



Bakalářská práce

# Pokročilé metody modelování a řízení mechatronických systémů

*Autor:*  
Tomáš Hurdzan

*Vedoucí práce:*  
Ing. Martin Čech, Ph.D.

Plzeň, 2023

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd  
Akademický rok: 2022/2023

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Tomáš HURDZAN**  
Osobní číslo: **A20B0370P**  
Studijní program: **B0714A150005 Kybernetika a řídicí technika**  
Specializace: **Automatické řízení a robotika**  
Téma práce: **Pokročilé metody modelování a řízení mechatronických systémů**  
Zadávající katedra: **Katedra kybernetiky**

## Zásady pro vypracování

1. Analyzujte existující nástroje a principy modelování mechatronických systémů.
2. Aplikujte dané principy na mechatronický model portálového jeřábu.
3. Porovnejte výsledky na zjednodušeném i pokročilém modelu.
4. Navrhněte vhodné způsoby řízení jeřábu.
5. Otestujte možnosti provozování modelu a řízení v reálném čase (např. pomocí Raspberry Pi).



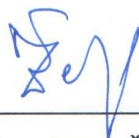
Rozsah bakalářské práce: **30-40 stránek A4**  
Rozsah grafických prací:  
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

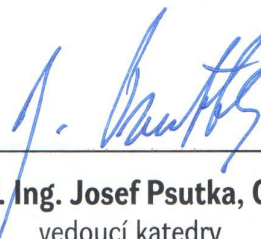
1. Richard Dorf, Robert Bishop. Modern Control Systems. Prentice Hall, 2012. ISBN 0132270285
2. Königsmarková, Jana & Schlegel, Miloš. (2017). Identification of n-link inverted pendulum on a cart. 42-47. 10.1109/PC.2017.7976186.
3. J. Sobota, Martin Goubej, Jana Königsmarková, Martin Čech. Raspberry Pi-based HIL simulators for control education. IFAC-PapersOnLine 52(9):68-73. 2019.
4. Martin Čech, Martin Goubej, J. Sobota, Antonio Visioli. Model-based system engineering in control education using HIL simulators. IFAC-PapersOnLine 53(2):17302-17307. 2020.
5. Václav Helma, Martin Goubej. Active anti-sway crane control using partial state feedback from inertial sensor. 2021 23rd International Conference on Process Control (PC).
6. Martin Goubej, Miloš Schlegel, Tomáš Vyhlídal. Robust Controller Design for Feedback Architectures with Signal Shapers
7. Martin Goubej, Miloš Schlegel. Feature-based Parametrization of Input Shaping Filters with Time Delays. IFAC Proceedings Volumes (IFAC Papers-OnLine) 43(2). 2010.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Martin Čech, Ph.D.**  
Výzkumný program 1

Datum zadání bakalářské práce: **17. října 2022**  
Termín odevzdání bakalářské práce: **22. května 2023**



**Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.**  
děkan



**Prof. Ing. Josef Psutka, CSc.**  
vedoucí katedry

## Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni. Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 21. května 2023:

.....

## Poděkování

Rád bych poděkoval svému vedoucímu Ing. Martinu Čechovi, Ph.D., za jeho ochotu a cenné rady při zpracovávání práce. Dále bych chtěl poděkovat ostatním zaměstnancům katedry kybernetiky, kteří mně s prací pomohli.

## Abstrakt

Tato práce se zabývá celým procesem návrhu vhodného řízení portálového jeřábu včetně vytvoření modelu systému. Model je odvozen ručním výpočtem pomocí Lagrangeovy metody, což je následně ověřeno výpočtem v Matlabu a Maplu. Model je pak sestaven i v Simscapu z bloků představujících reálné komponenty a výsledky jsou porovnány. Model systému je pak převeden do stavového popisu, na základě čehož bylo navrženo řízení stavovou zpětnou vazbou. Nakonec je řízená soustava implementována na mikropočítačích Raspberry Pi, což umožňuje simulace v reálném čase. Ty jsou poté porovnány se simulacemi na lokálním zařízení.

## Klíčová slova

portálový jeřáb, dvojitě kyvadlo na vozíku, zpětnovazební řízení, stavová zpětná vazba, LQR regulátor, řízení v reálném čase, Lagrangeova mechanika

## **Abstract**

This thesis deals with the entire process of designing suitable control for a portal crane, including the creation of a model of a plant. The model is derived through manual calculation using the Lagrange method, which is subsequently verified through computation in Matlab and Maple. The model is then assembled in Simscape using blocks representing real components and the results are compared. The system model is then converted to a state space model, based on which state feedback control is designed. Finally, the controlled system is implemented on Raspberry Pi microcomputers, enabling simulations in real-time, which are ultimately compared to simulations on a local device.

## **Keywords**

gantry crane, double pendulum on a cart, feedback control, state feedback, LQR controller, real-time control, Lagrangian mechanics

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelování</b>	<b>2</b>
2.1	Mechatronické systémy . . . . .	3
2.2	Portálový jeřáb . . . . .	3
2.3	Dvojité kyvadlo na vozíku . . . . .	4
2.3.1	Odvození modelu dvojitého kyvadla na vozíku ručním výpočtem . . . . .	5
2.3.2	Softwarový výpočet modelu dvojitého kyvadla na vozíku	12
2.3.3	Implementace modelu dvojitého kyvadla na vozíku v Simulinku . . . . .	19
2.3.4	Simscape dvojitého kyvadla na vozíku . . . . .	20
2.3.5	Porovnání modelů dvojitého kyvadla na vozíku . . . . .	21
2.4	Sférické kyvadlo . . . . .	24
2.4.1	Odvození modelu sférického kyvadla ručním výpočtem	24
2.4.2	Softwarový výpočet modelu sférického kyvadla . . . . .	27
2.4.3	Implementace modelu sférického kyvadla v Simulinku .	29
2.4.4	Simscape sférického kyvadla . . . . .	29
2.4.5	Porovnání modelů sférického kyvadla . . . . .	30
2.5	Shrnutí . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Řízení modelu</b>	<b>33</b>
3.1	Linearizace systému . . . . .	33
3.2	Řiditelnost, pozorovatelnost a stabilita . . . . .	37
3.3	Přenos systému . . . . .	39
3.4	Stavová zpětná vazba . . . . .	42
3.5	Citlivost uzavřené smyčky . . . . .	48
3.6	Rekonstruktor stavu . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Simulace v reálném čase</b>	<b>57</b>
4.1	SIL simulace . . . . .	57
4.2	HIL simulace . . . . .	59
<b>5</b>	<b>Závěr</b>	<b>63</b>
<b>A</b>	<b>Vyjádření zobecněných zrychlení</b>	<b>66</b>

## Seznam obrázků

1	Portálový jeřáb . . . . .	3
2	Schéma fyzikálního modelu dvojitého kyvadla na vozíku . . . . .	5
3	Schéma modelu dvojitého kyvadla na vozíku v Simulinku . . . . .	20
4	Schéma modelu dvojitého kyvadla na vozíku v Simscapu . . . . .	20
5	Vizuální zobrazení modelu v Simscapu . . . . .	21
6	Porovnání odezvy modelů na jednotkový skok . . . . .	22
7	Odezva na počáteční podmínky systému . . . . .	23
8	Schéma fyzikálního modelu sférického kyvadla . . . . .	24
9	Implementace sférického kyvadla v Simulinku . . . . .	29
10	Implementace sférického kyvadla v Simscapu . . . . .	29
11	Odezva sférického kyvadla na počáteční podmínky s nulovými rychlostmi . . . . .	30
12	Odezva sférického kyvadla na počáteční podmínky s nenulovou rychlostí $\phi$ . . . . .	31
13	Porovnání odezev nelineárního a linearizovaného modelu na jednotkový skok . . . . .	36
14	Porovnání odezev nelineárního a linearizovaného modelu na počáteční podmínky . . . . .	37
15	Póly systému . . . . .	39
16	Bodeho diagram přenosu $P_0$ . . . . .	40
17	Bodeho diagram přenosu $P_1$ . . . . .	41
18	Bodeho diagram přenosu $P_2$ . . . . .	41
19	Schéma stavové zpětné vazby . . . . .	42
20	Schéma rozšířeného modelu . . . . .	43
21	Póly řízeného systému . . . . .	46
22	Odezva řízeného systému na jednotkový skok a poruchu . . . . .	47
23	Akční zásah do systému . . . . .	47
24	Bodeho charakteristika otevřené smyčky . . . . .	49
25	Nyquistův graf otevřené smyčky . . . . .	50
26	Nyquistův graf otevřené smyčky přiblížený . . . . .	50
27	Schéma rekonstruktoru stavu . . . . .	53
28	Schéma rekonstruktoru stavu v Simulinku . . . . .	54
29	Odchyly skutečných a rekonstruovaných stavů . . . . .	55
30	Časový vývoj reálných stavů . . . . .	55
31	Schéma soustavy v REXYGENU . . . . .	58
32	Porovnání modelů v REXYGENU a v Simulinku . . . . .	59



33	Raspberry Pi . . . . .	60
34	Schéma modelu systému v Rxygenu . . . . .	60
35	Schéma regulátoru v Rxygenu . . . . .	61
36	Přechodová charakteristika systému v Rxygenu . . . . .	61
37	Akční zásah regulátoru v Rxygenu v reakci na jednotkový skok	62

# 1 Úvod

Použití zpětné vazby je nezbytnou součástí moderního automatického řízení. Ačkoliv si to mnohdy neuvědomujeme, zpětnovazební řízení se vyskytuje všude kolem nás. Mnoho lidí si pod jeho použitím představí velmi pokročilé stroje, dopravní prostředky, kosmické rakety či balistické střely, ale ve skutečnosti se dnes zpětná vazba vyskytuje ve všemožných technologiích, přičemž její použití je velmi často před uživatelem skryto. Například takový poměrně jednoduchý přístroj, jako je žehlička, se neobejde bez PI regulátoru teploty. Podobně se zpětnovazební řízení používá v domácnosti i v dalších elektrických spotřebičích – v troubách, v pračkách nebo i v kotlech.

Mnoho z těchto zařízení můžeme zařadit do zvláštní skupiny mechatronických systémů, neboť se v nich kombinují odvětví elektroniky, mechaniky, informatiky a automatického řízení. K úspěšnému řízení těchto systémů je potřebujeme popsat modelem, který vhodně popisuje důležité vztahy a zákonitosti zařízení. Ten nám umožní získat větší vhled do systému, poskytuje možnosti analýzy a především možnost predikovat jeho chování do budoucna. Model je zjednodušení složité reality a nikdy nemůže být úplně přesný. Velmi těžkým úkolem je rozhodnout, jak podrobný má model být, které detaily je nutné do něj zahrnout, respektive vypustit. Nalezení vhodného modelu tak bývá často ještě obtížnější než navrhnutí řídicího algoritmu.

Metod, jak navrhnout správné řízení, je mnoho a velmi často je možné stejně kvalitního výsledku dosáhnout různými cestami. Drtivá většina z těchto cest však využívá příhodných vlastností výše zmíněné zpětné vazby. Zpětná vazba umožňuje reagovat na nemodelované jevy, šum a jiné poruchy a zvyšuje robustnost řízeného systému vůči změnám. I přes tyto skvělé vlastnosti je však velmi nebezpečná, neboť může destabilizovat jinak stabilní systém.

V této práci rozebíráme celý proces modelování a řízení, přičemž vybrané metody přímo aplikujeme na mechatronický systém – portálový jeřáb.

V kapitole 2 se zabýváme vytvořením modelu systému, přičemž matematický model odvozujeme z fyzikálních zákonů pomocí Lagrangeovy mechaniky.

V kapitole 3 se zabýváme zvolením vhodné metody řízení modelu.

Simulace v simulačním prostředí a na reálném zařízení nepřináší vlivem nemodelovaných poruch úplně totožné výsledky, a proto častým mezikrokem bývá simulace, ve které model a regulátor fungují na separátních zařízeních a komunikují mezi sebou analogovými signály. Tímto se zabýváme v kapitole 4.

## 2 Modelování

Modelování je obecně široký pojem, zasahující do všemožných oblastí lidské činnosti. V automatickém řízení se omezujeme především na modely dynamických systémů. Základními druhy takovýchto modelů jsou

- Modely mentální nebo intuitivní, které jsou založeny na naší intuici.
- Tabulky nebo grafy
- Matematické modely, které popisují problém pomocí matematických vztahů a rovnic, nejčastěji pomocí rovnic diferenciálních nebo diferenciálních. [1, p. 4]

Nejpřesnějšími typy modelů jsou ve velké většině případů modely matematické, ale jsou zas nejsložitější na vytvoření.

Za účelem vytvoření matematického modelu je nejprve vhodné si zvolit, jakým způsobem budeme chápat systém:

1. *White box model* - Předpokládáme, že model systému můžeme kompletně odvodit pomocí fyzikálních, chemických, ekonometrických či jiných zákonů a vztahů. Jedná se tedy o analytický přístup. Jeho výhodou je globální platnost modelu, teoreticky vysoká přesnost a možnost většího vhledu do systému, neboť ten je popsán nikoli parametry s neznámým smyslem, nýbrž parametry se zjevnou, například fyzikální, podstatou. Nevýhodou je naopak často velmi vysoká složitost sestavení modelu.
2. *Black box model* - K systému přistupujeme jako k neznámé krabici, do které pustíme vstup a z níž měříme výstup. Hlubší struktura systému je nám neznámá. Matematické modely se pak pokoušíme sestavit pomocí experimentální identifikace systému, kdy se na základě vhodně zvolených vstupních signálů a měření výstupního signálu snažíme odvodit závislost mezi vstupem a výstupem. Výhodou je jednoduchost přístupu a širší škála aplikovatelnosti. Nevýhodou je naopak lokální platnost a absence hlubšího vhledu do systému.
3. *Grey box model* - Kombinuje oba přístupy. Experimentálně identifikujeme data, ovšem na základě apriorní informace o systému. [1, p. 5]

## 2.1 Mechatronické systémy

Mechatronika je rozsáhlá věda, sjednocující principy mechaniky, elektrotechniky, informatiky a automatického řízení za účelem konstruování účinnějších a spolehlivějších systémů. [2, p. 16] Klíčovými prvky mechatroniky jsou modelování fyzického systému, senzory a aktuátory, systémy a signály, počítačové systémy a sběr dat. V mnoha zařízeních kombinujeme tyto prvky a ty se pak nazývají mechatronické systémy. [3, p. 22] Jsou to třeba pevný disk, průmyslový robot, digitální fotoaparát [4, p. 1] nebo třeba náš portálový jeřáb.

Vzhledem ke známé fyzikální podstatě mechatronických systémů, je ve většině případů nejvhodnější přistupovat k systému jako k white boxu, a tedy je nejvhodnější pokusit se vytvořit matematický model systému na základě matematicko-fyzikálního modelování.

## 2.2 Portálový jeřáb

Portálový jeřáb se skládá ze dvou stojin, pevně spojených mostem. Po mostě jezdí vozík, tzv. „kočka“. Na kočce je zavěšeno lano, s úchytným zařízením dole, kterým lze uchopit závaží.



Obrázek 1: Portálový jeřáb [5]

Budeme se snažit zachovat co nejvyšší přesnost modelu, na druhou stranu však chceme ponechat model jednoduchý, abychom snížili výpočetní složitost. Tedy, je vhodné zanedbat veličiny a síly, které mají na náš systém nepatrný vliv, či můžeme aproximovat složitější strukturu vhodnou strukturou jednodušší.

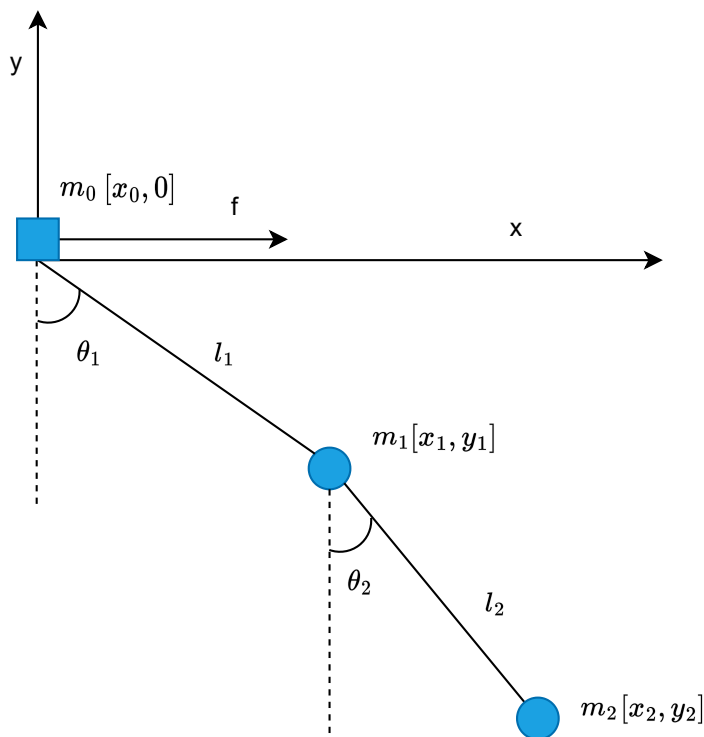
Logické by se mohlo zdát modelovat jeřáb jako jednoduché kyvadlo na vozíku. Může to znít jako vhodná aproximace, nicméně v praxi se často ukazuje nutnost modelovat i ohebnost lana, a tedy bývá zvykem soustavu modelovat jako dvojitě kyvadlo. [6]

### 2.3 Dvojitě kyvadlo na vozíku

Budeme tedy portálový jeřáb aproximovat modelem dvojitěho kyvadla na vozíku. Vozíku, pohybujícím se po mostě jeřábu, přiřadíme hmotnost  $m_0$ . Závaží budeme modelovat hmotným bodem o hmotnosti  $m_2$ . Ohebné lano pak budeme modelovat dvěma nehmotnými tyčemi o délkách  $l_1$  a  $l_2$ , přičemž jeho hmotnost  $m_1$  vycentrujeme do jediného bodu na spojnici těchto tyčí, což je zároveň bod, kde budeme modelovat ohyb. Protože tyče uvažujeme nehmotné, neuvažujeme ani momenty setrvačnosti.

Zvolíme si rovinný souřadnicový systém  $[x, y]$  tak, aby vozík jezdil po ose  $x$  a osa  $y$ , kolmá na  $x$ , směřovala svisle vzhůru, tedy ve směru největšího nárůstu potenciální energie.

Následně si zvolíme zobecněné souřadnice, které budou jednoznačně popisovat polohovou konfiguraci soustavy. Polohu vozíku popíšeme jednoznačně jeho polohou v ose  $x$ , kterou označíme  $x_0$ . Polohu těžiště lana pak popíšeme úhlem  $\theta_1$  mezi tyčí  $l_1$  a osou  $y$  a polohu závaží pak obdobně popíšeme úhlem  $\theta_2$  mezi tyčí  $l_2$  a osou  $y$ . Pomocný úhel  $\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_1$  pak bude vyznačovat ohyb v laně. Model je zobrazen na obrázku (2).



Obrázek 2: Schéma fyzikálního modelu dvojitého kyvadla na vozíku

V dalších krocích se pokusíme matematický model odvodit různými způsoby. Nejprve se pokusíme model odvodit „ručně“ na základě Lagrangeovy metody. Poté se pokusíme odvodit tentýž model za pomoci softwarových nástrojů Matlab [7] a Maple [8] a porovnáme výsledné rovnice s rovnicemi získanými ručním odvozením. Výsledné rovnice pak implementujeme do Simulinku, softwarového nástroje, patřícího pod Matlab, sloužícího k simulaci dynamických systémů.

Nakonec sestavíme model z funkčních bloků v Matlabovském toolboxu Simscape a simulací ověříme shodnost tohoto modelu s modelem v Simulinku.

### 2.3.1 Odvození modelu dvojitého kyvadla na vozíku ručním výpočtem

Abychom odvodili diferenciální rovnice popisující systém, využijeme Lagrangeovy metody (někdy také známé jako Euler-Lagrangeova). Její odvození vychází z funkcionální analýzy a variačního počtu. Princip spočívá

v stanovení takzvaného *Lagrangianu* systému jako nějaké kombinace jeho druhů energií, přičemž konkrétně v mechanice platí pro Lagrangian vztah

$$L = T - V \quad (2.1)$$

[9, p. 12], kde  $T$  je kinetická a  $V$  je potenciální energie systému. Z Lagrangianu pak lze odvodit diferenciální rovnice na základě Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_k} = f_k, \quad (2.2)$$

Kde  $q_k$  jsou zobecněné souřadnice,  $D$  je disipativní neboli ztrátová energie a  $f_k$  je zobecněná vnější síla působící na těleso ve směru zobecněné souřadnice  $q_k$ .

Nejprve vyjádříme kartézské souřadnice hmotných bodů o hmotnostech  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  pomocí zobecněných souřadnic následovně:

$$\begin{aligned} x_0, & & y_0 = 0, \\ x_1 = x_0 + l_1 \sin \theta_1, & & y_1 = -l_1 \cos \theta_1, \\ x_2 = x_0 + l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, & & y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Vypočteme ještě derivace těchto souřadnic podle času, tedy rychlosti hmotných bodů 0, 1 a 2 ve směru os  $x$  a  $y$ .

$$\begin{aligned} \dot{x}_0, & & \dot{y}_0 = 0, \\ \dot{x}_1 = \dot{x}_0 + l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1, & & \dot{y}_1 = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1, \\ \dot{x}_2 = \dot{x}_0 + l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2, & & \dot{y}_2 = l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Kinetickou energii systému sestavíme jako součet kinetických energií všech hmotných bodů, tedy

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \quad (2.5)$$

kde

$$T_0 = \frac{1}{2}m_0\dot{x}_0^2,$$

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{1}{2}m_1((\dot{x}_0 + l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1)^2 + (l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1)^2) \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_0^2 + m_1\dot{x}_0 l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \cos^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \sin^2 \theta_1 \dot{\theta}_1^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_0^2 + m_1\dot{x}_0 l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ &= \frac{1}{2}m_2 [(\dot{x}_0 + l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2)^2 + (l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2)^2] \\ &= \frac{1}{2}m_2\dot{x}_0^2 + m_2\dot{x}_0 l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + m_2\dot{x}_0 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \end{aligned}$$

Abychom výraz zjednodušili, využijeme známého součtového vzorce

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y = \cos(x - y). \quad (2.6)$$

Pak můžeme psát

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m_2\dot{x}_0^2 + m_2\dot{x}_0 l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + m_2\dot{x}_0 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \end{aligned}$$

Dosadíme do vztahu (2.5) a dostáváme finální tvar kinetické energie



$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_0\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_0^2 + m_1l_1\dot{x}_0 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_0^2 \\
&\quad + m_2l_1\dot{x}_0 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + m_2l_2\dot{x}_0 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\theta}_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Potenciální energii soustavy taktéž spočteme jako součet potenciálních energií všech hmotných bodů, přičemž hladinu nulové potenciální energie bude tvořit osa  $x$ .

$$V = V_0 + V_1 + V_2 = 0 - m_1gl_1 \cos \theta_1 - m_2g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \tag{2.8}$$

Lagrangian je pak

$$\begin{aligned}
L &= T - V = \\
&= \frac{1}{2}m_0\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{x}_0^2 + m_1l_1\dot{x}_0 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + \frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_0^2 \\
&\quad + m_2l_1\dot{x}_0 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + m_2l_2\dot{x}_0 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + \\
&\quad + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_1gl_1 \cos \theta_1 + m_2g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \\
&= \frac{1}{2}(m_0 + m_1 + m_2)\dot{x}_0^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 \\
&\quad + (m_1 + m_2)l_1\dot{x}_0 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + m_2l_2\dot{x}_0 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2
\end{aligned}$$

System bude mít tlumení, takže zavedeme disipativní funkci

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (b_i \dot{q}_i^2) = \frac{1}{2}(b_0 \dot{q}_0^2 + b_1 \dot{q}_1^2 + b_2 \dot{q}_2^2), \tag{2.9}$$

kde  $b_i$  jsou tlumící koeficienty pro jednotlivé klouby.

Uděláme ovšem jednu malou úpravu. Jak bylo zmíněno, je disipativní energie úměrná zobecněné rychlosti tělesa. Protože je druhé rameno kyvadla

spojeno nikoliv se svislou osou ale s prvním ramenem, dává smysl zavést souřadnici

$$\tilde{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_1 \quad (2.10)$$

a disipaci v kloubu spojujícího první a druhé rameno pak můžeme počítat jako

$$D_2 = \frac{1}{2} b_2 \dot{\tilde{\theta}}_2^2 = (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \quad (2.11)$$

A celková disipace systému je pak

$$D = \frac{1}{2} (b_0 \dot{x}_0^2 + b_1 \dot{\theta}_1^2 + b_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2). \quad (2.12)$$

Pohybové rovnice pak vypočteme zavedeným vzorcem 2.2.

Přičemž z vnějších sil budeme uvažovat pouze vnější sílu  $f(t)$ , působící na vozík. Vnější momenty sil působící na kyvadla uvažovat nebudeme.

V našem případě budeme tedy mít dohromady tři rovnice pro naše zobecněné souřadnice  $x_0$ ,  $\theta_1$  a  $\theta_2$ .

Začneme první zobecněnou souřadnicí  $x_0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} = (m_0 + m_1 + m_2) \dot{x}_0 + (m_1 + m_2) l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} &= (m_0 + m_1 + m_2) \ddot{x}_0 - (m_1 + m_2) l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + (m_1 + m_2) l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\ &\quad - m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_0} = b_0 \dot{x}_0 \quad (2.16)$$

První rovnice pak bude

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_0} - \frac{\partial L}{\partial x_0} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_0} = f \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}
(m_0 + m_1 + m_2)\ddot{x}_0 - (m_1 + m_2)l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 + (m_1 + m_2)l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 \\
- m_2 l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 + b_0 \dot{x}_0 = f
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Rovnice 18: Dvojité kyvadlo na vozíku – 1. diferenciální rovnice

Pokračujeme rovnicemi pro zobecněnou souřadnici  $\theta_1$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{\theta}_1 + (m_1 + m_2)l_1 \dot{x}_0 \cos \theta_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2), \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + (m_1 + m_2)l_1 \ddot{x}_0 \cos \theta_1 - (m_1 + m_2)l_1 \dot{x}_0 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 + \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= - (m_1 + m_2)l_1 \dot{x}_0 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad - (m_1 + m_2)g l_1 \sin \theta_1
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1} = b_1 \dot{\theta}_1 - b_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \tag{2.22}$$

a rovnice je

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1} = 0 \tag{2.23}$$

neboli

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2)l_1^2 \ddot{\theta}_1 + (m_1 + m_2)l_1 \ddot{x}_0 \cos \theta_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
+ m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g l_1 \sin \theta_1 - b_2 \dot{\theta}_2 + (b_1 + b_2) \dot{\theta}_1 = 0,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

což je po vydělení  $l_1$

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + (m_1 + m_2)\ddot{x}_0 \cos \theta_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
& + m_2l_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 - \frac{b_2}{l_1}\dot{\theta}_2 + \frac{b_1 + b_2}{l_1}\dot{\theta}_1 = 0
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Rovnice 25: Dvojité kyvadlo na vozíku – 2. diferenciální rovnice

Zbývá nám zobecněná souřadnice  $\theta_2$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2l_2^2\dot{\theta}_2 + m_2l_2\dot{x}_0 \cos \theta_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2), \tag{2.26}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_2\ddot{x}_0 \cos \theta_2 - m_2l_2\dot{x}_0 \sin \theta_2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
&\quad - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2),
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2l_2\dot{x}_0 \sin \theta_2\dot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2gl_2 \sin \theta_2 \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2} = b_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \tag{2.29}$$

Rovnice pak je

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2} = 0 \tag{2.30}$$

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_2\ddot{x}_0 \cos \theta_2 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2l_1l_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \tag{2.31}$$

$$+ m_2gl_2 \sin \theta_2 + b_2(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = 0$$

což je po vydělení  $m_2$  a  $l_2$

$$\begin{aligned}
& l_2\ddot{\theta}_2 + \ddot{x}_0 \cos \theta_2 + l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\
& + g \sin \theta_2 + \frac{b_2}{m_2l_2}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Rovnice 32: Dvojité kyvadlo na vozíku – 3. diferenciální rovnice

### 2.3.2 Softwarový výpočet modelu dvojitého kyvadla na vozíku

#### Kód v Matlabu

Zopakujeme předchozí kroky, ale tentokrát využijeme symbolický toolbox v Matlabu. [7] Tím odstraníme mechanickou část výpočtu, což je velmi vhodné pro složitější výpočty, neboť se tím snižuje riziko chyby.

Kód v Matlabu je následující

```
%% Matematicke modelovani

syms m_0 m_1 m_2 l_1 l_2 g b0 b1 b2; % promenne
syms x_0(t) theta_1(t) theta_2(t) f(t); % funkce

x_1 = x_0 + l_1*sin(theta_1);
y_1 = - l_1*cos(theta_1);
x_2 = x_1 + l_2*sin(theta_2);
y_2 = y_1 - l_2 * cos(theta_2);

% derivace =====

dx_0 = diff(x_0,t);
dtheta_1 = diff(theta_1,t);
dtheta_2 = diff(theta_2,t);

ddx_0 = diff(dx_0,t);
ddtheta_1 = diff(dtheta_1,t);
ddtheta_2 = diff(dtheta_2,t);

dx_1 = diff(x_1,t);
dy_1 = diff(y_1,t);
dx_2 = diff(x_2,t);
dy_2 = diff(y_2,t);

T_0 = 1/2 * m_0 * dx_0^2;
T_1 = 1/2 * m_1* (dx_1^2 + dy_1^2);
T_2 = 1/2 * m_2* (dx_2^2 + dy_2^2);

T = T_0 + T_1 + T_2;
T = simplify(T);
```

```

syms p_x_0 p_theta_1 p_theta_2 p_dx_0 p_dtheta_1
      p_dtheta_2 p_ddx_0 p_ddtheta_1 p_ddtheta_2;
sub_1 = {p_x_0    p_theta_1    p_theta_2    p_dx_0
         p_dtheta_1  p_dtheta_2    p_ddx_0    p_ddtheta_1
         p_ddtheta_2};
sub_2 = {x_0, theta_1, theta_2, dx_0, dtheta_1,
         dtheta_2, ddx_0, ddtheta_1, ddtheta_2};
T_pom = simplify(subs(T,sub_2,sub_1));
T_pom = simplify(T_pom)
T_pom = subs(T_pom,sub_1,sub_2)

V_0 = 0;
V_1 = -m_1*g*l_1*cos(theta_1);
V_2 = -m_2*g*(l_1*cos(theta_1) + l_2*cos(theta_2));

V = V_0 + V_1 + V_2;
V = simplify(V)

L = simplify(T - V)

D = 1/2*b0*(diff(x_0,t))^2 + 1/2*b1*(diff(theta_1,t)
    )^2 + 1/2*b2*(diff(theta_2,t)-diff(theta_1,t))^2

dL_x_0 = diff(L,x_0)
dL_dx_0 = diff(L,dx_0)
dD_dx_0 = diff(D,dx_0)
dt_dL_dx_0 = simplify(diff(dL_dx_0,t))
%=====
dL_theta_1 = diff(L,theta_1);
dL_dtheta_1 = diff(L,dtheta_1);
dD_dtheta_1 = diff(D,dtheta_1);
dt_dL_dtheta_1 = simplify(diff(dL_dtheta_1,t));
%=====
dL_theta_2 = diff(L,theta_2);
dL_dtheta_2 = diff(L,dtheta_2);
dD_dtheta_2 = diff(D,dtheta_2);
dt_dL_dtheta_2 = simplify(diff(dL_dtheta_2,t));

```

```

%=====
rce_1 = simplify(dt_dL_dx_0 - dL_x_0 + dD_dx_0) == f
rce_2 = simplify(dt_dL_dtheta_1 - dL_theta_1 +
    dD_dtheta_1 == 0)
rce_3 = simplify(dt_dL_dtheta_2 - dL_theta_2 +
    dD_dtheta_2 == 0)

syms p_x_0 p_theta_1 p_theta_2 p_dx_0 p_dtheta_1
    p_dtheta_2 p_ddx_0 p_ddtheta_1 p_ddtheta_2
syms u_1
_1);
rce_2p = subs(rce_2,sub_2,sub_1);
rce_3p = subs(rce_3,sub_2,sub_1);

[reseni_ddx_0, reseni_ddtheta_1, reseni_ddtheta_2] =
    (solve([rce_1p,rce_2p,rce_3p],[p_ddx_0
    p_ddtheta_1 p_ddtheta_2]));

```

Výstup z Matlabu je poměrně nepřehledný a proto jej neuvědeme v originálním formátu. Pro první zobecněnou souřadnici  $x_0$  software určil rovnici

$$\begin{aligned}
 m_0\ddot{x}_0 + m_1\ddot{x}_0 + m_2\ddot{x}_0 + l_1m_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_1m_2\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1) \\
 + l_2m_2\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2) + b_0\dot{x}_0 = l_1m_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1) + l_1m_2\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1) + l_2m_2\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2) + f
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Tento vztah můžeme převést do tvaru

$$\begin{aligned}
 (m_0 + m_1 + m_2)\ddot{x}_0 + (m_1 + m_2)l_1 \cos \theta_1 \ddot{\theta}_1 + m_2l_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\
 - (m_1 + m_2)l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1^2 - m_2l_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 + b_0\dot{x}_0 = f,
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

což je shodné s rovnicí 2.18.

Rovnice pro zobecněnou souřadnici  $\theta_1$  softwarově vyšla

$$\begin{aligned}
& l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + m_1 \ddot{x}_0 \cos \theta_1 + m_2 \ddot{x}_0 \cos \theta_1 + g m_1 \sin \theta_1 + g m_2 \sin \theta_1 \\
& + l_1 m_1 \ddot{\theta}_1 + l_1 m_2 \ddot{\theta}_1 + l_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{b_2}{l_1} \dot{\theta}_2 + \frac{b_1 + b_2}{l_1} \dot{\theta}_1 = 0
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Výsledný vztah převedeme do tvaru

$$\begin{aligned}
& (m_1 + m_2) g \sin \theta_1 + (m_1 + m_2) \ddot{x}_0 \cos \theta_1 + (m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 \\
& + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{b_2}{l_1} \dot{\theta}_2 + \frac{b_1 + b_2}{l_1} \dot{\theta}_1 = 0,
\end{aligned} \tag{2.36}$$

což je shodné s rovnicí 2.25, odvozenou ručním výpočtem.

Rovnice pro zobecněnou souřadnici  $\theta_2$  vyšla

$$\begin{aligned}
& l_2 \ddot{\theta}_2 + \ddot{x}_0 \cos \theta_2 + g \sin \theta_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
& - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \frac{b_2}{m_2 l_2} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) = 0
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Která je opět shodná s rovnicí odvozenou ručním výpočtem, tedy s rovnicí 2.32.

Zjistili jsme tedy, že naše ruční odvození se shoduje se softwarovým výpočtem. Pro porovnání ještě vyzkoušíme další speciální matematický software Maple [8], který je pro symbolické výpočty přímo určený.

### Kód v Maplu

V Maplu jsme provedli tytéž kroky jako v Matlabu a očekávaně jsme obdrželi stejný výsledek.

### Souřadnice

$$\begin{aligned}
x_1(t) & := x_0(t) + l_1 * \sin(\theta_1(t)): \\
y_1(t) & := -l_1 * \cos(\theta_1(t)): \\
x_2(t) & := x_1(t) + l_2 * \sin(\theta_2(t)): \\
y_2(t) & := y_1(t) - l_2 * \cos(\theta_2(t)):
\end{aligned}$$



### Derivace

$$\begin{aligned}dx_0(t) &:= \text{diff}(x_0(t), t): \\d\theta_1(t) &:= \text{diff}(\theta_1(t), t): \\d\theta_2(t) &:= \text{diff}(\theta_2(t), t): \\ddx_0(t) &:= \text{diff}(x_0(t), t, t): \\dd\theta_1(t) &:= \text{diff}(\theta_1(t), t, t): \\dd\theta_2(t) &:= \text{diff}(\theta_2(t), t, t): \\dx_1(t) &:= \text{diff}(x_1(t), t): \\dy_1(t) &:= \text{diff}(y_1(t), t): \\dx_2(t) &:= \text{diff}(x_2(t), t): \\dy_2(t) &:= \text{diff}(y_2(t), t):\end{aligned}$$

### Kinetická energie

$$\begin{aligned}T\_0 &:= 1/2 * m_0 * dx_0(t)^2: \\T\_1 &:= 1/2 * m_1 * (dx_1(t)^2 + dy_1(t)^2): \\T\_2 &:= 1/2 * m_2 * (dx_2(t)^2 + dy_2(t)^2): \\T &:= T\_0 + T\_1 + T\_2: \\T &:= \text{simplify}(T):\end{aligned}$$

### Potenciální energie

$$\begin{aligned}V\_0 &:= 0: \\V\_1 &:= -m_1 * g * l_1 * \cos(\theta_1(t)): \\V\_2 &:= -m_2 * g * (l_1 * \cos(\theta_1(t)) + l_2 * \cos(\theta_2(t))): \\V &:= V\_0 + V\_1 + V\_2: \\V &:= \text{simplify}(V):\end{aligned}$$

### Lagrangian

$$L := \text{simplify}(T - V):$$

### Disipativní funkce

$$DI := 1/2 * b_0 * (diff(x_0(t), t))^2 + 1/2 * b_1 * (diff(\theta_1(t), t))^2 + 1/2 * b_2 * (diff(\theta_2(t), t) - diff(\theta_1(t), t))^2:$$

$$sub_1 := \{x_0(t) = x_0, \theta_1(t) = \theta_1, \theta_2(t) = \theta_2, dx_0(t) = dx_0, d\theta_1(t) = d\theta_1, d\theta_2(t) = d\theta_2\}:$$

$$sub_2 := \{x_0 = x_0(t), \theta_1 = \theta_1(t), \theta_2 = \theta_2(t), dx_0 = dx_0(t), d\theta_1 = d\theta_1(t), d\theta_2 = d\theta_2(t)\}:$$

$$L\_s := subs(sub_1, L):$$

$$D\_s := subs(sub_1, DI):$$

$$dL\_x_0 := diff(L\_s, x_0):$$

$$dL\_dx_0 := diff(L\_s, dx_0):$$

$$dDI\_dx_0 := diff(D\_s, dx_0):$$

$$dL\_x_0 := subs(sub_2, dL\_x_0):$$

$$dDI\_dx_0 := subs(sub_2, dDI\_dx_0):$$

$$dL\_dx_0 := subs(sub_2, dL\_dx_0):$$

$$dt\_dL\_dx_0 := simplify(diff(dL\_dx_0, t)):$$

$$dL\_theta_1 := diff(L\_s, \theta_1):$$

$$dL\_dtheta_1 := diff(L\_s, d\theta_1):$$

$$dDI\_dtheta_1 := diff(D\_s, d\theta_1):$$

$$dL\_theta_1 := subs(sub_2, dL\_theta_1):$$

$$dDI\_dtheta_1 := subs(sub_2, dDI\_dtheta_1):$$

$$dL\_dtheta_1 := subs(sub_2, dL\_dtheta_1):$$

$$dt\_dL\_dtheta_1 := simplify(diff(dL\_dtheta_1, t)):$$

$$dL\_theta_2 := diff(L\_s, \theta_2):$$

$$dL\_dtheta_2 := diff(L\_s, d\theta_2):$$

$$dDI\_dtheta_2 := diff(D\_s, d\theta_2):$$

$$dL\_theta_2 := subs(sub_2, dL\_theta_2):$$

$$dDI\_dtheta_2 := subs(sub_2, dDI\_dtheta_2):$$

$$dL\_dtheta_2 := subs(sub_2, dL\_dtheta_2):$$

$$dt\_dL\_dtheta_2 := simplify(diff(dL\_dtheta_2, t)):$$

$$rce\_1 := simplify(dt\_dL\_dx_0 - dL\_x_0 + dDI\_dx_0) = f(t);$$

$$rce\_2 := \text{simplify}(dt\_dL\_d\theta_1 - dL\_d\theta_1 + dDI\_d\theta_1 = 0);$$

$$rce\_3 := \text{simplify}(dt\_dL\_d\theta_2 - dL\_d\theta_2 + dDI\_d\theta_2 = 0);$$

$$\begin{aligned} rce\_1 := & - \left( \frac{d}{dt} \theta_1(t) \right)^2 \sin(\theta_1(t)) (m_1 + m_2) l_1 + \cos(\theta_1(t)) (m_1 + m_2) l_1 \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) \right) \\ & + (m_0 + m_1 + m_2) \left( \frac{d^2}{dt^2} x_0(t) \right) + \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_2(t) \right) \cos(\theta_2(t)) l_2 m_2 \\ & - \left( \frac{d}{dt} \theta_2(t) \right)^2 \sin(\theta_2(t)) l_2 m_2 + b_0 \left( \frac{d}{dt} x_0(t) \right) = f(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rce\_2 := & l_1^2 (m_1 + m_2) \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) \right) + l_1 l_2 m_2 (\cos(\theta_1(t)) \cos(\theta_2(t)) \\ & + \sin(\theta_1(t)) \sin(\theta_2(t))) \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_2(t) \right) + \cos(\theta_1(t)) l_1 (m_1 + m_2) \left( \frac{d^2}{dt^2} x_0(t) \right) \\ & - l_1 l_2 m_2 (-\sin(\theta_1(t)) \cos(\theta_2(t)) + \cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_2(t))) \left( \frac{d}{dt} \theta_2(t) \right)^2 \\ & - b_2 \left( \frac{d}{dt} \theta_2(t) \right) + (b_1 + b_2) \left( \frac{d}{dt} \theta_1(t) \right) + g l_1 (m_1 + m_2) \sin(\theta_1(t)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rce\_3 := & l_2 m_2 (\cos(\theta_1(t)) \cos(\theta_2(t)) + \sin(\theta_1(t)) \sin(\theta_2(t))) l_1 \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_1(t) \right) \\ & + \left( \frac{d^2}{dt^2} \theta_2(t) \right) l_2^2 m_2 + \left( \frac{d^2}{dt^2} x_0(t) \right) \cos(\theta_2(t)) l_2 m_2 \\ & + l_1 l_2 m_2 (-\sin(\theta_1(t)) \cos(\theta_2(t)) + \cos(\theta_1(t)) \sin(\theta_2(t))) \left( \frac{d}{dt} \theta_1(t) \right)^2 \\ & - b_2 \left( \frac{d}{dt} \theta_1(t) \right) + g \sin(\theta_2(t)) l_2 m_2 + b_2 \left( \frac{d}{dt} \theta_2(t) \right) = 0 \end{aligned}$$

Přičemž po použití součtového vzorce 2.6 bychom dostali rovnice shodné s rovnicemi odvozenými ručně (2.18, 2.25, 2.32) i odvozenými v Matlabu (2.34, 2.36, 2.37).

Práci s Maplem považujeme v tomto případě za pohodlnější, především z hlediska mnohem lepšího formátování výstupu. Zatímco v Matlabovském

závorkování je obtížné se vyznat, v Maplu je závorkování přehledné. Maple má také lepší nastavení vytýkání vhodných výrazů.

### 2.3.3 Implementace modelu dvojitého kyvadla na vozíku v Simulinku

Výše uvedené pohybové rovnice 2.18, 2.25, 2.32, bychom chtěli vyjádřit ve tvaru vhodném k simulaci v Simulinku, speciálnímu nástroji pro simulování matematických signálů pomocí blokových schémat. Rovnice chceme vyjádřit jako funkce nejvyšších derivací  $\ddot{x}_0$ ,  $\ddot{\theta}_1$ ,  $\ddot{\theta}_2$ , přičemž je naším cílem, aby každá z rovnic obsahovala jen právě jednu druhou derivaci. V našem případě totiž například první rovnice obsahuje druhé derivace všech tří zobecněných souřadnic.

Protože soustava rovnic je v druhých derivacích souřadnic lineární, můžeme vyjádřit nejvyšší derivace všech tří zobecněných souřadnic jako funkce zbylých funkcí s nižší derivací v Matlabu příkazem *solve()*. Pak tedy dostáváme rovnice

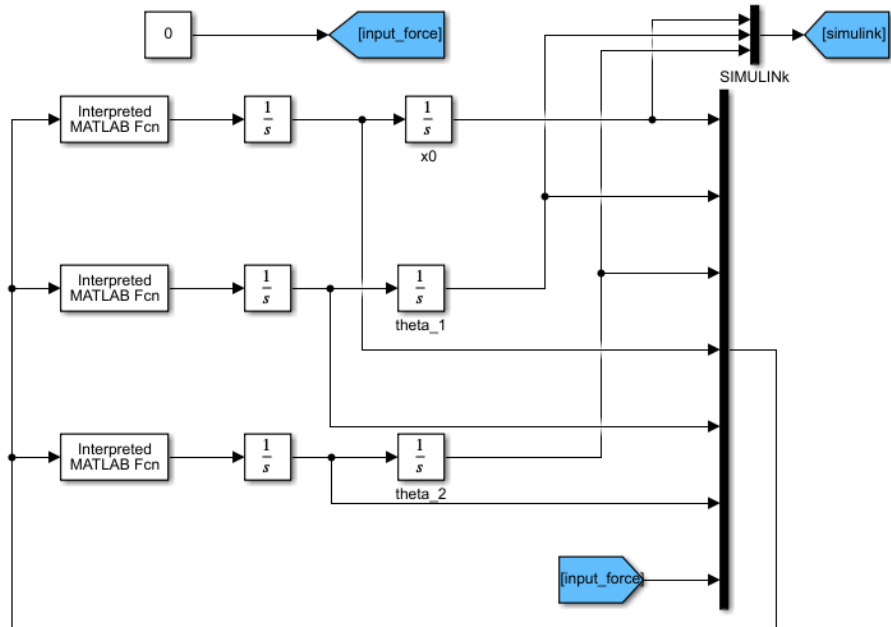
$$\ddot{x}_0 = g_4(x_0, \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, f), \quad (2.38)$$

$$\ddot{\theta}_1 = g_5(x_0, \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, f), \quad (2.39)$$

$$\ddot{\theta}_2 = g_6(x_0, \dot{x}_0, \theta_1, \dot{\theta}_1, \theta_2, \dot{\theta}_2, f) \quad (2.40)$$

Výpočet jsme provedli softwarově, tyto rovnice zde pro jejich délku nevyepisujeme, k zobrazení jsou v příloze A.

Rovnice pak implementujeme do Simulinku, schéma ukazuje obrázek (3)

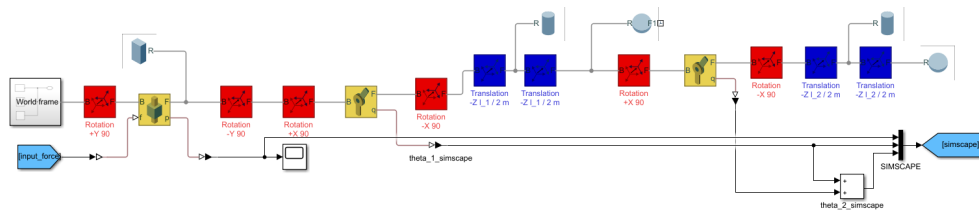


Obrázek 3: Schéma modelu dvojitého kyvadla na vozíku v Simulinku

### 2.3.4 Simscape dvojitého kyvadla na vozíku

Simscape je toolbox v Matlabu, který uživatele odstíní od vytvoření jakéhokoliv matematického modelu. Uživatel propojuje funkční bloky, které představují fyzické komponenty, například tělesa a klouby. Model, predikující vývoj systému, je pak vytvořen softwarem na pozadí.

Vytvořili jsme simscapovský model tak, aby odpovídal našemu matematickému modelu. Schéma je zobrazeno na obrázku (4)

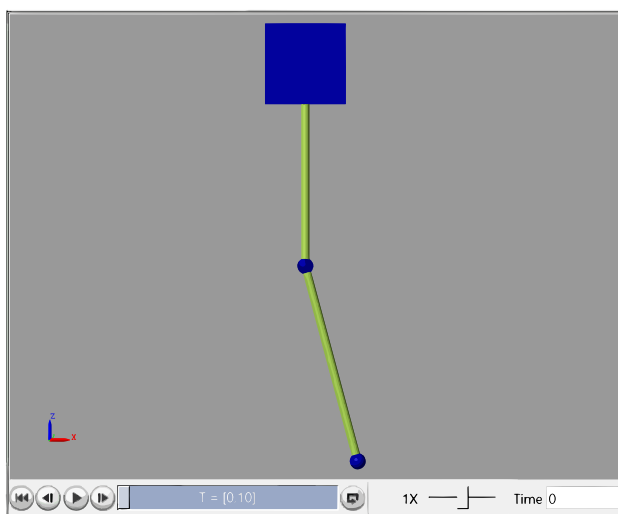


Obrázek 4: Schéma modelu dvojitého kyvadla na vozíku v Simscapu

Bílý bloček úplně vlevo „world frame“ představuje popis tíhového pole, ve

kterém se systém nachází, tedy gravitačního pole země.

Červené bloky popisují rotaci souřadnicového systému, tmavě modré bloky představují jeho translaci. Žluté bloky pak představují klouby. První žlutý blok je posuvný kloub představující vozík, pohybující se ve vodorovné ose, druhé dva žluté bloky představují rotační klouby. Neobarvené bloky kvádrů představují postupně hmotný vozík a dvě nehmotné tyče a neobarvené bloky koulí představují hmotné body o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ . Grafickou vizualizaci modelu nám pak Simscape zobrazí, což je ukázáno na obrázku (5). Modrý čtverec představuje vozík, modré kuličky reprezentují modelovaná závaží kyvadla a žluté tyče představují nehmotné lano.



Obrázek 5: Vizuální zobrazení modelu v Simscape

### 2.3.5 Porovnání modelů dvojitého kyvadla na vozíku

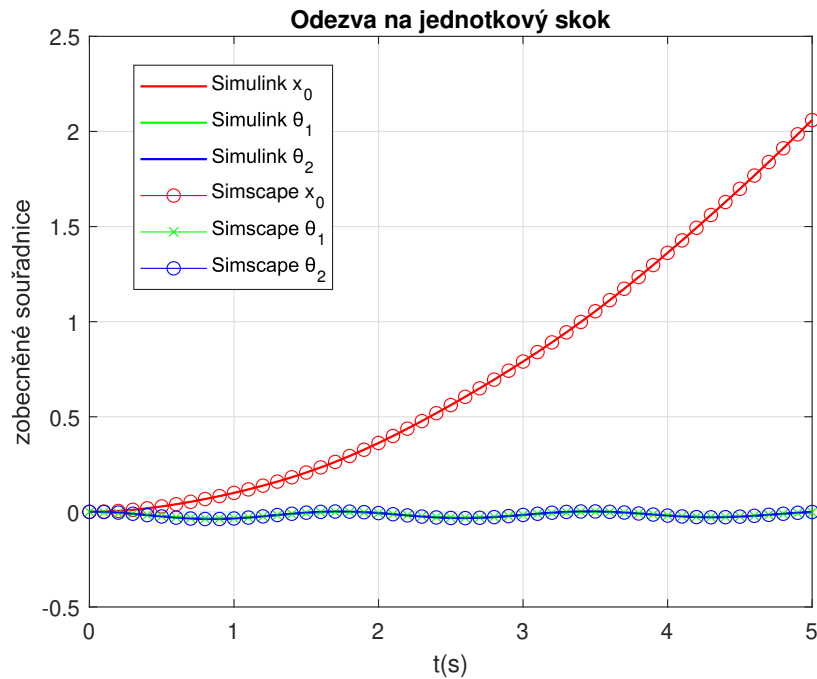
Provedeme simulaci modelů v Simscape a Simulinku a ověříme, zda se skutečně rovnají.

Nejprve již dosadíme za parametry konkrétní hodnoty. Hodnoty jsme zvolili tak, aby se podobaly reálným hodnotám portálového jeřábu. (2.41)

$$\begin{aligned}
m_0 &= 4 \text{ kg} & b_0 &= 0.5 \text{ Ns/m} & l_1 &= 0.5 \text{ m} \\
m_1 &= 0.2 \text{ kg} & b_1 &= 0.1 \text{ Nms/rad} & l_2 &= 0.5 \text{ m} \\
m_2 &= 1 \text{ kg} & b_2 &= 0.1 \text{ Nms/rad} & & \\
g &= 9.80665 \text{ m/s}^2 & & & & 
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Nicméně, v případě řízení reálného systému by bylo nutné provést přesnou identifikaci parametrů. Často však není jednoduché některé parametry přímo změřit. Dobrou možností je namísto výše uvedených fyzikálních parametrů zvolit sadu parametrů dynamických ekvivalentně popisujících systém a ty pak identifikovat. Dopodrobna se tímto problémem pro kyvadlo s obecně  $n$  rameny zabývá práce [10].

Otestujeme nejprve odezvu na jednotkový skok na vstupu za nulových počátečních podmínek. Připomeneme, že jako vstup jsme zvolili sílu působící na vozík, tedy za působení konstantní síly se systém neustálí a očekáváme, že vozík pojedou do nekonečna. Odezvu ukazuje obrázek (6).



Obrázek 6: Porovnání odezvy modelů na jednotkový skok

Odezva odpovídá našemu očekávání, především je však důležitá shodnost modelu v Simulinku, odvozeného výpočtem i softwarově, s modelem v Simscahu.

Dále otestujeme odezvu systému na počáteční podmínky

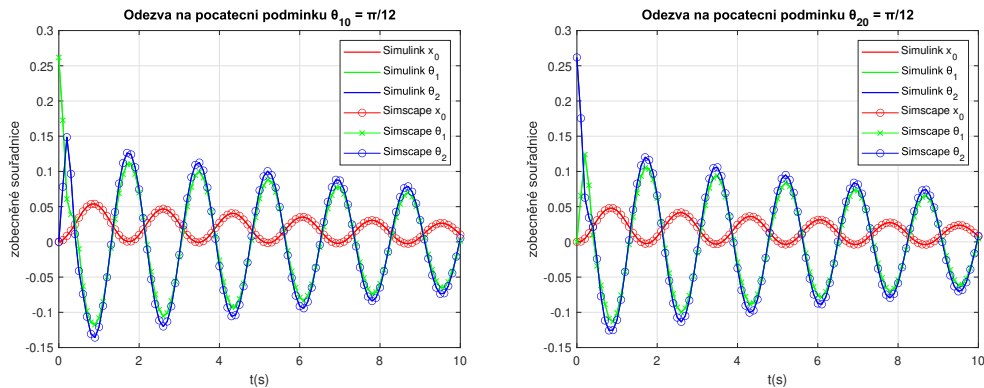
$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Zvolíme nejprve úhel natočení druhého kyvadla  $\theta_{10} = 0$  a všechny ostatní prvky nulové.

Poté otestujeme podmínku pro  $\theta_{20} = \frac{\pi}{12}$  a ostatní prvky opět nulové, tedy

$$\mathbf{q}_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{q}_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\pi}{12} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Odezvy můžeme vidět na obrázku (7)



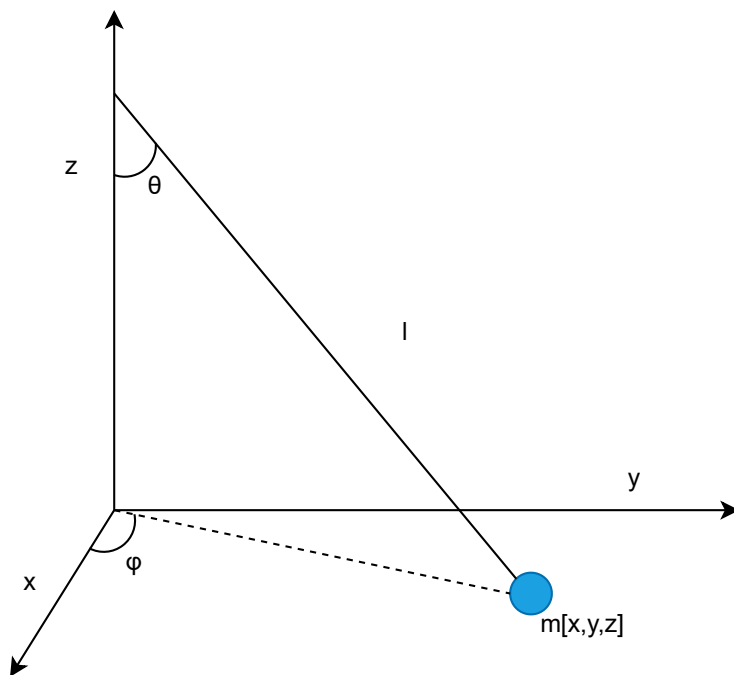
Obrázek 7: Odezva na počáteční podmínky systému

Stejně odezvy opět potvrzují shodnost modelu v Simulinku s modelem v Simscahu.



## 2.4 Sférické kyvadlo

Protože kyvadlo se vlivem vnějších sil může kývat nejen v jedné rovině, ale v celém prostoru, může být zajímavou možností použít model sférického kyvadla, tedy kyvadla pohybujícího se v prostoru. (8)



Obrázek 8: Schéma fyzikálního modelu sférického kyvadla

Kyvadlo budeme nejprve modelovat pouze jednoduché a bez vozíku. V případě spokojenosti s modelem do něj vozík taktéž zařadíme.

### 2.4.1 Odvození modelu sférického kyvadla ručním výpočtem

Model odvodíme podobně jako v případě dvojitého kyvadla na vozíku pomocí Lagrangeovy metody. Jako zobecněné souřadnice zvolíme úhly  $\theta$  a  $\phi$  a vyjádříme kartézské souřadnice hmotného bodu o hmotnosti  $m$  následovně:

$$\begin{aligned}
x &= l \sin \theta \cos \phi, \\
y &= l \sin \theta \sin \phi, \\
z &= -l \cos \theta
\end{aligned}
\tag{2.44}$$

Vypočteme ještě rychlosti hmotného bodu ve směru jednotlivých os:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= l \cos(\theta) \dot{\theta} \cos(\phi) - l \sin(\theta) \sin(\phi) \dot{\phi}, \\
\dot{y} &= l \cos(\theta) \dot{\theta} \sin(\phi) + l \sin(\theta) \cos(\phi) \dot{\phi}, \\
\dot{z} &= l \sin(\theta) \dot{\theta}
\end{aligned}
\tag{2.45}$$

Kinetická energie pak je

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \tag{2.46}$$

Po dosazení a úpravách dostáváme

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2) \tag{2.47}$$

Potenciální energie je

$$V = mgz = -mgl \cos \theta \tag{2.48}$$

a Lagrangian je pak

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2) + mgl \cos \theta \tag{2.49}$$

Opět přidáme do systému tlumení, tedy zavedeme disipativní funkci

$$D = \frac{1}{2} b (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2), \tag{2.50}$$

kde  $b$  je koeficient tlumení.

Pohybové rovnice pak opět vypočteme vzorcem [2.2](#).

Pro první zobecněnou souřadnici  $\theta$  dostáváme

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} \quad (2.51)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \ddot{\theta} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \sin \theta \cos(\theta) \dot{\phi}^2 - mgl \sin \theta \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = b \dot{\theta} \quad (2.54)$$

První rovnice pak bude

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0 \quad (2.55)$$

$$ml^2 \ddot{\theta} + b \dot{\theta} + mgl \sin \theta - ml^2 \sin \theta \cos(\theta) \dot{\phi}^2 = 0 \quad (2.56)$$

Rovnice 56: Sférické kyvadlo - 1. diferenciální rovnice

Obdobně pokračujeme i pro souřadnici  $\phi$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = ml^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi} \quad (2.57)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = 2ml^2 \sin \theta \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{\phi} + ml^2 \sin^2(\theta) \ddot{\phi} \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\phi}} = b \dot{\phi} \quad (2.60)$$

a rovnice bude

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\phi}} = 0 \quad (2.61)$$

neboli

$$ml^2 \sin^2(\theta) \ddot{\phi} + 2ml^2 \sin \theta \cos(\theta) \dot{\theta} \dot{\phi} + b\dot{\phi} = 0 \quad (2.62)$$

Rovnice 62: Sférické kyvadlo - 2. diferenciální rovnice

Můžeme si všimnout nelinearity obou rovnic v nejvyšších derivacích, což je nepříjemná vlastnost, jak ukážeme dále.

### 2.4.2 Softwarový výpočet modelu sférického kyvadla

Opět ověříme předchozí výpočet softwarově, tentokrát použijeme jenom Matlabovský symbolický toolbox. Kód je následující:

```
syms l m g b theta(t) phi(t)

x = l*sin(theta(t))*cos(phi(t))
y = l*sin(theta(t))*sin(phi(t))
z = -l*cos(theta(t))

dx = simplify(diff(x,t))
dy = simplify(diff(y,t))
dz = simplify(diff(z,t))

T = (1/2)* m * (dx^2 + dy^2 + dz^2)
T = combine(T, 'sincos')
T = simplify(T)

V = m*g*z

L = simplify(T-V)
D = 1/2*b*(diff(theta,t))^2 + 1/2*b*(diff(phi,t))^2
    %disipativni funkce

dphi = diff(phi,t)
dtheta = diff(theta,t)
ddphi = diff(dphi,t)
ddtheta = diff(dtheta,t)
```

```

%=====
dL_dtheta = diff(L,dtheta)
dL_theta = diff(L,theta)
dD_dtheta = diff(D,dtheta)
dt_dL_dtheta = simplify(diff(dL_dtheta,t))

rce_1 = simplify(dt_dL_dtheta - dL_theta +dD_dtheta
== 0)
expand(rce_1)
%=====
dL_dphi = diff(L,dphi)
dL_phi = diff(L,phi)
dD_dphi = diff(D,dphi)
dt_dL_dphi = simplify(diff(dL_dphi,t))

rce_2 = simplify(dt_dL_dphi - dL_phi +dD_dphi == 0)

```

První rovnice vyšla

$$2ml^2\ddot{\theta} + 2b\dot{\theta} + 2mgl \sin \theta = ml^2 \sin(2\theta) \dot{\phi}^2 \quad (2.63)$$

a druhá rovnice

$$ml^2 \sin(\theta)^2 \ddot{\phi} + ml^2 \sin(2\theta) \dot{\theta} \dot{\phi} + b\dot{\phi} = 0 \quad (2.64)$$

Použijeme li vztah

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.65)$$

Pak zjistíme že softwarové odvození rovnic se shoduje s odvozením rovnic ručním výpočtem (2.56), (2.62).

### 2.4.3 Implementace modelu sférického kyvadla v Simulinku

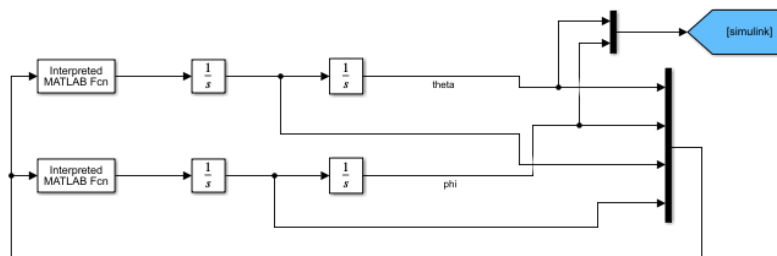
Pro převedení matematického modelu do Simulinku nejprve vyjádříme druhé derivace poloh:

$$\ddot{\theta} = -\frac{-ml^2 \sin(2\theta) (\dot{\phi})^2 + 2b\dot{\theta} + 2mgl \sin(\theta)}{2ml^2} \quad (2.66)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{\dot{\phi} (ml^2 \sin(2\theta) \dot{\theta} + b)}{ml^2 \sin(\theta)^2} \quad (2.67)$$

Můžeme vidět, že ve jmenovateli druhé rovnice se vyskytuje výraz  $\sin(\theta)^2$ . To nám zjevně bude přinášet problémy pro hodnoty kdy  $\sin \theta = 0$ , tedy  $\theta = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

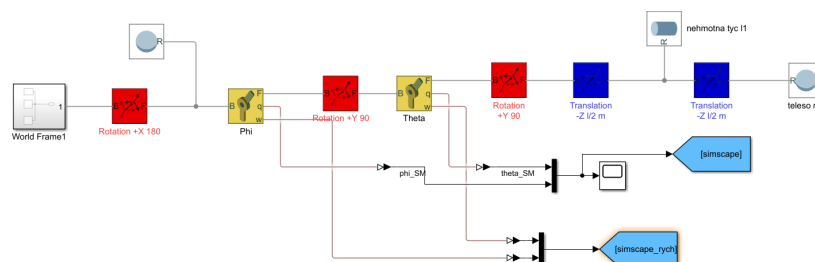
Schéma v modelu v Simulinku ukazuje obrázek (9).



Obrázek 9: Implementace sférického kyvadla v Simulinku

### 2.4.4 Simscape sférického kyvadla

Také uděláme schéma v Simscapu. (10)



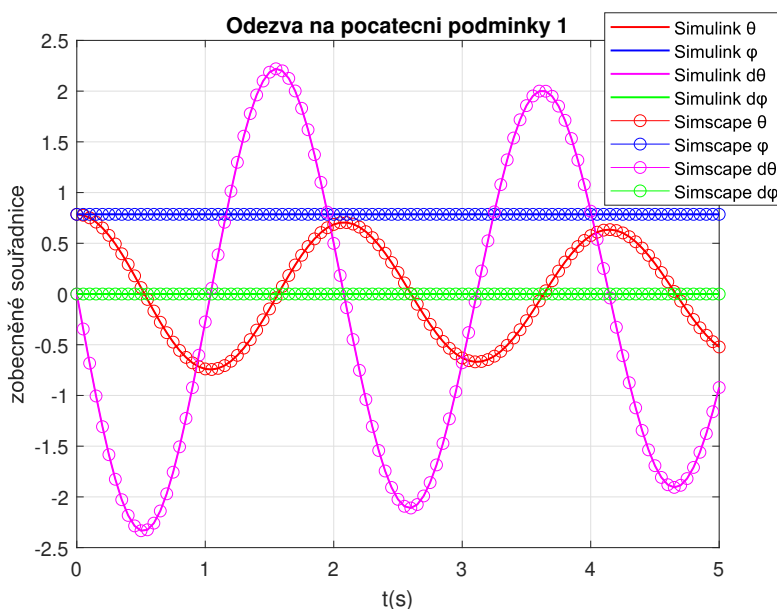
Obrázek 10: Implementace sférického kyvadla v Simscapu

### 2.4.5 Porovnání modelů sférického kyvadla

Provedeme simulaci nejprve pro nulové počáteční rychlosti a nenulové počáteční úhly, tedy například podmínky

$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} \theta \\ \phi \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/4 \\ \pi/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.68)$$

Vzhledem k nulové rychlosti  $\dot{\phi}$  pak sférické kyvadlo přejde v klasické kyvadlo kývající se v rovině. Vykreslíme pro větší názornost úhly i úhlové rychlosti kyvadla: (11)



Obrázek 11: Odezva sférického kyvadla na počáteční podmínky s nulovými rychlostmi

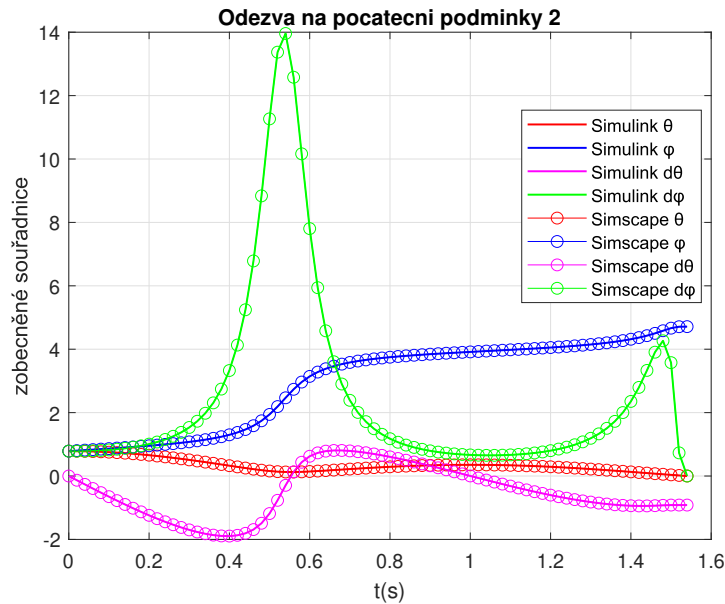
Je vidět, že náš model v Simulinku i v Simscapu dává stejné výsledky. Nicméně se nám může na první pohled zdát divné, že náš model funguje přestože  $\exists t, \theta(t) = 0$ . Ve skutečnosti však software nepočítá spojitě, ale diskrétně, a tedy se úhel  $\theta$  do „přesné“ nuly nedostane. Naproti tomu, podíváme-li se ještě jednou na rovnici 2.67, v čitateli se vyskytuje člen  $\dot{\phi}$  a ten

jsme zvolili nulový už v počáteční podmínce. V čitateli se tedy vyskytuje „přesná“ nula, tedy  $\ddot{\phi} = 0$ , a proto simulace funguje správně.

Uděláme i simulaci pro nenulovou rychlost  $\dot{\phi}$ , zvolíme počáteční podmínky

$$\mathbf{q}_0 = \begin{pmatrix} \pi/4 \\ \pi/4 \\ 0 \\ \pi/4 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Pokusili jsme se provést stejnou simulaci jako v předchozím bodě, nicméně výpočetní software se v čase  $t = 1.54s$  zastavil. Vykreslili jsme proto simulaci jen do tohoto času. (12).



Obrázek 12: Odezva sférického kyvadla na počáteční podmínky s nenulovou rychlostí  $\dot{\phi}$

Vzhledem k nenulové rychlosti  $\dot{\phi}$  nyní již pro  $\theta \approx 0$  není  $\ddot{\phi}$  vyjádřené z rovnice (2.67) nula, nýbrž naopak vzhledem k dělení číslem téměř nulovým, dosahuje v absolutní hodnotě nekonečně velkých hodnot. Software pak přestává kooperovat.

Problém by šel vyřešit jinou reprezentací rotace, například pomocí kvaternionů. Nicméně, tím by se stal náš model řádově složitější, a proto jsme se



rozhodli dále model sférického kyvadla nepoužívat. Dále budeme pokračovat s modelem dvojitého kyvadla, kývajícího se v rovině, odvozeného výše.

## 2.5 Shrnutí

V této kapitole jsme ukázali ekvivalenci rozdílných způsobů vytvoření matematického modelu portálového jeřábu. Rozhodli jsme se ho modelovat jako dvojitě kyvadlo na vozíku. Model jsme nejprve odvodili detailně ručním výpočtem, a následně naše odvození ověřili softwarem, přičemž jsme využili profesionální výpočetní programy Matlab a Maple. Softwarové rovnice se shodovaly s rovnicemi ručně odvozenými a ty jsme následně převedli do blokového schématu v Simulinku. Simulinkový model jsme pak porovnali s druhou metodou, což bylo vytvoření blokového schématu v Simscapu, kde se ovšem jednalo o bloky fyzických komponent. Shodností odezev na základní signály jsme ukázali, že oba dva způsoby modelování vedou ke stejnému výsledku.

Dále jsme se pokusili portálový jeřáb alternativně modelovat jako sférické kyvadlo. Model jsme opět odvodili ručně, softwarově i v Simscapu a ukázali jsme shodnost odezev. Dále jsme vysvětlili, že z důvodů problémů s reprezentací rotace by bylo další použití modelu zbytečnou komplikací.

### 3 Řízení modelu

Na základě znalosti matematického modelu systému (budeme pracovat s matematickým modelem dvojitého kyvadla na vozíku, odvozeným v předcházející kapitole) můžeme navrhnout vhodné řízení. Náš cíl je motivovaný praktickým problémem - chceme vozíkem pohnout o určitou vzdálenost, aniž bychom přitom vyvolali kmitání ramen kyvadla.

Než ovšem můžeme vhodné řízení navrhnout, musíme do systému hlouběji proniknout. Prvním krokem je vytvoření lineárního stavového modelu v rovnovážném bodě. Linearizovaný model je přesný v malých odchylkách od rovnovážného stavu, toto výrazné zjednodušení nám však umožňuje najít vhodný zákon řízení.

#### 3.1 Linearizace systému

Dynamické chování drtivě většiny fyzikálních systémů je nelineárního charakteru, tyto systémy se však chovají přibližně lineárně při nepříliš velkých změnách systémových proměnných. Vzniká pak možnost nahradit model nelineárního systému stavovým modelem lineárního systému v blízkosti pracovního bodu, což většinou bývá rovnovážný stav - tj. stav kdy ustává veškerý pohyb systému. [11, p. 13]

Nejinak je tomu i v případě našeho modelu dvojitého kyvadla na vozíku. Nejprve vhodně zvolíme stavy systému jako naše zobecněné souřadnice, tedy vektor stavu bude

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{x}_0 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

a jako vstup zvolíme sílu  $f$ , působící na vozík

$$u = f \quad (3.2)$$

Dodáme, že jinou možností by bylo zvolit jako vstup zrychlení vozíku  $\ddot{x}$  přímo ovládané motorem. Automatické řízení je fascinující a zároveň zrádné tím, že často vede k cíli více cest a je na návrháři zvolit tu, kterou se vydá.

Zjevně platí

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= g_1(\mathbf{x}) = x_4 \\ \dot{x}_2 &= g_2(\mathbf{x}) = x_5 \\ \dot{x}_3 &= g_3(\mathbf{x}) = x_6\end{aligned}\tag{3.3}$$

Dále platí

$$\begin{aligned}\dot{x}_4 &= \ddot{x}_0 = g_4(\mathbf{x}, u) \\ \dot{x}_5 &= \ddot{\theta}_1 = g_5(\mathbf{x}, u) \\ \dot{x}_6 &= \ddot{\theta}_2 = g_6(\mathbf{x}, u)\end{aligned}\tag{3.4}$$

Kde funkce  $g_4(\mathbf{x})$ ,  $g_5(\mathbf{x})$  a  $g_6(\mathbf{x})$  jsou (2.38), (2.39), (2.40).

Vyjdeme ze stavové rovnice systému

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,\tag{3.5}$$

kde  $\mathbf{A}$  je matice parciálních derivací

$$\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, u)}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r}\tag{3.6}$$

a  $\mathbf{B}$  je matice parciálních derivací

$$\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x}, u)}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_r}\tag{3.7}$$

Pro výstup systému pak je

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x}\tag{3.8}$$

Nyní musíme zvolit náš pracovní bod, ve kterém budeme rovnici linealizovat. Dvojitě kyvadlo má více rovnovážných stavů, nás bude vzhledem k povaze problému (3) zajímat ten, kdy jsou obě kyvadla v dolní poloze, tedy kdy platí

$$x_{2r} = x_{3r} = 0\tag{3.9}$$

Poloha vozíku nemá na vlastnost rovnovážného stavu vliv, zvolíme ji nulovou.

Pak tedy

$$\mathbf{x}_r = \left( 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right)^T \quad (3.10)$$

Matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsme vypočetli pro naše zvolené parametry. Symbolický tvar matice  $\mathbf{A}$  v závislosti na obecných parametrech (2.41) neuvádíme, protože je příliš dlouhý.

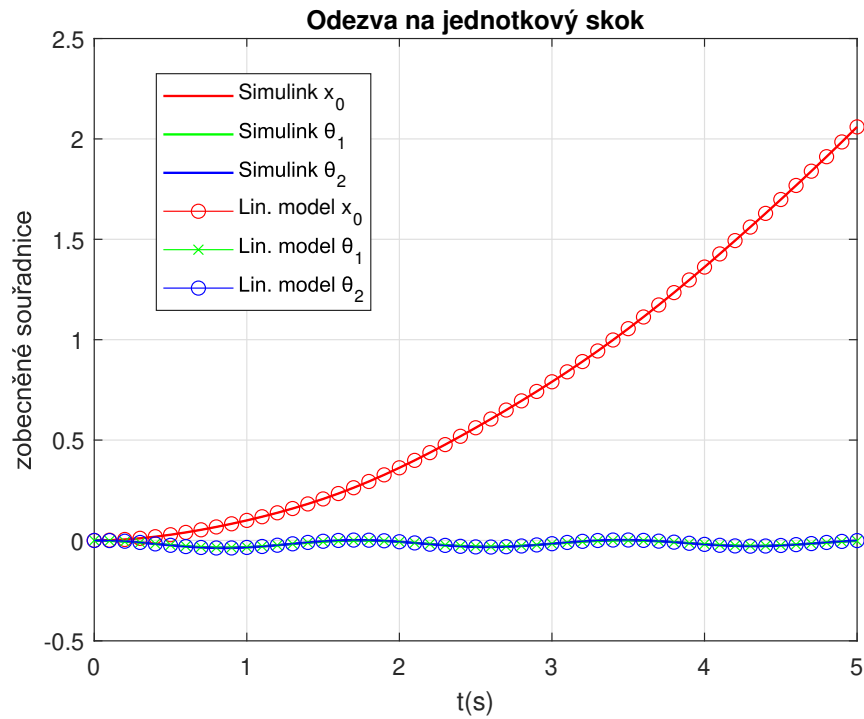
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2.942 & 0 & -0.125 & 0.1 & -0.05 \\ 0 & -123.5638 & 98.0665 & 0.25 & -6.2 & 4.1 \\ 0 & 117.6798 & -117.6798 & 0 & 6.4 & -4.4 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.25 \\ -0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Matice  $\mathbf{C}$  záleží na rozmístění senzorů. Nejjednodušší by bylo měřit všechny stavy, to však v praxi nebývá zvykem, neboť by to vyžadovalo větší náklady. Budeme proto měřit pouze polohu vozíku, a tedy zvolíme matici  $\mathbf{C}$

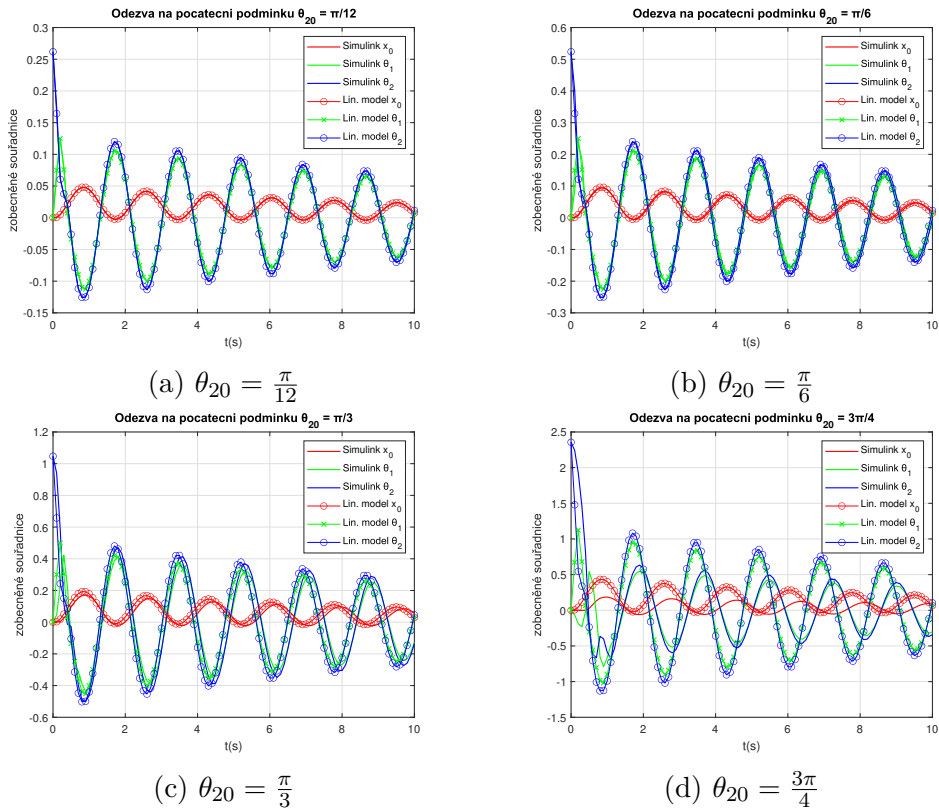
$$\mathbf{C}^T = \left( 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right) \quad (3.13)$$

Následně otestujeme shodnost základních odezev nelineárního a linearizovaného stavového modelu. Nejprve porovnáme odezvu na jednotkový skok za nulových počátečních podmínek (13). Odezvy jsou zjevně velmi podobné.



Obrázek 13: Porovnání odezev nelineárního a linearizovaného modelu na jednotkový skok

Otestujeme ještě odezvu na počáteční podmínky, přičemž všechny počáteční stavy položíme rovny nule, s výjimkou počátečního stavu  $x_{30} = \theta_{20}$ , kterému postupně přiřadíme hodnoty  $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$ ,  $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$ ,  $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$  a  $\frac{3\pi}{4} = 135^\circ$ . Tyto odezvy ukazují obrázky (14a), (14b), (14c), (14d).



Obrázek 14: Porovnání odezev nelineárního a linearizovaného modelu na počáteční podmínky

Můžeme vidět, že pro počáteční výchylky druhého ramene kyvadla  $\theta_{20} \leq \frac{\pi}{6}$  zůstávají odezvy nelineárního i linearizovaného stavového modelu přibližně stejné. Pro větší výchylku  $\theta_{20} = \frac{\pi}{3}$  už je patrná odchylka a pro největší výchylku  $\theta_{20} = \frac{3\pi}{4}$  už dávají modely kompletně jiné výsledky. To odpovídá našemu předpokladu o platnosti linearizovaného modelu pouze na relativně malých výchylkách stavů.

### 3.2 Řiditelnost, pozorovatelnost a stabilita

Než začneme navrhovat řízení systému, má cenu se nejprve ptát, zda je systém říditelný. Pokud by říditelný nebyl, bylo by třeba změnit nastavení aktuátorů - tedy bychom museli jinak zvolit vnější vstupy do systému.

Řiditelnost systému ověříme pomocí matice říditelnosti  $\mathbf{Q}$ . Pokud má

matice řiditelnosti plnou hodnot, je systém řiditelný. Matici řiditelnosti vypočteme v Matlabu pomocí příkazu  $ctrb(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & -0.08125 & -0.98459 & 13.5565 & -66.9358 \\ 0 & -0.5 & 3.1625 & 29.0341 & -985.3723 & 4394.5736 \\ 0 & 0 & -3.2 & -24.5199 & 1042.4434 & -4590.912 \\ 0.25 & -0.08125 & -0.98459 & 13.5565 & -66.9358 & -2221.5905 \\ -0.5 & 3.1625 & 29.0341 & -985.3723 & 4394.5736 & 177899.2881 \\ 0 & -3.2 & -24.5199 & 1042.4434 & -4590.912 & -190307.6682 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Hodnost matice ověříme v Matlabu příkazem  $rank(\mathbf{Q})$ . Vyšla 6, tedy plná, čili systém je řiditelný.

Také nás zajímá pozorovatelnost systému, tedy schopnost určit jeho stav na základě znalosti jeho vstupu a výstupu na konečném časovém intervalu. Tuto vlastnost ověříme pomocí matice pozorovatelnosti  $\mathbf{O}$ . Pokud má matice plnou hodnot, je systém pozorovatelný. Matici spočteme v Matlabu pomocí příkazu  $obsv(\mathbf{A}, \mathbf{C})$

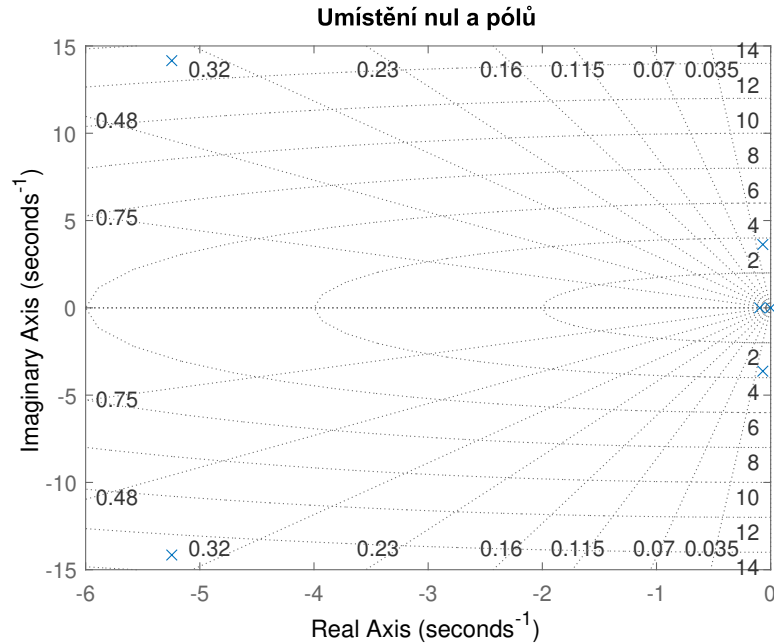
$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.942 & 0 & -0.125 & 0.1 & -0.05 \\ 0 & -18.6081 & 15.6906 & 0.040625 & 1.9895 & 0.63625 \\ 0 & -170.8363 & 120.229 & 0.4923 & -26.8669 & 21.046 \\ 0 & 5797.921 & -5111.4389 & -6.7783 & 130.4826 & -82.5525 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Hodnost matice jsme ověřili příkazem  $rank(\mathbf{O})$ . Vyšla opět 6, tedy plná, čili systém je pozorovatelný.

Dále určíme póly systému v Matlabu příkazem  $pole(sys)$ . Póly vychází

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5.24574 + 14.1578i \\ -5.24574 - 14.1578i \\ -0.068672 + 3.627i \\ -0.068672 - 3.627i \\ -0.096173 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Zobrazíme je graficky do komplexní roviny:



Obrázek 15: Póly systému

Žádný pól neleží v nestabilní pravé komplexní polorovině, nicméně jeden pól, představující polohu vozíku, leží přímo na imaginární ose a další tři jsou jí nebezpečně blízko. Proto může být neřízený systém velmi kmitavý, jak jsme ostatně již mohli vidět například na obrázku (7).

### 3.3 Přenos systému

Protože už máme linearizovaný model systému, můžeme určit i jeho přenos. Zajímá nás budou především přenosy ze vstupu na polohu vozíku  $P_0$ , na úhel natočení prvního ramene kyvadla  $P_1$  a přenos  $P_2$  na úhel natočení druhého ramene.

$$P_0 = \frac{0.25 \cdot (s^2 + 0.08773s + 10.26) \cdot (s^2 + 10.31s + 225)}{s \cdot (s + 0.09617) \cdot (s^2 + 0.1373s + 13.16) \cdot (s^2 + 10.49s + 228)} \quad (3.17)$$

Přenos ze vstupu na polohu vozíku obsahuje „téměř“ dvojitý integrátor. Respektive člen jmenovatele  $(s + 0.09617) \approx s$ . To nepřekvapuje, protože

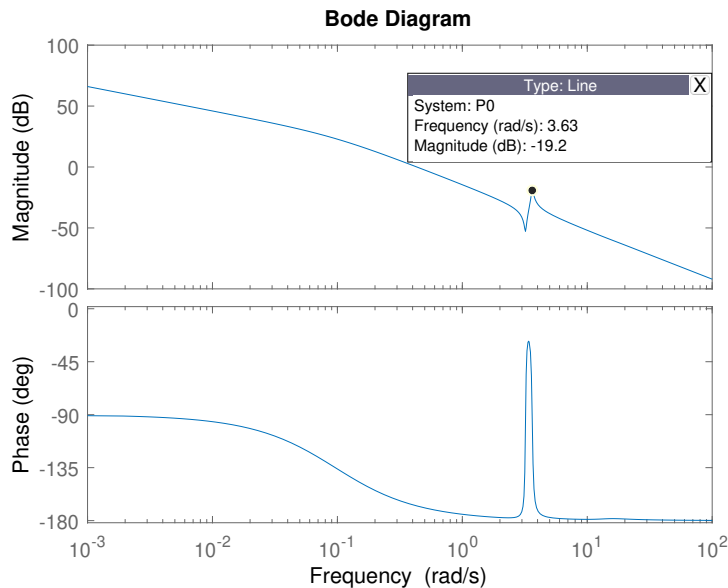


podle Newtonova druhého zákona, je síla působící na těleso přímo úměrná zrychlení tělesa. V našem případě ovšem v systému uvažujeme i tlumení, a proto neobsahuje systém dvojitý integrátor „přesně“. Přenosy ze vstupu na natočení ramen kyvadla jsou následující

$$P_1 = \frac{-0.5 \cdot s \cdot (s^2 + 4.4s + 117.7)}{(s + 0.09617) \cdot (s^2 + 0.1373s + 13.16) \cdot (s^2 + 10.49s + 228)} \quad (3.18)$$

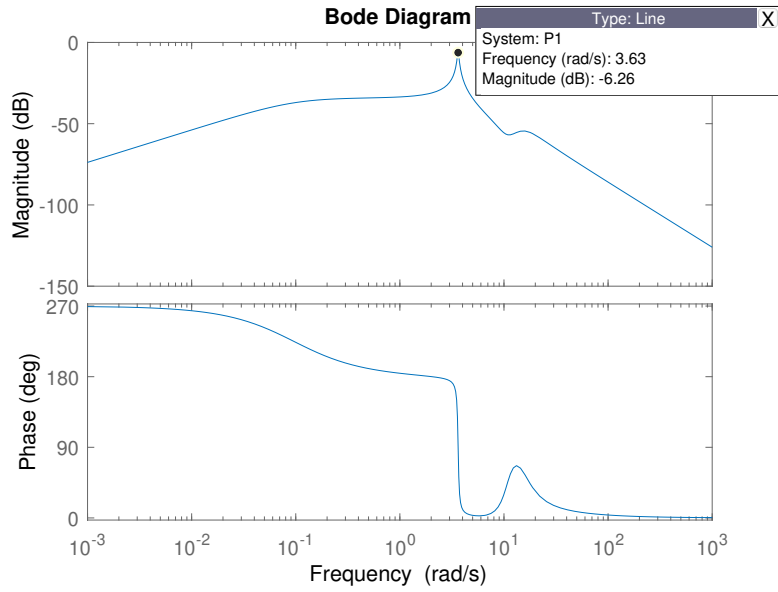
$$P_2 = \frac{-3.2 \cdot (s + 18.39) \cdot s}{(s + 0.09617) \cdot (s^2 + 0.1373s + 13.16) \cdot (s^2 + 10.49s + 228)} \quad (3.19)$$

Nyní vykreslíme Bodeho grafy přenosů  $P_0$ ,  $P_1$  a  $P_2$  (16), (17), (18).

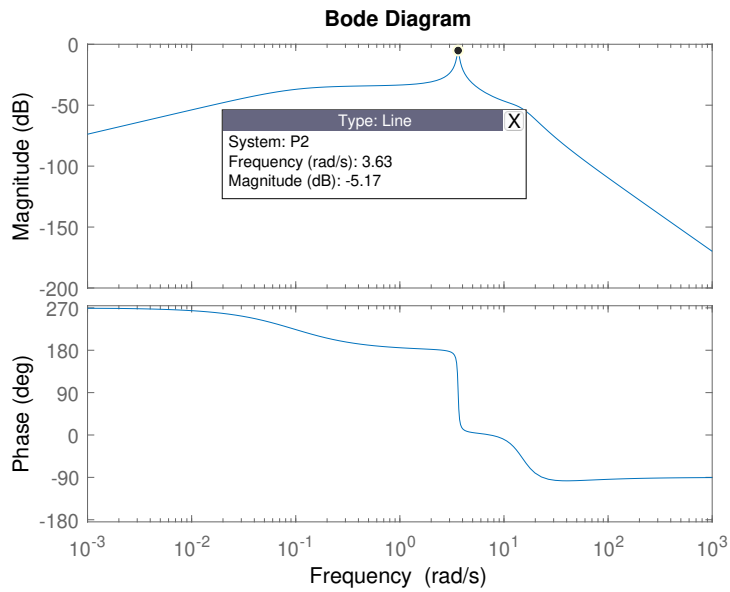


Obrázek 16: Bodeho diagram přenosu  $P_0$

Bodeho graf přenosu na polohu je typický pro přenosy obsahující integrátor, tedy logaritmus amplitudy zesílení ze začátku lineárně klesá s logaritmem frekvence. Na frekvenci 3.63 Hz nastává mírná rezonance. V tomto přenosu je poměrně zanedbatelná, protože nízké frekvence mají vyšší zesílení než je rezonanční peak.



Obrázek 17: Bodeho diagram přenosu  $P_1$



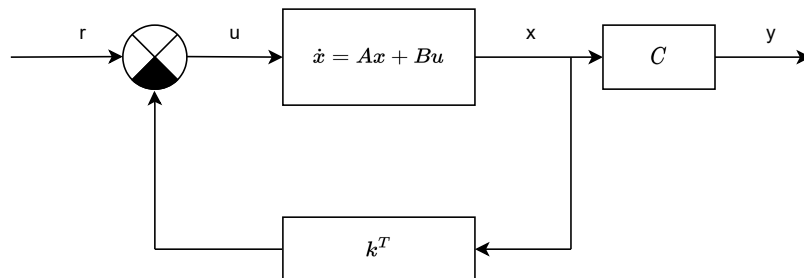
Obrázek 18: Bodeho diagram přenosu  $P_2$

Rovněž přenosy  $P_1$  a  $P_2$  obsahují rezonanci na totožné frekvenci 3.63 Hz. Na rozdíl od přenosu  $P_0$  je tato rezonance i globální maximum amplitudy zesílení. Zesílení v decibelech sice ani v jednom případě nedosahuje z důsledku přítomnosti tlumení v systému kladných hodnot, nicméně nebezpečně se jim blíží. Frekvence okolo 3.63 Hz mohou být tedy pro systém potenciálně nebezpečné.

### 3.4 Stavová zpětná vazba

Systém budeme řídit stavovou zpětnou vazbou. Stavová zpětná vazba má oproti výstupní zpětné vazbě řadu výhod. Stav systému je jeho jakási vnitřní paměť, která poskytuje mnohem větší množství informace než samotný výstup. Znalost vstupu a stavu poskytuje úplnou informaci o vývoji jak stavu tak výstupu. Navíc, stavovým regulátorem můžeme libovolně změnit polohu pólů každého říditelného systému. [12, p. 80]. Nevýhodou stavové zpětné vazby je naopak nutnost znalosti stavu, čímž se budeme zabývat později. Druhým způsobem by bylo využití znalostí vlastních frekvencí systému, identifikovaných v předcházející kapitole, k tvorbě vstupního tvarovacího filtru. [13] Použitím vstupního tvarovacího filtru přímo na řízení portálových jeřábů se více zabývá práce [6].

Schéma stavové zpětné vazby vidíme na obrázku (19).



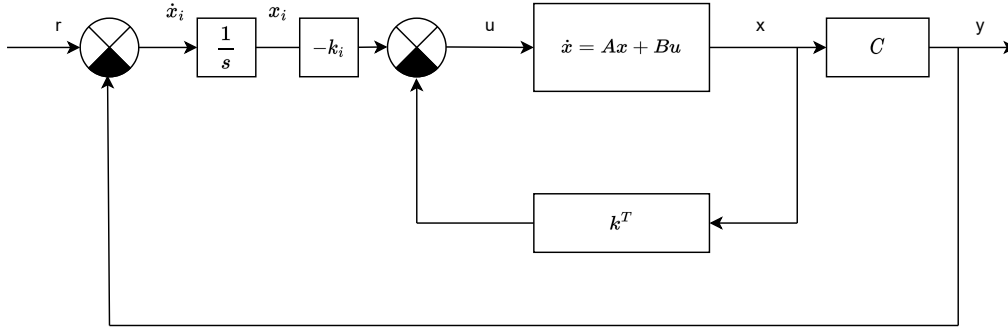
Obrázek 19: Schéma stavové zpětné vazby

Takto navržená stavová zpětná vazba však nemá jednotkové zesílení z reference  $r$  na výstup  $y$ , jinak řečeno komplementární citlivostní funkce  $T$  nemá jednotkové zesílení.

Tento problém lze řešit buďto přidáním kompenzačního zesílení, nebo rozšířením stavového regulátoru o integrátor, což je námi zvolený způsob. Tím se o jedna zvýší řád systému a musíme taktéž přidat další zesilující člen  $k_i$ .

Toto řešení považujeme za nejvhodnější už jen proto, že budou integrátorem potlačeny konstantní poruchy na vstupu, což vyplývá z principu vnitřního modelu. [12, p. 78]

Schéma rozšířeného modelu můžeme vidět na obrázku (20).



Obrázek 20: Schéma rozšířeného modelu

Zpětnou vazbu vedeme od polohy vozíku, což je stav, který, jak bylo zmíněno, chceme primárně regulovat. Ze schématu jsme schopni sestavit stavový popis rozšířeného modelu. Platí

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \quad (3.20)$$

$$\dot{x}_i = r - y = r - \mathbf{C}^T \mathbf{x} \quad (3.21)$$

Pak je tedy stavový popis

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_i \end{pmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}^*} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}^T & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}^*} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_i \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}^*} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_u} u + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_r} r \quad (3.22)$$

Nyní dosadíme za  $u$

$$u = -\mathbf{k}^T \mathbf{x} - k_i x_i = -\mathbf{k}^{T*} \mathbf{x}^* \quad (3.23)$$

a stavový model pak je

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{x}_i \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{k}^T & -\mathbf{B}k_i \\ -\mathbf{C}^T & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_z} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} r \quad (3.24)$$

neboli

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}_z \mathbf{x}^* + \mathbf{B}_r r \quad (3.25)$$

Pro výstup platí

$$y = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ x_i \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Zbývá otázka, jak navrhnout regulátor, tedy vektor  $\mathbf{k}^*$ . Tento problém vyřešíme pomocí lineárního kvadratického regulátoru. [14]

Lineární kvadratický regulátor minimalizuje kritérium

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt, \quad (3.27)$$

kde  $\mathbf{Q}$  a  $\mathbf{R}$  jsou námi zvolené váhové matice. Matice  $\mathbf{Q}$  je čtvercová matice, jejíž řád je roven řádu matice  $\mathbf{A}$ . Matice  $\mathbf{Q}$  penalizuje chyby stavu, tj. čím větší hodnota na řádku, tím rychleji regulátor odreguluje odchylku daného stavu od požadované hodnoty.

Matice  $\mathbf{R}$  je taktéž čtvercová matice, jejíž řád je roven počtu sloupců matice  $\mathbf{B}$ . V našem případě máme rozšířený vektor stavu a systém má jeden vstup, takže kritérium má tvar

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^{*T} \mathbf{Q} \mathbf{x}^* + u^T R u) dt \quad (3.28)$$

$R$  je tedy skalár. Hodnota  $R$  penalizuje výkon aktuátoru, tedy čím větší hodnota, tím menší je velikost vstupu, a tím pomalejší je regulátor. V našem případě se snažíme nejít do extrémů a  $R$  zvolíme

$$R = 0.1 \quad (3.29)$$

$\mathbf{Q}$  zvolíme jako diagonální matici, kde na diagonále budou prvky penalizující chyby jednotlivých stavů. Konkrétně

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

K tomuto tvaru jsme dospěli zkombinováním teoretických znalostí s praktickými experimenty. Nyní odvodíme konkrétní hodnoty zesílení regulátoru. Minimalizace kritéria (3.27) vede na stavovou zpětnou vazbu, kde

$$\mathbf{k}^{*T} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}_u^T \mathbf{P}, \quad (3.31)$$

a  $\mathbf{P}$  je řešením algebraické Riccatiové rovnice

$$\mathbf{A}^{*T} \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}^* - \mathbf{P} \mathbf{B}_u \mathbf{B}_u^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad [14] \quad (3.32)$$

Rovnici vyřešíme softwarově v Matlabu příkazem *icare()*. Vypočtené  $\mathbf{k}^*$  vychází

$$\mathbf{k}^{*T} = \begin{pmatrix} 23.1574 & -24.7881 & -6.0803 & 21.3132 & -3.847 & -1.9949 & -10 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Neboli

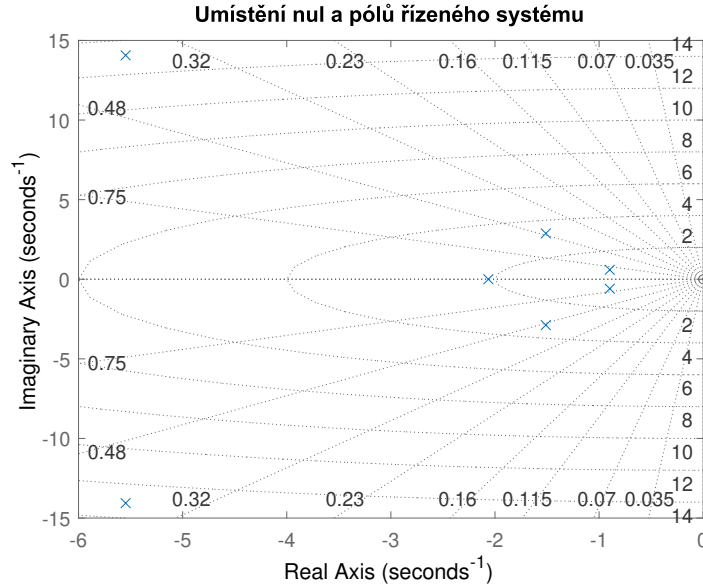
$$\mathbf{k}^T = \begin{pmatrix} 23.1574 & -24.7881 & -6.0803 & 21.3132 & -3.847 & -1.9949 \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{k}_i = -10 \quad (3.35)$$

Póly řízeného systému, tedy vlastní čísla matice  $A_z$  jsou pak

$$\boldsymbol{\lambda}_z = \begin{pmatrix} -5.5477 + 14.0642i \\ -5.5477 - 14.0642i \\ -1.5116 + 2.8788i \\ -1.5116 - 2.8788i \\ -2.0633 \\ -0.89741 + 0.5932i \\ -0.89741 - 0.5932i \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Vykreslíme je do komplexní roviny: (21)



Obrázek 21: Póly řízeného systému

V porovnání s póly neřízeného systému (3.16) jsme je posunuli více vlevo v komplexní rovině, čímž jsme snížili kmitavost systému a zvýšili robustnost ve stabilitě.

Ještě ověříme, zda je zesílení uzavřené smyčky skutečně jednotkové. Komplementární citlivostní funkce  $T$  je

$$T(s) = \frac{R(s)}{Y(s)} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{pmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_z)^{-1} \mathbf{B}_r \quad (3.37)$$

Po vyčíslení dostáváme přenos:

$$T(s) = \frac{2.5 \cdot (s^2 + 0.08773s + 10.26) \cdot (s^2 + 10.31s + 225)}{(s + 2.063) \cdot (s^2 + 1.795s + 1.157) \cdot (s^2 + 3.023s + 10.57) \cdot (s^2 + 11.1s + 228.6)} \quad (3.38)$$

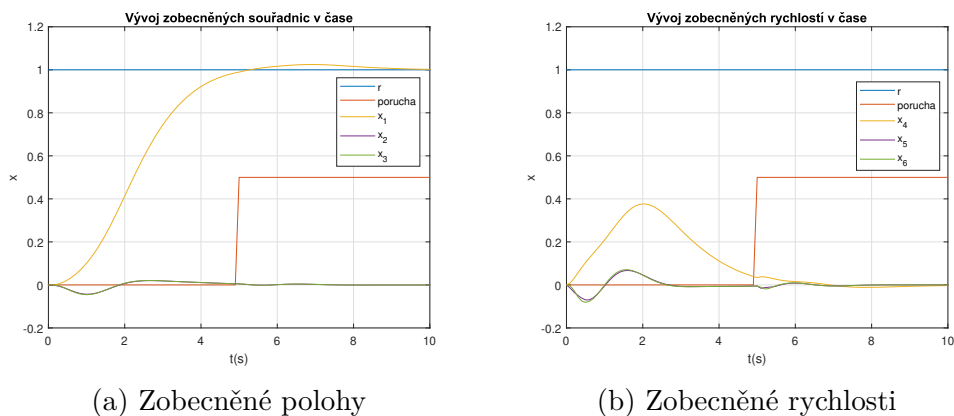
Dosadíme  $s = 0$ . Pak skutečně vychází

$$T(0) = 1 \quad (3.39)$$

Provedeme simulaci odezvy systému na jednotkový skok na referenčním signálu který chceme řídit, což je naše požadovaná poloha vozíku. Do signálu

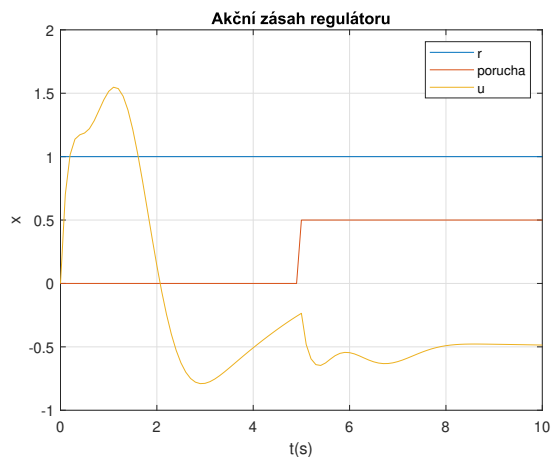
ještě přivedeme skokovou poruchu na vstupu v čase 5 o amplitudě 0.5. Přitom se dopouštíme lehkého podvodu, neboť jsme si na začátku definovali, že nemůžeme měřit všechny stavy a rekonstrukci stavu budeme řešit až později. V simulačním prostředí je však podobným „trikům“ dovoleno.

Odezvy můžeme vidět na obrázcích (22a), (22b).



Obrázek 22: Odezva řízeného systému na jednotkový skok a poruchu

Ještě vykreslíme akční zásah do systému (23).



Obrázek 23: Akční zásah do systému

Regulátor plynně dovede systém do požadovaného stavu, tedy vozík do



požadované polohy přibližně za 5 sekund, přičemž jen velmi málo rozkmitá kyvadla. Také velmi dobře zareagoval na poruchu.

Pokud bychom chtěli například systém zrychlit, museli bychom upravit námi zvolené návrhové parametry, v tomto případě skalár vážící vstup R. My jsme si více omezující podmínky předem nestanovili a považujeme plynulejší nájezd systému za lepší už jen proto, že v reálném případě bude vzhledem k menšímu statickému zesílení lépe reagovat na poruchy, nepřesnosti modelu či šum.

### 3.5 Citlivost uzavřené smyčky

Důležitým parametrem regulátoru je jeho robustnost, tedy schopnost reagovat na odchylky od očekávaných signálů, způsobené například nemodelovanými poruchami, šumem, nepřesností modelu nebo dopravním zpožděním. Dobrým ukazatelem robustnosti ve stabilitě jsou indexy bezpečnosti, konkrétněji bezpečnost v zesílení  $G_m$ , bezpečnost ve fázi  $\phi_m$  a disková bezpečnost (někdy nazývanou bezpečnost ve stabilitě)  $s_m$ .

Pro přenos otevřené smyčky platí vztah

$$F_o = \begin{pmatrix} \mathbf{k}^T & -k_i \end{pmatrix} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{B}_u \quad (3.40)$$

což je po dosazení

$$F_o = \frac{7.9057 \cdot (s^2 + 0.08773s + 10.26) \cdot (s^2 + 10.31s + 225)}{s \cdot (s + 2.13) \cdot (s + 14.08) \cdot (s^2 + 1.928s + 6.227) \cdot (s^2 + 13.09s + 212.5)} \quad (3.41)$$

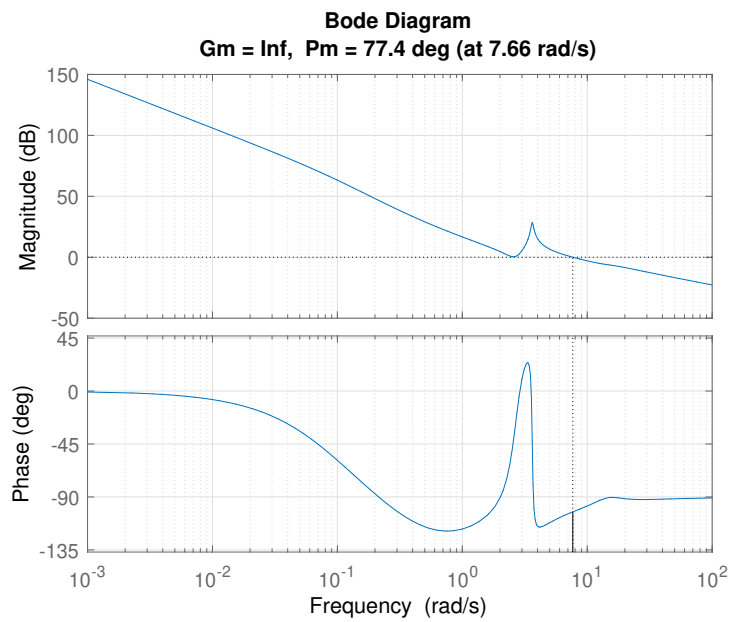
Bezpečnost v zesílení  $G_m$  a bezpečnost ve stabilitě  $P_m$  pak získáme z Bodeho charakteristiky otevřené smyčky příkazem  $\text{margin}(F_o)$

Dodáme, že pro dostatečně robustně stabilní systém by mělo platit

$$\begin{aligned} G_m &> 6 \text{ dB} \\ \phi_m &> 40^\circ \\ s_m &> 0.5 \quad [11, p.96] \end{aligned} \quad (3.42)$$

LQR regulátor by pak měl dokonce automaticky garantovat bezpečnost ve fázi  $\phi_m = 60^\circ$ . [14]

Bodeho charakteristiku otevřené smyčky můžeme vidět na obrázku (24).

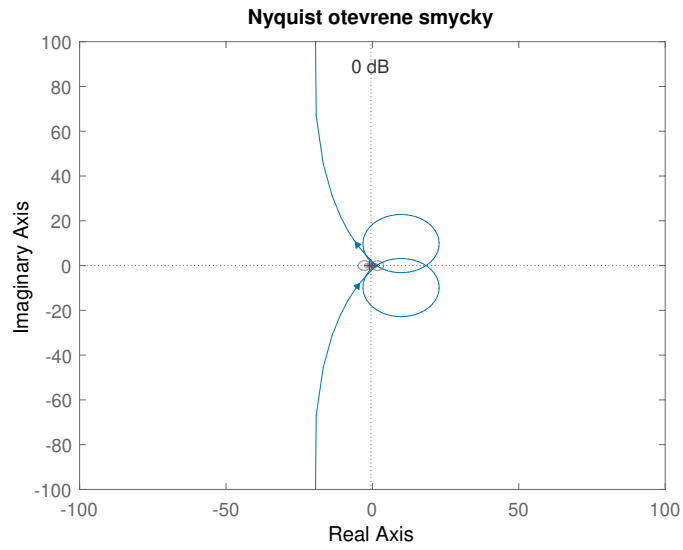


Obrázek 24: Bodeho charakteristika otevřené smyčky

Kde jsou zobrazeny i indexy ve stabilitě

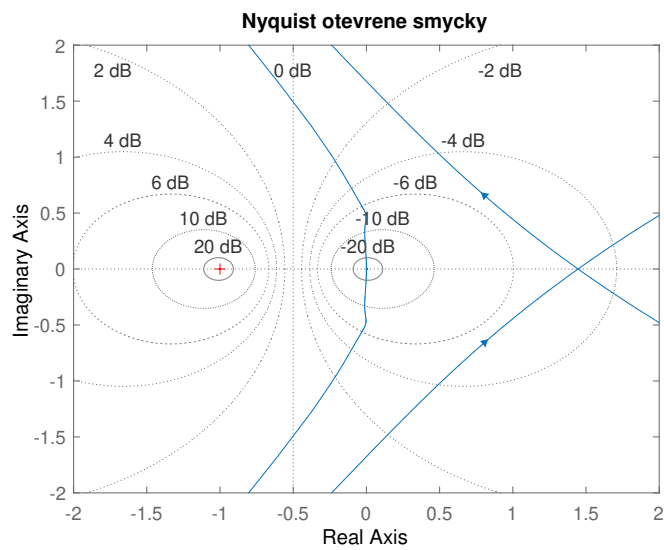
$$\begin{aligned} G_m &= \infty \\ \phi_m &= 77.4^\circ \end{aligned} \tag{3.43}$$

Nyquistův graf otevřené smyčky je zobrazen na obrázku (25)



Obrázek 25: Nyquistův graf otevřené smyčky

a přiblížen na obrázku (26).



Obrázek 26: Nyquistův graf otevřené smyčky přiblížený

Je vidět, že Nyquist nevstupuje do jednotkové kružnice, a tudíž

$$s_m = 1. \quad (3.44)$$

Systém je podle očekávání velmi robustní. Celková kvalita řízení však není zaručena, protože neznáme přesné stavy.

### 3.6 Rekonstruktor stavu

V minulých kapitolách jsme úspěšně navrhli stavovou zpětnou vazbu, nicméně bez znalosti stavů by nešla realizovat. Proto potřebujeme navrhnout rekonstruktor stavu.

Rekonstruktor stavu je dynamický systém, který nám na základě vstupu a výstupu systému umožňuje rekonstruovat jeho stavy.

Předpis identického rekonstruktora stavu je

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}(y - \hat{y}) \\ \hat{y} &= \mathbf{C}^T \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad [12, p.97] \quad (3.45)$$

kde  $\mathbf{L}$  je neznámý koeficient inovační zpětné vazby, který na základě rozdílu skutečného výstupu a rekonstruovaného výstupu upravuje odhadovaný stav. Po několika úpravách můžeme vztah přepsat do tvaru:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}^T)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u + \mathbf{L}y \quad (3.46)$$

Koeficienty matice  $\mathbf{L}$  jdou správně přiřadit pouze tehdy, pokud je systém  $(\mathbf{A}, \mathbf{C}^T)$  pozorovatelný. Tuto vlastnost jsme již dokázali výše. (3.2)

Matice  $(\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}^T)$  představuje matici dynamiky rekonstrukce, proto ji vyžadujeme stabilní.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}^T)\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.47)$$

Vlastní čísla systému přiřadíme pomocí Sylvestrový rovnice.

$$\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}^T \sim \mathbf{M} \quad (3.48)$$

kde  $\mathbf{M}$  bude mít náš požadovaný tvar. Póly bychom optimálně měli mít rychlejší než je má systém. Po sérii experimentů jsme nakonec zvolili šestinásobný pól

$$\lambda_{rek} = -10 \quad (3.49)$$

Matice  $M$  pak má tvar

$$\begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Transponujeme rovnici (3.48) a dostáváme

$$\mathbf{A}^T - \mathbf{C}\mathbf{L}^T \sim \mathbf{M}$$

Z podobnosti matic plyne

$$\mathbf{A}^T - \mathbf{C}\mathbf{L}^T = \mathbf{X}\mathbf{M}\mathbf{X}^{-1}$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{C}\mathbf{L}^T\mathbf{X} = \mathbf{X}\mathbf{M}$$

Zvolíme  $\mathbf{L}^T\mathbf{X} = \mathbf{H}$  a dostaneme Sylvestrovu maticovou rovnici

$$\mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{C}\mathbf{H} = \mathbf{X}\mathbf{M}$$

Matici  $\mathbf{H}$  můžeme zvolit téměř libovolnou. Zvolili jsme ji jako

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

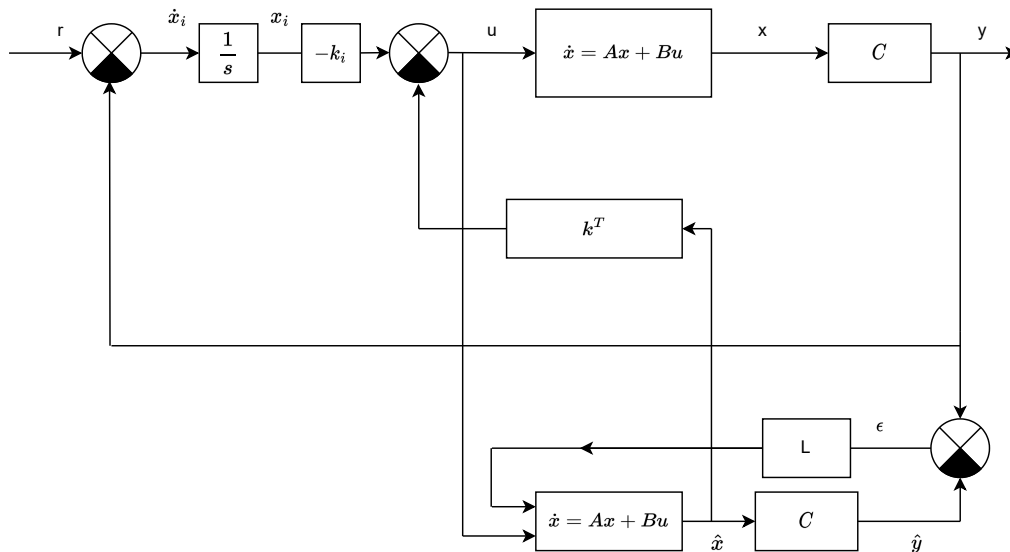
$$\mathbf{A}^T\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{M} - \mathbf{C}\mathbf{H} = 0$$

Pro náhodně zvolené  $\mathbf{H}$  jsme pak schopni spočítat matici  $\mathbf{X}$  příkazem `lyap()`, načež dostaneme transponovanou matici  $\mathbf{L}$ .

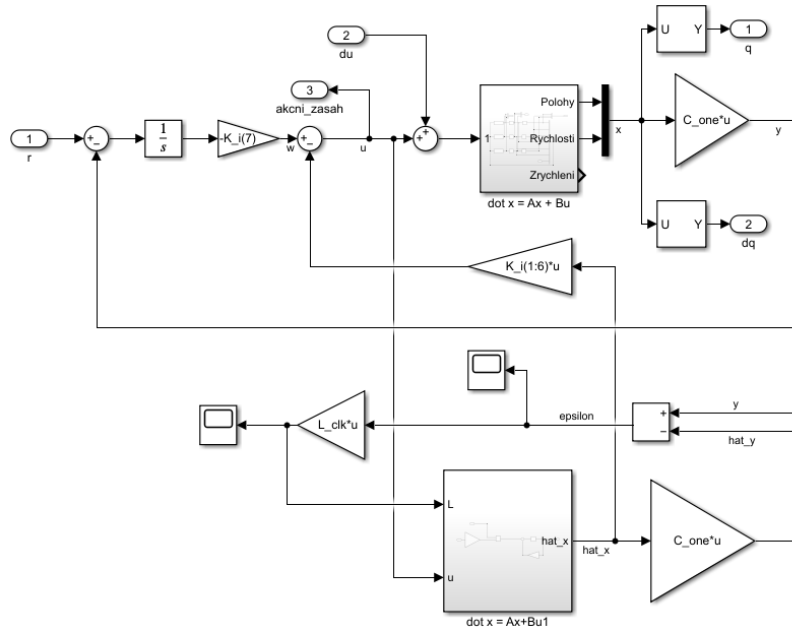
$$\mathbf{L}^T = \mathbf{H}\mathbf{X}^{-1} \quad (3.52)$$

$$L = \begin{pmatrix} 49.275 \\ 965.1628 \\ 219.4852 \\ 727.942 \\ -18491.6487 \\ 18036.1768 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Zpětnou vazbu nyní vedeme nikoli od stavů systému (ty neznáme), nýbrž od výstupů rekonstruktoru stavu. Rekonstruktor implementujeme v Simulinku. Schéma ukazuje obrázek (27) a schéma implementace v Simulinku obrázek (28).



Obrázek 27: Schéma rekonstruktoru stavu



Obrázek 28: Schéma rekonstruktoru stavu v Simulinku

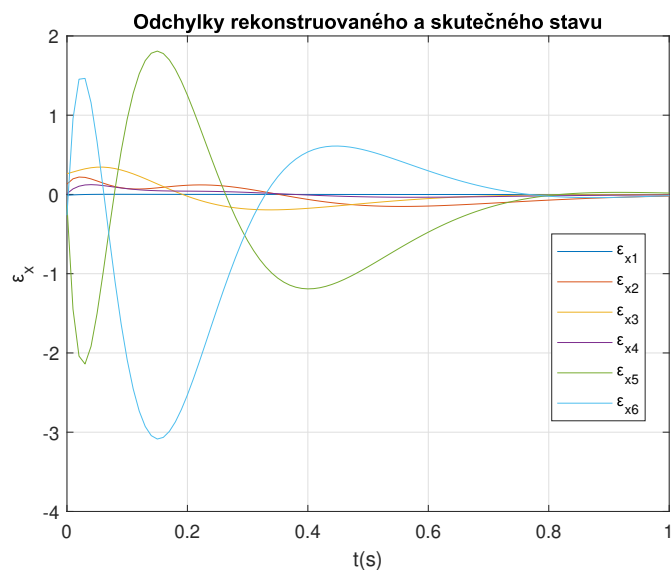
Provedeme simulaci v Simulinku, kdy otestujeme stabilitu rekonstruktoru. Zvolíme jiné počáteční podmínky rekonstruktoru než nelineárního systému, a uvidíme, zda a jak rychle rekonstruktor správně rekonstruuje stav. Pro rekonstruktor budeme vždy volit počáteční stav

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

Stav reálného systému zvolíme trochu jiný, konkrétně

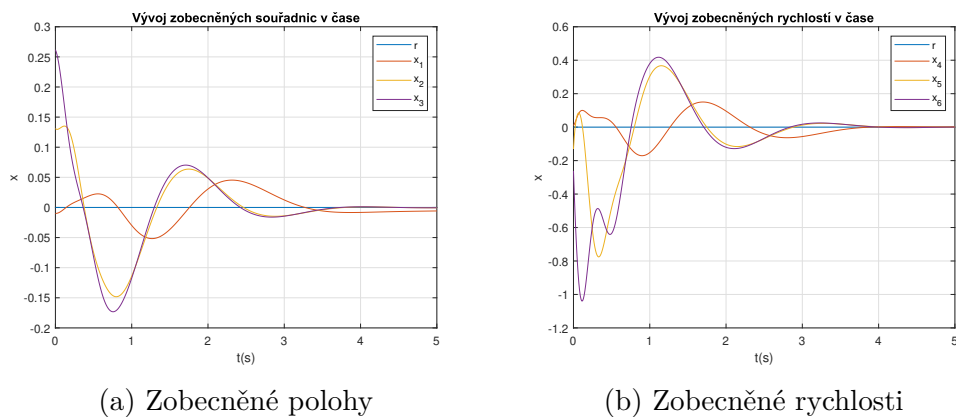
$$\mathbf{x}_{s0} = \begin{pmatrix} -0.01 & \frac{\pi}{24} & \frac{\pi}{12} & 0.01 & -\frac{\pi}{24} & -\frac{\pi}{12} \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

což fyzikálně znamená drobné vychýlení kyvadel napravo a drobné vychýlení vozíku nalevo. Odchytky mezi rekonstruovaným stavem a skutečným stavem označíme  $\epsilon_x$  a vykreslíme (29).



Obrázek 29: Odchylky skutečných a rekonstruovaných stavů

Ačkoliv odchylky jsou ze začátku malé, rekonstruktoru se ihned nepodaří je správně odhalit a odchylky se prudce zvětší. Po jedné sekundě však už rekonstruktor identifikuje stavy správně. Odchylky na začátku jsou pochopitelně nežádoucí, nicméně nepodařilo se nám je více snížit. Vykreslíme ještě průběh stavů reálného systému:



(a) Zobecněné polohy

(b) Zobecněné rychlosti

Obrázek 30: Časový vývoj reálných stavů



Nyní můžeme lépe popsat co se při rekonstrukci odehrávalo. Rekonstruktor systém nejprve vybudil a až pak byl schopen správně rekonstruovat stavy. Regulátoru pak trvalo přibližně 4 sekundy, než systém vrátil do počátečního stavu.

Ačkoli bychom mohli být s rekonstruktorem spokojeni i více, pořád splňuje svůj účel. Od okamžiku, kdy rekonstruktor rekonstruuje stavy správně, můžeme systém úspěšně řídit.

## 4 Simulace v reálném čase

### 4.1 SIL simulace

Strategii řízení, navrženou v minulých kapitolách je potřeba implementovat do podoby použitelné reálnými softwarovými a hardwarovými prostředky. Aplikujeme metodu software-in-the-loop (SIL), kdy model i regulátor otestujeme v simulačním prostředí, nicméně tentokrát již v diskretním čase. Za tímto účelem převedeme náš systém a regulátor do profesionálního softwaru Rexygen, který je v průmyslu používán na řízení reálných zařízení. [15]

Soustavu nejprve diskretizujeme, přičemž jsme zvolili periodu vzorkování  $T = 0.01s$ . Provedeme to v Matlabu příkazem  $c2d(sys,0.01)$ .

Diskretizované matice systému vyšly

$$\mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} 1 & 0.00014393 & 2.661 \cdot 10^{-6} & 0.0099938 & 5.3205 \cdot 10^{-6} & -2.3853 \cdot 10^{-6} \\ 0 & 0.99404 & 0.0047168 & 1.2231 \cdot 10^{-5} & 0.009681 & 0.00021345 \\ 0 & 0.0056602 & 0.99431 & 2.7134 \cdot 10^{-7} & 0.00032745 & 0.0097687 \\ 0 & 0.028463 & 0.00080246 & 0.99875 & 0.0010951 & -0.00046472 \\ 0 & -1.1711 & 0.92426 & 0.0024187 & 0.93538 & 0.043469 \\ 0 & 1.1091 & -1.1175 & 8.1828 \cdot 10^{-5} & 0.06615 & 0.95267 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{pmatrix} 1.2486 \cdot 10^{-5} \\ -2.4462 \cdot 10^{-5} \\ -5.4269 \cdot 10^{-7} \\ 0.0024958 \\ -0.0048374 \\ -0.00016366 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Matice  $\mathbf{C}_d$  je stejná jako její spojitá podoba.

Také jsme převedli rekonstruktor stavu na stavový popis a ten následně diskretizovali s toutéž periodou. Matice dynamiky rekonstruktoru  $\mathbf{A}_{rd}$  je v diskretizované podobě

$$A_{rd} = A - LC^T =$$

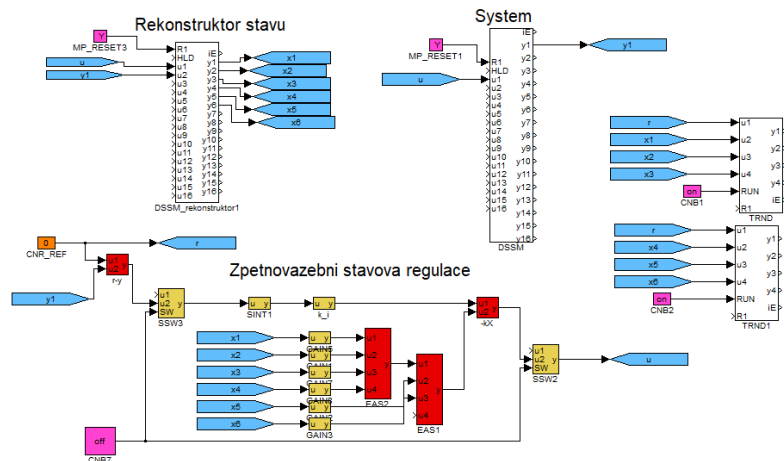
$$\begin{pmatrix} 0.58473 & 0.00012211 & 2.3557 \cdot 10^{-6} & 0.0077953 & 4.5291 \cdot 10^{-6} & -2.0212 \cdot 10^{-6} \\ -6.7582 & 0.99364 & 0.0047112 & -0.038259 & 0.0096668 & 0.00021998 \\ -2.4605 & 0.005547 & 0.99431 & -0.01193 & 0.00032335 & 0.0097706 \\ -5.6727 & 0.028153 & 0.00079808 & 0.96787 & 0.0010838 & -0.00045954 \\ 139.9524 & -1.1633 & 0.92437 & 0.77266 & 0.93566 & 0.043339 \\ -135.5692 & 1.1015 & -1.1176 & -0.74797 & 0.065875 & 0.9528 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Vstupní matice  $B_{rd}$  je pak

$$B_{rd} = \begin{pmatrix} B & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0602 \cdot 10^{-5} & 0.41527 \\ -5.8291 \cdot 10^{-5} & 6.7582 \\ -1.0309 \cdot 10^{-5} & 2.4605 \\ 0.002469 & 5.6727 \\ -0.0041654 & -139.9524 \\ -0.00081714 & 135.5692 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

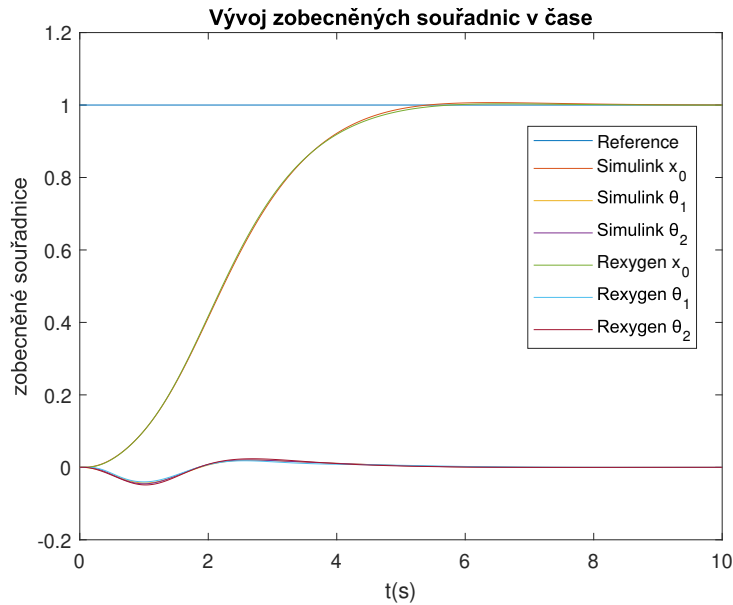
Protože chceme pozorovat všechny výstupy rekonstruktoru, tedy všechny stavy, pak je  $C_{rd} = I$ .

Následně provedeme simulaci a ověříme shodnost simulačních výsledků z Rxygenu a za Matlabu. Schéma zapojení v Rxygenu ukazuje obrázek (31).



Obrázek 31: Schéma soustavy v Rxygenu

V Rexygenu jsme naměřili odezvu na jednotkový skok a data pak načetli v Matlabu, kde jsme je porovnali s odezvou systému. Porovnání můžeme vidět na obrázku (32).



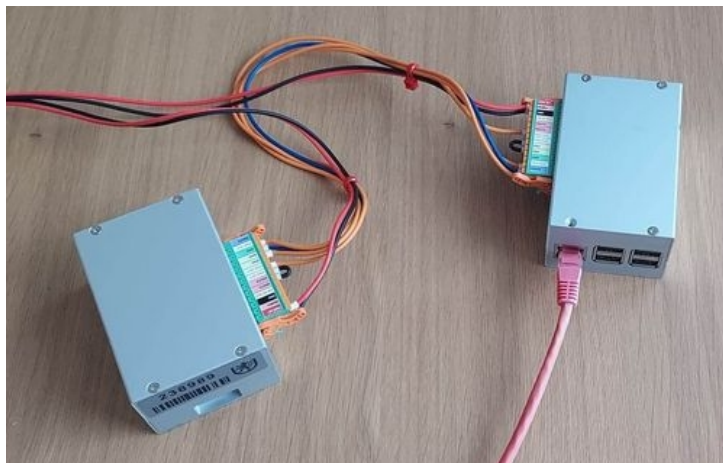
Obrázek 32: Porovnání modelů v Rexygenu a v Simulinku

Odezvy se překrývají, tedy reimplementace v Rexygenu byla úspěšná.

## 4.2 HIL simulace

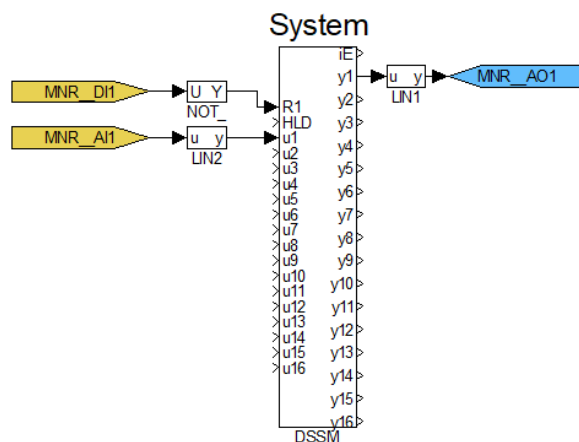
Naším finálním krokem bude Hardware-in-the-loop simulace (HIL), kdy budeme stále pracovat s modelem systému, ten však již bude fungovat na separátním zařízení - Raspberry Pi doplněným o desku Monarco HAT. Regulátor s rekonstruktorem stavu nahrajeme na druhé Raspberry Pi. Monarco umožňuje vytvořit velmi přesnou náhradu průmyslové komunikace, neboť poskytuje možnost komunikace přes vstupně výstupní analogové porty nebo i přes sběrnici pomocí pokročilých komunikačních protokolů. My implementujeme komunikaci, kde budeme výstup systému (poloha vozíku) a výstup regulátoru (akční zásah) reprezentovat analogovým napětím, omezeným na 0-10 V.

Tato simulační technika je vhodná, neboť má již velmi blízko k řízení reálného systému, protože zde zahrnujeme další poruchy jako například šum měření či chyby v přepočtu digitální hodnoty na hodnotu analogovou. [16] Hlavní odlišnost je pouze v použití modelu systému namísto reálného zařízení. Zařízení a jejich propojení ukážeme na obrázku (33).

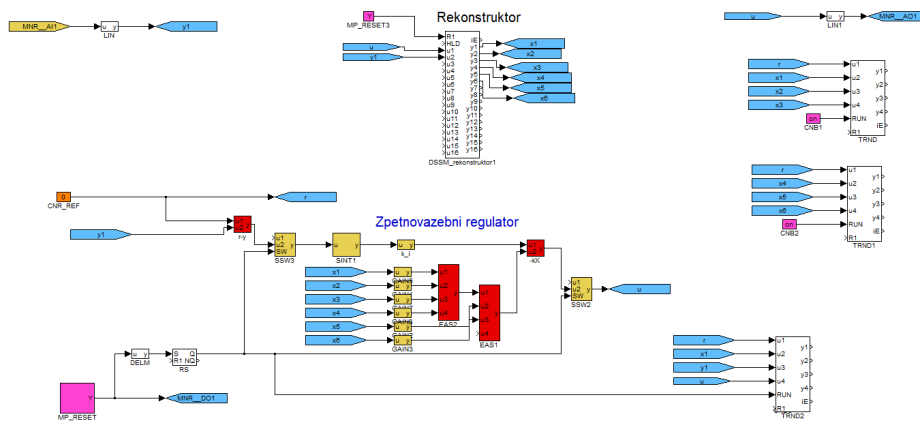


Obrázek 33: Raspberry Pi

V Rxygenu vytvoříme dva separátní programy - systém (34) a regulátor (35).



Obrázek 34: Schéma modelu systému v Rxygenu

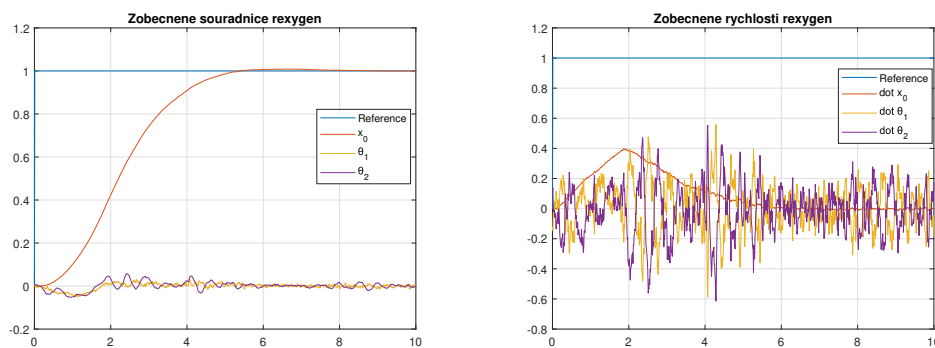


Obrázek 35: Schéma regulátoru v REXYGENU

Jak již bylo řečeno, do systému přichází na vstup analogové napětí 0-10 V, které se lineárně přepočte na akční zásah. Ten jsme omezili na interval  $\langle -5 \text{ N}, 5 \text{ N} \rangle$ , protože při menším omezení byl akční zásah více ovlivňován šumem, což dohánělo systém až do nestability. Výstupem systému je poloha vozíku, kterou jsme z obdobných důvodů omezili na  $\langle -0.2 \text{ m}, 1.2 \text{ m} \rangle$ . Ta se pak přepočte lineárně na napětí 0-10 V. Totožné přepočty probíhají i v druhém programu s regulátorem. Na vstup systému ještě přichází digitální signál, který nám umožňuje v případě potřeby resetovat model.

V dalším kroku nahrajeme programy na cílové zařízení a otestujeme správné chování systému.

Naměříme odezvu odhadu stavů na jednotkový skok (36):



(a) Vývoj odhadu zobecněných souřadnic (b) Vývoj odhadu zobecněných rychlostí

Obrázek 36: Přechodová charakteristika systému v REXYGENU

a ještě vykreslíme akční zásah (37).



Obrázek 37: Akční zásah regulátoru v Rexygenu v reakci na jednotkový skok

Již při letmém pohledu můžeme vidět odlišnost simulace v simulačním prostředí (22) a HIL simulace v reálném čase, z důvodu působení šumu měření. Ten je způsobený komunikací s napěťovou reprezentací signálu. Na základě šumu je pak nesprávně rekonstruován stav a regulátor systém rozkmitává. Pokoušeli jsme se jej minimalizovat filtry a změnou parametrů regulátoru, ale lepšího výsledku jsme nedosáhli. Možným pokusem řešení problému by bylo rozšířit rekonstruktor stavu o model šumu.

Regulace tedy není dokonalá, protože akční zásah drobně budí pohyb ramen kyvadla i po dojezdu vozíku na požadovanou hodnotu. Nicméně, samotný dojezd na požadovanou hodnotu je i v simulaci v reálném čase plynulý a regulátor v tomto duchu splňuje svůj účel.

## 5 Závěr

V kapitole modelování jsme rozebírali různé přístupy vytvoření modelu systému, které jsme následně aplikovali na portálový jeřáb. Nejprve jsme ho modelovali jako dvojitě kyvadlo na vozíku a poté jako sférické kyvadlo. Oba modely jsme vytvořili různými způsoby: ručním odvozením matematicko-fyzikálním modelováním pomocí Lagrangeovy metody, dále softwarovým odvozením opět vycházejícím z Lagrangeovy metody a nakonec jsme sestavili model v Simscapu. Porovnáním odezev jsme zjistili, že jsou modely ekvivalentní. V případě modelu sférického kyvadla jsme se však potýkali s problémy pramenícími z nejednoznačnosti reprezentace prostorové rotace, přičemž vyřešení tohoto problému by příliš zkomplikovalo model, a proto jsme dále analyzovali pouze model rovinného kyvadla.

V kapitole řízení modelu jsme zvolili metodu řízení stavovou zpětnou vazbou, kterou jsme navrhli pomocí LQR kritéria. Vzhledem k absenci měření stavu jsme museli navrhnout též rekonstruktor stavu. Chování řízené soustavy jsme poté experimentálně ověřili v simulačním prostředí.

V poslední kapitole jsme pak model systému a regulátor implementovali na dvou separátních zařízeních Raspberry Pi doplněných o desku Monarco HAT, které mezi sebou komunikovaly napětovými analogovými signály. Podařilo se nám dosáhnout podobného chování soustavy jako v simulačním prostředí až na narušení signálu šumem.

Na práci lze do budoucna navázat kombinovaným řízením pomocí zpětné a dopředné vazby, kde dopředná vazba bude obsahovat tvarovací filtr. Dalším krokem pak může být řízení samotného reálného systému.



## Reference

- [1] Jindřich Duník. *Identifikace systémů a filtrace*. <https://dspace5.zcu.cz/handle/11025/29322>, 2018. Naposledy navštíveno 24. 4. 2023.
- [2] Rolf Isermann. Modeling and design methodology for mechatronic systems. *IEEE/ASME Transactions on mechatronics*, 1(1):16–28, 1996.
- [3] Richard C Dorf Robert H Bishop. *Modern control systems*. 2011. 13. edice.
- [4] Martin Goubelj, Martin Švejda, and Miloš Schlegel. *Úvod do mechatroniky, robotiky a systémů řízení pohybu (učební text)*. <https://home.zcu.cz/~msvejda/URM/materialy>, 2012. Naposledy navštíveno 24. 4. 2023, neveřejný materiál.
- [5] HoistZone. *Gantry crane*. <https://hoistzone.com/shop/gantry-crane>. Naposledy navštíveno 6. 5. 2023.
- [6] Václav Helma and Martin Goubelj. Active anti-sway crane control using partial state feedback from inertial sensor. In *2021 23rd International Conference on Process Control (PC)*, pages 137–142, 2021.
- [7] MathWorks. Matlab. <https://ch.mathworks.com/products/matlab.html>. version R2022a.
- [8] Maplesoft. Maple. <https://www.maplesoft.com>. version Maple 2021.
- [9] Petr Kulhánek. *Teoretická mechanika: Studijní text*. <https://www.aldebaran.cz/studium/>, 2016. Naposledy navštíveno 7. 5. 2023.
- [10] Jana Königsmarková and Miloš Schlegel. Identification of n-link inverted pendulum on a cart. In *2017 21st International Conference on Process Control (PC)*, pages 42–47, 2017.
- [11] Martin Goubelj and Jiří Melichar. *Linerání systémy 1* učební text). <https://courseware.zcu.cz/portal/studium/courseware/kky/ls1/prednasky.html>, 2017. Naposledy navštíveno 24. 4. 2023, neveřejný materiál.

- [12] Martin Goubej and Jiří Melichar. *Linerání systémy 2* (učební text). <https://courseware.zcu.cz/portal/studium/courseware/kky/ls2/prednasky.html>, 2019. Naposledy navštíveno 24. 4. 2023, neveřejný materiál.
- [13] Martin Goubej, Miloš Schlegel, and Tomsáš Vyhliđal. Robust controller design for feedback architectures with signal shapers. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):8650–8655, 2020. 21st IFAC World Congress.
- [14] Miloš Schlegel. *LQR regulátor, doplňující text k předmětu PS*, 2004. Neveřejný materiál.
- [15] REX Controls. Rxygen. <https://www.rexygen.com/>. version 2.50.10.12481.
- [16] Jaroslav Sobota, Martin Goubej, Jana Königsmarková, and Martin Čech. Raspberry pi-based hil simulators for control education. *IFAC-PapersOnLine*, 52(9):68–73, 2019.

## Příloha A Vyjádření zobecněných zrychlení

$$\ddot{x}_0 = \frac{A}{B}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} A = & 2l_1 l_2 m_1 f(t) + l_1 l_2 m_2 f(t) + g l_1 l_2 m_1^2 \sin(2\theta_1(t)) - b_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \\ & - b_2 l_2 m_2 \cos(\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + b_2 l_2 m_2 \cos(\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + 2b_1 l_2 m_1 \cos(\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \\ & + b_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - b_2 l_1 m_1 \cos(\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + 2b_2 l_2 m_1 \cos(\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + b_2 l_1 m_1 \cos(\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \\ & - b_2 l_1 m_2 \cos(\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - 2b_2 l_2 m_1 \cos(\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + b_2 l_2 m_2 \cos(\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + b_2 l_1 m_2 \cos(\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \\ & - b_2 l_2 m_2 \cos(\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + b_2 l_1 m_1 \cos(2\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - b_2 l_1 m_1 \cos(2\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \\ & + b_2 l_1 m_2 \cos(2\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - b_2 l_1 m_2 \cos(2\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) - 2b_0 l_1 l_2 m_1 \frac{\partial}{\partial t} x_0(t) - b_0 l_1 l_2 m_2 \frac{\partial}{\partial t} x_0(t) \\ & - l_1 l_2 m_2 \cos(2\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) f(t) + 2l_1^2 l_2 m_1^2 \sin(\theta_1(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \right)^2 + b_0 l_1 l_2 m_2 \cos(2\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} x_0(t) \\ & + g l_1 l_2 m_1 m_2 \sin(2\theta_1(t)) + 2l_1^2 l_2 m_1 m_2 \sin(\theta_1(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \right)^2 \\ & + l_1 l_2^2 m_1 m_2 \sin(\theta_2(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \right)^2 + l_1 l_2^2 m_1 m_2 \sin(2\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \right)^2 \end{aligned}$$

$$B = l_1 l_2 (2m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2 - m_1^2 \cos(2\theta_1(t)) - m_0 m_2 \cos(2\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) - m_1 m_2 \cos(2\theta_1(t)))$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{C}{D}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} C = & -(2b_1 l_2 m_0 \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + 2b_1 l_2 m_1 \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + 2b_2 l_2 m_0 \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + b_1 l_2 m_2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - 2b_2 l_2 m_0 \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + 2b_2 l_2 m_1 \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \\ & - 2b_2 l_2 m_1 \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + b_2 l_2 m_2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - b_2 l_2 m_2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) - b_1 l_2 m_2 \cos(2\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - b_2 l_2 m_2 \cos(2\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \\ & + b_2 l_2 m_2 \cos(2\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + l_1^2 l_2 m_1^2 \sin(2\theta_1(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \right)^2 + 2b_2 l_1 m_0 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \\ & - 2b_2 l_1 m_0 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + b_2 l_1 m_1 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - b_2 l_1 m_1 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \\ & + b_2 l_1 m_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - b_2 l_1 m_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) - l_1 l_2 m_2 f(t) \cos(\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \\ & + 2g l_1 l_2 m_1^2 \sin(\theta_1(t)) + 2l_1 l_2 m_1 \cos(\theta_1(t)) f(t) + l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1(t)) f(t) - b_2 l_1 m_1 \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \\ & + b_2 l_1 m_1 \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) - b_2 l_1 m_2 \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + b_2 l_1 m_2 \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \\ & - 2b_0 l_1 l_2 m_1 \cos(\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} x_0(t) - b_0 l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} x_0(t) + l_1 l_2^2 m_1 m_2 \sin(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + l_1^2 l_2 m_1 m_2 \sin(2\theta_1(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \right)^2 + g l_1 l_2 m_0 m_2 \sin(\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) + 2 l_1 l_2^2 m_0 m_2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \right)^2 \\
& + l_1 l_2^2 m_1 m_2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \right)^2 + b_0 l_1 l_2 m_2 \cos(\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} x_0(t) + 2 g l_1 l_2 m_0 m_1 \sin(\theta_1(t)) \\
& + g l_1 l_2 m_0 m_2 \sin(\theta_1(t)) + 2 g l_1 l_2 m_1 m_2 \sin(\theta_1(t)) + l_1^2 l_2 m_0 m_2 \sin(2\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \right)^2 \\
D = & l_1^2 l_2 (2 m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2 - m_1^2 \cos(2\theta_1(t)) - m_0 m_2 \cos(2\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) - m_1 m_2 \cos(2\theta_1(t))) \\
& \ddot{\theta}_2 = \frac{E}{F}, \text{ kde} \\
E = & b_2 l_1 m_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - b_2 l_1 m_1^2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + b_2 l_1 m_2^2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - b_2 l_1 m_2^2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) - l_1 l_2 m_2^2 \cos(\theta_2(t)) f(t) \\
& + l_1 l_2 m_2^2 \cos(2\theta_1(t) - \theta_2(t)) f(t) - b_1 l_2 m_2^2 \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - b_2 l_2 m_2^2 \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \\
& + b_2 l_2 m_2^2 \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) - b_2 l_1 m_1^2 \cos(2\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + b_2 l_1 m_1^2 \cos(2\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \\
& - b_2 l_1 m_2^2 \cos(2\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + b_2 l_1 m_2^2 \cos(2\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + b_1 l_2 m_2^2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \\
& + b_2 l_2 m_2^2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - b_2 l_2 m_2^2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + 2 b_2 l_1 m_0 m_1 \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \\
& - 2 b_2 l_1 m_0 m_1 \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + 2 b_2 l_1 m_0 m_2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - 2 b_2 l_1 m_0 m_2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + 2 b_2 l_1 m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - 2 b_2 l_1 m_1 m_2 \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \\
& - g l_1 l_2 m_0 m_2^2 \sin(\theta_2(t)) - l_1 l_2 m_1 m_2 \cos(\theta_2(t)) f(t) + g l_1 l_2 m_0 m_2^2 \sin(2\theta_1(t) - \theta_2(t)) \\
& + l_1 l_2 m_1 m_2 \cos(2\theta_1(t) - \theta_2(t)) f(t) + l_1 l_2^2 m_0 m_2^2 \sin(2\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \right)^2 \\
& - b_1 l_2 m_1 m_2 \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - b_2 l_2 m_1 m_2 \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + b_2 l_2 m_1 m_2 \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) \\
& - 2 b_2 l_1 m_1 m_2 \cos(2\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + 2 b_2 l_1 m_1 m_2 \cos(2\theta_1(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + b_0 l_1 l_2 m_2^2 \cos(\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} x_0(t) \\
& - b_0 l_1 l_2 m_2^2 \cos(2\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} x_0(t) + 2 b_1 l_2 m_0 m_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) + b_1 l_2 m_1 m_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \\
& + 2 b_2 l_2 m_0 m_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) - 2 b_2 l_2 m_0 m_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + b_2 l_2 m_1 m_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \\
& - b_2 l_2 m_1 m_2 \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} \theta_2(t) + 2 l_1^2 l_2 m_0 m_2^2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \right)^2 \\
& + 2 l_1^2 l_2 m_0 m_1 m_2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta_1(t) \right)^2 - g l_1 l_2 m_0 m_1 m_2 \sin(\theta_2(t)) + g l_1 l_2 m_0 m_1 m_2 \sin(2\theta_1(t) - \theta_2(t)) \\
& + b_0 l_1 l_2 m_1 m_2 \cos(\theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} x_0(t) - b_0 l_1 l_2 m_1 m_2 \cos(2\theta_1(t) - \theta_2(t)) \frac{\partial}{\partial t} x_0(t) \\
F = & l_1 l_2^2 m_2 (2 m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2 + m_1^2 - m_1^2 \cos(2\theta_1(t)) - m_0 m_2 \cos(2\theta_1(t) - 2\theta_2(t)) - m_1 m_2 \cos(2\theta_1(t)))
\end{aligned}$$