci jsem si vybrala téma Analyticky a geometricky definované křivky, protože člověk se s nimi setkává nejen v matematice, ale i v běžném životě. Křivky se vyskytují na mnoha různých místech a někdy si to ani neuvědomíme, že se jedná právě o křivky. Nejčastěji se vyskytují v architektuře, přírodě, umění, průmyslovém designu, počítačových programech nebo aplikacích.

Protože existuje celá řada různých křivek a zabývat se každou křivkou, byť pro nás nezajímavou, by bylo na vydání knihy, budeme se proto zabývat těmi nejzajímavějšími. Ke každé křivce si uvedeme její definici, znázornění a použití. Některé obrázky jsem vytvářela sama v programu Geo-Gebra.

Pojem křivka je jeden z nejdůležitějších matematických pojmů. Jedná se o geometrický jednorozměrný objekt, případně zobrazení z úsečky do nějakého matematického prostoru (tzv. parametrizovaná křivka). Příkladem křivky může být například **kružnice** nebo **přímka**.

Asi nejpraktičtější ukázkou použití křivek jsou fonty v počítači. Existují dva druhy fontů, první jsou vektorové fonty a druhé rastrové fonty. Nás budou zajímat hlavně ty vektorové, kde je obrys každého znaku definován určitou křivkou. U rastrových fontů jsou písmenka uložená jako rastrový obrázek v mřížce, například 8x16 bodů. Různé velikosti a natočení písma získáme pouhou transformací (stejnolehlost, rotace) dotyčné křivky.

2 HISTORICKÝ VÝVOJ POJMU KŘIVKA

V této kapitole si vysvětlíme obsah pojmu křivka v jednotlivých obdobích historického vývoje (od nejstarších dob starověku až k moderní matematice 20. století), jak se během vývoje měnil a zda lze zodpovědět na otázku *„Co je to křivka?“*. Ke studiu pojmu vedly různé podněty, srovnáme metody studia křivek a pojetí pojmu křivka v jednotlivých historických obdobích a vztah tohoto pojmu k jiným matematickým pojmům (množina, funkce atd.).

„Vývojové etapy definice křivky“

Období	**Nová metoda**	**Nová definice křivky**	**Objevený „problém“**
3. století př. Kristem (Eukleides)	Axiomatické budování geometrie	Čára jako délka bez šířky	Pohyb
Polovina 17. století (R. Descartes)	Analytická metoda souřadnic	Dráha průsečíku pohybujících se přímek, později křivek	Nealgebraické křivky
Přelom 17. - 18. stol. (I. Newton)	Mocninné řady	$F(x,y)$ jako analytický výraz	Neanalytické funkce
2. polovina 19. stol. (C. Jordan)	Zpřesňování základů matematické analýzy	Jordanova definice	Vlastnosti funkcí, mohutnost kontinua
Konec 19. století (G. Cantor)	Teorie množin	Cantorova definice	Nemožnost přenosu z roviny do prostoru
Začátek 20. století (P. S. Urysohn)	Topologie a teorie dimenze	Urysohnova definice	Nemožnost zkoumat lokální vlastnosti
20. století	Analýza na varietách	Křivka jako jednorozměrná varieta	Dnes užívaná v mnoha oborech

(Lomtatidze, 2007)

Najít uspokojivou definici křivky není vůbec snadný úkol. Dříve se křivka zkoumala jako nějaký reálný objekt, který se mohl např. vytyčit provazem, vyrýt do kamene nebo nakreslit do písku. Během staletí se zkoumaný pojem křivky rozvinul ve vysoce abstraktní objekt, který dnes studují různé obory matematiky (počítačová geometrie, diferenciální geometrie ve fyzice, geometrická topologie atd.).

Je zřejmé, že vlastnímu formování definice pojmu předcházelo dlouhé období, kdy byly studovány jednotlivé křivky a jejich vlastnosti. Z tohoto období vycházejí kořeny pozdějšího pojetí pojmu křivka v moderní matematice a nelze je při studiu opominout.

2.1 NEJSTARŠÍ KOŘENY

Z ***Obrázku 1*** je vidět, že zdrojem inspirace se odnepaměti staly křivky žen. Pokud se přiblížíme k matematice, můžeme říct, že nejstarší kořeny zájmu člověka o křivky sahají hluboko do minulosti. Zájem o křivky byl spojen s každodenní činností člověka. Jedná se o činnost praktickou, kde první křivky byly sledovány jako dráhy pohybujících se těles, nebo např. k vytyčování obřadních míst, půdorysů pro obytná přístřeší, při dělení pozemků nebo byly i součástí ornamentů, které zdobily předměty.

Toto vše vedlo ke shromažďování prvních geometrických poznatků, ve kterých se objevují základní vlastnosti nejjednodušších křivek - **kružnice** a **přímky** (tehdy chápané spíše jako omezená část přímky).

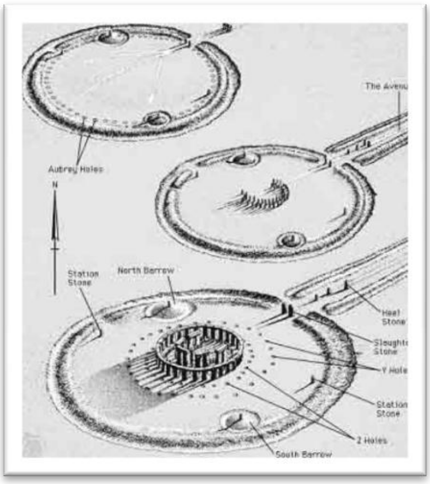
Obrázek 1- Věstonická Venuše (29 000 - 25 000 př. Kristem)

2.1.1 ÚSEČKY A KRUŽNICE

Hlavním podnětem pro vytyčování obřadních míst ve tvaru kruhu se stala dvě nebeská tělesa- Slunce a Měsíc v úplňku. Po celé západní Evropě se nacházejí pozoruhodné megalitické památky (kamenné kruhy, velké hrobky atd.). Většina z nich poukazuje na pozici Slunce a Měsíce ve vztahu k nějaké významné roční době (hlavně letnímu a zimnímu slunovratu).

Mezi nejznámější kamennou kružnici patří Stonehenge v Anglii, která sloužila jako sluneční a měsíční kalendář. Na ***Obrázku 3*** si všimneme, jak dva dolmeny oddělují sakrální prostor od *pro-fanum*, tedy vchodu do svatyně.

Obrázek 2- Stonehange



Obrázek 3- Stonehange (shora dolů)

Ukázky použití kružnic, oblouků, úseček a vzácně i jiných křivek, najdeme v symetrických vzorech po celém světě snad ve všech dobách. Ve Starověku jsou to hinduistické příručky Šulvasútra (Pravidla provazce), které popisují geometrická pravidla, jak šňůrami vyměřovat oltáře a návody jak je stavět.

2.1.2 SPIRÁLY

V Egyptských malbách a výzdobě najdeme kromě kružnic i křivky spirálovitého tvaru, ale symbolika spirál není tak jasná. Objevují se na buddhistických památkách a také v Řecku.

Jeden z významných symbolů je tzv. **Horovo oko**, které slouží jako ochrana proti zlu a je složeno ze symbolů, které představují zlomky:

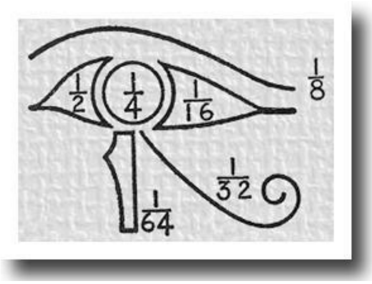
$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64},$$

které dávají v součtu (viz ***Obrázek 4)***

$$\frac{63}{64}.$$

Podle mýtu složil části rozbitého Horova oka Thoth a dává mu magickou moc do celku (jedničky) chybějící:

$$\frac{1}{64}.$$



Obrázek 4- Horovo oko (zlomky)

Obrázek 5- Horovo oko

2.2 KŘIVKY V ANTICKÉ GEOMETRII

V době bronzové (3. a 2. tisíciletí před Kristem) se na území antické civilizace objevuje tzv. krétsko-mykénská kultura. Objevují se geometrické motivy na keramice, zdobených motivy ze spirál a kruhů.

Antika je období starověkého Říma a Řecka od 14. století před Kristem do roku 476 po Kristovi, kdy došlo k zániku Západořímské říše.

Základ vědeckému bádání položili staořečtí učenci a můžeme říci, že v geometrii došli nejdále. V Euklidových Základech (3. Století před Kristem) je geometrie vykládána jako axiomaticky budovaný systém, která s sebou přináší nový přístup ke křivkám. Své poznatky shrnuli Řekové do spisu Základy – šlo o kružnici a přímku, geometrické objekty z nich vytvořené, jejich vlastnosti a vzájemné vztahy.

Bohužel to s sebou přineslo i velký problém – *rektifikaci kružnice*, která úzce souvisí s tzv. kvadraturou kruhu, což znamená převedení daného kruhu na čtverec o stejném obsahu. Další problémy přineslo i *zdvojení krychle* a *trisekce úhlu* a proto byly tyto 3 nevyřešené úlohy společně nazývány Tři proslulé problémy starověku. Tyto problémy se podařilo vyřešit až o více než dva tisíce let později v moderní evropské matematice a trvalo až do 19. století, než se zjistilo, že jsou eukleidovsky neřešitelné.

Při snaze řešit některou z proslulých tří úloh vedla už během starověku k objevení kuželoseček a několika speciálních křivek, např. Dioklova kisoida. K popisu nových křivek byl většinou užíván pohyb, nebylo možno je konstruovat eukleidovsky.

Ve spise *Kuželosečky* od Apollonia, jsou elipsa, hyperbola a parabola zaváděny jako řezy na kuželu a nikoli jako pohyb.

2.3 OD ANTIKY K ANALYTICKÉ GEOMETRII

V období středověku, zejména v Evropě, nastal celkový úpadek a téměř úplné utlumení zájmu o geometrii. Zásadní zlom přichází v období renesance, kdy se geometrie dočkala postupného oživování. Někteří malíři italské renesance používali přesné užití některých metod. Nejvíce k teorii křivek přispěl René Descartes.

2.3.1 ARABSKÁ GEOMETRIE

Pod pojmem arabská geometrie se rozumí geometrie zemí Blízkého a Středního východu. Díky arabskému světu se dochovaly řecké spisy a vznikly nové myšlenky o křivkách, které se začaly studovat. Mezi nejvýznamnější díla patří spis *Základy* od Eukleida a spis *Kuželosečky* od Apollóna.

Díky třem bratrům Banú a Músá z Bagdádu se dochoval v latinském překladu spis *Kniha o měření rovinných a sférických obrazců.* Latinský překlad sehrál důležitou roli v rozvoji geometrie, čtenář se zde mohl poprvé setkat s řešením trisekce úhlu. Ve spisu jsou popisovány úspěchy v geometrii, kterých bylo v Bagdádu dosaženo, dále pak výpočty obsahů různých geometrických obrazců, povrchu koule atd. Mezi jejich další díla patří i práce o kuželosečkách, která zaujala i další matematiky. Na základě toho byla vynalezena pomůcka podobná dnešnímu kružítku.

2.3.2 EVROPSKÝ STŘEDOVĚK- GEOMETRIE

V této době, na přelomu 4. a 5. století došlo k poklesu znalostí o geometrii. Na území bývalé Západořímské říše vznikaly a zanikaly nové barbarské státní útvary. To, že tyto útvary byly hospodářsky a politicky nestabilní, mělo za následek, že kulturní a vědecký vývoj byl velmi pomalý.

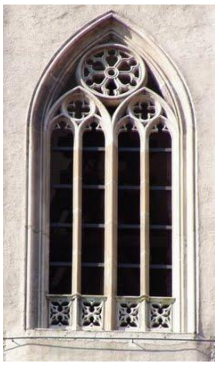
V 10. století patří mezi nejvýznamnější autory Gerbert z Aurillacu s jeho dílem zvaným *Geometria*. V této práci vysvětluje jednoduché geometrické poznatky o rovinných útvarech. Je tam spousta návodů pro řešení zadaných úloh. Tištěné vydání obsahuje 94 článků, nejzajímavější pro nás je 1. článek, kde autor vysvětluje základní pojmy a klade si otázku, co je to *linea*, tj. čára.

2.3.3 GOTICKÁ GEOMETRIE

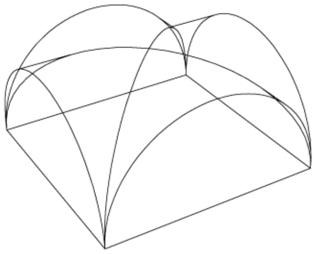
Typický znak gotiky je **lomený oblouk**, který je vytvořený ze dvou oblouků kružnice (viz ***Obrázek 6***). Konstrukce základního tvaru se dělala pomocí rovnostranného trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy oblouků. Tyto útvary se objevují v klenbách, opěrných systémech, oknech, půdorysech atd.

Dalším znakem gotiky je **křížová klenba** (viz ***Obrázek 7***), která vznikne průnikem dvou válcových ploch. Žebra klenby (průnikové křivky) jsou částmi elipsy. Existuje ještě spousta druhů klenby, např. hvězdová, kroužená atd.

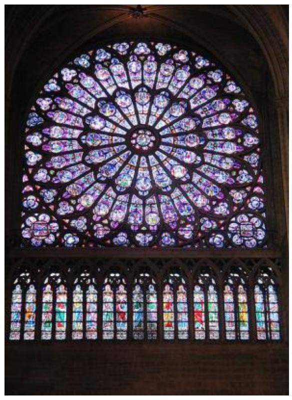
Mezi další znak patří **kružba**, která je typická pro gotickou katedrálu. Je to stavební ornament, bývá v interiéru i z vnějšku. Kruhová okna bývají buď zasklená, nebo prázdná, a jsou členěná kamennými žebry. Ornamenty se pohybují průměrně od 2 centimetrů i do několika metrů. Na ***Obrázku 8*** je katedrála Notre Dame v Paříži s kružbou ve formě paprskového kola z roku 1225 o průměru téměř 10 m.



Obrázek 6: Lomenný oblouk



Obrázek 7: Křížová klenba



Obrázek 8: Kruhové okno

2.3.4 KŘIVKY V OBDOBÍ RENESANCE

Zájem o geometrii zesílil v polovině 15. století, rostly nároky architektury na geometrické znalosti a lineární perspektiva umělců italské renesance. Došlo opět ke studování speciálních křivek.

V 1. polovině 16. století položil základy pro projektivní geometrii Girard Desargues. Byl to francouzský geometr, architekt a inženýr. Jako první ve své práci popisuje souřadnice bodu v prostoru.

3 KŘIVKA

Co to vlastně křivka je? Definovat křivku je docela komplikované. Správná definice se uvádí v diferenciální geometrii a to vyžaduje množství matematických pojmů. Proto se uchýlíme k jednoduššímu definování pomocí následující věty. Pro naše účely bude dostačující, budeme-li křivku chápat intuitivně **jako dráhu pohybujícího se bodu.**

Křivka je množina (bodů), která je až na konečný počet bodů regulární křivkou.

3.1 DEFINICE A POŽADAVKY

„ Regulární křivkou třídy C_n v $\mathbb{E}_3$ rozumíme množinu $\mathcal{K} \in \mathbb{E}_3$, pro niž existuje vektorová funkce $P(t)$, $\mathrm{t} \in \mathcal{J}$ tak, že:

1. $P\colon \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{K}, \mathcal{J}$ je otevřený interval,
2. $\boldsymbol{P}$ je třídy C_n,
3. $\left|\mathbf{P}'(\mathrm{t}_0)\right| \neq 0$ pro všechna $\mathrm{t}_0 \in \mathcal{J}$,
4. $\mathrm{t}_1 \neq \mathrm{t}_2 \Rightarrow \boldsymbol{P}(\mathrm{t}_1) \neq \boldsymbol{P}(\mathrm{t}_2)$.“

(Ježek, 2004)

Požadavky

- podstatná nezávislost křivky na soustavě souřadnic
- lehké znázornění omezení oblouku křivky

Z těchto důvodů budeme nejčastěji volit **parametrické vyjádření**.

3.2 SEČNA KŘIVKY

Sečna se latinsky řekne *secare* a znamená **řez**. Sečna křivky je tedy přímka, která protíná křivku alespoň ve dvou odlišných bodech a není její tečnou.

3.3 ASYMPTOTA KŘIVKY

„ Nechť bod T je bodem rovinné křivky a p je přímka. Nechť v je vzdálenost bodu T od přímky p. Je-li $\lim v = 0$ pro případ, kdy aspoň jedna souřadnice bodu T roste nade všechny meze, pak přímku p nazýváme **asymptotou křivky**."

(Rektorys, 1968)

Asymptota křivky je vlastně její tečna v nevlastním bodě.

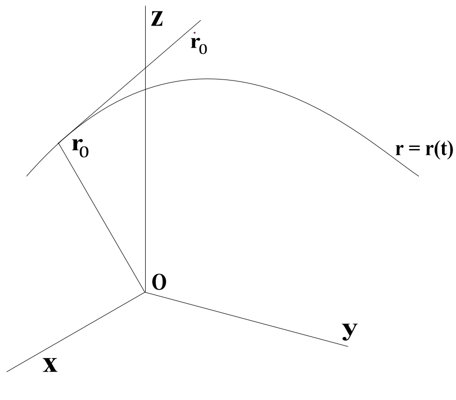
3.4 TEČNA KŘIVKY

„ Tečným vektorem křivky $r = r(t)$ v jejím bodě r_0(tj. v bodě $t = t_0$ čili $[x_0, y_0, z_0]$) rozumíme vektor

$$\dot{r}_0 = \left(\frac{dr}{dt}\right)_0$$

O souřadnicích (směrových parametrech) $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$, jehož počáteční bod je v bodě r_0 (tj. v bodě $[x_0, y_0, z_0]$). Přímka obsahující tento vektor se nazývá tečna křivky v bodě r_0, který je tzv. dotykovým (tečným) bodem tečny (viz ***Obrázek 9***), (tečna takto zavedená je limitní polohou sečny, jestliže její dva průsečíky s křivkou splynou v jediný bod dotyku). "

(Rektorys, 1968)



Obrázek 9: Tečna křivky

3.5 DĚLENÍ KŘIVEK

Křivky lze dělit podle různých hledisek:

1. *podle umístění bodů v prostoru*:
    - **rovinné a prostorové**
2. *podle výtvarných zákonů*:
    - **analytické a grafické**
3. *podle typu rovnice:*
    - **parametrické, explicitní a implicitní**
4. *podle vlastností průchodu řídícími body*:
    - **interpolační a aproximační**

3.6 ANALYTICKY A GEOMETRICKY DEFINOVANÉ KŘIVKY

Mezi **analyticky definované křivky** řadíme všechny, které jdou vyjádřit nějakým vzorcem nebo matematickým vztahem. Analyticky definované křivky někdy označujeme i jako matematicky definované křivky a dělíme je na dvě skupiny:

1. **Algebraické**

$$F(x, y) = \sum_{ij} a_{ij} x^i y^j = 0$$

2. **Grafické**- neexistuje matematický výraz

Definovat křivku analyticky znamená, zadat ji **explicitně**, **implicitně** nebo **parametricky**.

Do **geometricky definovaných křivek** řadíme všechny křivky, které jsou vyjádřeny například stopou bodu při pohybu v rovině (případně v prostoru).

Například **kružnice** může být na jedné straně zadána předpisem:

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2,$$

ale zároveň na ni lze pohlížet jako na geometrický objekt určený množinou bodů dané vlastnosti (vzdálenost bodu od daného středu) nebo jako průsečík kuželové plochy a sečné roviny.

4 ROVINNÉ KŘIVKY

Rovinnou křivku chápeme jako množinu bodů v rovině. Existuje spousta druhů rovinných křivek:

1. *Kružnice*
2. *Elipsa*
3. *Hyperbola*
4. *Parabola*
5. *Paraboly a hyperboly vyšších stupňů* (mocninné křivky)
6. *Přímka ležící v zadané rovině*
7. *Kuželosečka*
8. *Logaritmická spirála*
9. *Řetězovka*.

Můžeme se také setkat se speciálními případy rovinných křivek, a to:

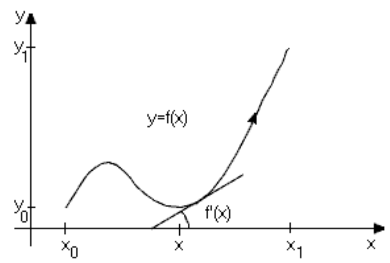
- *Archimedova spirála, Kissoida, Strofoida, Cassiniho křivka, Descartův list nebo Klotoida*

4.1 ZPŮSOBY VYJÁDŘENÍ ROVINNÉ KŘIVKY

Křivku můžeme vyjádřit 3 způsoby:

1. **Explicitní rovnice**

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\ \text{kde } x \in \langle a, b \rangle$$



Obrázek 10- Explicitní vyjádření rovinné křivky

Křivka je orientována ve směru rostoucího x (viz ***Obrázek 10***).

Příklady: Kvadratická funkce, mocninné funkce, goniometrické funkce, lineární funkce atd.

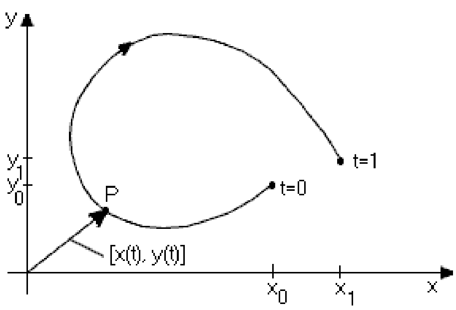
2. Implicitní rovnice

$$\boldsymbol{F(x,y)} = 0$$

Výpočet implicitní rovnicí se počítá hlavně v trojrozměrném prostoru.

3. Parametrická rovnice

$$\boldsymbol{X(t)} = [\boldsymbol{x(t)}, \boldsymbol{y(t)}]$$



Obrázek 11- Parametrické vyjádření rovinné křivky

V počítačové grafice se mnohokrát užívá parametrický tvar:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t).$$

- Parametrické vyjádření se zapisuje *vektorově*:

$$P(t_0) = [x(t_0), y(t_0), z(t_0)] \text{ ,}$$

kde $P(t)$ je polohový vektor $\overrightarrow{OP}$.

- Derivace křivky vyjádřené parametricky má tvar:

$$P'(t_0) = [x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)] = \left[\frac{dx(t_0)}{dt}, \frac{dy(t_0)}{dt}, \frac{dz(t_0)}{dt}\right].$$

- Derivuje se po složkách
- Parametr t je v intervalu $\langle 0,1 \rangle$, kde $t = 0$ a $t = 1$ a ty určují krajní body (viz ***Obrázek 11***)
- **Výhodou** parametrického tvaru je lehké znázornění tečny ke křivce, které je vhodné při využití navazování křivek a vytváření komplikovaných tvarů z jednodušších částí
- **Nevýhodou** parametrického tvaru je, že v některých případech není zaručeno stejnoměrné rozložení bodů na křivce.

4.2 VLASTNOSTI ROVINNÝCH KŘIVEK

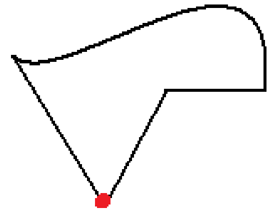
Uvažujme interval $I = \langle \alpha, \beta \rangle$. Za **počáteční bod** křivky považujeme bod $[\varphi(\alpha), \psi(\alpha)]$ a za **koncový bod** $[\varphi(\beta), \psi(\beta)]$.

4.3 UZAVŘENÁ KŘIVKA

Jestliže platí $[\varphi(\alpha), \psi(\alpha)] = [\varphi(\beta), \psi(\beta)]$, tzn. počáteční a koncový bod jsou totožné, pak křivku C nazveme **uzavřenou** (viz ***Obrázek 12***).

Platí podmínka, že pro $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2) \wedge \psi(t_1) \neq \psi(t_2)$. Ale to se nevztahuje na počáteční bod, který je totožný s koncovým bodem.

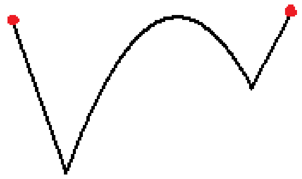
Množina $\{k(x); x \in I\}$ se nazývá **obraz křivky**.



Obrázek 12- Uzavřená křivka

4.4 Otevřená křivka

Jestliže má křivka C krajní body, tzn. počáteční bod je různý od koncového, pak ji nazveme **otevřenou křivkou** (viz ***Obrázek 13***).

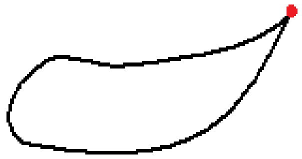


Obrázek 13- Otevřená křivka

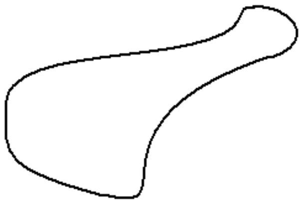
4.5 Hladká neboli diferenciální křivka

Jsou-li funkce $\dot{\varphi}(t)$ a $\dot{\psi}(t)$ spojité v I, pak jde o **hladkou neboli diferenciální křivku**. Derivace existuje v každém bodě. Hladká křivka je **regulární**, pokud její derivace není v žádném bodě nulová.

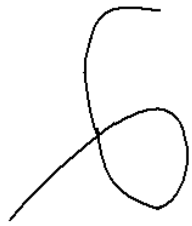
Lépe si tuto vlastnost představíme následovně: otevřená křivka je hladká, jestliže v každém jejím bodě dokážeme udělat tečnu a u uzavřené křivky nám nevadí, jestliže tečna neexistuje v počátečním bodě, který splývá s koncovým (viz ***Obrázek 14, 15 a 16***).



Obrázek 14- Hladká křivka I.



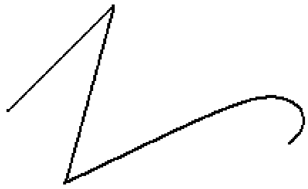
Obrázek 15- Hladká křivka II.



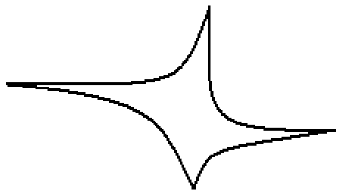
Obrázek 16- Hladká křivka III.

4.6 Po částech hladká křivka

Jestliže je křivka složená z hladkých úseků, které na sebe navazují, tak je po částech hladká (viz ***Obrázek 17*** a ***18***).



Obrázek 17- Po částech hladká křivka I.

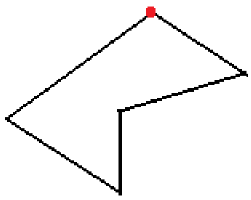


Obrázek 18- Po částech hladká křivka II.

4.7 JEDNODUCHÁ KŘIVKA

Jestliže otevřená křivka neprotíná sebe sama, pak jde o **jednoduchou** křivku (viz ***Obrázek 19*** a ***20***).

Tzn. pro $t_1 \neq t_2$ platí $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2) \wedge \psi(t_1) \neq \psi(t_2)$.



Obrázek 19- Jednoduchá křivka I.

Obrázek 20- Jednoduchá křivka II.

4.8 KŘIVKA R-TÉ TŘÍDY

Uvažujme v rovině křivku popsanou funkcí $y = y(x)$. Má-li funkce $y(x)$ na otevřeném intervalu spojité derivace až do *r-tého* řádu, pak říkáme, že se jedná o **křivku r-té třídy** (křivku třídy T_r) v intervalu.

Rovinnou křivku definovanou na intervalu funkcí $y(x)$ často vyjadřujeme jako množinu bodů.

4.9 KŘIVKA NEKONEČNĚ DIFERENCOVATELNÁ

Má-li křivka všechny derivace, říkáme někdy, že je třídy nekonečno, neboli **nekonečně diferencovatelná**.

Poznámka: Občas se výrazem křivka myslí pouze obraz křivky (v dřívější definici), tj. množina bodů. To nazýváme **neparametrická křivka**.

5 PROSTOROVÉ KŘIVKY

Prostorová křivka je taková křivka, jejíž body neleží v jedné rovině.

Parametrická rovnice křivky bývá zapisována ve vektorovém tvaru

$$r = r(t),$$

kde r představuje **radiusvektor**:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, kde x, y, z jsou spojité funkce.

Prostorovou křivku lze vyjádřit jako průnik dvou ploch: $z = f(x, y),\ z = g\,(x, y)$

nebo $\boldsymbol{F(x, y, z) = 0},\ \boldsymbol{G(x, y, z) = 0}.$

Jsou-li rovnice popisující křivku algebraické, pak křivku označujeme jako **algebraickou**. Pokud uvedené rovnice nejsou algebraické, pak říkáme, že křivka je **transcendentní**.

Příklady prostorových křivek:

- *Přímka*
- *Šroubovice*

5.1 PŘÍMKA

Přímka je dlouhá rovná čára, která má nekonečně mnoho bodů a nemá ani začátek ani konec. Řadíme ji mezi jednorozměrné křivky, což znamená, že přímka má pouze délku (viz ***Obrázek 21***).

<u>**Vlastnosti**</u>

Zápis přímky se provádí pomocí malých tiskacích písmen a je dána oběma body, protože jen jednu přímku lze vést dvěma body.

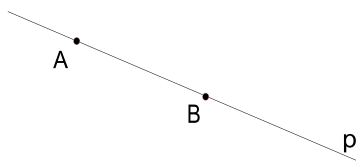
Zápis

Zápis přímky v rovině se provádí pomocí **lineární funkce**, protože v grafu vznikne vždy přímka.

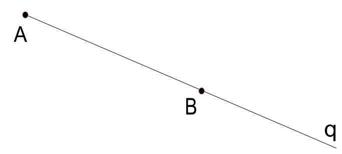
Předpis pro lineární funkci je: $\boldsymbol{y = ax + b}$, kde b je absolutní člen.

5.1.1 POLOPŘÍMKA

Můžeme se také setkat s tzv. polopřímkou, která je přímce blízká (viz ***Obrázek 22***). Polopřímka je také dlouhá rovná čára, která má nekonečně mnoho bodů a nemá konec. Na rozdíl od přímky **má počátek**.



Obrázek 21- Přímka



Obrázek 22- Polopřímka

5.1.2 VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK V ROVINĚ

V rovině, kde máme dvě přímky, mohou nastat 3 vzájemné polohy. Mějme tedy přímky p a q:

- **Totožné přímky**- značíme $\mathbf{p \cap q = p}$, zápis $\boldsymbol{p = q}$

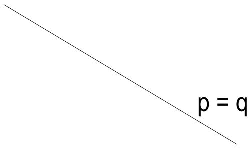
  Přímky mají nekonečně mnoho bodů, protože se protínají ve všech bodech, leží na sobě a splývají v jednu (viz ***Obrázek 23***).

- **Různoběžné přímky**- značíme $\mathbf{p \cap q = \{P\}}$, zápis $\boldsymbol{p \times q}$

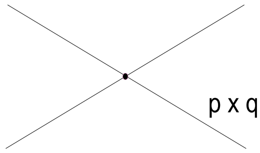
  Přímky mají 1 společný bod, protože se protínají pouze v jednom bodě (viz ***Obrázek 24***).

- **Rovnoběžné přímky**- značíme $\mathbf{p \cap q = \emptyset}$**,** zápis $\boldsymbol{p \parallel q}$

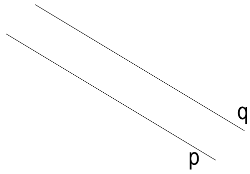
  Přímky nemají žádný společný bod, protože se neprotínají v žádném bodě (viz ***Obrázek 25***).



Obrázek 23- Totožné přímky



Obrázek 24- Různoběžné přímky



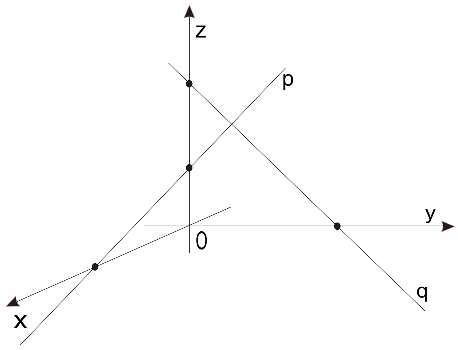
Obrázek 25- Rovnoběžné přímky

5.1.3 VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK V PROSTORU

V prostoru, kde máme dvě přímky, mohou nastat 4 vzájemné polohy. První tři vzájemné polohy jsem uvedla v předchozím odstavci (Vzájemná poloha přímky v rovině) a to přímky různoběžné, rovnoběžné a totožné. Zbývají nám tedy mimoběžné přímky, jako přibyvší vzájemná poloha v prostoru s vyšší dimenzí. Mějme tedy přímky p a q:

- **Mimoběžné přímky**- značíme $\mathbf{p} \cap \mathbf{q} = \emptyset$**,** zápis ***p*** ***q***

  Přímky nemají žádný společný bod, mají různý směr a nejsou rovnoběžné. Jakákoliv přímka je v jiné výšce (viz ***Obrázek 26***).



Obrázek 26- Mimoběžné přímky

5.1.4 PARAMETRICKÁ ROVNICE PŘÍMKY

Přímku můžeme určovat různými způsoby, např. pomocí vektoru a bodu. Bod určuje posunutí od počátku soustavy souřadnic a vektor směr přímky.

Označme přímku v prostoru písmenem p. Dále označme bod P, kterým přímka prochází a je rovnoběžná s vektorem u. Celé označení přímky budeme zapisovat ve tvaru $p(P, u)$.

Definice – směrový vektor přímky

„ *Jestliže* A, B *jsou dva různé body, pak vektor* $u = B - A$ *nazýváme* **směrový vektor** *přímky* AB*.*“

(Končel, 2009)

Definice- parametrická rovnice přímky

„ *Rovnice* $X = A + tu;\ t \in R, u \neq o,$ *se nazývá* ***parametrická rovnice*** *nebo také* ***parametrické vyjádření*** *přímky* $p(A, u)$. *Proměnná* t *se nazývá* **parametr**.“

„ Když parametrickou rovnici přímky $p(A, u)$, kde $A[a_1; a_2; a_3]$ a $u = (u_1; u_2; u_3)$ zapíšeme v souřadnicích, získáme vyjádření souřadnic bodů $X[x; y; z]$ této přímky v závislosti na parametru t.“

(Končel, 2009)

$$\boldsymbol{x = a_1 + tu_1},$$

$$\boldsymbol{y = a_2 + tu_2},$$

$$\boldsymbol{z = a_3 + tu_3}, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

5.1.5 OBECNÁ ROVNICE PŘÍMKY

Definice- obecná rovnice přímky

„Rovnice $ax + by + c = 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$, kde alespoň jedno z čísel a, b je nenulové, se nazývá **obecná rovnice** přímky.“

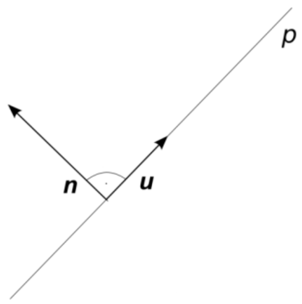
(Končel, 2009)

Pro nalezení a výpočet obecné rovnice přímky používáme **normálový vektor**, abychom zjistili koeficienty a, b, c.

Definice- normálový vektor

„Vektor kolmý ke směrovému vektoru přímky v rovině se nazývá **normálový vektor** této přímky.“ (viz ***Obrázek 27***)

(Končel, 2009)



Obrázek 27-Normálový vektor n přímky p

Na obrázku máme označený směrový vektor u a normálový vektor n . Tyto dva vektory jsou na sebe kolmé a tudíž jejich skalární součin je roven 0. Označme si nyní směrový vektor $u = (u_1, u_2)$ a normálový vektor $n = (n_1, n_2)$. Plyne tedy, že:

$$\boldsymbol{n_1 u_1 + n_2 u_2 = 0}.$$

5.2 ŠROUBOVICE

Šroubovici řadíme mezi prostorové křivky. Vzniká opisováním bodu, který se otáčí a posouvá kolem své osy. Tento pohyb se nazývá šroubový pohyb, který se otáčí kolem své osy a posouvá se po jejím směru (viz ***Obrázek 28***).

Obrázek 28: Šroubovice

Šroubovice rozdělujeme na 2 druhy, a to jakým způsobem se šroubovice otáčí a jak rotuje.

Způsob otáčení

- *Pravotočivý*- Pravotočivý pohyb je takový pohyb šroubovice, kde se bod otáčí a posouvá doprava kolem své osy.
- *Levotočivý*- Levotočivý pohyb je naopak pohyb, kde se bod otáčí a posouvá doleva kolem své osy.

<u>Způsob rotace</u>- na rotačních plochách, např.

- *Kužel*
- *Válec.*

Šroubovice se skládá z vrcholu, výšky a poloměru podstavy (např. válcové plochy) a můžeme jí parametricky vyjádřit:

$$x = r\, cos\varphi$$

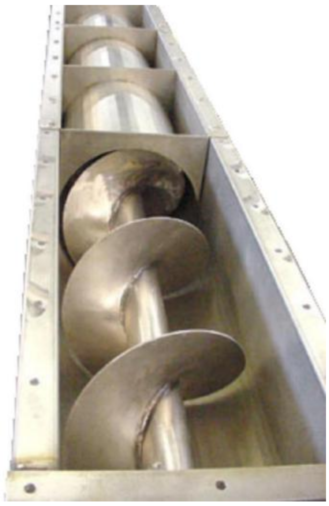
$$y = r\, sin\varphi$$

$$z = b\varphi,$$

kde $\boldsymbol{z}$ je osa šroubovice, $\boldsymbol{r}$ je poloměr podstavy (válcové plochy) a $\boldsymbol{b}$ je výška.

<u>Použití</u>: Se šroubovicí se setkáváme ve stavebnictví (točité schody- viz ***Obrázek 29***), používá se při výrobě šnekových dopravnících (viz ***Obrázek 30***), různé závity, šrouby, pružiny atd.

Obrázek 29- Šroubovice v točitých schodech



Obrázek 30- Šroubovice a šnekový dopravník

6 KUŽELOSEČKY

Na kuželosečky jde nahlížet jak na analyticky tak geometricky definované křivky, které se řadí mezi algebraické křivky 2. stupně.

Mezi kuželosečky patří:

- *Kružnice*
- *Elipsa*
- *Hyperbola*
- *Parabola*

Podle svého názvu vznikají ***kuželosečky*** seknutím rotačního kužele rovinou a také jako množiny bodů dané vlastnosti.

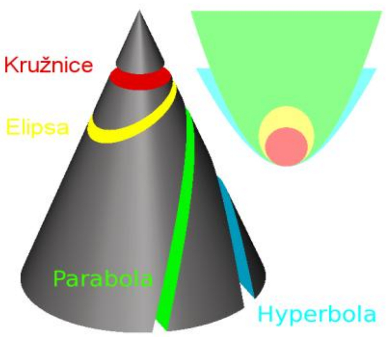
Kuželosečka je tedy rovinná křivka, která vznikne jako průnik roviny s pláštěm rotační kuželové plochy, která neprochází vrcholem kuželové plochy.

Singulární kuželosečky

Může se stát, že při řezu rovinou nevznikne elipsa, hyperbola, parabola nebo kružnice, nýbrž nějaký bod, přímka nebo dvě přímky. A to se nazývá singulární kuželosečky.

Regulární kuželosečky

Takto se označuje kružnice, elipsa, parabola a hyperbola.



Obrázek 31- Kuželosečka

Existuje 7 typů kuželoseček, ale my se budeme věnovat těm regulárním, které jsou pro nás zajímavější:

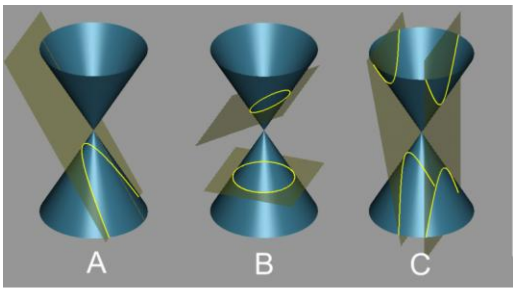
1. *Bod*
2. *Dvojice splývajících rovnoběžek a různoběžek*
3. *Vstup sečné roviny vrcholem kuželové plochy* (tzv. singulární kuželosečky)
4. *Kružnice*
5. *Elipsa*
6. *Parabola*
7. *Hyperbola*

$\left.\begin{array}{l}4.\ Kružnice\\5.\ Elipsa\\6.\ Parabola\\7.\ Hyperbola\end{array}\right\}$ tzv. **Regulární kuželosečky**

Při vzniku kuželosečky záleží na **úhlu**, pod kterým protíná sečná rovina kuželovou plochu.

Definujme úhel $\boldsymbol{\alpha}$, jenž svírají povrchové přímky rotační kuželové plochy s rovinou kolmou k ose rotace. Jako druhý úhel si označíme úhel $\boldsymbol{\beta}$, jež svírá rovina řezu σ s rovinou kolmou k ose rotační kuželové plochy. Mohou nastat 4 případy:

1. $\boldsymbol{\beta = 0}$ = vznikne **KRUŽNICE** (rovina je kolmá k ose rotace)
2. $\boldsymbol{\alpha} > \boldsymbol{\beta} > 0$ = vznikne **ELIPSA**
3. $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ = vznikne **PARABOLA**
4. $\boldsymbol{\alpha} < \beta$ = vznikne **HYPERBOLA**



Obrázek 32: Parabola(A), Elipsa a kružnice (B), hyperbola (C)

6.1 KRUŽNICE

Kružnici jsme získali, jak už jsem uvedla, jako průsečnici rotační kuželové plochy a roviny kolmé k ose plochy (stejně tak jsme mohli seknout jakoukoli jinou rotační plochu rovinou kolmou k její ose). Umístíme-li kružnici o poloměru r do soustavy souřadnic tak, že střed leží v počátku, bude mít rovnici:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Kružnice se středem v bodě $S[m; n]$ má rovnici:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Obecná rovnice kružnice je:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

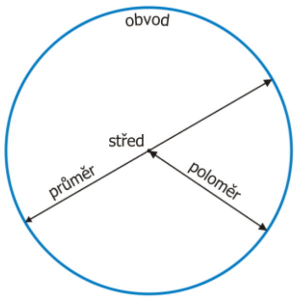
kde $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

Střed kružnice je:

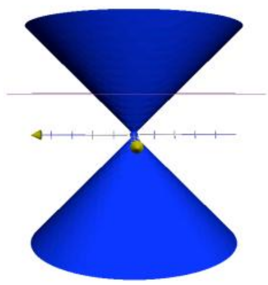
$$\boldsymbol{S = \left[-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right]}$$

poloměr:

$$\boldsymbol{r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}}.$$



Obrázek 33: Kružnice I.

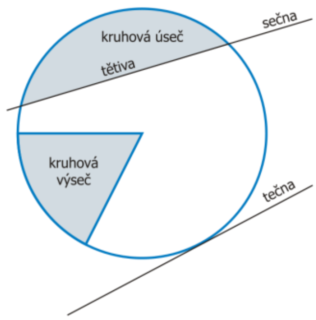


Obrázek 34: Kružnice II.

6.1.1 TEČNA KE KRUŽNICI

Máme kružnici se středem $S[m; n]$ a poloměrem r a na kružnici bod $T[x_0; y_0]$. Rovnice tečny ke kružnici vedená bodem T má tvar:

$$\boldsymbol{(x_0 - m).(x - m) + (y_0 - n).(y - n) = r^2}.$$



Obrázek 35: Tečna ke kružnici

6.2 KŘIVKY 2. STUPNĚ

Elipsy, hyperboly a paraboly se spolu s kružnicemi souhrnně nazývají kuželosečky, protože každou z nich můžeme dostat jako průnik roviny a kuželové plochy. Tyto křivky vystupují také jako obalové křivky systémů přímek.

Pomocí soustavy souřadnic nakonec ukážeme, že tyto křivky jsou dány algebraickými rovnicemi 2 stupně.

6.2.1 ELIPSA

Je to zároveň „ válcosečka“, tj. průsečnice rotační válcové plochy a roviny, která není ani kolmá k ose plochy ani s ní rovnoběžná.

Uvažujme množinu všech bodů *M* v rovině, pro něž je součet vzdáleností od dvou daných různých bodů *A*, *B* roven danému číslu. Označme toto číslo *2a*, vzdálenost bodů *A* a *B* označíme *2c*. Poznamenejme, že pro $a \leq c$ je tato množina málo zajímavá.

Je-li **a** < **c,** dostaneme prázdnou množinu, protože v rovině neexistuje bod M, pro který platí

$$|AM| + |MB| < |AB|.$$

Pro **a** = **c** je uvažovanou množinou úsečka *AB*.

Abychom získali představu o tvaru křivky pro **a** > **c**, zatlučeme v bodech *A*, *B* hřebíky a navlékneme na ně provázek délky *2(a+c)*, jehož konce spojíme. Napneme provázek tužkou a opíšeme takto křivky a musíme dbát, aby byl provázek stále napnutý. Dostaneme uzavřenou křivku, která se nazývá **elipsa**.

Body *A, B* jsou tzv. **ohniska** této elipsy.

Z definice elipsy plyne, že je to křivka **symetrická** podle dvou os symetrie. Jedna osa prochází ohnisky *A,B*. Říká se jí hlavní osa a druhá osa je k ní kolmá a prochází středem úsečky *AB*, nazývá se vedlejší osa.

Průsečík *O* těchto dvou os souměrnosti tvoří **střed** elipsy.

Měníme-li délku provázku, dostaneme celý systém elips s danými ohnisky. Jinými slovy, dostaneme mapu hladin funkce

$$F(M) = |MA| + |MB| .$$

Geometrická definice říká, že elipsa je množina bodů X v rovině, které mají od dvou daných bodů E, F (ohnisek) konstantní součet vzdáleností,

$$|XE| + |XF| = k.$$

6.2.2 HYPERBOLA

Hyperbolu dostaneme tak, protneme-li kuželovou plochu rovinou, která svírá s osou plochy úhel menší, než je úhel mezi osou a površkami kuželové plochy ($0 \leq \psi < \varphi$). Hyperbola stejně jako parabola není uzavřená křivka, ale na rozdíl od paraboly má dvě vzájemně oddělené části – větve.

Uvažujme množinu všech bodů, jejichž rozdíl vzdáleností od dvou daných bodů *A* a *B* se v absolutní hodnotě rovná dané hodnotě $2a (a > 0)$.

Nechť je jako v předcházejícím případě $|AB| = 2c$.

Je-li **a > c**, je hledaná množina **prázdná**, protože pro žádný bod *M* není

$$|AM| - |MB| > |AB| \text{ ani } |MB| - |AM| > |AB| .$$

Pro **a = c** se hledaná množina skládá ze **dvou polopřímek**, které dostaneme z přímky *AB* vynecháním vnitřních bodů úsečky *AB*.

V případě **a < c** se uvažovaná množina skládá ze dvou částí, tzv. **větví**. Jedna je množinou:

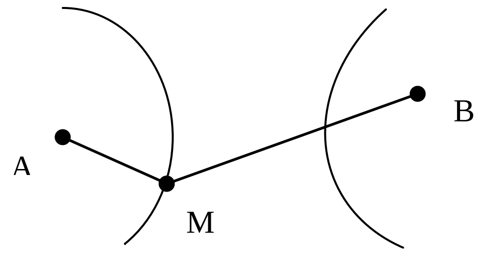
$$\{M : |MA| - |MB| = 2a\}.$$

Celá křivka (sjednocení obou větví) se nazývá **hyperbola** a body *A, B* jejími **ohnisky** (viz ***Obrázek 36***). Z definice vyplyne, že hyperbola **má dvě osy souměrnosti**, střed *O* a úsečky AB je jejím **středem**.

Abychom dostali celou mapu hladin funkce

$$f(M) = \left| |MA| - |MB| \right|$$

musíme k systému hyperbol s ohnisky *A, B* přidat osu úsečky *AB*, která odpovídá hodnotě f(M) = 0.



Obrázek 36: Hyperbola

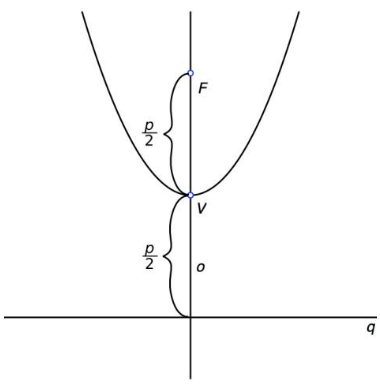
6.2.3 PARABOLA

Parabola patří mezi kuželosečky a vzniká jako řez kulové plochy rovinou.

Definice:

„ V rovině je dán bod *F* a přímka *q*, která jim neprochází. Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu *F* a od přímky *q*, se nazývá **parabola.** Bod *F* se nazývá **ohnisko**, přímka *q* **řídicí přímka** paraboly."

(Končel, 2009)



Obrázek 37: Parabola

Na ***Obrázku 37*** je znázorněn bod ***V***, který je vrcholem paraboly, ležící na přímce ***o***. Písmeno ***p*** určuje vzdálenost paraboly od její řídicí přímky. A bod F je ohniskem paraboly.

Vrcholová rovnice- definice

„Rovnice $(x-m)^2 = \mp 2p(y-n),\ resp. (y-n)^2 = \mp 2p(x-m), kde\ p > 0$ se nazývají vrcholové rovnice paraboly s vrcholem $V[m;n]$ a ohniskem $E\left[m;n\ \mp \frac{p}{2}\right]$, resp. $E\left[m \mp \frac{p}{2};n\right]$."

(Končel, 2009)

Z této vrcholové rovnice lze určit polohu osy paraboly vůči osám *x* nebo *y*, ohniska a také řídicí přímky paraboly.

Osa paraboly může být rovnoběžná jak s osou *x*, tak s osou *y*. My se nyní podíváme na to, jak to vypadá v jednotlivých případech:

1) Abychom mohli říct, že osa paraboly je **rovnoběžná s osou x**, musí být vrcholová rovnice ve tvaru $(y-n)^2 = \mp 2p\ (x-m)$. Parabola je tedy **otevřená** a bude záležet na směru vůči poloose *x*. Pokud bude ve směru **záporném**, bude mít rovnici: $\boldsymbol{(y-n)^2 = -2p(x-m).}$

A pokud bude v kladném směru, její rovnice bude: $\boldsymbol{(y-n)^2 = 2p(x-m).}$

2) Abychom mohli říct, že osa paraboly je rovnoběžná s osou y, musí být vrcholová rovnice ve tvaru $(x-m)^2 = \mp 2p\ (y-n)$. Parabola je tedy opět **otevřená** a bude opět záležet na směru vůči poloose *x*. Pokud bude ve směru záporném, její rovnice bude: $\boldsymbol{(x-m)^2 = -2p(y-n).}$

A pokud bude v kladném směru, její rovnice bude: $\boldsymbol{(x-m)^2 = 2p(y-n).}$

<u>Obecná rovnice paraboly- definice</u>

„ Rovnice paraboly ve tvarech $x^2 + 2rx + 2sy + t = 0$ a $y^2 + 2sx + 2ry + t = 0; r \neq 0, r,$ $s,\ t\ \in\ \mathbb{R}$, se nazývají **obecné rovnice paraboly**.“

(Končel, 2009)

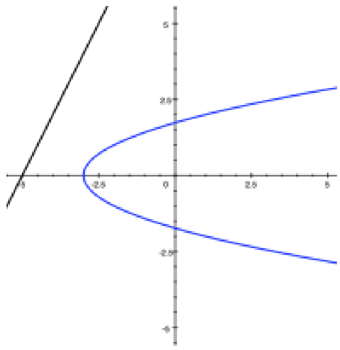
<u>Vzájemná poloha paraboly s přímkou</u>

Pokud budeme uvažovat parabolu v rovině, tak můžou nastat 3 možnosti, jestli parabola protíná přímku nebo nikoliv.

Uvažujme parabolu *P* a přímku *p:*

1. $\boldsymbol{p \cap P = \emptyset}$

   Přímka p s parabolou P nemají žádný společný bod, protože přímka p leží mimo (vně) parabolu P. Přímku p nazýváme **vnější přímkou** paraboly (viz ***Obrázek 38***).

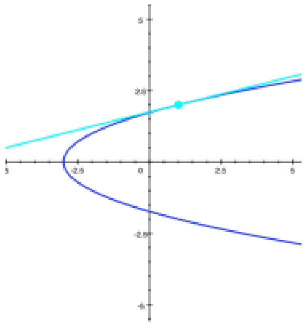


Obrázek 38: Parabola a vnější přímka

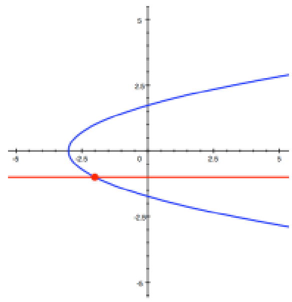
2. $\boldsymbol{p \cap P = \{A\}}$

   Přímka p s parabolou P mají právě jeden společný bod A, protože přímka protíná parabolu P v jednom místě (bodě). Přímku p nazýváme **tečnou** paraboly L, v případě různoběžnosti přímky p s osou o (viz ***Obrázek 39***).

   Pokud je přímka p rovnoběžná s osou paraboly P, pak jde o **sečnu**, přestože mají jen jeden společný bod, avšak přímka p prochází vnitřkem paraboly (viz ***Obrázek 40***).



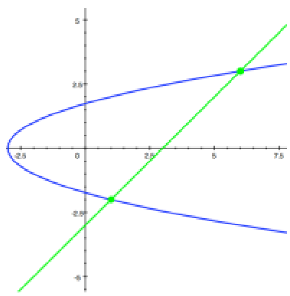
Obrázek 39: Tečna paraboly



Obrázek 40: Parabola s rovnoběžnou přímkou

3. $\boldsymbol{p \cap P = \{C, D\}}$

Přímka p s parabolou P mají dva společné body C a D, protože přímka p tyto body protíná a prochází parabolou P. Přímku p nazýváme **sečnou** paraboly P (viz ***Obrázek 41***).



Obrázek 41: Sečna paraboly

<u>Tečna paraboly- definice</u>

„Rovnice $(x_0 - m).(x - m) = \mp p(y_0 - n) \mp p(y - n); p > 0$, resp.

$(y_0 - n).(y - n) = \mp p(x_0 - m) \mp p(x - m); p > 0$ je **rovnicí tečny k parabole** s rovnicí $(x - m)^2 = \mp 2\,p(y - n); p > 0$,resp.$(y - n)^2 = \mp 2\,p(x - m) \mp; p > 0$, v bodě $X_0[x_0; y_0]$.“

(Končel, 2009)

7 CYKLICKÉ KŘIVKY

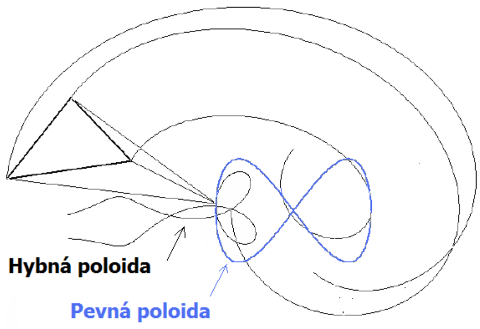
Ještě než si řekneme o jednotlivých cyklických křivkách, je důležité si uvědomit, co předchází tomu, aby mohly vzniknout.

Cyklické pohyby

Abychom mohli říct, že se jedná o cyklický pohyb, tak je důležité, jak bude vypadat tzv. **poloida**. Poloida je křivka, která se valí, nebo po níž se valí druhá křivka. Máme dva druhy poloid- pevnou a hybnou.

Pevná poloida je křivka, která se valí (viz ***Obrázek 42***).

Hybná poloida je křivka, která se valí po pevné poloidě (viz ***Obrázek 42***).

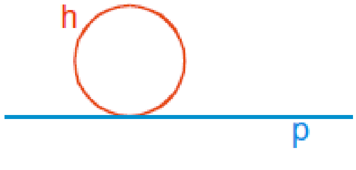


Obrázek 42: Hybná a pevná poloida

Cyklický pohyb je tedy takový pohyb, kde obě poloidy jsou kružnice, nebo jedna poloida kružnice a druhá přímka. Na základě toho existuje 5 druhů cyklických pohybů- *cykloidální*, *evolventní*, *epicykloidální*, *hypocykloidální* a *pericykloidální*.

1. **Cykloidální pohyb**

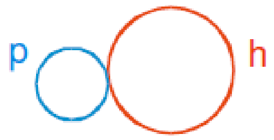
Cykloidální pohyb je pohyb, který vznikne kotálením kružnice po přímce. Pevná poloida je tedy přímka a hybná poloida kružnice (viz ***Obrázek 43***). Vzniklé trajektorie nazýváme **cykloidy**.



Obrázek 43- Cykloidální pohyb

2. <u>Epicykloidální pohyb</u>

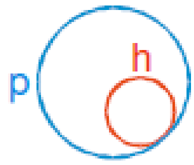
Epicykloidální pohyb je pohyb, který vznikne kotálením vnějšího obvodu kružnice po vnějším obvodu druhé kružnice. Pevná poloida je tedy kružnice a hybná poloida vnější kružnice (viz ***Obrázek 44***). Vzniklé trajektorie nazýváme **epicykloidy**.



Obrázek 44: Epycikloidální pohyb

3. <u>Hypocykloidální pohyb</u>

Hypocykloidální pohyb je pohyb, který vznikne kotálením vnějšího obvodu kružnice po vnitřním obvodu druhé kružnice. Pevná poloida je tedy kružnice a hybná poloida vnější kružnice $(a > b)$, (viz ***Obrázek 45***). Vzniklé trajektorie nazýváme **hypocykloidy**.



Obrázek 45- Hypocykloidální pohyb

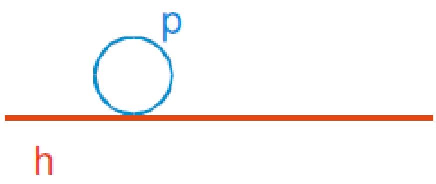
4. <u>Pericykloidální pohyb</u>

Pericykloidální pohyb je pohyb, který vznikne kotálením vnitřního obvodu kružnice po vnějším obvodu druhé kružnice. Pevná poloida je tedy kružnice a hybná poloida vnější kružnice $(a < b)$, (viz ***Obrázek 46***). Vzniklé trajektorie nazýváme **pericykloidy**.

Obrázek 46- Pericykloidální pohyb

5. <u>Evolventní pohyb</u>

Evolventní pohyb je pohyb, který vznikne kotálením přímky po kružnici. Pevná poloida je tedy kružnice a hybná poloida přímka, (viz ***Obrázek 47***). Vzniklou trajektorii nazýváme **evolventa**.



Obrázek 47- Evolventní pohyb

7.1 CYKLOIDA

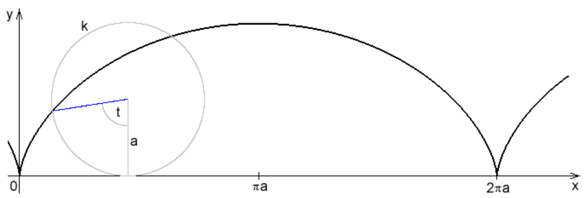
Cykloida patří mezi speciální rovinné křivky. Vzniká na základě cykloidálního pohybu. Je to křivka opisující bod, který je pevně spojený s kružnicí, která se valí po přímce.

Použití cykloid

S cykloidami se často setkáváme v běžném životě, např. ventilek na kole, vlny na vodě, ozubená kola, výřezy na carvingových lyžích atd. Mají výbornou vlastnost, a to je míra velkého zatížení, proto se používají také při mostních a tunelových konstrukcích.

Existují 3 typy cykloid, a to prostá, zkrácená a prodloužená cykloida. Teď si řekneme něco ke každé z nich.

1. **Prostá cykloida**- vznikne odvalením bodu, který leží na kružnici (viz ***Obrázek 48***).



Obrázek 48: Prostá cykloida

„Prostou cykloidu lze vyjádřit **parametrickými rovnicemi**:

$$x = a(t - \sin t)$$

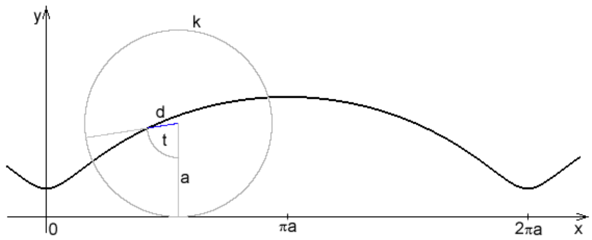
$$y = a(1 - \cos t),$$

kde a je poloměr kružnice a t je parametr, který odpovídá délce oblouku kutálející se kružnice.“

(Wikipedia, 2012)

Vlastnosti: Prostá cykloida má nekonečně mnoho hrotů.

2. **<u>Zkrácená cykloida</u>**- vznikne odvalením bodu, který leží uvnitř kružnice ve vzdálenosti $\boldsymbol{d} < a$, kde $\boldsymbol{d}$ je vzdálenost od středu kružnice a $\boldsymbol{a}$ je poloměr (viz ***Obrázek** 49*).



Obrázek 49: Zkrácená cykloida

„Zkrácenou cykloidu lze vyjádřit **parametrickými rovnicemi**:

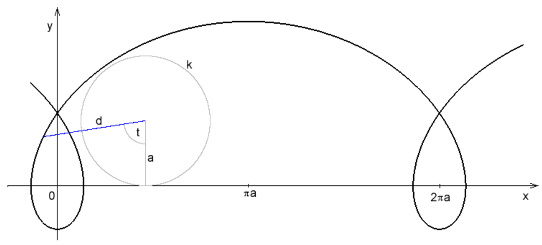
$$x = at - \mathrm{d}\sin \mathrm{t}$$

$$y = a - \mathrm{d}\cos t \text{ “}$$

<u>Vlastnosti</u>: „Zkrácená cykloida má nekonečně mnoho inflexních bodů“.

(Wikipedia, 2012)

3. **<u>Prodloužená cykloida</u>**- vznikne odvalením bodu, který leží vně kružnice ve vzdálenosti $\boldsymbol{d} > a$, kde d je vzdálenost od středu kružnice a a je poloměr (viz ***Obrázek 50***).



Obrázek 50: Prodloužená cykloida

„Prodlouženou cykloidu lze vyjádřit **parametrickými rovnicemi**:

$$x = at - \mathrm{d} \sin \mathrm{t}$$

$$y = a - \mathrm{d} \cos t \text{ “}$$

Vlastnosti: „Prodloužená cykloida má nekonečně mnoho uzlů (dvojných bodů).“

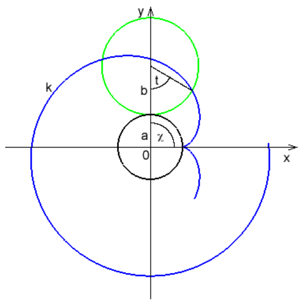
(Wikipedia, 2012)

7.2 EPICYKLOIDA

Epicykloida také patří mezi speciální rovinné křivky. Vzniká na základě epicykloidálního pohybu. Je to křivka opisující bod, který je pevně spojený s pohybující se kružnicí, která se valí po vnější straně nehybné kružnici.

Stejně jako u cykloidy existují 3 typy epicykloid, a to prostá, zkrácená a prodloužená epicykloida. Teď si řekneme něco ke každé z nich:

1. **Prostá epicykloida**- vznikne pokud bod leží na kružnici, která se odvaluje (viz ***Obrázek 51***).



Obrázek 51: Prostá epicykloida

Prostou epicykloidu lze vyjádřit 2 **parametrickými rovnicemi**:

1) $$x = (a+b)\cos t - b\cos\left(\frac{a+b}{a}t\right)$$

$$y = (a+b)\sin t - b\sin\left(\frac{a+b}{a}t\right)$$

kde a je poloměr nehybné kružnice, b je poloměr hybné kružnice a t je parametr, který je úhlem odvalení.

2) $x = (a+b)\cos\lambda - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\lambda\right)$

$y = (a+b)\sin\lambda - b\sin\left(\frac{a+b}{b}\lambda\right)$

kde a je poloměr nehybné kružnice, b je poloměr hybné kružnice a λ je parametr- úhel otočení.

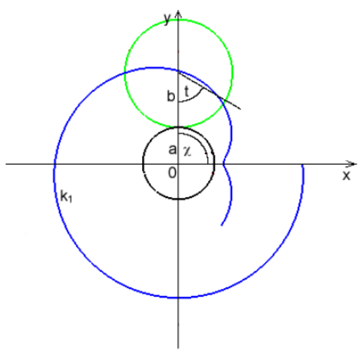
Vlastnosti: U prosté epicykloidy je důležitý poměr poloměrů nehybné kružnice s hybnou kružnicí $\frac{a}{b}$ a mohou tedy nastat 3 případy:

a) Celé číslo: $\boldsymbol{\frac{a}{b} = m}$, kde $\boldsymbol{m}$ bude celé číslo- takto definovanou prostou epicykloidu nazýváme uzavřenou křivkou s $\boldsymbol{m}$ větvemi**.** Větve $\boldsymbol{m}$ vzniknou, když hybná kružnice obíhá nehybnou kružnici.

b) Racionální číslo: $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ čísla $\boldsymbol{\frac{p}{q}}$ – takto definovanou prostou epicykloidu nazýváme uzavřenou křivkou s $\boldsymbol{p}$ větvemi**.** Větve $\boldsymbol{p}$ vzniknou, když $\boldsymbol{q}$ oběhy hybné kružnice obíhají nehybnou kružnici.

c) **Iracionální číslo**: $\frac{a}{b}$ – takto definovanou prostou epicykloidu nazýváme křivkou, která není uzavřená a proto má na rozdíl od prvních dvou nekonečně mnoho větví.

2. **Zkrácená epicykloida**- vznikne, pokud pevně spojený bod leží uvnitř hybné kružnice ve vzdálenosti $d < b$, kde d je vzdálenost od středu kružnice a b je poloměr (viz ***Obrázek 52- křivka k₁***).



Obrázek 52- Zkrácená epicykloida

Zkrácenou epicykloidu lze vyjádřit 2 **parametrickými rovnicemi**:

1) $$x = (a+b)\cos\left(\frac{b}{a}t\right) - d\cos\left(\frac{a+b}{a}t\right)$$

$$y = (a+b)\sin\left(\frac{b}{a}t\right) - d\sin\left(\frac{a+b}{a}t\right)$$

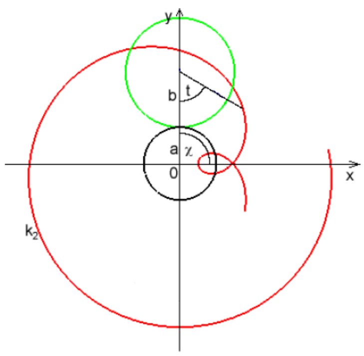
kde **a** je poloměr nehybné kružnice, ***b*** je poloměr hybné kružnice a **t** je parametr, který je úhlem odvalení.

2) $$x = (a+b)\cos\lambda - d\cos\left(\frac{a+b}{b}\lambda\right)$$

$$y = (a+b)\sin\lambda - d\sin\left(\frac{a+b}{b}\lambda\right)$$

kde **a** je poloměr nehybné kružnice, ***b*** je poloměr hybné kružnice a $\boldsymbol{\lambda}$ je parametr- úhel otočení.

3. **Prodloužená epicykloida**- vznikne, pokud pevně spojený bod leží vně hybné kružnice ve vzdálenosti $\boldsymbol{d} > b$, kde d je vzdálenost od středu kružnice a b je poloměr (viz ***Obrázek 53, křivka k***$_2$).



Obrázek 53- Prodloužená epicykloida

Prodlouženou epicykloidu lze vyjádřit 2 **parametrickými rovnicemi**, stejně jako u zkrácené epicykloidy:

1) $$x = (a+b)\cos\left(\frac{b}{a}t\right) - d\cos\left(\frac{a+b}{a}t\right)$$

$$y = (a+b)sin\left(\frac{b}{a}t\right) - d\ sin\left(\frac{a+b}{a}t\right)$$

kde **a** je poloměr nehybné kružnice, $\boldsymbol{b}$ je poloměr hybné kružnice a **t** je parametr, který je úhlem odvalení.

2) $$x = (a+b)cos\lambda - d\ cos\left(\frac{a+b}{b}\lambda\right)$$

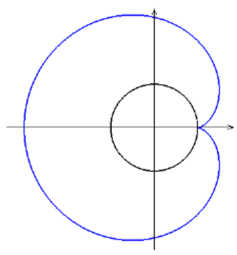
$$y = (a+b)\sin\lambda - d\sin\left(\frac{a+b}{b}\lambda\right)$$

kde **a** je poloměr nehybné kružnice, $\boldsymbol{b}$ je poloměr hybné kružnice a $\boldsymbol{\lambda}$ je parametr- úhel otočení.

7.2.1 SPECIÁLNÍ PŘÍPADY EPICYKLOID

- **KARDIOIDY (SRDCOVKY)**

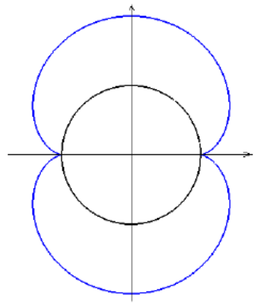
Kardioidy neboli srdcovky patří mezi zvláštní případy prosté epicykloidy, tj. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, kde $\boldsymbol{a}$ je poloměr hybné kružnice a $\boldsymbol{b}$ poloměr nehybné kružnice (viz ***Obrázek 54***). Stejně jako u epicykloidy, tak i tady existují zkrácené a prodloužené srdcovky, u nichž též záleží na poloze bodu vůči hybné kružnici. Bod může být vně nebo uvnitř kružnice.



Obrázek 54: Kardioda (srdcovka)

- **NEFROIDA**

Nefroidy patří mezi zvláštní případy prosté epicykloidy, tj. $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{2}}$, kde $\boldsymbol{a}$ je poloměr hybné kružnice a $\boldsymbol{b}$ poloměr nehybné kružnice (viz ***Obrázek 55***).



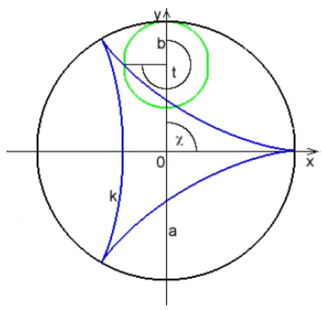
Obrázek 55: Nefroida

7.3 HYPOCYKLOIDA

Vzniká na základě hypocykloidálního pohybu. Je to křivka opisující bod, který je pevně spojený s pohybující se kružnicí, která se valí po vnitřní straně nehybné kružnice.

Stejně jako u předcházející cykloidy a epicykloidy, existují rovněž 3 typy hypocykloid, a to prostá, zkrácená a prodloužená hypocykloida. Teď si řekneme něco ke každé z nich.

1. **Prostá hypocykloida**- vznikne pokud bod leží na kružnici, která se odvaluje uvnitř po nehybné kružnici (viz ***Obrázek 56***).



Obrázek 56: Prostá hypocykloida

Prostou hypocykloidu lze vyjádřit 2 **parametrickými rovnicemi**:

1) $$x = (a-b)\cos\left(\frac{b}{a}t\right) + b\cos\left(\frac{a-b}{a}t\right)$$

$$y = (a-b)\sin\left(\frac{b}{a}t\right) - b\sin\left(\frac{a-b}{a}t\right)$$

kde **a** je poloměr nehybné kružnice, ***b*** je poloměr hybné kružnice a **t** je parametr, který je úhlem odvalení.

2) $x = (a-b)cos\,\lambda + \mathrm{b}\cos\left(\frac{\mathrm{a}-\mathrm{b}}{\mathrm{b}}\lambda\right)$

$y = (a-b)\sin\lambda - b\sin\,(\frac{a-b}{b}\lambda)$

kde **a** je poloměr nehybné kružnice, ***b*** je poloměr hybné kružnice a $\boldsymbol{\lambda}$ je parametr - úhel otočení.

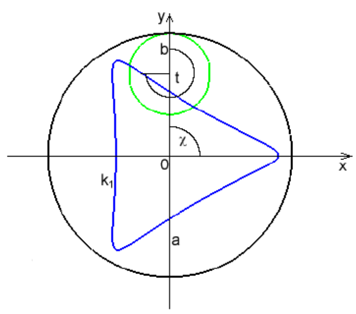
Vlastnosti: U prosté epicykloidy je důležitý poměr poloměrů nehybné kružnice s hybnou kružnicí $\frac{a}{b}$ a mohou tedy nastat 3 případy:

a) **Celé číslo**: $\boldsymbol{\frac{a}{b} = m}$, kde $\boldsymbol{m}$ bude celé číslo- takto definovanou prostou hypocykloidu nazýváme uzavřenou křivku s $\boldsymbol{m}$ větvemi**.** Větve $\boldsymbol{m}$ vzniknou, když hybná kružnice oběhne jednou nehybnou kružnici.

b) **Racionální číslo**: $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ čísla $\boldsymbol{\frac{p}{q}}$ takto definovanou prostou hypocykloidu nazýváme uzavřenou křivku s $\boldsymbol{p}$ větvemi**.** Větve $\boldsymbol{p}$ vzniknou, když $\boldsymbol{q}$ oběhy hybné kružnice obíhají nehybnou kružnici.

c) **Iracionální číslo**: $\frac{a}{b}$ – takto definovanou prostou hypocykloidu nazýváme křivkou, která není uzavřená a proto má na rozdíl od prvních dvou nekonečně mnoho větví.

2. **<u>Zkrácená hypocykloida</u>**- vznikne, pokud pevně spojený bod leží uvnitř hybné kružnice ve vzdálenosti $\boldsymbol{d} < b$, kde $\boldsymbol{d}$ je vzdálenost od středu kružnice a $\boldsymbol{b}$ je poloměr (viz ***Obrázek 57- křivka k₁***).



Obrázek 57: Zkrácená hypocykloida

Zkrácenou hypocykloidu lze vyjádřit 2 **parametrickými rovnicemi**:

1) $$x = (a-b)\cos\left(\frac{b}{a}t\right) + d\cos\left(\frac{a-b}{a}t\right)$$

$$y = (a-b)\sin\left(\frac{b}{a}t\right) - d\sin\left(\frac{a-b}{a}t\right)$$

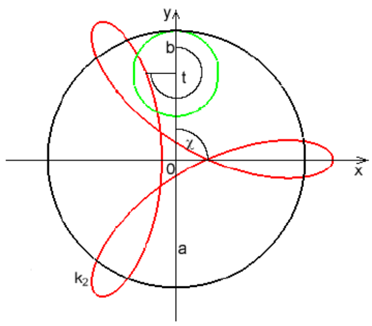
kde **a** je poloměr nehybné kružnice, ***b*** je poloměr hybné kružnice a **t** je parametr, který je úhlem odvalení.

2) $$x = (a-b)cos\lambda + d\cos\left(\frac{a-b}{b}\lambda\right)$$

$$y = (a-b)\sin\lambda - d\sin\left(\frac{a-b}{b}\lambda\right)$$

kde **a** je poloměr nehybné kružnice, ***b*** je poloměr hybné kružnice a $\boldsymbol{\lambda}$ je parametr- úhel otočení.

3. **Prodloužená hypocykloida**- vznikne, pokud pevně spojený bod leží vně hybné kružnice ve vzdálenosti $\boldsymbol{d} > b$, kde d je vzdálenost od středu kružnice a b je poloměr (viz ***Obrázek 58, křivka k₂***).



Obrázek 58: Prodloužená hypocykloida

Prodlouženou hypocykloidu lze vyjádřit stejně jako zkrácenou hypocykloidu 2 parametrickými rovnicemi:

1) $x = (a-b)\cos\left(\frac{b}{a}t\right) + d\cos\left(\frac{a-b}{a}t\right)$

$y = (a-b)\sin\left(\frac{b}{a}t\right) - d\sin\left(\frac{a-b}{a}t\right)$

kde **a** je poloměr nehybné kružnice, ***b*** je poloměr hybné kružnice a **t** je parametr, který je úhlem odvalení.

2) $x = (a-b)\cos\lambda + d\cos\left(\frac{a-b}{b}\lambda\right)$

$y = (a-b)\sin\lambda - d\sin\left(\frac{a-b}{b}\lambda\right)$

kde **a** je poloměr nehybné kružnice, ***b*** je poloměr hybné kružnice a $\boldsymbol{\lambda}$ je parametr- úhel otočení.

7.3.1 SPECIÁLNÍ PŘÍPADY HYPOCYKLOID

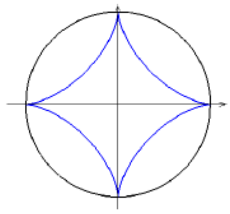
- <u>**STEINEROVA HYPOCYKLOIDA**</u>

Steinerova hypocykloida patří mezi zvláštní případy <u>prosté hypocykloidy</u>, tj. $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{3}}$, kde $\boldsymbol{a}$ je poloměr hybné kružnice a ***b*** poloměr nehybné kružnice (viz ***Obrázek 59***).

Obrázek 59: Steinerova hypocykloida

- <u>**ASTEROIDA**</u>

Asteroida patří mezi zvláštní případy <u>prosté hypocykloidy</u>, tj. $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{4}}$, kde $\boldsymbol{a}$ je poloměr hybné kružnice a ***b*** poloměr nehybné kružnice (viz ***Obrázek 60***).



Obrázek 60: Asteroida

- **ÚSEČKA**

Úsečka patří mezi zvláštní případy prosté hypocykloidy, tj. $\boldsymbol{b} = \frac{\boldsymbol{a}}{2}$, kde $\boldsymbol{a}$ je poloměr hybné kružnice a $\boldsymbol{b}$ poloměr nehybné kružnice.

7.4 PERICYKLOIDA

Pericykloida patří také mezi speciální rovinné křivky. Vzniká na základě pericykloidálního pohybu. O pericykloidě můžeme říct, že je epicykloidou a naopak.

7.5 EVOLVENTA

Evolventa je poslední křivka, která patří mezi cyklické křivky. Můžeme o ní říct, že se řadí spíše mezi technické křivky.

Vzniká na základě evolventního pohybu. Je to křivka opisující bod tvořící přímky, která se kotálí po kružnici.

Evolventa kružnice vznikne, pokud opisující bod tvořící přímky se kotálí po kružnici, která je v tomto případě pevnou poloidou.

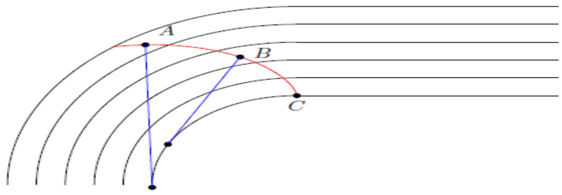
Evolventu lze vyjádřit **parametrickou rovnicí:**

$$x = (r + d)\cos t + rt \sin t$$

$$y = (r + d)\sin t - rt \cos t,$$

kde $\boldsymbol{r}$ je poloměr kružnice, $\boldsymbol{d}$ je vzdálenost tvořící přímky od středu kružnice.

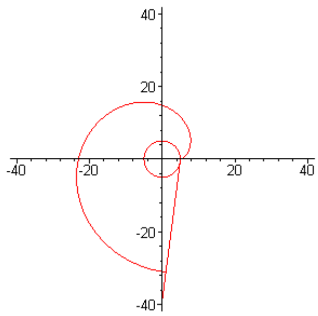
Využití: S evolventou se můžeme setkat např. ve strojírenství (ozubená kola, kde boky zubů tvoří evolventy). Sportovci se s ní můžou setkat na atletickém oválu (viz ***Obrázek 61***). Část evolventy je v tomto případě startovní čára (červená křivka), a proto mají závodníci (A, B a C) stejně dlouhou trasu. Lemují tečnu vnitřní dráhy.



Obrázek 61: Evolventa na atletickém oválu

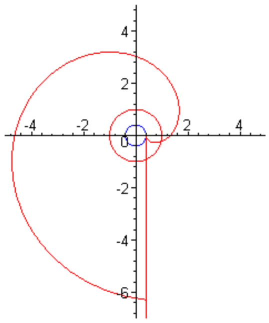
Existují 3 typy evolvent, a to prostá, zkrácená a prodloužená evolventa. Teď si řekneme něco ke každé z nich.

1. **Prostá evolventa**- je bod dotyku a platí: $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$, kde $\boldsymbol{d}$ určuje vzdálenost tvořící přímky od středu kružnice (viz ***obrázek 62***).



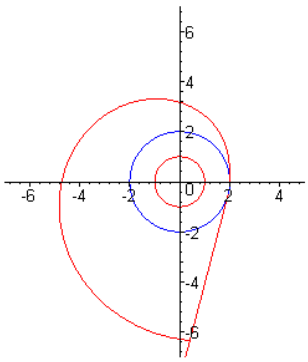
Obrázek 62: Prostá evolventa

2. **Zkrácená evolventa**- bod, který leží v polorovině přímky, která neleží na kružnici a platí: $\boldsymbol{d} > 0$, kde $\boldsymbol{d}$ určuje vzdálenost tvořící přímky od středu kružnice (viz ***Obrázek 63***).



Obrázek 63: Zkrácená evolventa

3. **<u>Prodloužená evolventa</u>**- bod, který leží s kružnicí v polorovině přímky a platí: $\boldsymbol{d} < 0$, kde $\boldsymbol{d}$ určuje vzdálenost tvořící přímky od středu kružnice (viz ***Obrázek 64***).



Obrázek 64: Prodloužená evolventa

8 Speciální rovinné křivky

8.1 Spirály

Spirály jsou speciálním druhem rovinné křivky. Vznikají, pokud se bod kotálí po přímce, která se současně kotálí okolo pevného bodu. Existuje spousta druhů spirál, které rozlišujeme podle druhu pohybu. My si řekneme něco o těch nejznámějších, a to je Archimédova a Logaritmická spirála.

8.1.1 Archimédova spirála

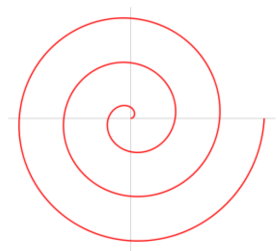
Charakteristika Archimédovy spirály má více podob. Vzniká jako prodloužená evolventa, která se kotálí jako tečna po pevně stanoveném středu kružnice. Tvořící bod je tedy střed kružnice (viz ***Obrázek 65***).

<u>Použití</u>: S Archimédovou spirálou se běžně setkáváme v životě. Používá se hlavně ve strojírenství (tzv. Archimédův šroub), různé šrouby atd.

Archimédovu spirálu lze zapsat v **polárních souřadnicích** takto:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{\varphi}, \text{ kde } k > 0,$$

$\boldsymbol{k}$ je tedy koeficient úměrnosti (kladné číslo), $\boldsymbol{\varphi}$ je úhel příslušný příslušnému bodu spirály.



Obrázek 65: Archimédova spirála

Archimédovu spirálu lze zapsat také v parametrických rovnicích. Je to z důvodu, pokud ji budeme vytvářet v PC programu, tak by nám polární souřadnice nestačily. Parametrické rovnice jsou tedy:

$$\mathbf{x = r\ cost = at\ cost}$$

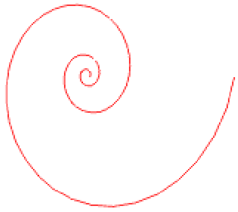
$$\mathbf{y = r\ sint = at\ sint},$$

kde t je parametr.

8.1.2 LOGARITMICKÁ SPIRÁLA

„Logaritmická spirála je křivka, jejíž poloměr $\boldsymbol{r}$ roste exponenciálně s velikostí úhlu.“

(Wikipedia, 2012)



Obrázek 66: Logaritmická spirála

Logaritmickou spirálu lze zapsat v **polárních souřadnicích** takto:

$$\boldsymbol{r = a.e^{b\varphi}},$$

kde $\boldsymbol{r}$ je poloměr neboli vektor, který spojuje bod s pólem spirály P.

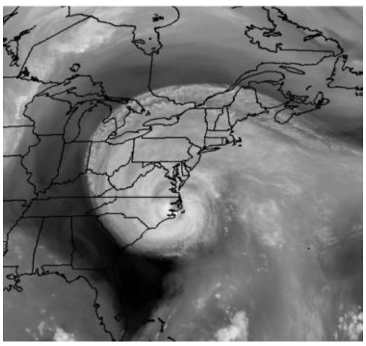
Stejně jako Archimédovu spirálu, tak i logaritmickou spirálu lze také zapsat v parametrických rovnicích:

$$\mathbf{x = r\,cost = ae^{bt}\,cost}$$

$$\mathbf{y = r\,sint = ae^{bt}\,sint}$$

kde t parametr.

Použití: S logaritmickou spirálou se běžně setkáváme v životě. Její spirálovitý tvar mají mořské lastury, semena slunečnice nebo květák. Také tvarem připomíná hurikán (viz ***Obrázek 68***) nebo galaxie ve vesmíru (viz ***Obrázek 67***).

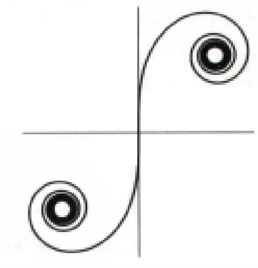


Obrázek 67: Galaxie M51

Obrázek 68: Hurikán Isabela

8.2 KLOTOIDA

Klotoida patří mezi další speciální rovinné křivky. Vznikne, pokud budeme mít bod, ve kterém bude křivost přímo úměrná vzdálenosti bodu od počátku (viz ***Obrázek 69***). Využíváme ji jako přechodovou křivku mezi kružnicí a přímkou.



Obrázek 69: Klotoida

Klotoidu lze vyjádřit pomocí **přirozených rovnic**:

$$ {}^{1}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{as} + \boldsymbol{b}, $$

$$ {}^{2}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{0}, $$

kde ${}^{1}\boldsymbol{k}$ je první křivost, ${}^{2}\boldsymbol{k}$ je druhá křivost, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ jsou konstantní parametry a $\boldsymbol{s}$ je parametr, který určuje velikost (délku) křivky.

Klotoidu lze vyjádřit i **parametricky** a to pomocí Fresnelových integrálů, které se počítají numerickými metodami:

$$ x = \int_0^u \sin(u^2)\, du $$

$$ y = \int_0^u \cos(u^2)\, du, $$

kde $u \in \mathbb{R}$.

Použití: Klotoidy se používají hlavně ve stavitelství- silnice (viz ***Obrázek 71***), horské dráhy (viz ***Obrázek 70***) atd.

Obrázek 70: Klotoida (horská dráha)

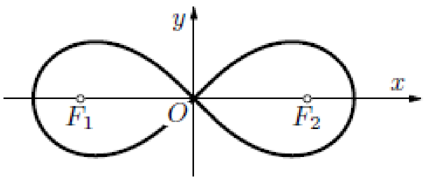
Obrázek 71: Klotoida (silnice)

8.3 ALGEBRAICKÉ KŘIVKY

Algebraické křivky se řadí mezi rovinné křivky.

8.3.1 BERNOULLIHO LEMNISKÁTA

Bernoulliho lemniskáta je speciálním případem Cassiniho oválů. Její tvar připomíná osmičku nebo nekonečno. Slovo lemniskáta pochází z řeckého *lemniskos*, což znamená **smyčka** (viz ***Obrázek 72***).



Obrázek 72: Bernoulliho lemniskáta

Bernoulliho lemniskáta je množina bodů, jejichž součin vzdáleností od dvou pevně zvolených ohnisek je roven konstantě

$$\left(\frac{|F_1F_2|}{2}\right)^2.$$

Její rovnici lze tedy zapsat:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2e^2(y^2 - x^2) = 0$$

Tuto rovnici lze převést do polární rovnice:

$$\boldsymbol{r^2 = a^2 cos\ 2\varphi,}$$

kde $\boldsymbol{a}$ je konstanta.

Pokud budeme zapisovat tuto křivku do PC, musíme znát její parametrický tvar:

$$x = \sqrt{2e}\,\frac{\cos t}{1 + sin^2 t}$$

$$y = \sqrt{2e}\,\frac{\sin t \cos t}{1 + sin^2 t}.$$

Výskyt a použití: S Bernoulliho lemniskátou se můžeme setkat u meandrujících řek, které ji opisují. Najdeme ji také u železničních přechodnic. Je také obrazem hyperboly v kruhové inverzi, kdy střed kružnice, podle které je inverze prováděna, splývá se středem zadané hyperboly a zároveň tato kružnice prochází ohnisky hyperboly. Proto se též nazývá hyperbolická lemniskáta.

Konstrukce:

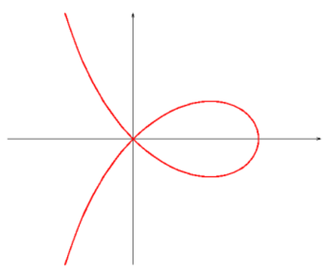
Konstrukce Bernoulliho lemniskáty se provádí pomocí dvou kružnic a polopřímky:

1. „Narýsujeme kružnici o poloměru r
2. Zvolíme libovolný bod O ve vzdálenosti $\sqrt{2r}$ od středu kružnice
3. Zvolíme takovou polopřímku, aby měla počátek v bodě O a protínala kružnici. Průsečíky s kružnicí označíme P_1 a P_2.
4. Množina bodů P, které leží na této polopřímce a vzdálenost OP je rovná vzdálenosti P_1P_2 je jednou smyčkou lemniskáty, druhou získáme stejným způsobem s druhou kružnicí, která bude s první souměrná podle bodu O.“

(Samková, 2005-2006)

8.3.2 Strofoida

Strofoida je další speciální křivka, kterou řadíme mezi rovinné křivky (viz ***Obrázek 73***).



Obrázek 73: Strofoida

„ Svazek kružnic o společné tečně v ose $\boldsymbol{x}$ s bodem dotyku v počátku protneme průměry vedenými bodem $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{a}, \mathbf{0}]$. Krajní body průměru jsou body (přímé) strofoidy, která má v polárních souřadnicích rovnici

$$r = a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\ .\text{"}$$

(Jarešová-Volf, 2010)

Rovnici Strofoidy zapisujeme:

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2) = 0.$$

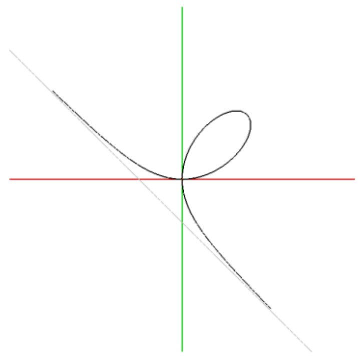
Pokud budeme zapisovat tuto křivku do PC, musíme znát její parametrický tvar:

$$x = \frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}$$

$$y = \frac{at(1 - t^2)}{1 + t^2}.$$

8.3.3 DESCARTESŮV LIST

Descartesův list je křivka, kterou řadíme mezi speciální rovinné křivky 3. stupně. Dá se říct, že je to kissoida elipsy (viz ***Obrázek 74***).



Obrázek 74: Descartesův list

- **<u>KISSOIDA</u>**

Je křivka, která vznikne pomocí dvou křivek (a, b) a pevného bodu P.

Nyní si řekneme něco k rovnici Descartesova listu:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \ \ kde\ a \neq 0, a > 0.$$

Descartův list lze vyjádřit i **parametricky**:

$$\boldsymbol{x = \frac{3\,at}{1+t^3}}$$

$$\boldsymbol{y = \frac{3\,at^2}{1+t^3}},$$

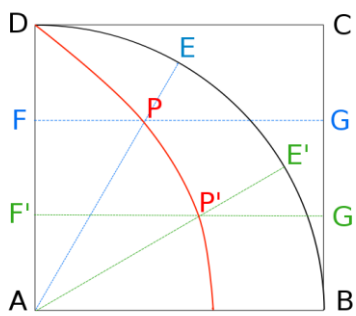
kde $t \in (-\infty, \infty), t \neq -1.$

Vlastnosti: Tato křivka je souměrná podle přímky $\boldsymbol{y = x}$, v bodě O má uzel.

8.3.4 HIPPIOVA KVADRATRIX

Hippiova kvadratrix je zajímavá z hlediska, že se váže ke třem euklidovsky neřešitelným problémům starověku, které jsem uvedla v 1. části mé práce- kvadratura kruhu, zdvojení krychle a trisekce úhlu (rozdělení úhlu na 3 části).

Z ***Obrázku 75*** je patrné, že Hippiova kvadratrix je křivka (červená čára), kterou opisuje průsečík *P*, jenž vzniká pomocí rovnoměrně se pohybujících úseček, a to úsečky otáčející se kolem počátku *AE* (modrá úsečka) a posouvané úsečky *FG* (zelená úsečka). Přičemž oba pohyby těchto úseček začínají i končí ve stejný okamžik.



Obrázek 75- Hippiova kvadratrix

9 ZÁVĚR

Cílem mé bakalářské práce bylo shrnout ty nejzajímavější křivky. Začala jsem jejich historií, jak a kde objevily, jak se vyvíjely atd. Uvedla jsem také známé matematiky, které se zasloužili o důležité poznatky o křivkách.

Každá křivka je něčím zajímavá, proto jsem se snažila uvádět příklady a přikládat obrázky pro lepší představu.

Doufám, že se moje bakalářská práce bude líbit a pomůže případně objasnit některé křivky.

10 SEZNAM LITERATURY

[1] LOMTATIDZE, Lenka. *Historický vývoj pojmu křivka*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. 22 s. ISBN 978-80-7204-4.

[2] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky*. 3., nezměněné vydání. Praha: Nakladatelství technické literatury SNTL, 1968. 250 s, 268-269 s.

[3] PECH, Pavel. *Kuželosečky*. 1. vydání. Jihočeská univerzita: Vlastimil Johanus Tiskárna, 2007. 7-11 s, 26-30 s, 43-50 s, 56 s. ISBN 80-7040-755-7.

[4] JEŽEK, František. *Diferenciální geometrie*. *Pomocný učební text*. Plzeň. Leden 2004. 4 s.

[5] JAREŠOVÁ, VOLF. *Matematika křivek*. *Studijní text pro řešitele FO a ostatní zájemce o fyziku*. 2010. 24-26, 30, 34, 53-54, 57 s.

INTERNETOVÉ ZDROJE:

[6] ÚSTAV MATEMATIKY FSI VUT BRNO. *MATEMATIKA ONLINE* [online]. 2005 [cit. 2011-11-20]. Dostupné z WWW: <http://mathonline.fme.vutbr.cz/Krivky/sc-1182-sr-1-a-165/default.aspx>.

[7] WIKIPEDIE. *SEČNA* [online]. 2012. [cit. 2011-12-05]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Se%C4%8Dna>.

[8] WIKIPEDIE. *KŘIVKA* [online]. 2012. [cit. 2011-12-05]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/K%C5%99ivka#Prostorov.C3.A1_k.C5.99ivka>.

[9] GÜTTNEROVÁ. KŘIVKY- *VYTVOŘENÍ, ROZDĚLENÍ, TEČNA*[online]. 2008.4 s. [cit. 2011-12-05]. Dostupné z WWW: <http://homel.vsb.cz/~gut53/pdf_soubory/pr07n.pdf>.

[10] SURYNKOVÁ. *3D MODELING*[online]. 2007. [cit. 2012-02-06]. Dostupné z WWW: <http://surynkova.info/3D_modeling.php>.

[11] ALEXANDR, Lubomír. *DIPLOMOVÁ PRÁCE* [online]. 2012. [cit. 2011-02-05]. Dostupné z WWW: <http://lubovo.misto.cz/_MAIL_/curves/krivky.html>.

[12] ANALYTICKÁ GEOMETRIE. *KUŽELOSEČKY*[online]. 2012. [cit. 2012-02-01]. Dostupné z WWW:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan_koncel/kuzelosecky.php?kapitola=kuzelosecky>

[13] MATEMATIKA POLOPATĚ. *PŘÍMKA*[online]. 2012. [cit. 2012-02-05]. Dostupné z WWW: <http://www.matweb.cz/primka>

[14] BRNĚNSKÝ KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ. *KŘIVKY V PROMĚNNÁCH VĚKŮ* [online]. 2012. [cit. 2012-02-06]. Dostupné z WWW:

<http://brkos.math.muni.cz/files/download/K%C5%99ivky%20v%20prom%C4%9Bn%C3%A1ch%20v%C4%9Bk%C5%AF.pdf>

[15] SAMKOVÁ, *CASSINIHO KŘIVKA A OVÁL*.[online]. 2005-2006. [cit. 2012-02-06]. Dostupné z WWW: <http://geometrie.kma.zcu.cz/work/KS/Cassini/CassiniOdk.pdf>

[16] GEOMETRIE ZČU PLZEŇ, *CASSINIHO KŘIVKA A OVÁL, BERNOULLIHO LEMNISKÁTA*.[online]. 2005-2006. [cit. 2012-02-06]. 5,7 s. Dostupné z WWW:

<http://geometrie.kma.zcu.cz/work/KS/Cassini/CassiniOdk.pdf>

[17] VALA. *ANALYTICKÁ GEOMETRIE KŘIVEK A PLOCH TECHNICKÉ PRAXE. DOPLŇKOVÝ MATERIÁL PRO SAMOSTATNÉ STUDIUM*.[online].2006. [cit. 2012-03-02]. 9-11 s. Dostupné z WWW:

<http://mat.fsv.cvut.cz/BAKALARI/kog/files/Anal_Geo.pdf>

[18] MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ. *KŘIVKY KOLEM NÁS*.[online]. 2006. [cit. 2012-03-02]. Dostupné z WWW: <http://ucitele.sci.muni.cz/materialy/139_1.pdf>

[19] WIKIPEDIA. *SPIRÁLA*.[online]. 2006. [cit. 2012-03-07]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Logaritmická_spirála>

[20] JUKLOVÁ. *ARCHIMÉDOVA SPIRÁLA*.[online]. 2010. [cit. 2012-03-07]. Dostupné z WWW: <http://kag.upol.cz/juklova/3rocnik/KGE6.html>

[21] JUKLOVÁ. *CYKLICKÉ POHYBY*.[online]. 2010. [cit. 2012-03-07]. Dostupné z WWW: <http://kag.upol.cz/juklova/3rocnik/KGE2.html>

[22] ŘÍHOVÁ. *EPICYKLOIDY A HYPOCYKLOIDY*. [online]. 2010. [cit. 2012-03-07]. Dostupné z WWW: <http://dagles.klenot.cz/rihova/krivky.html>

[23] KONČEL. *GEOMETRIE V ROVINĚ-OBECNÁ ROVNICE PŘÍMKY.* [online]. 2009. [cit. 2012-03-07]. Dostupné z WWW:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan_koncel/rovina.php?kapitola=obecnaRovnice>

[24] KONČEL. *GEOMETRIE V PROSTORU-PARAMETRICKÉ VYJÁDŘENÍ PŘÍMKY.* [online]. 2009. [cit. 2012-03-07]. Dostupné z WWW:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan_koncel/prostor.php?kapitola=parametrickeVyjadreniPrimky>

[25] KONČEL. *GEOMETRIE V PROSTORU-VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK A ROVIN.* [online]. 2009. [cit. 2012-03-07]. Dostupné z WWW:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan_koncel/prostor.php?kapitola=vzajemnaPoloha>

[26] KONČEL. *GEOMETRIE V ROVINĚ-VZÁJEMNÁ POLOHA PŘÍMEK.*[online]. 2009. [cit. 2012-03-07]. Dostupné z WWW:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan_koncel/rovina.php?kapitola=vzajemnaPoloha>

SEZNAM INTERNETOVÝCH ZDROJŮ OBRÁZKŮ:

- ***Obrázek 1***- WIKIPEDIA. *VĚSTONICKÁ VENUŠE*[online]. 2007. [cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Vestonicka_venuse_edit.jpg>
- ***Obrázek 2-*** REVUE OBJEVŮ, VĚDY, TECHNIKY A LIDÍ 21. STOLETÍ. *STONEHENGE*[online]. 2011. [cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW:

  <http://21stoleti.cz/blog/2011/09/06/dalsi-spojeni-mazi-stonehenge-a walesem/stonehenge_distance/>
- ***Obrázek 3***- ABBYS UOREGON. *STONEHENGE*. [online]. 2011. [cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://abyss.uoregon.edu/~js/glossary/stonehenge.html>
- ***Obrázek 4***- LASTURA. *ESOTERICKÝ SLOVNÍČEK*[online]. 2011.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://www.lastura.cz/duchovno/esotericky_slovnicek/hor.html>

- ***Obrázek 5***- MASCH BLOG. *ŽIVOT A PŘÍRODA V PÍSMU*.[online].2008.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://masch.blog.cz/0804/zivot-a-priroda-v-pismu>
- ***Obrázek 6***- GATE GAME GOTHIC BLOG. *GOTIKA*.[online]. 2011.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: < http://gategamegothic.blogspot.cz/2011/04/gotika.html>
- ***Obrázek 7***- WIKIPEDIA. GOTICKÁ KLENBA.[online]. 2005.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: < http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Kryssvalv.png>
- ***Obrázek 8***- WIKIPEDIA. KRUŽBA.[online]. 2006.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Roosvenster_van_de_notre_dame_de_paris.jpg>
- ***Obrázek 10,11***- LUBOMÍR ALEXANDR. *DIPLOMOVÁ PRÁCE*.[online]. 2000 [cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://lubovo.misto.cz/_MAIL_/curves/krivky.html>
- ***Obrázek 28***- ŠPINAR SOFTWARE. *ŠROUBOVICE*.[online]. 2011.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW:

  <http://www.spinar.cz/produkt/turbocad_deluxe_v18/images/tcp16/tc_16_1.jpg>
- ***Obrázek 29***- TVOJ DOM. *SCHODISKO PRE NÁROČNÝCH*.[online]. 2008.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW:

  <http://www.tvojdom.sk/aktuality/zo-sveta-byvania/schodisko-pre-narocnych.aspx>
- ***Obrázek 30***- BLOG TITTLE. *SCREW CONVEYOR*.[online].[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW:<http://precisionsportsguns.com/modules/com_easybook/screw-conveyor-314.html>
- ***Obrázek 31***- WIKIPEDIA. *KUŽELOSEČKA*.[online].2009.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Kuzelosecky.png>
- ***Obrázek 32***- WIKIPEDIA. *KUŽELOSEČKA*.[online].2006.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: < http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Conic_sections_2n.png>
- ***Obrázek 33***- WIKIPEDIA. KRUŽNICE.[online]. 2008.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Kruh-1.svg>
- ***Obrázek 34***- KONČEL. *KUŽELOSEČKY-KRUŽNICE*. [online]. 2009.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan_koncel/kuzelosecky.php?kapitola=kruznice>

- ***Obrázek 35***- WIKIPEDIA. *KRUH.*[online]. 2008.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Kruh-2.svg>
- ***Obrázek 37***- ANALYTICKÁ GEOMETRIE. *KUŽELOSEČKY- PARABOLA*. [online]. 2009.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW:

  <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan_koncel/kuzelosecky.php?kapitola=parabola>
- ***Obrázek 38-41***- ANALYTICKÁ GEOMETRIE. KUŽELOSEČKY- *VZÁJEMNÁ POLOHA PARABOLY A PŘÍMKY.* [online]. 2009.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan_koncel/kuzelosecky.php?kapitola=parabolaAPrimka>
- ***Obrázek 42***- KINEMATICKÁ GEOMETRIE. *POLOIDA*. [online]. 2005.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW:

  <http://mathonline.fme.vutbr.cz/1kg/11_Kinematika/Kinematika.htm>
- ***Obrázek 43-47***- ODDĚLENÍ GEOMETRIE ZČU PLZEŇ. *KINEMATICKÁ GEOMETRIE V ROVINĚ.*[online]. 2009.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW:

  <geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/.../kinematika.pdf>
- ***Obrázek 48,49,50***- WIKIPEDIA. *CYKLOIDA*.[online]. 2007.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Cykloida_prosta.png>
- ***Obrázek 51***- WIKIPEDIA. *EPICYKLOIDA PROSTÁ*. [online]. 2007.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Epicykloida_prosta.png>
- ***Obrázek 52,53***- WIKIPEDIA. *EPICYKLOIDA ZKRÁCENÁ A PRODLOUŽENÁ.* [online]. 2007.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW:

  <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Epicykloida_zkracena_prodlouzena.png>
- ***Obrázek 54***- WIKIPEDIA. *KARDIOIDA*.[online]. 2007.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Kardioida.png>

- ***Obrázek 55-*** WIKIPEDIA. *NEFROIDA*.[online]. 2008.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Nefroida.png>
- ***Obrázek 56-*** WIKIPEDIA. *HYPOCYKLOIDA PROSTÁ*. [online]. 2007.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Hypocykloida_prosta.png>
- ***Obrázek 57,58-*** WIKIPEDIA. *HYPOCYKLOIDA PRODLOUŽENÁ A ZKRÁCENÁ*. [online]. 2007.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW:

  <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Hypocykloida_prodlouzena_zkracena.png>
- ***Obrázek 59-*** JUKLOVÁ. *KINEMATICKÁ GEOMETRIE*.[online]. 2008.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://kag.upol.cz/juklova/3rocnik/img3/kinema30.jpg>
- ***Obrázek 60-*** WIKIPEDIA. *ASTEROIDA*. [online]. 2007.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Asteroida.png>
- ***Obrázek 61-*** ŘÍHOVÁ. *KŘIVKY*. [online]. 2006.[cit. 2012-03-06].6 s.Dostupné z WWW: <http://dagles.klenot.cz/rihova/krivky.pdf>
- ***Obrázek 62- 64-*** PROCHÁZKOVÁ. *EVOLVENTA KRUŽNICE*.[online]. 2008.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW:

  <http://prochazkovajana.ic.cz/cykloidy/maple/mapleevolv.htm>
- ***Obrázek 65-*** WIKIPEDIA. *ARCHIMÉDOVA SPIRÁLA*. [online]. 2009.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Archimedean_spiral.svg>
- ***Obrázek 66-*** FJFI ČVUT PRAHA. *MATEMATICKÉ ZAJÍMAVOSTI*.[online]. 2009.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://geraldine.fjfi.cvut.cz/info/zaj.html>
- ***Obrázek 67,68-*** NASA. *HURIKÁN ISABEL*.[online]. 2009.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://apod.nasa.gov/apod/image/0309/m51-isabel_lula_full.jpg>
- ***Obrázek 69-*** WIKIPEDIA. *KLOTOIDA*. [online]. 2006.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://pl.wikipedia.org/w/index.php?title=Plik:Cornu_spiral.png&filetimestamp=20060927082232>
- ***Obrázek 70-*** GEOMETRIE ZČU PLZEŇ. *KLOTOIDA*. [online]. 2006.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://geometrie.kma.zcu.cz/work/KS/Klotoida/obr5.jpg>

- ***Obrázek 71***- GEOMETRIE ZČU PLZEŇ. *KLOTOIDA*. [online]. 2006.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW: <http://geometrie.kma.zcu.cz/work/KS/Klotoida/obr6.jpg>
- ***Obrázek 72-*** WIKIPEDIA. *BERNOULLIOVA LEMNISKÁTA*.[online]. 2007.[cit. 2012-03-06]. Dostupné z WWW:

  <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Bernoulliova_lemniskata.png>
- ***Obrázek 73-*** WIKIPEDIA. *STROFOIDA*.[online]. 2007.[cit. 2012-05-12]. Dostupné z WWW: <http://pl.m.wikipedia.org/wiki/Strofoida_(matematyka)>
- ***Obrázek 74-*** WIKIPEDIA. *DESCARTESŮV LIST*.[online]. 2007.[cit. 2012-05-12]. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Descartesuv_list.png>
- ***Obrázek 75***- WIKIPEDIA. *HIPPIOVA KVADRATRIX*. [online]. 2010.[cit. 2012-05-12]. Dostupné z WWW:

  <http://hu.wikipedia.org/w/index.php?title=F%C3%A1jl:QuadratrixHippias.svg&filetimestamp=20100207173820>

11 Seznam obrázků

12 RESUMÉ

The aim of this bachelor work was to develop a specialized text which is dealing with analytically and geometrically defined curves and their properties. The work is complemented by a visual graphic representation of geometrically defined curves, commenting possibilities of their use and their occurrences (in geometry, physics, etc.).