Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta pedagogická

Bakalářská práce

ZÁKLADNÍ SUMAČNÍ TECHNIKY

Daniel Tyr

Plzeň 2012

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, …………………… 2012

………………………………

vlastnoruční podpis

Děkuji vedoucímu bakalářské práce, **Doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc.,** za ochotu, vstřícnost, trpělivost, rady a užitečné připomínky, které mi pomohly vytvořit tuto práci.

Obsah

Úvod

V současné době výuka matematiky na základních i středních školách využívá i matematických softwarů. Studenti jsou tak vedeni poznávat, jak počítač využívá matematiku, jakožto nástroj nezbytný k tomu, aby počítač vůbec mohl pracovat. Domnívám se, že v brzké době bude po středoškolském studentovi vyžadováno, aby uměl pracovat s matematickým softwarem, neboť tuto dovednost posléze uplatní na vyšších stupních škol. Jsem toho názoru, že je vhodné, aby se budoucí učitel seznámil s některou sumační technikou – proto jsem si vybral toto téma bakalářské práce. Dále se domnívám, že chce-li se učitel seznámit s takovou technikou, bylo by vhodné, aby nejprve získal pohled do dob, ve kterých matematika ještě nebyla vůbec svázána s informační technologií, proto jsem svou práci pojal jako celek tvořený dvěma částmi – „lidské sumační metody“, tj. postupy, které využijeme bez pomoci počítače, a „počítačové sumační metody“. Práci jsem rozčlenil do pěti základních kapitol. V práci uvádím mnoho řešených příkladů a samozřejmě historické poznámky.

První kapitola podává pohled na sčítání nekonečných číselných řad ve středověku, obsahuje ukázky přínosu francouzského matematika Nicolase Oresma.

Druhá kapitola podává současný pohled na geometrickou řadu, obsahuje také zobecnění této řady. S takovým zobecněním se může setkat i středoškolský student, proto jsem jej do své práce zařadil.

Třetí kapitola, kterou jsem nazval Některé metody sčítání nekonečných řad, obsahuje tzv. teleskopickou metodu (někdy nazývanou metoda rozkladu na parciální zlomky) a metodu, při které vyslovíme hypotézu, že posloupnost částečných součtů je dána jistým vzorcem a platnost tohoto vzorce následně dokážeme matematickou indukcí. S těmito metodami se setká středoškolský učitel, proto jsem je do své práce rovněž zařadil.

Čtvrtá kapitola je věnována rezultantu dvou polynomů, který je spjat s přínosem anglického matematika Jamese Josepha Sylvestera (1814 – 1897). Rezultant dvou polynomů lze v některých případech využít pro nalezení reálného řešení soustavy nelineárních rovnic o dvou neznámých. Však tento rezultant uvádím ve své práci především proto, že je nezbytnou součástí Gosperova algoritmu, který uvádím v páté kapitole své práce.

V páté kapitole jsem se zabýval Gosperovým algoritmem. Algoritmus zavedl William Gosper, současný americký matematik a programátor, algoritmus využívají některé současné matematické počítačové programy. V této kapitole uvádím teoretický základ tohoto algoritmu, dále pak mnoho řešených příkladů bez pomoci matematického softwaru i s jeho pomocí.

1 Nicole Oresme

Tato kapitola je čerpána z literatury [1], z internetových zdrojů [20] a [21].

převzato z [20] **obr. 1**

První pokusy o studium číselných řad sahají hluboko do historie lidstva. Například geometrická řada se objevuje již v antice (můžeme se o ní zmínit např. v souvislosti se známým ***Zenónovým*** paradoxem ***Achillés a želva***), s aritmetickou řadou již pracoval indický matematik ***Árjabhatta I.*** $(476-550)$. K významným osobnostem středověké matematiky v Evropě patří francouzský učenec ***Nicole Oresme*** (žil v letech kolem $1323-1382$), viz obr. 1., který přeložil řadu Aristotelových spisů, v letech $1348-1361$ přednášel na Collége de Navarre v Paříži. V roce 1356 byl vysvěcen na kněze a od roku 1377 byl biskupem v Lisieux v Normandii. Vysvětlení svých myšlenek z oblasti matematiky podával většinou jednoduchou geometrickou interpretací, čímž se lišil od svých současníků.

Jeho prvním významným dílem je ***Algorismus poměrů*** (*Algorismus proportionum*) mající tři části. V té první zaváděl tzv. *n*-násobné poměry čísla a odpovídající současnému zápisu $a^1, a^2, a^3, \ldots, a^n$, také racionální lomené poměry čísla a odpovídající současnému zápisu např. $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{1}{3}}, a^{\frac{3}{2}}$. Věděl například, že $8 = 4^{\frac{3}{2}}$, jelikož osm se nachází v „půldruhanásobném" (tj. $\frac{3}{2}$) poměru ke čtyřem, tj. $4^3 = 64$ a $64 = 8^2$.

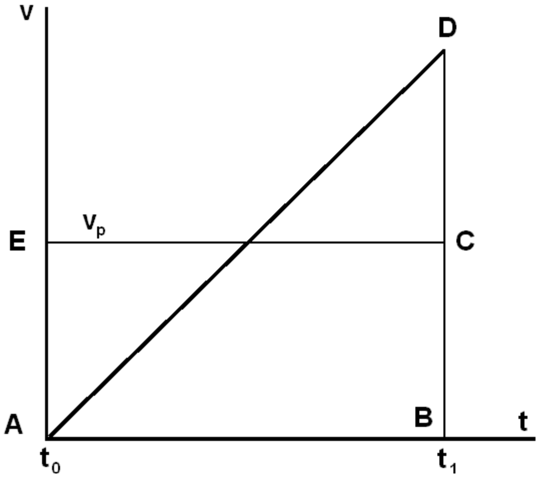
Dále formuluje pravidla pro operace s lomenými poměry, které dnes známe v podobě

$$\text{např. } a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \text{ apod.}$$

Druhá a třetí část díla obsahuje úlohy na užití těchto algoritmů.

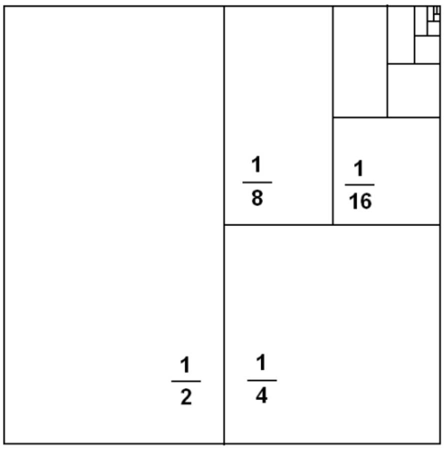
Další své významné dílo Oresme nazval *Teorie forem*. Ve srovnání se svými tehdejšími současníky-matematiky, mezi nimiž můžeme jmenovat Richarda Swinesheada, Johna Dunze, Williama Heytesburyho a Johna Dumbletona, vyjádřil Oresme tuto nauku jednodušeji, neboť užil geometrického vyjadřování veličin a jejich vzájemných závislostí. Uvádí, že každou měřitelnou věc lze vyjádřit jako spojitou veličinu a k tomu jsou zapotřebí body, čáry a plochy.

Užívá pojem *kvalita*, kterým popisuje druh fyzikální veličiny (např. rychlost) a pojem *intenzita*, kterým vyjadřuje číselnou hodnotu této fyzikální veličiny. Dále uvádí, že *intenzita kvalit* (tj. číselná hodnota fyzikální veličiny) závisí na *extenzitě* (rozpínavosti). Extenzitou je přitom jiná libovolná fyzikální veličina, např. čas. Možná tím dává prvotní inspiraci k zavedení kartézské soustavy souřadnic, na kterém se pak podílel René Descartes.



obr. 2

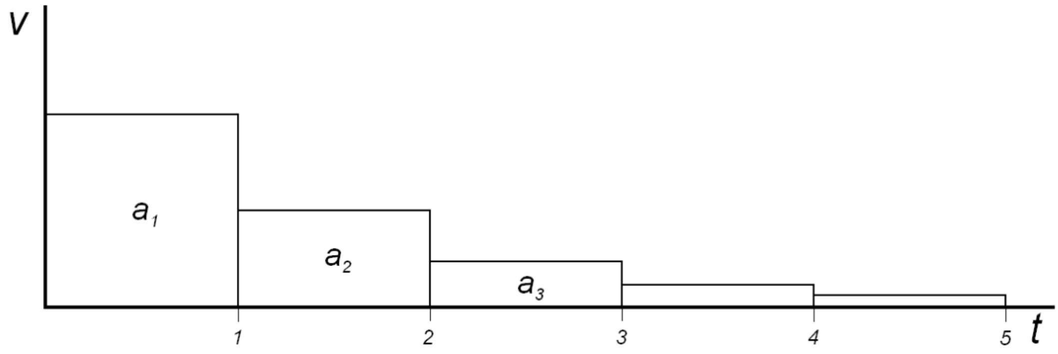
V sedmé kapitole třetího dílu dokazuje ekvivalenci rovnoměrně zrychleného pohybu a rovnoměrného pohybu s průměrnou rychlostí. *Obr*. 2. zobrazuje grafy těchto pohybů. Popisuje skutečnost, že těleso může konat rovnoměrně zrychlený pohyb po dobu $\Delta t = t_1 - t_0$ a přitom urazí dráhu číselně rovnou obsahu plochy trojúhelníka ABD. Anebo se bude po stejnou dobu pohybovat průměrnou rychlostí v_p a přitom urazí stejnou dráhu, tj. dráhu, která je číselně rovna velikost obsahu obdélníka $ABCE$. Je zřejmé, že obsahy obou uvedených obrazců jsou si rovny.



obr. 3

Dále si také uvědomoval, že součet nekonečně mnoha čísel může být konečným číslem. Věděl, že když jednotkový čtverec rozdělí na polovinu úsečkou, kterou vede středy protilehlých stran, může psát, že $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. Libovolný obdélník ze dvou právě vzniklých opět dělí na polovinu tak, že vede úsečku středy protilehlých stran a píše, že $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$. Tímto způsobem může neustále pokračovat. V současnosti řekneme, že si takto vytvořil nekonečnou geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{1}{2}$. Tento Oresmův geometrický přístup je dodnes využíván učiteli matematiky na středních školách pro výklad pojmu nekonečná geometrická řada.

Oresme komentoval sčítání řad z fyzikálního pohledu, např. řadu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$. Nejprve ji geometricky interpretuje: První člen a_1 je číselně roven obsahu jednotkového čtverce, druhý člen a_2 je číselně roven obsahu obdélníka, jehož strany mají délky 1, $\frac{1}{2}$. Třetí člen a_3 je číselně roven obsahu obdélníka, jehož strany mají délky 1, $\frac{1}{4}$. Tímto způsobem vytváří další obdélníky. Obecně tedy $n-tý$ člen a_n je číselně roven obsahu obdélníka, jehož strany mají délky 1, $\frac{1}{2^{n-1}}$. Jednotlivé obrazce (resp. členy) staví určitým způsobem na sebe a tím vzniká jakýsi obrazec s konečným obsahem a nekonečným obvodem. Poté tento vzniklý obrazec otočí o $90°$ ve směru hodinových ručiček – viz *obr.* 4., podobný nalezneme v [1].



obr. 4

Řadu komentuje z fyzikálního pohledu: " *Těleso teprve za celou věčnost urazí dráhu dvakrát větší než je ta, kterou urazilo za první část času. Ale ať bereme jakoukoliv část dráhy, vždy bude menší, než zdvojnásobený úsek dráhy, která se urazí za první den.* " . Touto řadou popisuje závislost rychlosti na čase, rychlost se mění skokovitě a jednotlivé časové intervaly představují po sobě jdoucí dny.

Oresme byl mezi prvními, kteří dokazovali divergenci harmonické řady. Důkaz opět provádí jednoduchým způsobem (ve srovnání se svými současníky - matematiky) ve svém díle *Questiones super Geometriam Euclidis*:

Součet $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...$ *je nekonečný, neboť součet* $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ *je větší než* $\frac{1}{2}$*, součet částí od* $\frac{1}{5}$ *do* $\frac{1}{8}$ *je větší než* $\frac{1}{2}$*, součet částí od* $\frac{1}{9}$ *do* $\frac{1}{16}$ *je také větší než* $\frac{1}{2}$. V dnešní době bychom mohli tuto úvahu zapsat takto:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}+...\right)\geq$$

$$\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+\ldots=$$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$. Odtud je již vidět, že řada je divergentní.

2 Geometrická řada v současnosti

2.1 Dnešní školní pohled na geometrickou řadu

Máme-li definovat nekonečnou geometrickou řadu, bylo by vhodné nejprve uvést definici geometrické posloupnosti. Vyslovme ji.

(Definice 2.1.1)

Geometrickou posloupností reálných čísel rozumíme posloupnost takovou, že platí:

$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \mathbb{R}$. Číslo q nazýváme kvocientem této posloupnosti.

Vyjádřeme členy geometrické posloupnosti pomocí čísla q a odvoďme vztah pro součet prvních n členů.

$a_1 = a_1$; $a_2 = a_1 q$; $a_3 = a_1 q^2$; ...; $a_n = a_1 q^{n-1}$; $a_{n+1} = a_1 q^n$ a proto bude platit

(1) $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}$ a rovněž také

(2) $s_{n+1} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n$

Ve vztahu (2) se budeme snažit nalézt vztah (1),

tedy $s_{n+1} = a_1 + q(a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1})$ a potom dostaneme:

(3) $s_{n+1} = a_1 + q s_n$. Jelikož však $s_{n+1} = s_n + a_1 q^n$, lze psát (4) $s_n + a_1 q^n = a_1 + q s_n$ a odtud již stačí vyjádřit hledaný s_n:

(5) $s_n - q s_n = a_1 - a_1 q^n \Rightarrow s_n(1-q) = a_1(1-q^n) \Rightarrow \boxed{s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}}\ \forall q \neq 1$

Vztah pro $q = 1$ vyplývá ze vztahu (1), tedy

$$s_n = a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 + a_1 \cdot 1 + \ldots + a_1 \cdot 1^{n-1} \Rightarrow \boxed{s_n = n a_1}$$

Poznamenejme, že toto odvození je možné nalézt např. v literatuře [14]. Nyní bychom mohli definovat nekonečnou geometrickou řadu.

(Definice 2.1.2)

Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ nazýváme nekonečnou číselnou řadou,

kde čísla a_n jsou členy této řady. Tuto řadu nazveme geometrickou, jestliže její členy tvoří geometrickou posloupnost.

Stručněji lze geometrickou řadu definovat součtem $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, kde $a \neq 0$, $q \neq 0$.

(Věta 2.1.1)

Geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, kde $a \neq 0$, $q \neq 0$, konverguje právě tehdy, když $|\, q \,| < 1$.

Z této věty plyne vzorec pro součet nekonečné geometrické řady:

$\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$ a protože $|\, q \,| < 1$, výraz q^n se limitně blíží k nule, tudíž součet této řady bude $s = \dfrac{a_1}{1-q}$. Prozkoumejme podrobněji konvergenci (resp. divergenci) této řady důkazem, který je možné nalézt např. v literatuře [9].

1) Nechť $q = 1$, potom posloupnost částečných součtů s_n je ve tvaru $s_n = an$, tudíž dostáváme dva případy:

   1a) $\lim\limits_{n\to\infty} an = +\infty$, pro $a > 0$

   1b) $\lim\limits_{n\to\infty} an = -\infty$, pro $a < 0$

2) Nechť $q = -1$, $a \neq 0$, potom geometrická řada je tvaru $a - a + a - a + ... + (-1)^{n-1} a + ...$ a posloupnost částečných součtů obsahuje jen dvě hodnoty:

   2a) $s_n = a$ pro lichá n

   2b) $s_n = 0$ pro sudá n

   Tedy platí, že $s_n = 0,\ a,\ 0,\ a,\ ...$, tudíž řada je oscilující.

3) Nechť $|\, q \,| > 1$ a opět dostáváme dva případy, tj. 3a), 3b).

   Připomeňme, že pro součet prvních n členů platí vzorec $s_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{a_1}{1-q} - a_1 \dfrac{q^n}{1-q}$.

   3a) Pro $q > 1$ dostáváme, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$

   3b) Pro $q < -1$ zjišťujeme, že řada je oscilující.

4) Nechť $|\, q \,| < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q} = \dfrac{a_1}{1-q} = s$, což bylo již uvedeno před důkazem.

Věta se běžně užívá ve středoškolských úlohách, připomeňme jednu takovou, např. z [15]:

(Příklad 2.1.1)

Máme rozhodnout o konvergenci řady $-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}+\frac{1}{24}-\ldots$ a případně určit její součet.

Řešení: Zřejmě jde o geometrickou řadu s kvocientem $q=-\frac{1}{2}$. Protože $|\, q \,| < 1$, řada konverguje a platí $s=\dfrac{a_1}{1-q}=\left(-\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{9}$.

2.2 Zobecnění geometrické řady

Ve středoškolských učebnicích matematiky je někdy možné setkat se s úlohami, ve kterých máme stanovit součty řad, které "připomínají" nekonečnou geometrickou řadu. V současnosti však takovýchto publikací mnoho dostupných není, snad jen s výjimkou [11]. Nám v současné době může připadat pozoruhodné, že takovéto úlohy řešili středoškolští studenti začátkem dvacátého století - důkazem je šesté vydání knihy [10], které vyšlo v roce 1902. Uveďme jeden příklad z této publikace [10] (str.196, cv.80):

(Příklad 2.2.1) Máme sečíst řadu $\frac{1}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{9}{2^3}+\frac{13}{2^4}+\ldots$.

Ta není geometrickou řadou. Označme $s_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2^2}+\dfrac{9}{2^3}+\dfrac{13}{2^4}+\ldots+\dfrac{4n-7}{2^{n-1}}+\dfrac{4n-3}{2^n}$ (1)

Kdybychom nalezli vzorec pro $n-tý$ člen posloupnosti částečných součtů s_n, už by stačilo jen vyčíslit limitu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$.

Jelikož však dostáváme $s_1=a_1=\frac{1}{2};\ s_2=a_1+a_2=\frac{7}{4};\ s_3=a_1+a_2+a_3=\frac{23}{8}$,

tímto způsobem posloupnost s_n vyjádřenou vzorcem pro $n-tý$ člen zřejmě nenalezneme.

Ale můžeme částečný součet s_n přepsat tak, aby obsahoval součet prvních n členů geometrické posloupnosti.

Vezmeme $\frac{1}{2}$ násobek zadaného částečného součtu s_n:

$$\frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{9}{2^4}+\frac{13}{2^5}+...+\frac{4n-7}{2^n}+\frac{4n-3}{2^{n+1}} \qquad (2)$$

Tento vztah (2) je vhodné zapsat tímto způsobem:

$$\frac{1}{2}s_n = 0+\frac{1}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{9}{2^4}+\frac{13}{2^5}+...+\frac{4n-7}{2^n}+\frac{4n-3}{2^{n+1}} \qquad (3)$$

Nyní rozdílem $s_n - \frac{1}{2}s_n$, tj. odečtením vztahů (1) a (3), získáme rovnost, ve které se "téměř celý" očekávaný částečný součet geometrické řady vyskytuje:

$$s_n - \frac{1}{2}s_n = \left(\frac{1}{2}-0\right)+\left(\frac{5}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{9}{2^3}-\frac{5}{2^3}\right)+...+\left(\frac{4n-3}{2^n}-\frac{4n-7}{2^n}\right)-\frac{4n-3}{2^{n+1}}, \text{ tedy}$$

$$\frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{4}{2^4}+...+\frac{4}{2^{n-1}}+\frac{4}{2^n}-\frac{4n-3}{2^{n+1}} \qquad (4)$$

Připomeňme, že částečný součet geometrické řady (označme jej x_n) je ve tvaru:

$$x_n = a_1q^0 + a_1q^1 + a_1q^2 + ... + a_1q^{n-1} \qquad (5)$$

Vztah (5) je potřeba nalézt ve vztahu (4), jinými slovy řečeno potřebujeme, aby se ve vztahu (4) **navíc** objevil výraz $\frac{4}{2^0}+\frac{4}{2^1}$, což provedeme jednoduchým způsobem:

$$\frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2}+\mathbf{\frac{4}{2^0}}+\mathbf{\frac{4}{2^1}}+\frac{4}{2^2}+...+\frac{4}{2^{n-1}}+\frac{4}{2^n}-\frac{4n-3}{2^{n+1}}-\mathbf{\frac{4}{2^0}}-\mathbf{\frac{4}{2^1}} \qquad (6)$$

$$\text{Označme } x_n = \frac{4}{2^0}+\frac{4}{2^1}+\frac{4}{2^2}+...+\frac{4}{2^{n-1}} \qquad (7)$$

Výraz x_n představuje sečíst prvních n členů geometrické posloupnosti, tedy platí vztah (8):

$$x_n = \frac{4}{2^0}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 8\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \qquad (8)$$

A proto lze psát: $$\frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2}+8\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{4}{2^n}-\frac{4n-3}{2^{n+1}}-\frac{4}{2^0}-\frac{4}{2^1} \qquad (9)$$

Po úpravách vztahu (9) dostaneme již hledaný částečný součet zadané řady:

$$s_n = 5-\frac{5+4n}{2^n} \qquad (10)$$

V závěru vyčíslíme limitu tohoto částečného součtu $\lim_{n\to\infty} s_n$:

$$s=\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{5+4n}{2^n}\right)=5.$$

Tato úloha by nás mohla motivovat k pokusu o zobecnění geometrické konvergentní řady, neboli pokusit se najít částečný součet s_n i součet s řady $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an+b}{c^n}$, kde $a,\ b\neq 0,\ c\notin\langle -1,\ 1\rangle$. Proveďme příslušné početní operace.

(Příklad 2.2.2) Chceme stanovit součet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an+b}{c^n}$, kde $a,\ b\neq 0,\ c\notin\langle -1,\ 1\rangle$.

Označme:
$$s_n=\frac{a+b}{c^1}+\frac{2a+b}{c^2}+\frac{3a+b}{c^3}+...+\frac{a(n-1)+b}{c^{n-1}}+\frac{an+b}{c^n} \qquad (1)$$

Vypočteme:
$$\frac{1}{c}s_n=0+\frac{a+b}{c^2}+\frac{2a+b}{c^3}+\frac{3a+b}{c^4}+...+\frac{a(n-1)+b}{c^n}+\frac{an+b}{c^{n+1}} \qquad (2)$$

Od vztahu (1) odečteme vztah (2):
$$s_n-\frac{1}{c}s_n=\frac{c-1}{c}s_n=\frac{a+b}{c}+\frac{a}{c^2}+\frac{a}{c^3}+...+\frac{a}{c^{n-1}}+\frac{a}{c^n}-\frac{an+b}{c^{n+1}} \qquad (3)$$

Zajistíme, aby vztah (3) obsahoval součet prvních n členů geometrické posloupnosti :
$$\frac{c-1}{c}s_n=\frac{a+b}{c}+\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c^0}}+\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c^1}}+\frac{a}{c^2}+\frac{a}{c^3}+...+\frac{a}{c^{n-1}}+\frac{a}{c^n}-\frac{an+b}{c^{n+1}}-\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c^0}}-\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c^1}} \qquad (4)$$

Označme:
$$x_n=\frac{a}{c^0}+\frac{a}{c^1}+\frac{a}{c^2}+\frac{a}{c^3}+...+\frac{a}{c^{n-1}} \qquad (5)$$

Víme, že platí: $x_n=\frac{a}{c^0}\cdot\frac{1-\frac{1}{c^n}}{1-\frac{1}{c}}=\frac{ac}{c-1}\left(1-\frac{1}{c^n}\right)$. A proto lze psát:

$$\frac{c-1}{c}s_n=\frac{a+b}{c}+\frac{ac}{c-1}\left(1-\frac{1}{c^n}\right)+\frac{a}{c^n}-\frac{an+b}{c^{n+1}}-a-\frac{a}{c} \qquad (6)$$

Vynásobením rovnosti (6) výrazem $\frac{c}{c-1}$ dostáváme po několika úpravách:
$$s_n=\frac{c(a+b)-b}{(c-1)^2}+\frac{a\left[n(1-c)-c\right]+b(1-c)}{(c-1)^2c^n} \qquad (7)$$

Následně stanovíme součet s:
$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{c(a+b)-b}{(c-1)^2}+\frac{a\left[n(1-c)-c\right]+b(1-c)}{(c-1)^2c^n}\right\}=\frac{c(a+b)-b}{(c-1)^2}.$$

2.3 Úvaha o zobecnění geometrické řady s polynomem stupně *k*

Metoda uvedená v podkapitole **2.2** možná působí dojmem, že spektrum jejího využití je příliš úzké. Touto metodou lze stanovit i součty podobných řad. Uveďme motivující příklad:

(Příklad 2.3.1) Stanovme součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Označme: $$s_n = \frac{1}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{9}{2^3} + \frac{16}{2^4} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{2^{n-1}} + \frac{n^2}{2^n} \qquad (1)$$

Vypočteme: $$\frac{1}{2}s_n = 0 + \frac{1}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{9}{2^4} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{2^n} + \frac{n^2}{2^{n+1}} \qquad (2)$$

Od vztahu (1) odečteme vztah (2):

$$s_n - \frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n} - \frac{n^2}{2^{n+1}} \qquad (3)$$

Vynásobením vztahu (3) číslem 2 dostáváme:

$$s_n = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^1} + \frac{5}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \ldots + \frac{2n-3}{2^{n-2}} + \frac{2n-1}{2^{n-1}} - \frac{n^2}{2^n} \qquad (4)$$

Zde je možná vybuzen dojem, že tato metoda selhává. Stačí však uvedený postup opakovat:

$$\frac{1}{2}s_n = 0 + 0 + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} \ldots + \frac{2n-3}{2^{n-1}} + \frac{2n-1}{2^n} - \frac{n^2}{2^{n+1}} \qquad (5)$$

Opět provedeme odečtení příslušných vztahů, tj. od (4) vztahu odečteme vztah (5):

$$s_n - \frac{1}{2}s_n = \frac{1}{2}s_n = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^1} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \ldots + \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{n^2+2n-1}{2^n} + \frac{n^2}{2^{n+1}} \qquad (6)$$

Dále zajistíme, aby vztah (6) obsahoval součet prvních n členů geometrické posloupnosti :

$$\frac{1}{2}s_n = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^1} + \mathbf{\frac{2}{2^0}} + \mathbf{\frac{2}{2^2}} + \frac{2}{2^3} + \frac{2}{2^4} + \ldots + \frac{2}{2^{n-1}} - \frac{n^2+2n-1}{2^n} + \frac{n^2}{2^{n+1}} - \mathbf{\frac{2}{2^0}} - \mathbf{\frac{2}{2^2}} \qquad (7)$$

Označme $x_n = \frac{2}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{2}{2^{n-1}}$. Víme, že $x_n = \frac{2}{2^0} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$, proto lze psát:

$$\frac{1}{2}s_n = \frac{3}{2^1} + 4\left(1-\frac{1}{2^n}\right) - \frac{n^2+2n-1}{2^n} + \frac{n^2}{2^{n+1}} - \frac{2}{2^0} - \frac{2}{2^2} \qquad (8)$$

Po drobných úpravách vztahu (8) dostáváme:

$$s_n = -2 + 8\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n^2 + 2n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n^2}{2^n} \qquad (9)$$

A závěrem stanovíme součet zadané řady:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left[-2 + 8\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n^2 + 2n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n^2}{2^n}\right] = 6.$$

Tento příklad nás možná opět motivoval položit si další otázku: Lze touto metodou stanovit součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + ... + c_0}{c^n}$, kde $c \notin \langle -1,\ 1 \rangle$, $k \in \mathbb{N}_0$? Jinými slovy řečeno: Lze tímto způsobem stanovit součet řady, která je zobecněním konvergentní geometrické řady a polynomu libovolného stupně k ? Pokud ano, pak to lze provést v konečně mnoha krocích (opakováním výše uvedeného postupu). Bude-li tedy v čitateli výše uvedeného zlomku polynom stupně k, pak po odečtení násobku $\frac{1}{c} s_n$ od výrazu s_n dostaneme násobek $(c-1)c^{-1} s_n$, který představuje součet prvního členu této řady, "téměř celého" součtu prvních n členů posloupnosti, které "vygeneroval" polynom stupně $(k-1)$ a výrazu $\left(\frac{-c_k n^k}{c^{n+1}}\right)$. Poté vyjádříme $1 \cdot s_n$ a výše uvedený postup opakujeme (do okamžiku, kdy jistý násobek s_n bude obsahovat součet prvních n členů jisté geometrické posloupnosti).

Tato myšlenka by nás následně mohla vést k otázce, jak nalézt takovýto algoritmus, který by navíc byla schopna provádět výpočetní technika. V dnešní době však máme mnoho moderních algoritmů, které jsou schopné sčítat daleko rozmanitější číselné řady, např. Zeilbergerův algoritmus nebo Gosperův algoritmus - jemu je věnována značná část této práce, počínaje kapitolou 5.

3 Některé metody sčítání nekonečných řad

3.1 Hypotéza o posloupnosti částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$

Může se nám zdát, že je téměř zbytečné tuto metodu využívat, ale někdy nastane situace, že se žádný lepší způsob stanovení součtu s nenabízí. A právě takovou situaci někdy může zachránit tato metoda. Její podstata je jednoduchá – vyslovíme hypotézu, že posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ lze zapsat jistým vzorcem. Poté platnost tohoto vzorce dokážeme matematickou indukcí.

(Příklad 3.1.1)

Máme stanovit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Zkonstruujeme několik členů posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Tedy $s_1 = \frac{1}{2}$; $s_2 = \frac{2}{3}$; $s_3 = \frac{3}{4}$; ...Zřejmě platí: $\forall n \in \mathbb{N} : s_n = \frac{n}{n+1}$. Tuto hypotézu ověříme matematickou indukcí:

1. *krok* (ověříme platnost vzorce pro nejmenší přípustné n, tj. $n = 1$): $s_1 = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$.

2. *krok* (indukční předpoklad, tj. $n = k$): $s_k = \frac{k}{k+1}$.

3. *krok* (indukční krok, tj. $n = k+1$): $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} =$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)}{(k+2)} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : s_n = \frac{n}{n+1}.$$

Nyní již můžeme vyjádřit hledaný součet: $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

(Příklad 3.1.2)

Stanovme součet: $arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{8} + arctg\frac{1}{18} + ...$

Na první pohled se úloha může jevit obtížná, protože součtové vzorce pro cyklometrické funkce ve školské matematické analýze příliš nepoužíváme. Využijeme následující větu:

(Věta 3.1.1)

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : xy < 1 \Rightarrow arctg\left(x\right) + arctg\left(y\right) = arctg\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

Zkusíme opět zkonstruovat několik členů posloupnosti $\left\{s_n\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$s_1 = arctg\,\frac{1}{2}$$

$$s_2 = arctg\,\frac{1}{2} + arctg\,\frac{1}{8} = arctg\,\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}} = arctg\,\frac{2}{3}$$

$$s_3 = arctg\,\frac{2}{3} + arctg\,\frac{1}{18} = arctg\,\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{54}} = arctg\,\frac{3}{4}$$

Opět matematickou indukcí ověříme, že pro zadaný součet platí: $\forall n \in \mathbb{N} : s_n = arctg\,\frac{n}{n+1}$.

1. *krok* (pro $n = 1$): $arctg\,\frac{1}{1+1} = arctg\,\frac{1}{2}$

2. *krok* (indukční předpoklad, tj. $n = k$): $s_k = \frac{k}{k+1}$

3. *krok* (indukční krok, tj. $n = k+1$):

$$s_{k+1} = s_k + a_k = arctg\,\frac{k}{k+1} + arctg\,\frac{1}{2(k+1)^2} = arctg\,\frac{\frac{k}{k+1}+\frac{1}{2(k+1)^2}}{1-\frac{k}{2(k+1)^3}} =$$

$$= arctg\,\frac{\frac{2k(k+1)+1}{2(k+1)^2}}{\frac{2(k+1)^3-k}{2(k+1)^3}} = arctg\,\frac{(2k^2+2k+1)(k+1)}{2(k^3+3k^2+3k+1)-k} = arctg\,\frac{(2k^2+2k+1)(k+1)}{2k^3+6k^2+5k+2}$$

Jelikož $(2k^3+6k^2+5k+2):(2k^2+2k+1) = k+2$, lze psát:

$$arctg\,\frac{(2k^2+2k+1)(k+1)}{2k^3+6k^2+5k+2} = arctg\,\frac{(2k^2+2k+1)(k+1)}{(2k^2+2k+1)(k+2)} = arctg\,\frac{(k+1)}{(k+2)}.$$

V závěru vypočteme, že $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} arctg\,\frac{n}{n+1} = \frac{\pi}{4}$.

3.2 Teleskopická metoda sčítání řad

S touto metodou se setkáváme mnohem častěji než s metodou předchozí. Tato metoda se nazývá teleskopická, neboť obrazně řečeno "teleskopem (dalekohledem) prohlédneme celou řadu a to nám umožňuje vidět, která čísla, resp. výrazy, se vzájemně odečtou". K tomu, abychom takto řadu mohli prohlédnout, je zapotřebí výraz a_n rozložit v součet parciálních zlomků. V literatuře [5] se můžeme setkat s definicí této řady a příslušnou větou, která říká, jaká podmínka musí být splněna, aby tato řada konvergovala. Prozkoumejme je:

Neprve uveďme, že teleskopickou vlastnost nějakého konečného součtu lze popsat vztahem:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(b_k - b_{k+1}\right) = \left(b_1 - b_2\right) + \left(b_2 - b_3\right) + \left(b_3 - b_4\right) + ... + \left(b_{n-1} + b_n\right) + \left(b_n - b_{n+1}\right) = b_1 - b_{n+1}$$

Poznamenejme, že někdy se také říká, že "řada se zhroutí sama do sebe". A to je právě ta skutečnost, že $-b_2 + b_2 - b_3 + b_3 - ... + b_{n-1} - b_n + b_n = 0$.

Následující definicí tuto vlastnost rozšíříme na nekonečné součty.

(Definice 3.2.1)

Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme teleskopickou, jestliže $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n = b_n - b_{n+1}$.

(Věta 3.2.1)

Teleskopická řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když posloupnost $\left\{b_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a v tom případě platí: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L$, kde $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

(Příklad 3.2.1)

Rozhodněme, zda řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je teleskopická. Rozkladem výrazu a_n v součet parciálních zlomků dostaneme, že $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Označíme-li $b_n = \frac{1}{n}$, zjišťujeme, že řada vyhovuje definici **3.2.1**, neboť $b_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Využijeme větu **3.2.1**: $b_1 = 1$, $L = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Tedy platí $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - L = 1$.

Ukazuje se však, že v mnohých případech nějakou řadu nazýváme teleskopickou, přestože nevyhovuje této definici. Pozměňme tento příklad a pokusme se najít její teleskopickou vlastnost.

(Příklad 3.2.2)

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$. Výraz a_n rozložíme v parciální zlomky, tj. dostáváme, že $a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)}$. Zjišťujeme však, že takto upravený výraz a_n nevyhovuje definici **3.2.1**. Přesto však i takovéto řadě říkáme teleskopická. Tato řada však má jistou teleskopickou vlastnost, totiž platí:

$$\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n = b_n - b_{n+2}\text{, kde } b_n = \frac{1}{2n},\ b_{n+2} = \frac{1}{2(n+2)}$$

Pozor, zde neplatí vztah uvedený ve větě **3.2.1**, nýbrž $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 + b_2 - 2L$, kde $L = \lim_{n\to\infty} b_n$. Je totiž $s_n = b_1 + b_2 - b_{n+1} - b_{n+2}$.

Následující řady mají rozvněž jisté teleskopické vlastnosti, věnujme však pozornost rozkladům v parciální zlomky a porovnání neurčitých koeficientů *A, B, C, ...* S porovnáváním neurčitých koeficientů se setkáme také v kapitole 5 (Gosperův algoritmus).

(Příklad 3.2.3)

Stanovme součet $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + ...$

Výraz $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ rozložme v součet parciálních zlomků:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} = \frac{A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)}$$

Odtud získáme rovnost $1 = A(n^2 + 3n + 2) + B(n^2 + 2n) + C(n^2 + n)$. Nyní nás zajímají nulté, první a druhé mocniny čísla n. Nultá mocnina je na levé straně rovnosti zastoupena $1-krát$, na pravé straně $2-krát$ u koeficientu A, $0-krát$ u koeficientů B,C. Odtud získáváme první rovnici níže uvedené soustavy rovnic. První mocnina čísla n je na levé straně zastoupena $0-krát$, na pravé straně $3-krát$ u koeficientu A, $2-krát$ u koeficientu B, $1-krát$ u koeficientu C. Odtud získáváme druhou rovnici níže uvedené soustavy rovnic. Druhá mocnina čísla n je na levé straně zastoupena $0-krát$ a na pravé straně $1-krát$ u koeficientů A,B,C. Odtud získáváme třetí rovnici níže uvedené soustavy rovnic. Symbolicky zapsáno:

$$\begin{aligned} n^0 &: \ 1 = 2A \\ n^1 &: \ 0 = 3A + 2B + C \\ n^2 &: \ 0 = \ \ A + B + C \quad . \end{aligned}$$

Tato soustava má kořeny: $A = \frac{1}{2}$; $B = -1$; $C = \frac{1}{2}$.

A proto lze psát, že

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{2}{7} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{k-2} - \frac{2}{k-1} + \frac{1}{k} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{2}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right).$$

A odtud

$$s = \lim_{k \to \infty} s_k = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{2(k+2)} \right) = \frac{1}{4}.$$

(Příklad 3.2.4)

Stanovme součet $\frac{1}{9} + \frac{2}{225} + \ldots + \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} + \ldots$.

Výraz $\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ opět rozložíme v součet parciálních zlomků:

$$\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{(2n-1)^2} + \frac{C}{2n+1} + \frac{D}{(2n+1)^2}$$

Vynásobením této rovnosti výrazem $(2n-1)^2(2n+1)^2$ dostaneme rovnost

$$n = A(2n-1)(2n+1)^2 + B(2n+1)^2 + C(2n-1)^2(2n+1) + D(2n-1)^2 =$$

$$= A(8n^3 + 4n^2 - 2n - 1) + B(4n^2 + 4n + 1) + C(8n^3 - 4n^2 - 2n + 1) + D(4n^2 - 4n + 1) .$$

Stejným způsobem (jako v předchozím příkladě) získáme soustavu rovnic. Symbolicky zapsáno:

$$\begin{aligned} n^0 &: \ 0 = -A + B + C + D \\ n^1 &: \ 1 = -2A + 4B - 2C - 4D \\ n^2 &: \ 0 = -4A + 4B - 4C + 4D \\ n^3 &: \ 0 = 8A + 8C \quad . \end{aligned}$$

Získanou nehomogenní soustavu zjednodušíme pomocí maticového počtu, užijeme Gaussovu eliminační metodu:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & -4 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & -8 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

Zjednodušená soustava bude mít tvar

$$\begin{aligned} -A + B + C + D = 0 &\Rightarrow A = 0 \\ B + 2C + D = 0 &\Rightarrow B = \frac{1}{8} \\ 4C + 8D = -1 &\Rightarrow C = 0 \\ 8D = -1 &\Rightarrow D = -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

A proto:

$$s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} \right] = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{k} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2} \right] =$$

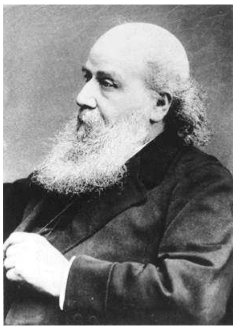
$$= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \ldots + \frac{1}{(2k-3)^2} - \frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2} \right).$$

A odtud:

$$s = \lim_{k \to \infty} s_k = \frac{1}{8} \lim_{k \to \infty} \left[1 - \frac{1}{(2k+1)^2} \right] = \frac{1}{8}.$$

4 Rezultant dvou polynomů

4.1 Kdo byl J. J. Sylvester?



obr. 5

James Joseph Sylvester, anglický matematik, žil v letech 1814 - 1897. Jako první začal užívat termín matice (v anglicky psané literatuře „matrix“). Také objevil diskriminant kubické rovnice. Ve dvaceti letech nastoupil na vysokou školu St. John's College v Cambridge. Jelikož byl žid, nemohl podepsat Třicet devět článků anglikánské církve. V důsledku toho nemohl ani obdržet titul Bachelor of Arts ani být nominován na Smithovu cenu. Při opouštění Cambridge začal psát první články, ve kterých se zabýval aplikovanou matematikou. Jeho první článek nesl název *Analytický vývoj Fresnelovy optické teorie krystalů*. Brzy potom byl jmenován profesorem fyziky na University College v Londýně a stal se tak kolegou De Morgana. V té době byla University College téměř jedinou vysokoškolskou institucí, která tolerovala náboženské rozdíly. Sylvester však toužil po čisté matematice. V roce 1841 se stal profesorem matematiky na University of Virginia. Ale po čtyřech letech byla jeho kariéra ukončena tragickou událostí, o které se můžeme podrobněji dočíst v [2] nebo [12]. V roce 1846 začal studovat na Inner Temple v Londýně a v roce 1850 se stal advokátem. Vybral si stejnou profesi jako matematik Arthur Cayley, se kterým se spřátelil. Diskutovali spolu více o matematice než o právech. Tito dva muži se stali dlouholetými přáteli. Oba ale byli naprosto rozdílných povah. Cayley byl vyrovnaný, trpělivý, jeho práce byly přehledně vypracovány, skoro jako nějaký úřední dokument. Sylvester byl prudké a ohnivé povahy. Jeho práce byly plné poznámek pod čarou, dodatků, oprav i alternativ důkazů. A proto většinu jeho prací bylo skoro nemožné tisknout, jedinou jeho vytištěnou knihou je Treatise on Elliptic Functions (1876). Po nějaké době Cayley dostal místo v Cambridge, kde se hned oženil a usadil jako matematik. Tím bylo zřejmě jejich dlouholeté přátelství ukončeno a Sylvester dále pokračoval v tom, co sám nazýval „Boj proti světu, sám a svobodný.“ V roce 1855 se stal profesorem matematiky na Royal Military Academy - tedy zaměstnancem armády. Zde působil po dobu 15 let a v těchto letech byl nejvíce vědecky aktivní. V 55 letech odešel do důchodu. V roce 1872 byl zrušen Universities Test Act a proto mu byly uděleny tituly Bachelor of Arts a Master of Arts. V roce 1883, kdy Sylvesterovi bylo 68 let, byl povolán savelikánskou katedru geometrie v Oxfordu.

Text byl čerpán z [2], [12], obrázek byl převzat z [22].

4.2 Sylvesterova matice, Sylvesterovo kritérium, rezultant dvou polynomů

Definice a věta jsou převzaty z [2].

(Definice 4.2.1) - Sylvesterova matice

Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$ jsou dva polynomy z $T[x]$, kde T je komutativní těleso. Sylvesterovou maticí polynomů $f(x)$, $g(x)$ nazýváme matici

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & . & . & a_0 & . & . & . \\ . & a_n & a_{n-1} & . & . & a_0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & a_n & a_{n-1} & . & . & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & . & . & b_0 & . & . & . \\ . & b_m & b_{m-1} & . & . & b_0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & b_m & b_{m-1} & . & . & b_0 \end{pmatrix}$$, prázdná pole obsazujeme nulami.

Tato matice je typu $(m+n)\times(m+n)$.

(Definice 4.2.2) - Rezultant polynomů

Rezultant $res_x(f(x), g(x))$ polynomů f, g se nazývá determinant Sylvesterovy matice.

(Věta 4.2.1) - Sylvesterovo kritérium

Nechť $f(x)$, $g(x)$ jsou dva polynomy kladných stupňů. Polynomy $f(x)$, $g(x) \in T[x]$ jsou dělitelné nekonstantním společným dělitelem v $T[x]$ právě tehdy, když

$$res_x(f(x),\ g(x)) = 0.$$

(Příklad 4.2.1)

Pro které hodnoty parametru k mají polynomy $f(x) = x^2 + kx + 2$, $g(x) = x^3 - kx + 2$ společný nulový bod?

Zkonstruujeme Sylvesterovu matici. Podle definice **4.2.1** matice musí mít $(m+n)$ řádků, $(m+n)$ sloupců. V našem případě je $m = 2$, protože $f(x)$ je druhého stupně, a $n = 3$, protože $g(x)$ je třetího stupně. Tudíž matice bude typu (5×5). Máme-li tedy polynom druhého a polynom třetího stupně, budou nás zajímat zastoupení třetích, druhých, prvních a nultých mocnin neznámé x. Na pořadí polynomů při "vkládání" do matice nezáleží. Vezměme např. polynom $g(x)$. Třetí mocnina neznámé je zde zastoupena $1-krát$, druhá mocnina $0-krát$, první mocnina $(-k)-krát$, nultá mocnina $2-krát$. Odtud plyne, že první řádek matice bude vypadat následovně: Číslo 1 se bude nacházet v prvním sloupci, číslo 0 ve druhém, číslo $(-k)$ ve třetím a číslo 2 ve čtvrtém. Jelikož matice má být typu (5×5), v pátém sloupci bude číslo 0, dle definice ("prázdné pole jsme obsadili nulou"). Zkonstruujeme druhý řádek: V prvním sloupci bude číslo 0 - dle definice (opět jde o prázdné pole), ve druhém sloupci bude 1, ve třetím 0, ve čtvrtém $(-k)$, v pátém 2. Polynom $g(x)$ je nyní "vložen" do matice, neboť nultou mocninou neznámé x, která je reprezentována číslem 2, jsme již obsadili pátý sloupec. Obdobným způsobem "vložíme" do matice polynom $f(x)$. Matice bude vypadat následovně:

$$Syl(f,g)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -k & 2 \\ 1 & k & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 2 \end{pmatrix}$$

Nyní vyčíslíme rezultant polynomů $f(x)$, $g(x)$, neboli determinant této matice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -k & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -k & 2 \\ 1 & k & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -k & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -k & 2 \\ 0 & k & k+2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & k & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -k & 2 \\ k & k+2 & -2 & 0 \\ 1 & k & 2 & 0 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{vmatrix}=$$

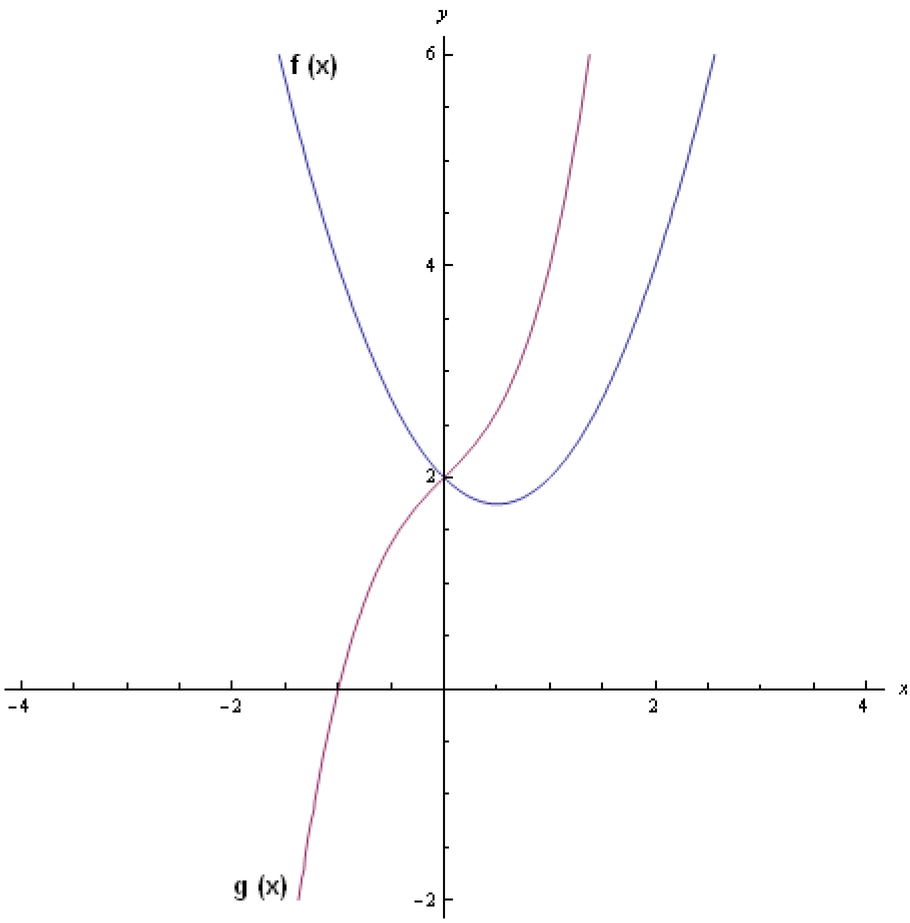
$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -k & 2 \\ 0 & k+2 & k^2-2 & -2k \\ 0 & k & k+2 & -2 \\ 0 & 1 & k & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ k & k+2 & -2 \\ k+2 & k^2-2 & -2k \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -k^2+k+2 & -2k-2 \\ 0 & -k(k+2)+k^2-2 & -2(k+2)-2k \end{vmatrix}=$$

$$=-\left\{(-k^2+k+2)\left[-2(k+2)-2k\right]-\left[-k(k+2)+k^2-2\right]\left(-2k-2\right)\right\}.$$

Položme tento determinant roven nule, dle Sylvesterova kritéria, a po úpravách dostaneme (k v tomto okamžiku považujeme za proměnnou), že $(k+1)^2(k-3)=0$. Kořeny této rovnice jsou: $k_1=-1,\ k_2=3$. Nyní nalezněme společné kořeny polynomů $f(x)$, $g(x)$. Položme proto $f(x)=g(x)$. Při volbě $k=-1$ dostaneme rovnost $x(x^2-x+2)=0$, ze které získáme kořen $x_1=0$. Při volbě $k=3$ dostaneme rovnost $x(x+2)(x-3)=0$, ze které získáme kořeny $x_2=-2,\ x_3=0,\ x_4=3$. Závěrem zobrazme polynomy v kartézských soustavách souřadnic (např.) pomocí počítačového programu *Wolfram Mathematica* 7.0 ®, viz. *obr.* 6 (volba $k=-1$), *obr.* 7 (volba $k=3$):

```
In[9]:= ContourPlot[{2 - x + x^2 == y, 2 + x + x^3 == y}, {x, -4, 4},
  {y, -2, 6}, AspectRatio → Automatic, Axes → True, AxesLabel → {x, y},
  Frame → False]
```

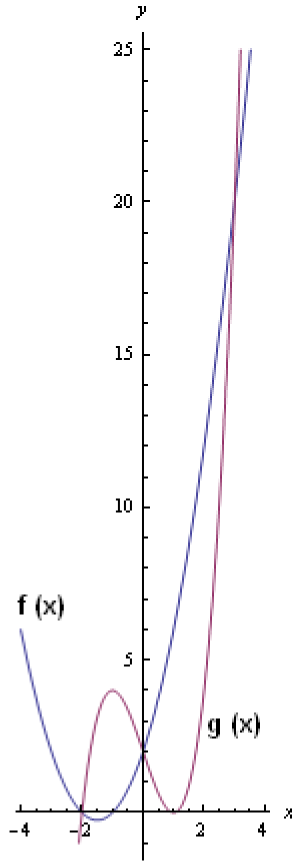
Out[9]=



obr. 6

```
In[12]:= ContourPlot[{2 + 3 x + x^2 == y, 2 - 3 x + x^3 == y}, {x, -4, 4}, {y, -1, 25},
          AspectRatio → Automatic, Axes → True, AxesLabel → {x, y}, Frame → False ]
```

Out[12]=



obr. 7

Poznamenejme, že popisky polynomů je možno vložit do grafu po stisknutí kombinace kláves *ctrl+d*, čímž otevřeme tzv. *2D drawing*.

Rezultant dvou polynomů lze samozřejmě také využít při řešení soustavy dvou polynomiálních rovnic o dvou neznámých x, y. Zvolíme, kterou neznámou budeme při konstrukci Sylvesterovy matice a následném vyčíslení jejího determinantu považovat za konstantu. Tím vlastně "eliminujeme" tuto neznámou (proto se také někdy rezultantu říká eliminant).

Nechť x je konstanta a nechť soustava má tento obecný tvar:

$$f(x,y) = a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + a_0(x) = 0$$
$$g(x,y) = b_m(x)y^m + b_{m-1}(x)y^{m-1} + ... + b_0(x) = 0$$

Tento zápis jsme zvolili, protože nás budou zajímat nezáporné mocniny neznámé y. Další bude zřejmé v následujícím příkladě.

(Příklad 4.2.2)
Nalezněme reálné řešení $[x, y]$ následující soustavy polynomiálních rovnic.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 - 2xy + 2 &= 0 \\ g(x,y) &= xy^2 - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Řešení: Eliminujme neznámou x, neboli uvažujme, že je konstantou. Sylvesterova matice bude v tomto případě typu (3×3) a bude mít tvar:

$$Syl\left(f(y),\ g(y)\right) = \begin{pmatrix} x & -2 & 0 \\ -2x & x^3+2 & 0 \\ 0 & -2x & x^3+2 \end{pmatrix}.$$

Determinantem této matice je výraz $x(x^3-2)(x^3+2)$. Položme determinant roven nule, dle Sylvesterova kritéria: $x(x^3-2)(x^3+2) = 0$. Řešením této rovnice obdržíme tři kořeny: $x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt[3]{2},\ x_3 = -\sqrt[3]{2}$. Dále zjišťujeme, že:

- Kořen $x_1 = 0$ **není** společný polynomům $f(x,y)$, $g(x,y)$, neboť $f(x,y) \neq g(x,y)$, pokud $x = 0$.
- Kořen $x_2 = \sqrt[3]{2}$ **je** společný polynomům $f(x,y)$, $g(x,y)$, neboť $f(x,y) = g(x,y)$, pokud $x = \sqrt[3]{2}$. Při volbě $x = \sqrt[3]{2}$ dostaneme, že $y = \sqrt[3]{4}$. Označme $y_2 = \sqrt[3]{4}$.
- Kořen $x_3 = -\sqrt[3]{2}$ **je** společný polynomům $f(x,y)$, $g(x,y)$, neboť $f(x,y) = g(x,y)$, pokud $x = -\sqrt[3]{2}$. Při volbě $x = -\sqrt[3]{2}$ dostaneme, že $y = 0$. Označme $y_3 = 0$

Závěrem konstatujeme, že soustava má pouze dvě reálná řešení – dvojici čísel $[x_2, y_2] = \left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right]$ a dvojici čísel $[x_3, y_3] = \left[-\sqrt[3]{2}, 0\right]$.

Polynomy $f(x,y),\ g(x,y)$ můžeme zobrazit v kartézské soustavě souřadnic, např. opět pomocí počítačového programu *Wolfram Mathematica* 7.0 ®, viz *obr.* 8:

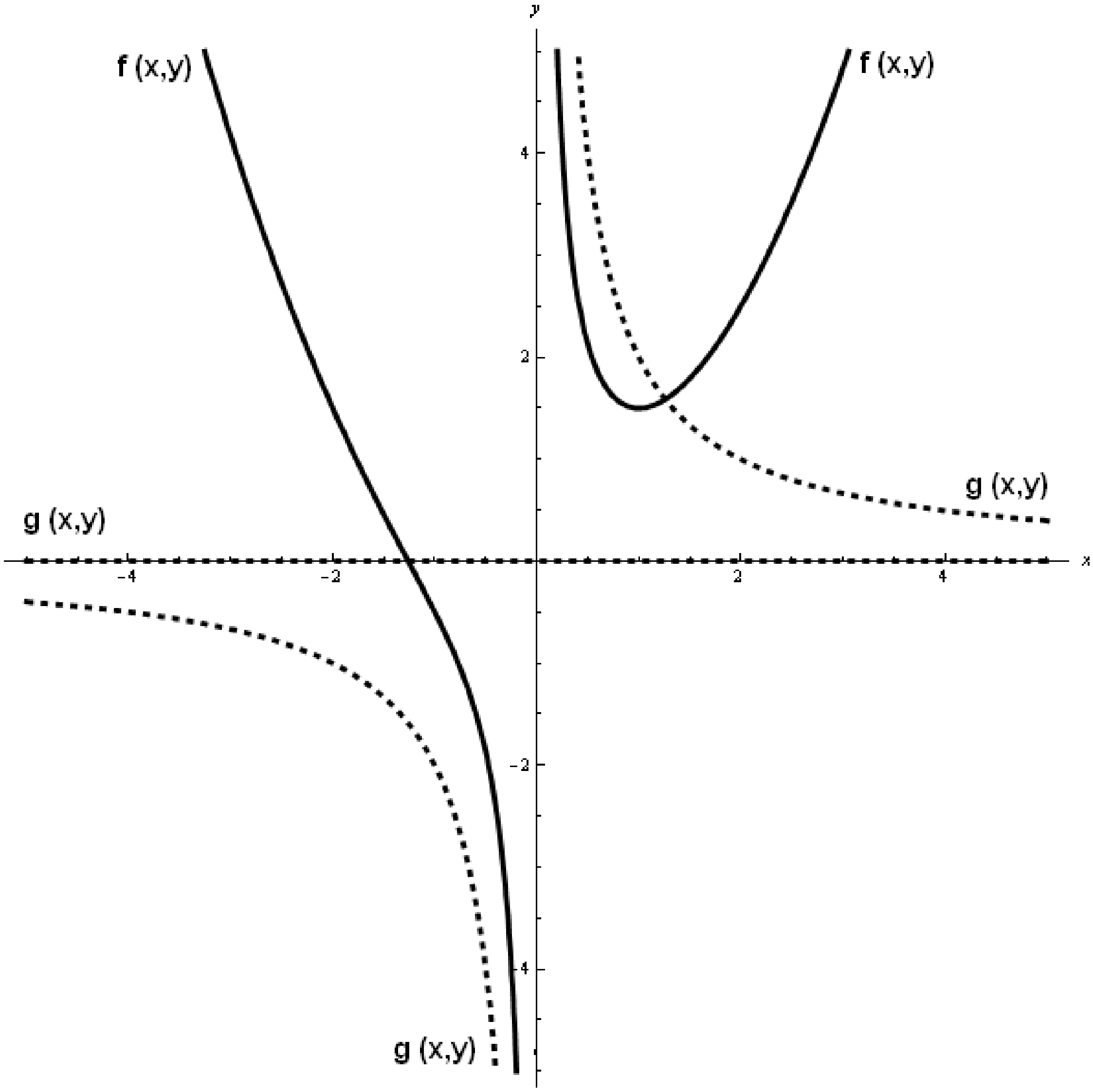
```
In[99]:= f = Function[{u, v}, 2 - 2 * u * v + u^3][x, y]
         g = Function[{u, v}, -2 * v + u * v^2][x, y]
```

Out[99]= $2 + x^3 - 2\,x\,y$

Out[100]= $-2\,y + x\,y^2$

```
In[151]:= ContourPlot[{f == 0, g == 0}, {x, -5, 5} , {y, -5, 5}, AspectRatio → Automatic, Axes → True,
           AxesLabel → {x, y}, Frame → False,
          ContourStyle → {Directive[Thickness[0.005]], Directive[Thickness[0.005], Dashed]}]
```

Out[151]=



obr. 8

Příklad jsme samozřejmě mohli řešit tak, že bychom x považovali za neznámou a y za konstantu. Pak bychom mohli zapsat zadanou soustavu ve tvaru

$$f(x,y) = a_n(y)x^n + a_{n-1}(y)x^{n-1} + \ldots + a_0(x) = 0$$
$$g(x,y) = b_m(y)x^m + b_{m-1}(y)x^{m-1} + \ldots + b_0(x) = 0$$

Dále bychom obdrželi takto vyplněnou Sylvesterovu matici:

$$Syl\left(f(x), g(x)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2y^2-3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2y^2-3 \\ 1 & y & y^2-3 & 0 \\ 0 & 1 & y & y^2-3 \end{pmatrix}.$$

Pak bychom zjistili, že její determinant, neboli $res_x\left(f(x), g(x)\right)$, je roven nule právě tehdy, když platí $y^3(y^3-4)=0$. Rovnost je splněna, pokud $y \in \left\{0, \sqrt[3]{4}\right\}$. Označme $y_2 = \sqrt[3]{4}$ a $y_3 = 0$. Při volbě $y = \sqrt[3]{4}$ bychom zjistili, že $x = \sqrt[3]{2}$, označme $x_2 = \sqrt[3]{2}$. Při volbě $y = 0$ bychom zjistili, že $x = -\sqrt[3]{2}$, označme $x_3 = -\sqrt[3]{2}$.

Následně bychom tedy dospěli ke stejnému závěru, že zadaná soustava má pouze dvě reálná řešení – dvojici čísel $\left[x_2, y_2\right] = \left[\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right]$ a dvojici čísel $\left[x_3, y_3\right] = \left[-\sqrt[3]{2}, 0\right]$.

Tento příklad je v článku [19] řešen jednou z iteračních metod řešení soustav nelineárních rovnic, nám však pouze posloužil pro seznámení s rezultantem dvou polynomů, který však nepatří mezi efektivní metody řešení polynomiálních rovnic. Mějme například soustavu polynomiálních rovnic o neznámých $x,\ y$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \quad xy \ -4 = 0 \\ f(x,y) &= x^3 - y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Při eliminaci neznámé x obdržíme Sylvesterovu matici ve tvaru

$$Syl(f(x), g(x)) = \begin{pmatrix} y & -4 & 0 & 0 \\ 0 & y & -4 & 0 \\ 0 & 0 & y & -4 \\ 1 & 0 & 0 & -y^2-1 \end{pmatrix}.$$

Položíme-li její determinant roven nule, znamenalo by to řešit rovnici $y^5 + y^3 - 64 = 0$ a víme, že neexistuje obecný vzorec pro řešení rovnice pátého stupně a navíc v tomto případě se žádná vhodná substituce nenabízí. Rezultant dvou polynomů je však jedním z nezbytných pojmů užitých v Gosperově algoritmu. Ten zkoumejme v následující kapitole.

5 Gosperův algoritmus

5.1 Kdo je R. William Gosper?

převzato z [16] obr. 9

R. William Gosper, Jr., nar. 1943, je současným matematikem a programátorem, pochází z města Pennsauken v New Jersey. On a Richard Greenblatt jsou považováni za zakladatele prvních počítačových komunit. William Gosper je chloubou společnosti Lisp community, která se zabývá programováním. Je známý díky práci, ve které se zabýval reprezentací reálných čísel a rovněž také vytvořením algoritmu, který je po něm pojmenován.

Jím vytvořený algoritmus je v literatuře [6] označen jako jeden z pěti základních. V roce 1961 začal studovat na univerzitě MIT (Massachusettský technologický institut) matematický obor a získal titul v roce 1965. Přispěl k rozvoji počítačového programu Macsyma. V roce 1970 se přestěhoval do Kalifornie, kde po dobu tří let přednášel na Stanfordské univerzitě a pomáhal Donaldovi Knuthovi (významný programátor) psát druhý díl knihy The Art of Computer Programming. W. Gosper samozřejmě také přispíval do jiných publikací, jejichž seznam nalezneme na adrese http://gosper.org/bill.html. Tam můžeme také nalézt další informace o tomto matematikovi a programátorovi.

Od roku 1970 pracuje pro firmy Xerox PARC, Symbolics, Wolfram Research, The Lawrence Livermore Laboratory a Macsyma Inc.

Čerpáno z článku [17].

5.2 Teoretický základ Gosperova algoritmu

Tato kapitola je čerpána především z literatury [2], dále také z [3], [6], [7]. Definice a věty jsou převzaty z literatury [2].

Gosperův algoritmus se využívá pro stanovení součtů nekonečných řad, ale lze jej využít i pro stanovení součtů konečných řad. Nelze asi očekávat, že by nějaký sumační algoritmus dokázal sečíst každou (nekonečnou) řadu. Proto budou na posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, určující řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, uvedena jistá kritéria, nutná k tomu, aby Gosperův algoritmus vůbec mohl začít pracovat. Ta budou později uvedena.

Hlavním smyslem tohoto algoritmu je nalézt posloupnost částečných součtů $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ řady $\sum_{k=m}^{n} a_k$, kde $m,\ n \in \mathbb{N},\ n > m$. Zadáme posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ a chceme nalézt posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ takovou, že platí: $\sum_{k=m}^{n} a_k = s_n - s_{m-1}$, kde k nezávisí na m nebo na n. Zde si povšimněme, že tato podmínka je určitou analogií s následujícím problémem:

Mějme funkci f, která je spojitá na $< m,\ n >$, a chceme vypočítat $\int_m^n f(x)dx$. To lze provést v případě, že jsme schopni nalézt primitivní funkci $F(x)$. Pokud se nám to podaří, stačí již využít Newtonův-Leibnitzův vzorec a psát, že $\int_m^n f(x)dx = F(n) - F(m)$.

V Gosperově algoritmu se setkáváme s tzv. hypergeometrickými posloupnostmi (příslušná definice bude později uvedena). Teorie nám říká, že pokud posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ je hypergeometrická, potom posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ musí také být hypergeometrická.

Ještě poznamenejme, že jedná-li se o nekonečnou řadu, v závěru algoritmu se vyčíslí

$$s = \lim_{k\to\infty} s_k .$$

Vyslovme příslušné definice a věty.

(Definice 5.1.1)

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme hypergeometrickou právě tehdy, když pro všechna přirozená n lze podíl dvou následujících členů posloupnosti vyjádřit ve tvaru $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{u(n)}{v(n)}$, kde $u(n)$, $v(n)$ jsou polynomy.

(Věta 5.1.1)

Každou racionální funkci $\frac{u(n)}{v(n)}$ nad tělesem T lze zapsat ve tvaru $\frac{u(n)}{v(n)} = \frac{p(n)\, q(n)}{p(n-1)\, r(n)}$, kde $p,\ q,\ r$ jsou polynomy splňující podmínku, že pro všechna nezáporná celá čísla j platí, že

$$D(q(n),\ r(n+j)) = 1\,.$$

Poznamenejme, že narušení této podmínky lze interpretovat její negací, tedy $\exists\, j^* \in \mathbb{N}_0 :\ D(q(n),\ r(n+j^*)) \neq 1$. Využijeme-li pro tento případ Sylvesterovo kritérium, číslo j^* budeme hledat pomocí rezultantu polynomů $q(n)$ a $r(n+j)$, neboli vypočteme $res_n(q(n),\ r(n+j)) = 0$. Uvažujme nyní případ, že jsme nalezli aspoň jedno $j^* \in \mathbb{N}_0$. Vezmeme největší nalezené $j^* \in \mathbb{N}_0$ a polynomy $p,\ q,\ r$ budeme muset předefinovat, neboli hledat takové polynomy $\overline{p},\ \overline{q},\ \overline{r}$, pro které platí $D(\overline{q}(n),\ \overline{r}(n+j)) = 1,\ \forall j \in \mathbb{N}_0$ a zároveň polynomy $\overline{p},\ \overline{q},\ \overline{r}$ bude možno zapsat ve tvaru $\frac{u(n)}{v(n)} = \frac{\overline{p}(n)\, \overline{q}(n)}{\overline{p}(n-1)\, \overline{r}(n)}$.

Označme:

$$\begin{aligned}
g(n) &:= D(q(n),\ \mathrm{r}(n+j^*)) \\
\overline{p}(n) &:= p(n) \cdot \prod_{k=0}^{j^*-1} g(n-k) = 1 \cdot g(n) \cdot g(n-1) \cdot \dots \cdot g(n-j^*+1) \\
\overline{q}(n) &:= \frac{q(n)}{g(n)} \\
\overline{r}(n) &:= \frac{r(n)}{g(n-j^*)}
\end{aligned}$$

Ověřme, zda při takto předefinovaných polynomech platí rovnost $\frac{u(n)}{v(n)} = \frac{\overline{p}(n)\, \overline{q}(n)}{\overline{p}(n-1)\, \overline{r}(n)}$.

$$\frac{u(n)}{v(n)}=\frac{\overline{p}(n)\ \overline{q}(n)}{\overline{p}(n-1)\ \overline{r}(n)}=$$

$$=\frac{1\cdot g(n)\cdot g(n-1)\cdot g(n-2)\cdot\dots\cdot g(n-j^*+2)\cdot g(n-j^*+1)}{g(n-1)\cdot g(n-2)\cdot\dots\cdot g(n-j^*+2)\cdot g(n-j^*+1)\cdot g(n-j^*)}\cdot\frac{\frac{q(n)}{g(n)}}{\frac{r(n)}{g(n-j^*)}}=$$

$$=\frac{g(n)}{g(n-j^*)}\cdot\frac{q(n)}{g(n)}\cdot\frac{g(n-j^*)}{r(n)}=\frac{q(n)}{r(n)}$$

Jelikož podíl $\frac{q(n)}{r(n)}$ je racionální funkcí $\frac{u(n)}{v(n)}$, jsou polynomy $q(n),\ r(n)$ nesoudělné.

(Definice 5.1.2)

Nechť $\frac{u}{v}$ je racionální funkce nad tělesem T a nechť polynomy $p,\ q,\ r$ splňují podmínku uvedenou ve větě 5.1.1. Pak trojici $p,\ q,\ r$ nazýváme regulární reprezentací podílu $\frac{u}{v}$.

(Příklad 5.1.1)

Nalezněme regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, kde $a_n=\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

Řešení: Nejprve vypočteme: $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(3n-5)(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{3n-5}{3n+1}$.

Označme $p(n):=1$, tudíž $p(n-1)=1$. Dále označme $q(n):=3n-5$ a $r(n):=3n+1$. Zjistěme, zda existuje takové nezáporné j , pro které jsou polynomy $q(n)$, $r(n+j)$ nesoudělné:

$$res_n(q(n),\ r(n+j))=res_n(3n-5,\ 3n+3j+1)=\begin{vmatrix}3 & -5\\ 3 & 3j+1\end{vmatrix}=3(3j+1)+15=9j+18.$$

Položme determinant roven nule: $9j+18=0$. Zjišťujeme, že rovnice má jediný kořen $j=-2$, který není nezáporný, tj. $j\notin\mathbb{N}_0$. Nalezli jsme tedy regulární reprezentaci podílu $\frac{u}{v}$, neboli $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, takovou, že $p(n)=1$, $q(n)=3n-5$, $r(n)=3n+1$. Pokud by nastal případ, že $j\in\mathbb{N}_0$, museli bychom polynomy $p(n),\ q(n),\ r(n)$ předefinovat.

(Věta 5.1.2)

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je hypergeometrická posloupnost nad tělesem T a nechť polynomy $p,\ q,\ r$ tvoří regulární reprezentaci podílu $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. Jestliže i posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$, kde $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, je hypergeometrická, pak lze $n-tý$ částečný součet s_n vyjádřit ve tvaru

$$s_n = \frac{q(n+1)}{p(n)} \cdot a_n \cdot f(n) \qquad (1)$$

pro jistý polynom $f(n)$ splňující podmínku $p(n) = q(n+1)\cdot f(n) - r(n)\cdot f(n-1)$. (2)

Poznamenejme, jakým způsobem byla tato podmínka stanovena (převzato z [3]):

Pišme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Je známo, že $a_n = s_n - s_{n-1}$, předpokládejme, že $a_n \neq 0$ a dosazením této rovnosti do vztahu (1) dostáváme:

$$f(n) = \frac{s_n \cdot p(n)}{q(n+1)\cdot a_n} = \frac{p(n)}{q(n+1)} \cdot \frac{s_n}{s_n - s_{n-1}} = \frac{p(n)}{q(n+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{s_{n-1}}{s_n}} .$$

Tím jsme ukázali, že pokud $\dfrac{s_n}{s_{n-1}}$ je racionální funkce, potom $f(n)$ je také racionální funkce.

Dosaďme vztah (1) do vztahu $a_n = s_n - s_{n-1}$ a získáváme vztah (3):

$$a_n = \frac{q(n+1)}{p(n)} \cdot f(n) \cdot a_n - \frac{q(n)}{p(n-1)} \cdot f(n-1) \cdot a_{n-1} . \qquad (3)$$

Tuto rovnost vynásobíme výrazem $\dfrac{p(n)}{a_n}$ a dostáváme

$p(n) = q(n+1)\cdot f(n) - \dfrac{q(n)\cdot p(n)}{p(n-1)} \cdot f(n-1) \cdot \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$. A užijeme-li větu **5.1.1**, můžeme psát, že:

$$p(n) = q(n+1)\cdot f(n) - r(n)\cdot f(n-1) .$$

Vzorec uvedený v této větě bychom mohli využít v předchozím příkladě, ale k tomu je ještě zapotřebí zjistit, jaký má mít polynom $f(n)$ tvar - přesněji řečeno určit stupeň tohoto polynomu. Stupeň však lze určit algoritmicky. Nejprve vymezme několik pojmů:

- Polynomem $f(n)$ stupně k rozumějme polynom

$$f(n)=\sum_{i=0}^{k} c_i n^i = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \ldots + c_k n^k \text{, kde } c_k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

- Stupněm k nulového polynomu $f(n)=0$ rozumějme číslo (-1), neboli $k=-1$.
- Symbolem $coef(p(n),\ i)$ rozumějme koeficient u mocniny n^i v polynomu $p(n)$, například $coef(n^2+3n+1,\ 1)=3$.
- Symbolem $st(p(n))$ rozumějme stupeň polynomu $p(n)$, například $st(2n^4+n+1)=4$.
- Symbolem $\max(a,\ b)$ rozumějme maximum čísel a, b, například $\max(1,\ 2)=2$.

Algoritmus určení stupně polynomu $f(n)$, neboli čísla $k \in \mathbb{N}_0$, je následující:

Označme $l_p := st(q(n+1)+r(n))$ a $l_m := st(q(n+1)-r(n))$. Nyní uvažujme dva případy:

(1) Pokud $l_p \le l_m$, vypočte se stupeň polynomu dle vztahu $k = st(p(n)) - l_m$.

(2) Pokud $l_p > l_m$, vypočte se pomocné číslo k_0 dle následujícího vzorce:

$$k_0 = \frac{-l_p \cdot coef(q(n),\ l_p) - coef(q(n),\ l_p - 1) + coef(r(n),\ l_p - 1)}{coef(q(n),\ l_p)}$$

Případ (2) se dělí na další dva případy $(2a)$, $(2b)$:

$(2a)$ Pokud $k_0 \in \mathbb{Z}$, označme $k := \max(k_0, st(p(n)) - l_p + 1)$.

$(2b)$ Pokud $k_0 \notin \mathbb{Z}$, označme $k := st(p(n)) - l_p + 1$.

Nyní je vše připraveno k tomu, abychom Gosperův algoritmus mohli vyzkoušet řešením úloh. Později se přesvědčíme (v podkapitole **5.4**), že algoritmus nelze použít pro vyčíslení součtu libovolné konvergentní řady. V následující podkapitole **5.3** se zabývejme příklady řad, jejichž součty lze algoritmem nalézt.

5.3 Ukázky gosperovsky sčítatelných řad

(Příklad 5.3.1)

V příkladě **5.1.1** jsme nalezli regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, takovou, že $p(n)=1$, $q(n)=3n-5$, $r(n)=3n+1$. Pokusme se určit stupeň polynomu $f(n)$:

$$\begin{aligned} l_p &= st(q(n+1)+r(n)) = st(3n-2+3n+1) = st(6n-1) = 1 \\ l_m &= st(q(n+1)-r(n)) = st(3n-2-3n-1) = st(-3) \quad = 0 \end{aligned}$$

Nastal případ (2), tj. $l_p > l_m$, proto vypočteme pomocné číslo k_0:

$$k_0 = \frac{-l_p \cdot coef(q(n),\ l_p) - coef(q(n),\ l_p-1) + coef(r(n),\ l_p-1)}{coef(q(n),\ l_p)} = \frac{-1\cdot 3-(-5)+1}{3} = 1$$

Jelikož nastal případ $(2a)$, tj. $k_0 \in \mathbb{Z}$, bude platit:

$k = \max(k_0,\ st(p(n)-l_p+1) = \max(1,\ 0-1+1) = \max(1,\ 0) = 1$, polynom $f(n)$ je tedy prvního stupně, tj. ve tvaru $f(n) = c_1 n + c_0$.

Podle věty **5.1.2** má platit: $p(n) = q(n+1)\cdot f(n) - r(n)\cdot f(n-1)$, čili v našem případě bude $1 = (3n-2)(c_1 n + c_0) - (3n+1)\left[c_1(n-1)+c_0\right]$, dostáváme tak polynomiální rovnici o neznámé n, kterou ekvivalentními úpravami zjednodušíme na tvar: $1 = -3c_0 + c_1$. Zjišťujeme však, že rovnice má nekonečně mnoho řešení (tudíž polynomů $f(n)$ je nekonečně mnoho). A proto provedeme parametrizaci: Označme $c_0 := p$, potom tedy bude $c_1 = 1+3p$ a také $f(n) = (1+3p)n + p$. Dosaďme všechny nalezené polynomy do vztahu (1) uvedeného ve větě **5.1.2.** Dostáváme, že $s_n = \frac{(1+3p)n+p}{3n+1}$. Volbou parametru p synchronizujeme posloupnost částečných součtů. Stanovíme počáteční podmínku - sčítáme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$, proto počáteční podmínkou bude $s_1 = \frac{1}{4}$. Budeme tedy řešit rovnici $\frac{1}{4} = \frac{(1+3p)\cdot 1 + p}{3\cdot 1+1}$. Zjišťujeme, že tato rovnice má právě jeden kořen $p=0$. Proto volme $p=0$ a odtud $f(n)=n$.

Nyní již můžeme vyjádřit vzorec pro $n-t\acute{y}$ částečný součet:

$$s_n = \frac{q(n+1)}{p(n)} \cdot a_n \cdot f(n) = (3n-2) \cdot \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \cdot n = \frac{n}{3n+1}$$

A rovněž také lze stanovit součet: $s = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$.

(Příklad 5.3.2)

Máme stanovit součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$. Pokusme se nalézt regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Dostáváme, že $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+4)}$. Označme $p(n) := 1,\ q(n) := n^2 + 3n,\ r(n) := n^2 + 5n + 4$.

Vypočteme $r(n+j) = n^2 + 2nj + j^2 + 5n + 5j + 4 = n^2 + n(2j+5) + j^2 + 5n + 5j + 4$. Ověřme, zda polynomy $p(n),\ q(n),\ r(n)$ vyhovují podmínce uvedené ve větě **5.1.1**, tzn., zda $\forall j \in \mathbb{N}_0 :\ D(q(n),\ r(n+j)) = 1$:

$$res_n(q(n), r(n+j)) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2j+5 & j^2+5j+4 & 0 \\ 0 & 1 & 2j+5 & j^2+5j+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2j+2 & j^2+5j+4 & 0 \\ 0 & 1 & 2j+5 & j^2+5j+4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2j+2 & j^2+5j+4 & 0 \\ 1 & 2j+5 & j^2+5j+4 \end{vmatrix} = (j^2+5j+4)^2 - 3(2j+2)(j^2+5j+4) = (j+1)^2(j+4)(j-2)$$

Položme tento determinant roven nule, dle Sylvesterova kritéria: $(j+1)^2(j+4)(j-2) = 0$. Zjišťujeme, že tato rovnice má kořeny $j_1 = -4,\ j_2 = -1,\ j_3 = 2$. Kořen j_3 je nezáporný, označme $j_3 = j^*$. Polynomy $p(n),\ q(n),\ r(n)$ budeme muset předefinovat. Proveďme příslušné operace:

$$g(n) = D(q(n),\ r(n+j^*)) = D(q(n),\ r(n+1)) = D(n^2+3n,\ n^2+9n+18) = n+3$$

$$\overline{p}(n) = p(n)\prod_{k=0}^{j^*-1} g(n-k) = p(n)\cdot\prod_{k=0}^{1} g(n-k) = p(n)\cdot g(n)\cdot g(n-1) = (n+3)(n+2)$$

$$\overline{q}(n) = \frac{q(n)}{g(n)} = \frac{n(n+3)}{n+3} = n$$

$$\overline{r}(n) = \frac{r(n)}{g(n-j^*)} = \frac{r(n)}{g(n-2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{(n+1)} = n+4$$

Pozor, opět je potřeba prověřit, zda existuje nezáporný kořen $j^* \in \mathbb{N}_0$:

$$res_n(\overline{q}(n),\ \overline{r}(n+j)) = res_n(n,\ n+j+4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & j+4 \end{vmatrix} = j+4 = 0 \Leftrightarrow j \in \{-4\}$$

Zjišťujeme, že takový kořen neexistuje, tudíž můžeme konstatovat, že jsme nalezli regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+4)}$, kde

$$\overline{p}(n) = (n+3)(n+2),\ \overline{q}(n) = n,\ \overline{r}(n) = n+4.$$

Nyní chceme nalézt stupeň polynomu $f(n)$, proto vypočteme:

$$l_p = st(\overline{q}(n+1) + \overline{r}(n)) = st(n+1+n+4) = st(2n+5) = 1$$
$$l_m = st(\overline{q}(n+1) - \overline{r}(n)) = st(n+1-n-4) = st(-3) \quad = 0$$

Nastala situace, že $l_p > l_m$, proto vypočteme pomocné číslo k_0:

$$k_0 = \frac{-l_p \cdot coef(\overline{q}(n),\ l_p) - coef(\overline{q}(n),\ l_p - 1) + coef(\overline{r}(n),\ l_p - 1)}{coef(\overline{q}(n),\ l_p)} = \frac{-1 \cdot 1 - 0 + 4}{1} = 3$$

Jelikož $k_0 \in \mathbb{Z}$, použijeme vzorec $k = \max(k_0,\ st(p(n)) - l_p + 1) = \max(3,\ 2 - 1 + 1) = 3$.

Bude tedy zapotřebí nalézt polynom $f(n)$, který je třetího stupně, tj. polynom, který lze zapsat ve tvaru $f(n) = c_3n^3 + c_2n^2 + c_1n + c_0$ a zároveň splňuje podmínku $\overline{p}(n) = \overline{q}(n+1) \cdot f(n) - \overline{r}(n) \cdot f(n-1)$. Tedy v našem případě píšeme:

$$n^2 + 5n + 6 = (n+1)(c_3n^3 + c_2n^2 + c_1n + c_0) - (n+4)\left[c_3(n-1)^3 + c_2(n-1)^2 + c_1(n-1) + c_0\right]$$

Výraz pravé strany rovnosti upravíme tak, abychom mohli nalézt koeficienty $c_3,\ c_2,\ c_1,\ c_0$:

$$\begin{aligned}
&(n+1)(c_3n^3 + c_2n^2 + c_1n + c_0) - (n+4)\left[c_3(n^3 - 3n^2 + 3n - 1) + c_2(n^2 - 2n + 1)^2 + c_1n - c_1 + c_0\right] = \\
&c_3n^4 + c_3n^3 + c_2n^3 + c_2n^2 + c_1n^2 + c_1n + c_0n + c_0 - (n+4)(c_3n^3 - 3c_3n^2 + 3c_3n - c_3 + c_2n^2 - 2c_2n + c_2 + \\
&+c_1n - c_1 + c_0) = c_3n^4 + c_3n^3 + c_2n^3 + c_2n^2 + c_1n^2 + c_1n + c_0n + c_0 - (c_3n^4 + 4c_3n^3 - 3c_3n^3 - 12c_3n^2 + 3c_3n^2 + \\
&+12c_3n - c_3n - 4c_3 + c_2n^3 + 4c_2n^2 - 2c_2n^2 - 8c_2n + c_2n + 4c_2 + c_1n^2 + 4c_1n - c_1n - 4c_1 + c_0n + 4c_0 = \\
&= -c_2n^2 - 2c_1n - 3c_0 + 9c_3n^2 - 11c_3n + 4c_3 + 7c_2n - 4c_2 + 4c_1
\end{aligned}$$

Lze tedy psát, že:

$$n^2+5n+6=n^2(9c_3-c_2)+n(-2c_1-11c_3+7c_2)+4c_3+4c_1-3c_0-4c_2$$

Stejným způsobem, který jsme užívali v rozkladech výrazů na parciální zlomky, zjišťujeme zastoupení nezáporných mocnin u neznámé n, neboli získáme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} n^2 &: \quad 1 = \quad 9c_3-c_2 \\ n^1 &: \quad 5 = -11c_3+7c_2-2c_1 \\ n^0 &: \quad 6 = \quad 4c_3-4c_2+4c_1+c_0 \end{aligned}$$

Tato soustava tří rovnic však obsahuje čtyři neznámé, proto je potřeba volit parametr p, volme např. c_3 parametrem (označme $c_3 := p$). Tuto soustavu zjednodušme do nějakého jednoduššího tvaru pomocí maticového počtu:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -11 & 7 & -2 & 0 & 5 \\ 4 & -4 & 4 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 52 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 4 & -4 & 4 & -3 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 52 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ -32 & 0 & 4 & -3 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 52 & 0 & -2 & 0 & 12 \\ 72 & 0 & 0 & -3 & 26 \end{array}\right)$$

Zjednodušená soustava bude mít tvar: $$\begin{array}{lllll} 9p-c_2 & & & = & 1 \\ 26p & -c_1 & & = & 6 \\ 72p & & -3c_0 & = & 26 \end{array}$$

Odtud získáváme kořeny $c_2=9p-1,\ c_1=26p-6,\ c_0=\dfrac{72p-26}{3}$, a proto polynom $f(n)$ bude ve tvaru $f(n)=pn^3+(9p-1)n^2+(26p-6)n+\dfrac{72p-26}{3}$.

Dosadíme do vztahu (1) uvedeného ve větě **5.1.2**, tj. má platit:

$$s_n=\frac{\overline{q}(n+1)}{\overline{p}(n)}\cdot a_n\cdot f(n)=\frac{f(n)}{(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{pn^3+(9p-1)n^2+(26p-6)n+\dfrac{72p-26}{3}}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$

Volbou parametru p synchronizujeme posloupnost částečných součtů. Stanovíme počáteční podmínku - sčítáme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$, proto počáteční podmínkou bude $s_1 = \frac{1}{10}$.

Tudíž budeme řešit rovnici $\frac{1}{10} = \frac{p\cdot 1+(9p-1)\cdot 1+(26p-6)\cdot 1+\frac{72p-26}{3}}{(1+2)(1+3)(1+4)}$. Po úpravách zjišťujeme, že tato rovnice má právě jeden kořen $p = \frac{13}{36}$. Proto volme $p = \frac{13}{36}$ a odtud dostáváme, že $f(n) = \frac{13}{36}n^3 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{61}{18}n$.

Nalezli jsme tedy částečný součet, který je ve tvaru:

$$s_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}\cdot\left(\frac{13}{36}n^3 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{61}{18}n\right)$$

Závěrem vyčíslíme součet s:

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{13}{36}n^3 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{61}{18}n}{(n+3)(n+2)(n+4)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{13}{36}n^3 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{61}{18}n}{n^3+9n^2+26n+24} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{13}{36}+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{n}+\frac{61}{18}\cdot\frac{1}{n^2}}{1+\frac{9}{n}+\frac{26}{n^2}+\frac{24}{n^3}} = \frac{13}{36}$$

Podotkněme, že v příkladech **5.3.1** a **5.3.2** bylo nutno volit parametr $c_0 = p$, abychom nalezli řešení soustavy lineárních rovnic o neznámých c_i, kde $i \in \mathbb{N}_0$. Po volbě p stačilo dosadit do vztahu (1) věty **5.1.2** a tím byl nalezen částečný součet s_n. To bylo možné díky tomu, že posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ byly hypergeometrické. Volbou p jsme totiž zaručili, že posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ bude hypergeometrickou. V následujícím příkladě nastane situace, že daná soustava bude mít právě jedno řešení bez nutnosti volit parametr p, tudíž posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ nebude hypergeometrická. Jak si s takovouto situací poradí Gosperův algoritmus?

(Příklad 5.3.3) Stanovme součet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}$.

Nejprve pomocí limitního podílového kritéria rozhodneme, zda tato řada konverguje:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!}{2^{n+1}\cdot(n+1)!}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+1)!}{2\cdot 2^n(n+1)!}\cdot\frac{2^n\cdot n!}{(n+1)n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}<1\Rightarrow\exists\, s\in\mathbb{R}$$

Odstraníme výrazy s faktoriály: $a_n=\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}=\frac{(n+1)n!}{2^n\cdot n!}=\frac{n+1}{2^n}$.

Dále vypočteme, že $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{2^n}\cdot\frac{2^{n-1}}{n}=\frac{n+1}{2n}$. Označme $p(n):=1,\ q(n):=n+1,\ r(n):=2n$.

Ověřme, zda $\forall j\in\mathbb{N}_0:\ D(q(n),\ r(n+j))=1$:

$$res_n(q(n),\ r(n+j))=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2j\end{vmatrix}=2j-2=0\Leftrightarrow j\in\{1\}$$

Nalezli jsme nezáporný kořen, označme $j^*=1$, a předefinujme polynomy $p,\ q,\ r$:

$$g(n)=D(q(n),\ r(n+j^*))=D(q(n),\ r(n+1))=D(n+1,\ 2(n+1))=n+1$$
$$\bar{p}(n):=p(n)\prod_{k=0}^{j^*-1}g(n-k)=p(n)\prod_{k=0}^{0}g(n-k)=p(n)g(n)=n+1$$
$$\bar{q}(n):=\frac{q(n)}{g(n)}=\frac{n+1}{n+1}=1$$
$$\bar{r}(n):=\frac{r(n)}{g(n-j^*)}=\frac{r(n)}{g(n-1)}=\frac{2n}{n}=2$$

Polynomy $\bar{q}(n)$, $\bar{r}(n)$ jsou nesoudělné, tudíž regulární reprezentace podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ je ve tvaru

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{2n}$, kde $\bar{p}(n)=n+1,\ \bar{q}(n)=1,\ \bar{r}(n)=2$. Pokusíme se určit stupeň polynomu $f(n)$:

$$l_p=st(\bar{q}(n+1)+\bar{r}(n))=st(1+2)=st(3)\quad=0$$
$$l_m=st(\bar{q}(n+1)-\bar{r}(n))=st(1-2)=st(-1)=0$$

$$l_p\le l_m\Rightarrow k=st(p(n))-l_m=st(n+1)-0=1-0=1$$

Polynom $f(n)$ je zřejmě prvního stupně, tj. ve tvaru $f(n)=c_1n+c_0$ a zároveň tento polynom má splňovat podmínku $\bar{p}(n)=\bar{q}(n+1)\cdot f(n)-\bar{r}(n)\cdot f(n-1)$, tj. v našem případě to znamená řešit rovnici $n+1=1\cdot(c_1 n+c_0)-2\left[c_1(n-1)+c_0\right]$, kterou po jednoduchých úpravách dostaneme do tvaru $n+1=-c_1 n+2c_1-c_0$. Dále zjistíme zastoupení nezáporných mocnin u neznámé n, tj. budeme řešit následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} n^1 &: \quad 1=-c_1 \\ n^0 &: \quad 1=2c_1-c_0 \end{aligned}$$

Soustava má kořeny $c_1=-1,\ c_0=-3$ a proto jsme nalezli polynom $f(n)=-n-3$.

Opět připomeňme, že koeficienty $c_1,\ c_0$ byly jednoznačně stanoveny. To znamená, že posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ není hypergeometrická. Proto nejprve vypočteme:

$$s_n{'}=\frac{\overline{q}(n+1)}{\overline{p}(n)}\cdot a_n\cdot f(n)=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{2^n}(-n-3)=-\frac{n+3}{2^n} \qquad\qquad s_0{'}=-\frac{0+3}{2^0}=-3$$

Dále potom $s_n=s_n{'}-s_0{'}=-\dfrac{n+3}{2^n}+3$ a odtud již stačí vyjádřit hledaný součet s:

$$s=\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n+3}{2^n}+3\right)=3$$

Povšimněme si ještě jedné zajímavé skutečnosti - tento součet jsme také mohli stanovit stejným způsobem jako v kapitole **2.2**, dopracovali bychom se ke zjištění, že

$$s_n=-1+4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{1-n}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1-n}{2^n}.$$

Konstantu 3 bychom nalezli vhodným odečtením jistých násobků s_n, kdežto Gosperův algoritmus tuto konstantu nalezl výpočtem $(-s_0{'})$.

5.4 Ukázky gosperovsky nesčítatelných řad

Následující příklady jsou ukázkami, že Gosperův algoritmus nelze použít pro všechny konvergentní číselné řady. Poznáme, že v jistých „místech“ algoritmus končí s výsledkem, že zadanou sumu nelze vyčíslit. Tato místa jsou tři:

- Může nastat situace, že podíl $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ není racionální funkcí v proměnné n.
- Může se stát, že soustava lineárních rovnic s neurčitými koeficienty c_i, kde $i \in \mathbb{N}_0$, nemá řešení.
- Může nastat případ, že $k < 0$.

(Příklad 5.4.1)

Stanovme součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. Užijeme srovnávací kritérium.

Víme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje. Zjistíme, zda pro skoro všechna přirozená n platí:

$\frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{n^2+1}$. Tato nerovnost platí dokonce pro každé přirozené n, tudíž řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ konverguje.

Dále vypočteme: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n-1)^2+1}{n^2+1} = \frac{n^2-2n+2}{n^2+1}$.

Označme $p(n) := 1,\ q(n) := n^2 - 2n + 2,\ r(n) := n^2 + 1$.

Opět je zapotřebí ověřit, zda $\forall j \in \mathbb{N}_0 :\ D(q(n),\ r(n+j)) = 1$. Proto vypočteme:

$$res_n(q(n),\ r(n+j)) = res_n(n^2 - 2n + 2,\ n^2 + 2nj + j^2 + 1) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2j & j^2+1 & 0 \\ 0 & 1 & 2j & j^2+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2j+2 & j^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 2j & j^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2j+2 & j^2-1 & 0 \\ 1 & 2j & j^2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & j^2+4j+3 & -4j-4 \\ 0 & 2j+2 & j^2-1 \end{vmatrix} =$$
$$= (j^2+4j+3)(j^2-1)+8(j+1)^2 = (j+1)^2(j^2+2j+5)$$

Položme, dle Sylvesterova kritéria, tento determinant roven nule, tj. řešme rovnici $(j+1)^2(j^2+2j+5)=0$. Zjišťujeme, že jediným kořenem je $j=-1$.

A proto můžeme konstatovat, že jsme nalezli regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, kde

$p(n)=1,\ q(n)=n^2-2n+2,\ r(n)=n^2+1$.

Nyní se pokusíme nalézt stupeň polynomu $f(n)$, proto vypočteme:

$$\begin{aligned} l_p &= st(q(n+1)+r(n)) = st(n^2+1+n^2+1) = st(2n^2+2) = \quad 2 \\ l_m &= st(q(n+1)-r(n)) = st(n^2+1-n^2-1) = st(0) \qquad = -1 \end{aligned}$$

Zjišťujeme, že nastal případ (2), tj. $l_p > l_m$, vypočteme pomocné číslo k_0:

$$k_0 = \frac{-l_p \cdot coef(q(n),\ l_p) - coef(q(n),\ l_p-1) + coef(r(n),\ l_p-1)}{coef(q(n),\ l_p)} = \frac{-2\cdot 1-(-2)+0}{1} = 0$$

Nastal případ $(2a)$, tj. $k_0 \in \mathbb{Z}$, vypočteme $k = \max(k_0, st(p(n)) - l_p + 1) = \max(0, 1-2+1) = 0$.

Polynom $f(n)$ je tedy nultého stupně, tj. ve tvaru $f(n)=c_0$. Podle věty **5.1.2** má polynom $f(n)$ splňovat podmínku $p(n)=q(n+1)\cdot f(n)-r(n)\cdot f(n-1)$, což v našem případě znamená řešit rovnici $1=(n^2+1)c_0-(n^2+1)c_0$, která bohužel nemá žádné řešení. A proto nelze stanovit součet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ pomocí Gosperova algoritmu, neboli řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ není gosperovsky sčítatelná.

(Příklad 5.4.2)

Také je zajímavé vyzkoušet, zda si Gosperův algoritmus poradí s alternující řadou.

Stanovme součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Úvodem zjistíme, zda tato řada konverguje pomocí Leibnitzova kritéria, tzn., zda jsou splněny dvě následující podmínky:

$$\text{(1)} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n' = 0$$
$$\text{(2)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}: \; a_n' \;\geq\; a_{n+1}' \;>\; 0$$

Označme $a_n' := \frac{1}{2n-1}$. Ověříme podmínku (1): $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0$. A dále pak podmínku (2):

$a_n' \;>\; 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, což je zřejmé. Následně řešíme nerovnost $\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n+1}$, po úpravě obdržíme $2 \geq 0 \Rightarrow$ podmínka (2) je splněna a zadaná řada tedy konverguje.

Regulární reprezentace podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ je zřejmě ve tvaru $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \cdot \frac{2n-3}{(-1)^n} = \frac{-2n+3}{2n-1}$.

Položme $p(n) := 1,\; q := (-2n+3),\; r(n) := 2n-1$. Ověřme, zda tyto polynomy bude nutno předefinovat:

$$res_n(q(n),\; r(n+j)) = res_n(-2n+3,\; 2n+2j-1) = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 2j-1 \end{vmatrix} = -2(2j-1)-6 = -4j-4$$

Rovnice $-4j-4=0$ má jediný kořen $j=-1$, tudíž polynomy $p,\; q,\; r$ tvoří regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Dále se pokusíme určit stupeň polynomu $f(n)$:

$$l_p = st(q(n+1)+r(n)) = st(-2n+1+2n-1) = st(0) \qquad = -1$$
$$l_m = st(q(n+1)-r(n)) = st(-2n+1-2n+1) = st(-4n+2) = +1$$

Zjišťujeme, že $l_p \leq l_m$ a proto vypočteme $k = st(p(n)) - l_m = st(1) - 1 = 0 - 1 = -1$.

Nalezli jsme záporné číslo k a proto posloupnost $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ není hypergeometrická a tudíž zadaná řada není gosperovsky sčítatelná.

(Příklad 5.4.3)

Chceme stanovit součet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$. Pokusme se vypočítat podíl $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{n(n-1)!}{n^n}\cdot\frac{(n-1)^n}{(n-1)(n-1)!}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$$

Algoritmus ihned končí, výraz $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ není racionální funkcí.

(Příklad 5.4.4)

Chceme stanovit součet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}$. Ověřme konvergenci řady.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3\cdot n!}{(n+1)\cdot n^3\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{n^4+n^3}=0<1\Rightarrow\exists\, s\in\mathbb{R}$$

Poté vypočteme: $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n^3}{n!}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1)^3}=\frac{n^3}{n(n-1)!}\cdot\frac{(n-1)!}{(n-1)^3}=\frac{n^2}{(n-1)^3}$.

Označme $p(n):=1,\ q(n):=n^2,\ r(n):=(n-1)^3=n^3-3n^2+3n-1$. Dále vypočteme:

$$r(n+j)=(n+j)^3-3(n+j)^2+3(n+j)-1=n^3+3n^2j+3nj^2-3n^2-6nj-3j^2+3n+3j-1=$$
$$=n^3+n^2(3j-3)+n(3j^2-6j+3)+j^3-3j^2+3j-1$$

Ověříme, zda $\forall j\in\mathbb{N}_0:\ D(q(n),\ r(n+j))=1$:

$$res_n(q(n),\ r(n+j))=res_n(n^2,\ n^3+n^2(3j-3)+n(3j^2-6j+3)+j^3-3j^2+3j-1)=$$

$$=\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\1&3j-3&3j^2-6j+3&j^3-3j^2+3j-1&0\\0&1&3j-3&3j^2-6j+3&j^3-3j^2+3j-1\end{vmatrix}$$

Zde je výhodné přejít k determinantu transponované matice:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3j-3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3j^2-6j+3 & 3j-3 \\ 0 & 0 & 0 & j^3-3j^2+3j-1 & 3j^2-6j+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j^3-3j^2+3j-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3j-3 & 1 \\ 0 & 1 & 3j^2-6j+3 & 3j-3 \\ 0 & 0 & j^3-3j^2+3j-1 & 3j^2-6j+3 \\ 0 & 0 & 0 & j^3-3j^2+3j-1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3j^2-6j+3 & 3j-3 \\ 0 & j^3-3j^2+3j-1 & 3j^2-6j+3 \\ 0 & 0 & j^3-3j^2+3j-1 \end{vmatrix} = (j^3-3j^2+3j-1)^2$$

Položme determinant roven nule, tj. řešme rovnici $(j^3-3j^2+3j-1)^2 = 0$.

Zjišťujeme, že rovnice má jediný kořen $j = 1$ a proto předefinujme polynomy $p,\ q,\ r$.

$$g(n) := D(q(n),\ r(n+j^*)) = D(q(n),\ r(n+1)) = D(n^2,\ n^3) = n^2$$
$$\overline{p}(n) := p(n)\cdot\prod_{k=0}^{j^*-1} g(n-k) = p(n)\cdot\prod_{k=0}^{0} g(n-k) = p(n)\cdot g(n) = n^2$$
$$\overline{q}(n) := \frac{q(n)}{g(n)} = \frac{n^2}{n^2} = 1$$
$$\overline{r}(n) := \frac{r(n)}{g(n-j^*)} = \frac{r(n)}{g(n-1)} = \frac{(n-1)^3}{(n-1)^2} = n-1$$

Je zřejmé, že $\forall j \in \mathbb{N}_0 :\ D(\overline{q}(n),\ r(\overline{n}+j)) = 1$ a proto můžeme konstatovat, že jsme nalezli regulární reprezentaci podílu $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, kde $\overline{p}(n) = n^2,\ \overline{q}(n) = 1,\ \overline{r}(n) = n-1$.

Dále se pokusme určit stupeň polynomu $f(n)$:

$$l_p = st(\overline{q}(n+1)+\overline{r}(n)) = st(1+n-1) = st(n) \qquad = 1$$
$$l_m = st(\overline{q}(n+1)-\overline{r}(n)) = st(1-n+1) = st(-n+2) = 1$$

Zjišťujeme, že nastal případ (1), tj. $l_p \le l_m$, vyčíslíme $k = st(\overline{p}(n)) - l_m = st(n^2) - 1 = 2 - 1 = 1$.

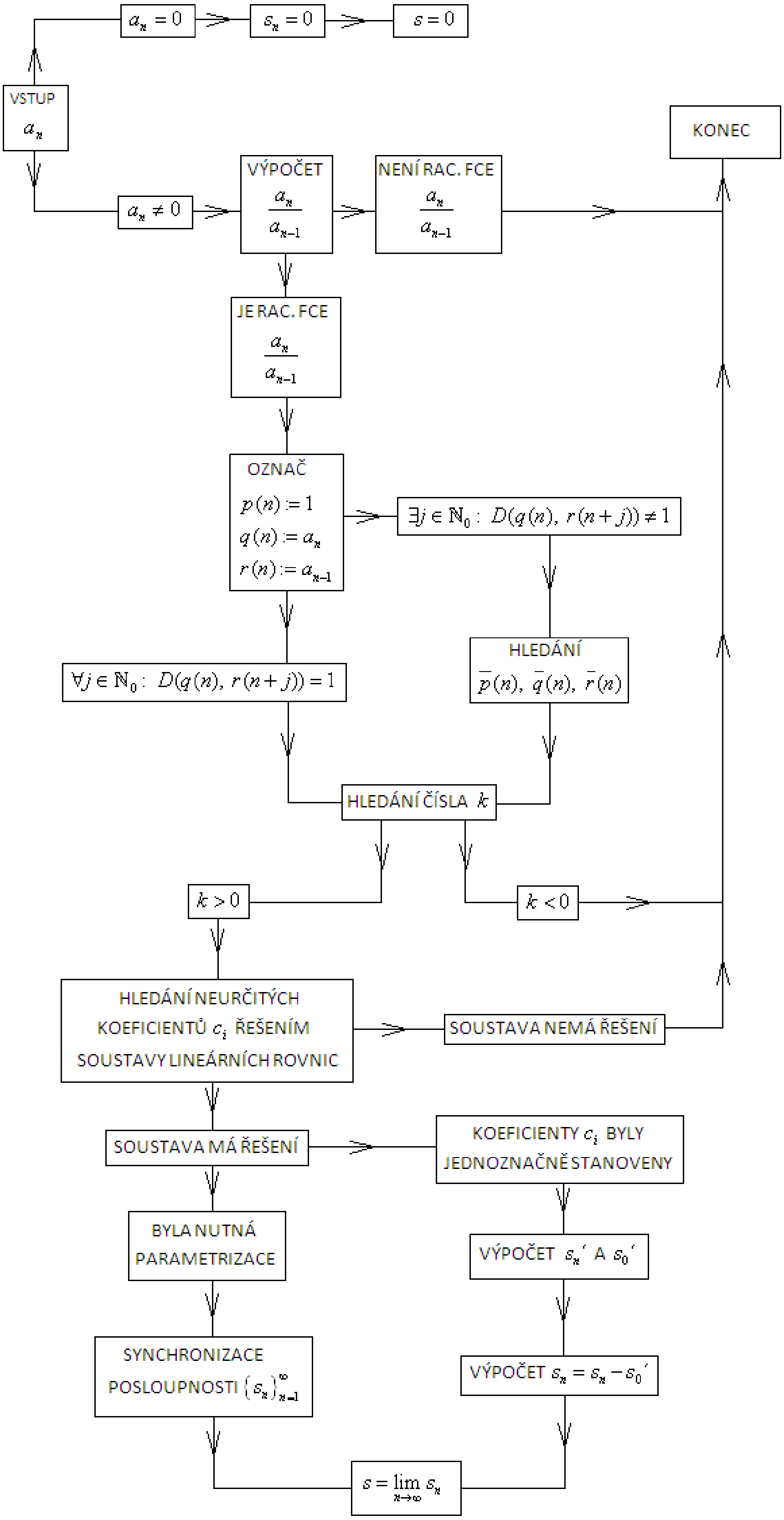
Budeme tedy hledat polynom prvního stupně, tj. polynom, který je možno zapsat ve tvaru $f(n) = c_1 n + c_0$. Ten musí splňovat podmínku $\overline{p}(n) = \overline{q}(n+1) \cdot f(n) - \overline{r}(n) \cdot f(n-1)$, tj. v našem případě bude $n^2 = 1 \cdot (c_1 n + c_0) - (n-1)\left[c_1(n-1) + c_0\right]$, což po roznásobení lze zapsat ve tvaru $n^2 = -c_1 n^2 + n(3c_1 - c_0) - c_1 + 2c_0$. Zjistíme zastoupení nezáporných mocnin u neznámé n, neboli získáme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} n^2 &: 1 = -c_1 \\ n^1 &: 0 = 3c_1 - c_0 \\ n^0 &: 0 = -c_1 + 2c_0 \end{aligned}$$

Tato soustava bohužel nemá řešení a proto Gosperův algoritmus zde končí. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$ není gosperovsky sčítatelná.

V následující podkapitole **5.5** se pokusme sestrojit schéma tohoto algoritmu, abychom v závěrečné podkapitole **5.6** mohli porovnávat výsledky s tímto schématem i s výsledky, které jsme získali v podkapitolách **5.3** a **5.4**.

5.5 Blokové schéma Gosperova algoritmu



obr. 10

5.6 Ukázky Gosperova algoritmu v programu Maple®

V dnešní době existuje mnoho matematických softwarů, např. *Mathematica*®, *Maple*®, *MATLAB*®, *Derive*®, *Maxima*®, apod. Bohužel ne každý software je schopen zobrazit algoritmus výpočtu, pouze zobrazí konečný výsledek. Volme software *Maple* 14®, ten může algoritmy zobrazovat, a zkoumejme algoritmy výpočtů příkladů, které byly řešeny v předchozích kapitolách. Tento software je schopen zobrazit všechny kroky, s výjimkou dvou následujících:

- Nastane-li situace, že se existuje nezáporné j^*, software nezobrazí, jakým způsobem předefinoval polynomy $p,\ q,\ r$. Zde bychom mohli poznamenat, že v literatuře [3] se můžeme dočíst, že nezáporné j^* může být nalezeno pomocí rezultantu $res_n(q(n),\ r(n+j))$ a četbou literatury [16] se můžeme přesvědčit, že *Maple*® rezultant skutečně používá.

- Software nezobrazuje parametrizaci při řešení soustavy lineárních rovnic s neznámými koeficienty c_i, kde $i \in \mathbb{N}_0$. Pokud parametrizace nebyla nutná, tj. tyto koeficienty byly jednoznačně stanoveny, potom se nezobrazí výpočet $s_n{}'$ a $s_0{}'$.

Dále poznamenejme, že předností softwaru *Maple* 14® je tzv. Sumtools, což je balíček obsahující několik algoritmů pro nalezení součtu řady. A v tomto balíčku nalezneme i Gosperův algoritmus. Další předností *Maple* 14® je příkaz *infolevel*, který umožňuje výběr míry podrobnosti zobrazení daného algoritmu (pokud bychom tento příkaz nezadali, pouze bychom obdrželi konečný výsledek). Má pět úrovní, které jsou označené přirozenými čísly $1-5$. Volme nejvyšší úroveň, tj. “ $\boldsymbol{infolevel[all] := 5:}$ “. Návod, jak Gosperův algoritmus v tomto softwaru spustit je jednoduchý, můžeme se s ním seznámit v literatuře [16] a nebo jej přímo vyhledat v menu nápovědy *Maple* 14®.

(Příklad 5.6.1)

Stanovme součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$. Tento jsme hledali řešením příladů **5.1.1** a **5.3.1**.

a) **Aktivujeme balíček Sumtools.**

> $with(sumtools)$

$[Hypersum, Sumtohyper, extended\_gosper, gosper, hyperrecursion, hypersum, hyperterm, simpcomb, sumrecursion, sumtohyper]$

b) **Zvolíme, jak podrobně má být zobrazen algoritmus.**

> $infolevel[all] := 5 :$

c) **Z balíčku Sumtools vybereme algoritmus *extended_gosper* a přitom již zadáváme sumu, kterou chceme vyčíslit.**

> $extended\_gosper(((3*n-2)*(3*n+1))\wedge(-1), n = 1..k)$

Následující body 1) - 8) vypíše program *Maple* 14® . Porovnejme jednotlivé kroky s těmi, které jsme prováděli bez užití počítače („lidskou metodou“):

1) **Aplikace algoritmu na zadanou sumu, vypočtení podílu** $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{(3n-5)(3n+1)}$ **.**

```
sum/extgosper: applying Gosper algorithm to
a(n):= 1/((3*n-2)*(3*n+1))
sum/gospernew/internal: a(n)/a(n-1):= (3*n-5)/(3*n+1)
```

2) **Zjištění, že algoritmus lze použít, protože** $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ **je racionální funkcí.**

```
sum/gospernew/internal: Gosper's algorithm applicable
```

3) **Nalezení regulární reprezentace podílu** $\frac{a_n}{a_{n-1}}$**, kde** $p(n)=1$**,** $q(n)=3n-5$**,** $r(n)=3n+1$

```
sum/gospernew/internal: p:= 1
sum/gospernew/internal: q:= 3*n-5
sum/gospernew/internal: r:= 3*n+1
```

4) Určení stupně polynomu $f(n)$ s výsledkem $k=1$.

```
sum/gospernew/internal: degreebound:= 1
```

5) Řešení rovnice $1=(3n-2)(c_1 n+c_0)-(3n+1)\left[c_1(n-1)+c_0\right]$ **s neznámými** c_1, c_2 **.**

```
sum/gospernew/internal: solving equations to find f
Main: Entering solver with 1 equation in 2 variables
Transformer: solving for linear equation in _X000002
```

6) Zjištění, že tato rovnice má právě jedno řešení, parametrizace, algoritmus může pokračovat.

```
Main: solving successful - now forming solutions
Main: Exiting solver returning 1 solution
sum/gospernew/internal: Gosper's algorithm successful
```

7) Nalezení polynomu $f(n)=n$.

```
sum/gospernew/internal: f:= n
```

8) Nalezení posloupnosti částečných součtů.

```
sum: process the input arguments
sum: definite sum
```

$$\frac{k}{3k+1}$$

d) Vyčíslíme limitu zadáním následující formule.

> $Limit\left(\frac{k}{3k+1}, k = infinity\right) = limit\left(\frac{k}{3k+1}, k = infinity\right)$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k}{3k+1} = \frac{1}{3}$$

V následujících příkladech již nekomentujme body, které zadáváme do programu, tj. body a) – d).

(Příklad 5.6.2)

Stanovme součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n \cdot n!}$, který jsme hledali v příkladě **5.3.3**.

> $with(sumtools)$

$$[Hypersum, Sumtohyper, extended\_gosper, gosper, hyperrecursion, hypersum, hyperterm, simpcomb, sumrecursion, sumtohyper]$$

> $infolevel[\mathrm{extended\_gosper}] := 5 :$

> extended_gosper(((n + 1) !) / ((2^n) * (n!)), n = 1 ..k)

1) **Aplikace algoritmu na zadanou sumu, vypočtení podílu** $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n+1}{2n}$ **.**

```
sum/gospernew/internal: a(n)/a(n-1):=  (1/2)*(n+1)/n
```

2) **Zjištění, že algoritmus lze použít, protože** $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ **je racionální funkcí.**

```
sum/gospernew/internal: Gosper's algorithm applicable
```

3) **Nalezení regulární reprezentace podílu** $\frac{a_n}{a_{n-1}}$**, kde** $\overline{p}(n) = n+1,\ \overline{q}(n) = 1,\ \overline{r}(n) = 2$ **.**

```
sum/gospernew/internal: p:= n+1
sum/gospernew/internal: q:= 1
sum/gospernew/internal: r:= 2
```

4) **Určení stupně polynomu** $f(n)$ **s výsledkem** $k = 1$ **.**

```
sum/gospernew/internal: degreebound:= 1
```

5) **Řešení rovnice** $n+1 = -c_1 n + 2c_1 - c_0$ **s neznámými** c_1, c_0**, která je řešena porovnáním koeficientů** $c_1,\ c_0$ **u neznámé** n**, neboli řešení soustavy lineárních rovnic** $1 = -c_1,\ 1 = 2c_1 - c_0$**.**

```
sum/gospernew/internal: solving equations to find f
Main: Entering solver with 2 equations in 2 variables
Transformer: solving the uncoupled linear subsystem in
{_X000001, _X000002}
Linear: solving 2 linear equations
Rational: # equations 2
Rational: # equations 1
Rational: # equations 0
Rational: backsubstitution at: 2
Rational: backsubstitution at: 1
Rational: 2 equations solved, rank: 2
Main: solving successful - now forming solutions
```

6) **Zjištění, že tato rovnice má právě jedno řešení, parametrizace, algoritmus může pokračovat.**

```
Main: Exiting solver returning 1 solution
sum/gospernew/internal: Gosper's algorithm successful
```

7) **Nalezení polynomu** $f(n) = -3 - n$ **.**

```
sum/gospernew/internal: f:= -3-n
```

8) Nalezení posloupnosti částečných součtů.

```
sum: process the input arguments
sum: definite sum
```

$$-\frac{2\,(k+3)\,(k+2)\,!}{(k+2)\,2^{k+1}\,(k+1)\,!}+\frac{3}{2}\,\frac{2!}{1!}$$

> $Limit\left(-\frac{2\,(k+3)\,(k+2)\,!}{(k+2)\,2^{k+1}\,(k+1)\,!}+\frac{3}{2}\,\frac{2!}{1!}, k=infinity\right)$
> $= limit\left(-\frac{2\,(k+3)\,(k+2)\,!}{(k+2)\,2^{k+1}\,(k+1)\,!}+\frac{3}{2}\,\frac{2!}{1!}, k=infinity\right)$

$$\lim_{k\to\infty}\left(-\frac{2\,(k+3)\,(k+2)\,!}{(k+2)\,2^{k+1}\,(k+1)\,!}+3\right)=3$$

(Příklad 5.6.3)

Stanovme součet $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$, který jsme hledali v příkladě **5.4.2**.

> $with(sumtools)$

$$[Hypersum, Sumtohyper, extended\_gosper, gosper, hyperrecursion, hypersum, hyperterm, simpcomb, sumrecursion, sumtohyper]$$

> $infolevel[\mathrm{extended\_gosper}] := 5:$
> extended_gosper(((- 1)^(n + 1)) / ((2*n) - 1), n = 1 ..k)

1) Aplikace algoritmu na zadanou sumu, vypočtení podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{-2n+3}{2n-1}$.

```
sum/extgosper: applying Gosper algorithm to
a(n):=(-1)^(n+1)/(2*n-1)
sum/gospernew/internal: a(n)/a(n-1):= -(2*n-3)/(2*n-1)
```

2) Zjištění, že algoritmus lze použít, protože $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ je racionální funkcí.

```
sum/gospernew/internal: Gosper's algorithm applicable
```

3) Nalezení regulární reprezentace podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, kde

$p(n)=1,\ q=(-2n+3),\ r(n)=2n-1$.

```
sum/gospernew/internal: p:= 1
sum/gospernew/internal: q:= -2*n+3
sum/gospernew/internal: r:= 2*n-1
```

4) Určení stupně polynomu $f(n)$ s výsledkem $k=-1$, což je nepřípustné a proto algoritmus končí.

```
sum/gospernew/internal: degreebound:= -1
```

```
sum/gospernew/internal: Gosper's algorithm: no closed
form antidifference exists
```

FAIL

(Příklad 5.6.4)

Stanovme součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, který jsme hledali v příkladě **5.4.3**.

> $\boldsymbol{with(sumtools)}$

$[Hypersum, Sumtohyper, extended\_gosper, gosper, hyperrecursion, hypersum, hyperterm, simpcomb, sumrecursion, sumtohyper]$

> $\boldsymbol{infolevel[all] := 5:}$
> $\boldsymbol{extended\_gosper(((n!)/(n^{\wedge}n)), n = 1..k)}$

1) **Aplikace algoritmu na zadanou sumu, vypočtení podílu** $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n(n-1)^n}{n^n(n-1)}$.

```
sum/extgosper: applying Gosper algorithm to
a(n):= factorial(n)/n^n
sum/gospernew/internal:
a(n)/a(n-1):=  n*(n-1)^n/(n^n*(n-1))
```

2) **Zjištění, že algoritmus nelze použít, protože** $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ **není racionální funkcí.**

```
sum/gospernew/internal: is not rational
sum/gospernew/internal: Gosper's algorithm not applicable
```

FAIL

(Příklad 5.6.5)

Stanovme součet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$, který jsme hledali v příkladě **5.4.4**.

> $with(sumtools)$

$[Hypersum, Sumtohyper, extended\_gosper, gosper, hyperrecursion, hypersum, hyperterm, simpcomb, sumrecursion, sumtohyper]$

> $infolevel[\mathrm{extended\_gosper}] := 5:$
> extended_gosper((n^3)/(n!), n = 1..k)

1) **Aplikace algoritmu na zadanou sumu, vypočtení podílu** $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n^2}{(n-1)^3}$.

```
sum/extgosper: applying Gosper algorithm to
a(n):= n^3/factorial(n)
sum/gospernew/internal: a(n)/a(n-1):= n^2/(n-1)^3
```

2) **Zjištění, že algoritmus lze použít, protože** $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ **je racionální funkcí.**

```
sum/gospernew/internal: Gosper's algorithm applicable
```

3) Nalezení regulární reprezentace podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, kde $\bar{p}(n) = n^2,\ \bar{q}(n) = 1,\ \bar{r}(n) = n-1$ **.**

```
sum/gospernew/internal: p:= n^2
sum/gospernew/internal: q:= 1
sum/gospernew/internal: r:= n-1
```

4) Určení stupně polynomu $f(n)$ **s výsledkem** $k = 1$ **.**

```
sum/gospernew/internal: degreebound:= 1
```

5) Řešení rovnice $n^2 = -c_1 n^2 + n(3c_1 - c_0) - c_1 + 2c_0$ **s neznámými** c_1, c_0**, která je řešena porovnáním koeficientů** $c_1,\ c_0$ **u neznámé** n**, neboli řešení soustavy lineárních rovnic** $1 = -c_1,\ 0 = 3c_1\ -\ c_0,\ 0 = -c_1 + 2c_0$**, algoritmus končí, neboť soustava nemá řešení.**

```
sum/gospernew/internal: solving equations to find f
Main: Entering solver with 3 equations in 2 variables
Transformer:   solving the uncoupled linear subsystem in
{_X000001, _X000002}
Linear: solving 3 linear equations
Rational: # equations 3
Rational: # equations 2
Rational: # equations 1
Rational: system is inconsistent
Transformer:   system has a inconsistent linear subsystem
Main: solving successful - now forming solutions
Main: Exiting solver returning 0 solutions
solve: Warning: no solutions found
sum/gospernew/internal: Gosper's algorithm: no closed
form antidifference exists
```

FAIL

Závěr

Cílem této práce bylo poukázat na skutečnost, jak složitým postupem může počítač stanovit součet dané nekonečné konvergentní číselné řady (dále jen řady) ve srovnání s člověkem, který by tento součet hledal bez užití výpočetní techniky. Názornou ukázkou jsou příklady vedoucí na užití teleskopické metody. Jiným cílem bylo ukázat, jakým složitým vývojem musela projít matematika jakožto vědní obor, abychom dnes mohli během krátkého okamžiku obdržet součet dané řady.

Položíme-li si otázku, jaké pomůcky budou využívat za deset či dvacet let studenti v hodinách matematiky, možná odpovíme, že mezi ně budou patřit moderní kalkulátory či dokonce osobní počítače. Proto se snažím připravit na takovou situaci vypracováním této práce a rád bych jednou svým studentům podal pohled o tom, jak moderní technika může postupovat při daných výpočtech.

Vypracování této práce mně přineslo nové poznatky z oblasti matematiky, které student bakalářského studia běžně nezískává. A proto se domnívám, že některé kapitoly této práce mohou být užitečnými pomůckami pro budoucí i současné studenty pedagogických fakult, kteří studují matematiku jakožto svůj hlavní obor. V této souvislosti bych rád zmínil kapitolu **Rezultant dvou polynomů**, neboť tato algebraická prerekvizita může být využita v analytické geometrii při vyšetřování vzájemné polohy dvou regulárních kuželoseček. Dále bych ještě rád zmínil podkapitolu **Zobecnění geometrické řady** a podkapitolu **Úvaha o zobecnění geometrické řady s polynomem stupně *k*** – sám jsem tyto sumační metody využil v seminární práci počtu pravděpodobnosti, s jejichž pomocí jsem odvozoval číselné charakteristiky logaritmického diskrétního rozdělení. Jelikož značná část této práce je věnována Gosperově algoritmu, domnívám se, že práce rovněž může posloužit vysokoškolským studentům, kteří se rozhodnou vypracovat kvalifikační práci, ve které se budou zabývat jiným základním sumačním algoritmem, např. Zeilbergerovým.

Seznam obrázků

Seznam použité literatury

[1] Juškevič, A. P.: Dějiny matematiky ve středověku. Praha: Academia, 1978.

[2] Hora, J.: O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole-III.díl. Plzeň: Pedagogické centrum, 2001. 1.vydání,74 stran, ISBN 80-7020-092-8 .

[3] Gosper, W. R.: Decision procedure for indefinite hypergeometric summation. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, Vol. 75, No. 1, pp. 40-42, January 1978.

[4] Berman, G., N.: Sbornik zadač po kurzu matematičeskovo analiza. Moskva: Fizmatiz, 1962, 13. vydání.

[5] Apostol, T. M.: Calculus, One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra, Second Edition, Volume 1, 1967, ISBN 0-471-00005.

[6] Petkovsek, M., Wilf, H. S., Zeilberger, D.: A=B. A K Peters. Ltd., 1996.

[7] Winkler, F.: Polynomial Algorithms in Computer Algebra. Springer, 1996.

[8] Zach, J.: Posloupnosti a řady. Plzeň: Pedagogická fakulta v Plzni, 1984. První vydání. 100 stran.

[9] Knichal V., Bašta A., Pišl M., Rektorys K.: MATEMATIKA II. Praha: SNTL a Bratislava: SVTL, 1966. První vydání. 600 stran, 237 obr.

[10] Hromádko F., Strnad A.: Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol, 1902, 6. vydání.

[11] Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, Praha: Prometheus, 1999. 1. vydání, ISBN 80-7196-166-3.

[12] Macfarlane, A.: Lectures on ten british mathematicians of the nineteenth century, John Wiley & sons, inc.; [etc., etc.,], 1916.

[13] Kubát, J. :Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k maturitní zkoušce a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha: Prometheus, 2004. 1.vydání, ISBN 80-7196-298-8.

[14] Odvárko, O.: Matematika pro gymnázia – posloupnosti a řady. Praha: Prometheus, 2005. Dotisk 2. vydání, ISBN 80-7196-195-7.

[15] Petáková , J.: Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Praha: Prometheus, 1998. Dotisk 1. vydání, ISBN 80-7196-099-3.

Seznam použitých elektronických zdrojů

[16] Koepf, W.: Summation in Maple [online]. [cit. 21. 8. 2011]. Dostupné z WWW: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.65.3211&rep=rep1&type=pdf>

[17] VCF 10.0 - Speaker Biography [online]. [cit. 27. 7. 2011]. Dostupné z WWW: <http://www.vintage.org/2007/main/bio.php?id=1379>

[18] Hašek, R.: Algebra 5 [online]. [cit. 21. 8. 2011]. Dostupné z WWW: <http://home.pf.jcu.cz/~hasek/Algebra5.htm>

[19] Šisler, M.: O řešení soustav nelineárních rovnic, Časopis pro pěstování matematiky, vol.88 (1963), issue 4, pp. 414-429. [online]. [cit. 7. 7. 2011]. Dostupné z WWW: <http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/117477/CasPestMat_088-1963-4_4.pdf>

[20] Jedinák, D.: Mikuláš Oresme – mních bádajúci aj v matematike [online]. [cit. 25. 6. 2011]. Dostupné z WWW: <www.matmix.sk/download.php?type=categories&itemid=468>

[21] Taschow., U.: Nicole Oresme [online]. [cit. 15. 6. 2011]. Dostupné z WWW: <http://www.nicole-oresme.com/seiten/oresme-biography.html>

[22] Wikipedia - File: James Joseph Sylvester.jpg [online]. [cit. 17. 7. 2011]. Dostupné z WWW: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:James_Joseph_Sylvester.jpg>

Resumé

The aim of this bachelor work was to refer a fact, how complicated procedure can be determined by the computer for the sum of the given infinite convergent numerical series compared with the man, who looked for this sum without using the computational technique. The practical illustrations are instances leading to using telescopic method. Another aim was to refer, how complicated development the mathematics had to pass like the scientific field, that we could obtain the sum of the given series during a few seconds today.

The thesis contains the brief historical look at the adding of the series, the present look at the *geometric series* including its generalizing, the *telescopic method* of the adding of the series, the algebraic prerequisite *resultant of two polynomials* and detail described *Gosper ´s algorithm* inclusive of the illustrations in program Maple 14®.