Posudek oponenta diplomové práce

Autor/Autorka	Bc. Martin Kudláč
Název práce	Systems with concave-convex nonlinearities: existence and multiplicity of solutions
Studijní obor	N0541A170006 Matematika a její aplikace
Oponent práce	doc. Ing. Petr Girg, Ph.D.

Splnění cílů práce:

☒ nadstandardně	☐ velmi dobře	☐ splněny	☐ s výhradami	☐ nebyly splněny

Odborný přínos práce:

☒ nové výsledky	☐ netradiční postupy	☐ zpracování výsledků z různých zdrojů	☐ shrnutí výsledků z různých zdrojů	☐ bez přínosu

Matematická (odborná) úroveň:

☒ vynikající	☐ velmi dobrá	☐ průměrná	☐ podprůměrná	☐ nevyhovující

Věcné chyby:

☒ téměř žádné	☐ vzhledem k rozsahu přiměřený počet	☐ méně podstatné, větší množství	☐ podstatnější, větší množství	☐ závažné

Grafická, jazyková a formální úroveň:

☒ vynikající	☐ velmi dobrá	☐ průměrná	☐ podprůměrná	☐ nevyhovující

Slovní hodnocení a dotazy:

Posuzovaná práce se zabývá systémem dvou nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu

$$
(1)\quad \begin{cases} -u''(x) &= \lambda|v(x)|^{r-1}v(x) + |v(x)|^{p-1}v(x),\ 0 < x < 1 \\ -v''(x) &= |u(x)|^{q-1}u(x), \\ u, v &\geq 0, \\ u(0) &= u(1) = v(0) = v(1) = 0, \end{cases}
$$

kde $p > 1, q > 1$ a $r \in (0,1)$ jsou pevně zvolené exponenty a $\lambda > 0$ je parametr. Uvedenými podmínkami na volbu exponentů je nelinearita v první rovnici konkávní pro $|v(x)| \ll 1$ a naopak konvexní pro $|v(x)| \gg 1$. V práci je studována existence a násobnost nezáporných řešení výše uvedené úlohy v závislosti na parametru $\lambda > 0$. Za tímto účelem je studován modifikovaný problém

$$
\begin{cases} -u''(x) &= \lambda(v_+(x))^r + (v_+(x))^p,\ 0 < x < 1 \\ -v''(x) &= |u(x)|^{q-1}u(x), \\ u(0) &= u(1) = v(0) = v(1) = 0, \end{cases}
$$

kde v_+ značí nezápornou část funkce v. Je ukázáno, že nezáporná klasická řešení modifikovaného systému, tj. $u, v \in C^2(0,1) \cap C([0,1])$, jsou řešeními i původního systému.

Práce je rozdělena do tří kapitol. V první kapitole je podán přehled výsledků týkajících se především použitých Sobolevových prostorů. Jedná se většinou o známé výsledky, které jsou řádně citovány. Podrobněji jsou prezentovány výsledky týkající se prostoru $W^{2,\gamma}(0,1) \cap W_0^{1,\gamma}(0,1)$ a to včetně důkazů. V kapitole 2 je modifikovaný systém převeden na úlohu pro jednu kvazilineární rovnici čtvrtého řádu

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(|v''(x)|^{\frac{1}{q}-1}v''(x)\right) = \lambda(v_+(x))^r + (v_+(x))^p, \; x \in (0,1),$$

s Navierovými okrajovými podmínkami

$$v(0) = v(1) = 0 = v''(0) = v''(1).$$

Poté je podrobně zkoumána regularita řešení slabé formulace výše uvedené úlohy čtvrtého řádu. Je ukázáno, že slabé řešení je řešením v klasickém smyslu. Výše uvedená úloha čtvrtého řádu je pak v téže kapitole studována metodou střelby pomocí numerických experimentů, na jejichž základě jsou zde zformulovány hypotézy ohledně existence a násobnosti řešení v závislosti na parametru $\lambda > 0$. Přesněji je zde zformulován
hlavní teoretický výsledek práce: *Existuje $\lambda_0 > 0$ taková, že pro všechna $\lambda \in (0, \lambda_0)$, existují dvě různá řešení netriviální nezáporná klasická řešení úlohy* (1). Tento výsledek je pak dokázán v kapitole 3 pomocí variačních technik aplikovaných na funkcionál $J: X = W^{2,\gamma}(0,1) \cap W_0^{1,\gamma}(0,1) \to \mathbb{R}, \gamma := (q+1)/q,$

$$J(v) := \frac{q}{q+1}\int_0^1 |v''(x)|^{\frac{q+1}{q}}\,dx - \frac{1}{r+1}\int_0^1 \lambda v_+^{r+1}(x)dx - \frac{1}{p+1}\int_0^1 v_+^{p+1}(x)dx.$$

Kapitola 3 je zakončena úvahami o kvantitativním odhadu λ_0 a úvahami o chování funkcionálu J pro velké hodnoty parametru λ.

Celkově lze říci, že práce má vynikající odbornou úroveň a obsahuje zajímavé nové výsledky. Student prokázal znalosti řady metod nelineární funkcionální analýzy na úrovni výrazně převyšující běžné diplomové práce a osvojil si techniky používané v důkazech regularity slabých řešení. Dále se orientuje i v numerických metodách. Postup od numerického experimentu přes formulaci relevantní hypotézy k matematickému důkazu její platosti odpovídá soudobým trendům v nelineární analýze. Práce je psána anglicky na vysoké jazykové úrovni. Obsahuje grafické výstupy z numerických experimentů (např. bifurkační diagramy), na jejichž základě byla zformulována hypotéza (dokázaná jako hlavní věta práce "Main Theorem" na str. 13). Práce je vhodně členěna na logické celky. Zadání bylo splněno nadstandardně. Z výše uvedených důvodů práci doporučuji uznat jako kvalifikační s hodnocením výborně.

Dotazy:

(O1) Má parametr $\lambda > 0$ nějaký hlubší význam v matematických modelech reálného světa? Proč je parametr jen v první rovnici u jednoho z členů?

(O2) Nejprve ocituji z textu práce:
„**Remark 1.2.** The function $u^{(k)}$ is also called the weak derivative of order k. The function φ is usually called a test function. **If both weak and classical derivatives exist, they coincide.** For simplicity, we denote $u' = u^{(1)}$ and $u'' = u^{(2)}$."
Odkud je tučně vyznačené tvrzení převzato? Co je myšleno existencí klasické derivace a koincidencí se slabou derivací (např. všude, skoro všude apod). Vyplývá z existence klasické derivace v každém bodě intervalu (0,1) existence slabé derivace na (0,1), případně za jakých podmínek? Co vyplývá pro klasickou derivaci z existence slabé derivace?

Práci doporučuji – ~~nedoporučuji~~ uznat jako kvalifikační (*nehodící se škrtněte*).

Navrhuji hodnocení známkou:

VÝBORNĚ

Datum, jméno a podpis:

09.06. 2023 Petr Girg

UNIVERSITY OF
BATH
Departament of Mathematical Sciences

14 June 2023

Report on the Diploma Thesis:
Systems with concave-convex nonlinearities:
existence and multiplicity of solutions

by Martin Kudláč

This thesis consists of the study, both numerical and analytic of a system of quasilinear ODEs of the form

$$\begin{aligned} -u'' &= \lambda|v|^{r-1}v + |u|^{p-1}u, \\ -v'' &= |u|^{q-1}u, \quad 0 < x < 1 \\ u(0) = v(0) &= 0 = v(1) = u(1) \end{aligned}$$

where $p, q > 1$ and $0 < r < 1$. The main theoretical result obtained is the existence of two solutions whenever $0 < \lambda < \lambda_0$. For a sufficiently small λ_0. The problem is reduced to a single equation with fourth order. The proof uses the existence of a minimizer and a mountain pass solutions, along the lines of the classical Ambrosetti-Cerami paper. The numerical study is very interesting. The result is depicted as a bifurcation curve that first goes right and after a maximal λ_0 bents left extending up to the axis $\lambda = 0$. The number λ_0 is estimated for specific values of the exponents, both numerical and analytically. I believe this is a nice work that in particular involves a novel methodology to analyze numerically the branch.

A question that I would raise to the author for future research is if it is possible to take some of these results to higher dimensions. For instance I believe the theoretical existence result should be doable after replacing $-u''$ with $-\Delta u$. What are the new numerical issues when treating the problem in a rectangle in $\mathbb{R}^2$? A second question is about the possibilty of a rigorous nonexistence result for a large λ, at least in the 1-dimensional case.

The work is carefully written and the arguments seem to me correct. I believe this is an excellent master's thesis, with interesting results, definitely publishable. I thus strongly recommend it for approval with highest merit, corresponding to Assesment 1 (Excellent).

Sincerely,

Manuel del Pino

Professor of Mathematics
University of Bath