Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta pedagogická

katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

KVADRATICKÉ FORMY A JEJICH VYUŽITÍ PRO ZJIŠŤOVÁNÍ EXTRÉMŮ

Diplomová práce

Plzeň, 2012 Bc. Šárka Matuchová

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni dne ....

……………………...

vlastnoruční podpis

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucímu mé diplomové práce Doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za cenné připomínky a čas strávený konzultacemi nad teoretickou i praktickou částí práce.

Obsah

Úvod

V průběhu studia učitelství matematiky jsme se seznámili, i když často v redukované podobě, s pojmy jako stacionární bod, nutné a postačující podmínky pro existenci lokálního extrému a v oblasti lineární algebry jsme pracovali s maticemi, poznali jsme pojem kvadratická forma a jejich třídění na formy pozitivně či negativně (semi)definitní či indefinitní.

Vše ale bylo probíráno v časové tísni a ve značně zjednodušené podobě. To je vcelku pochopitelné, protože ani neexistuje zcela přímá souvislost této látky s učivem matematiky probíraným na základní škole. Tato diplomová práce se pokouší o jisté „ohlédnutí se“ zpět. Připomeneme si, jak se hledají lokální extrémy funkcí jedné reálné proměnné. Víme, že je nutné studovat jak body, v nichž derivace funkce neexistuje, tak i body, v nichž je rovna nule. Vzhledem k tomu, že v prvním případě je často zapotřebí rozhodovat o existenci extrému přímo s využitím jeho definice, je v této diplomové práci studována prakticky výhradně druhá situace, tj. ta, kdy je první derivace rovna nule. Obdobně u funkcí více reálných proměnných se soustřeďujeme na funkce mající v okolí stacionárního bodu spojité parciální derivace druhého řádu. Tyto předpoklady nám umožní zapojit celou další teorii pro existenci lokálního extrému, využívající pojmy z lineární algebry jako jsou kvadratické formy, matice formy, diskriminant formy či hlavní subdeterminanty. Dostaneme se k otázce, kdy je např. matice kvadratické formy *A* pozitivně definitní. Uvidíme, že je možné k rozhodnutí této otázky využít tzv. vlastní čísla matice, ale uvědomíme si, že jejich výpočet bez pomoci výpočetní techniky je často obtížný.

Chceme si ujasnit, jak vzniká toto pozoruhodné propojení matematické analýzy a lineární algebry. Ukazuje se také, že v případě reálné funkce jedné reálné proměnné je o existenci lokálního extrému ve stacionárním většinou možné snadno rozhodnout mj. pomocí znaménka druhé derivace. Jediný případ, kdy nastávají jisté potíže, tj. $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0$, je „vzácný“. V případě stacionárních bodů funkcí více reálných proměnných jsou tzv. sedlové body, tj. stacionární body, v nichž lokální extrém nenastává, mnohem častější, jak je i vidět z řešených příkladů. Proto je rozhodování o charakteru formy, které musíme provádět, nezbytnou součástí řešení.

V závěru práce se pak zmiňuji o hledání tzv. vázaných extrémů (metoda Lagrangeových multiplikátorů) a o hledání extrémů funkce více proměnných spojité na uzavřené oblasti.

1. Lokální extrémy funkce jedné proměnné

Úvodním tématem problematiky je vysvětlení toho, jak se hledají extrémy u funkcí jedné proměnné. Výklad je vhodné navázat vysvětlením řešení stejného problému u funkcí více proměnných.

Nejprve definujeme různé typy extrémů funkce jedné proměnné.

Definice 1.1.

Nechť je funkce *f* definována na okolí bodu *a*. Řekneme, že tato funkce má v bodě *a*

lokální maximum $\Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta,\ a+\delta):\ f(x) \leq f(a)$;

ostré lokální maximum $\Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta,\ a) \cup (a,\ a+\delta):\ f(x) < f(a)$;

lokální minimum $\Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta,\ a+\delta):\ f(x) \geq f(a)$;

ostré lokální minimum $\Leftrightarrow \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta,\ a) \cup (a,\ a+\delta):\ f(x) > f(a)$.

Lokální maximum a lokální minimum nazýváme souhrnně lokálními extrémy, ostré lokální maximum a ostré lokální minimum ostrými lokálními extrémy.

Důležité je uvést nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému, kterou popíši v následující větě.

Věta 1. 1.

Nechť má funkce *f* v bodě *a* první derivaci. Má–li *f* v bodě *a* lokální extrém, je nutně tato derivace nulová.

Občas ale dochází k situacím, kdy nutná podmínka splněna je a přesto lokální extrém nenastává, proto je nutné uvést postačující podmínku pro existenci lokálního extrému.

Věta 1. 2.

Nechť má funkce f v bodě a první a druhou derivaci. Je-li první derivace nulová a druhá derivace nenulová, má funkce f v bodě a ostrý lokální extrém. Je-li $f^{n}(a) < 0$, jedná se o lokální maximum, je-li $f^{n}(a) > 0$, jedná se o lokální minimum.

Poznámka 1. 1.

Předcházející dvě věty nám poskytují návod, jak lokální extrémy reálných funkcí jedné reálné proměnné hledat.

- *Nejdříve nalezneme body možného výskytu lokálních extrémů řešením rovnice* $f'(x) = 0.$
- *V každém z takto nalezených bodů určíme dále znaménko druhé derivace.*
- *Je-li druhá derivace kladná, nabývá studovaná funkce v tomto bodě svého lokálního minima.*
- *Je-li druhá derivace záporná, nabývá studovaná funkce v tomto bodě svého lokálního maxima.*

Poznámka 1. 2.

Pokud je však současně nulová první i druhá derivace, nemůžeme o chování funkce poblíž takového bodu na základě výše uvedených vět říci nic a museli bychom použít větu obecnější, takzvanou silnější postačující podmínku pro existenci ostrého lokálního extrému.

Věta 1. 3.

Platí-li $f'(a) = f^{n}(a) = ... = f^{(n)}(a) = 0$ a $f^{(n+1)}(a) \neq 0$, kde n je liché a nabývá funkce f v bodě a lokálního extrému: pro $f^{(n+1)}(a) > 0$ lokálního minima a pro $f^{(n+1)}(a) < 0$ lokálního maxima. Je-li naopak n sudé, nemá funkce f v bodě a žádný lokální extrém.

Poznámka 1. 3.

Připomeňme, že ve shodě s tím, co jsme řekli v úvodu k této DP, nebudeme studovat případy, kdy v jistém bodě a derivace f neexistuje. V nich je obvykle nutné využít definice extrému k rozhodnutí, zda v daném bodě extrém nastává či nikoli.

Poznamenejme dále, že může nastat situace, kdy $f'(a) = 0$, ale nelze aplikovat větu 1 . 2. např. z toho důvodu, že druhá derivace funkce f v okolí bodu a neexistuje. Může nám pomoci první derivace funkce f v případě, že v okolí bodu a mění znaménko.

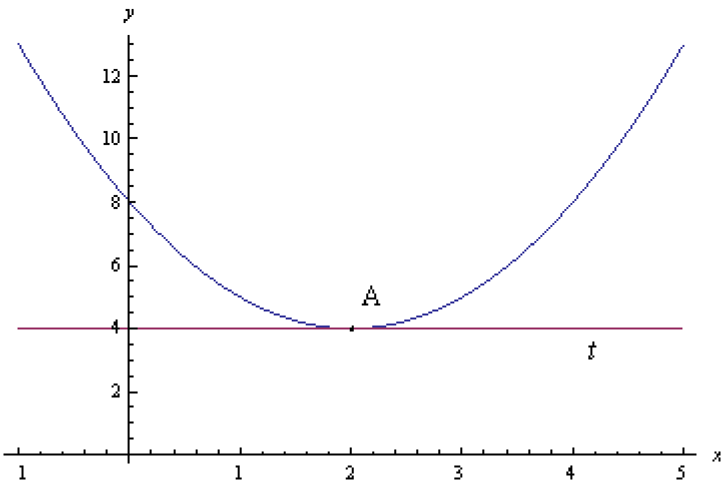
Věta 1. 4.

Nechť platí $f'(a) = 0$.

a) Existuje-li takové okolí O bodu *a*, že pro každé $x \neq a$ platí $f'(a) > 0$, je funkce *f* v bodě *a* rostoucí.

b) Existuje-li takové okolí O bodu *a*, že pro každé $x \neq a$ platí $f'(a) < 0$, je funkce *f* v bodě *a* klesající.

V souvislosti s tím, co budeme studovat v další části této diplomové práce, pro nás bude nejdůležitější situace z věty 1. 2. Situaci z této věty si snadno zapamatujeme, viz např. obr. 1.1. Vidíme, že v bodě $a = 2$ má funkce $y = f(x)$ nulovou první a kladnou druhou derivaci, tj. v bodě $a = 2$ nastává ostré lokální minimum. Obdobně funkce $g(x) = x^2$ má v bodě $a = 0$ ostré lokální minimum opět podle věty 1. 2.



Obrázek 1.1: Extrém funkce jedné proměnné

Aby tedy větu 1. 2. nebylo možné ve stacionárním bodě *a* (tj. v bodě, kde $f'(a) = 0$) použít, je nutné „zařídit“, aby i $f''(a) = 0$. To sice lze, ale jde o případ relativně „vzácný“. Kdyby tato situace nebyla „připravována“ autory sbírek příkladů, zřejmě by „vítězila“ situace, kdy je buď $f^n(a) < 0$ nebo $f^n(a) > 0$ a kdy tedy nastává extrém. Uvidíme, jak se situace změní v případě funkcí více reálných proměnných.

2. Lokální extrémy funkce dvou proměnných

Nejprve se budeme zabývat funkcemi dvou proměnných, kde je oproti obecnému případu funkce n proměnných situace poněkud jednodušší, zejména pokud jde o postačující podmínky existence lokálních extrémů. V další části práce (kapitola 6) poté budeme řešit obecný případ funkce n proměnných, kde využijeme souvislosti s tzv. kvadratickými formami. Pro lepší pochopení zde bude uvedeno grafické znázornění.

Definice 2. 1.

Nechť $f(x,y)$ je funkce dvou proměnných a bod $(x_0, y_0) \in D(f)$.

a) Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) lokální maximum, jestliže existuje okolí $O(x_0, y_0)$ takové, že pro každé $(x,y) \in O(x_0, y_0)$ platí $f(x,y) \le f(x_0, y_0)$.

b) Řekneme, že funkce f má v bodě (x_0, y_0) lokální minimum, jestliže existuje okolí $O(x_0, y_0)$ takové, že pro každé $(x,y) \in O(x_0, y_0)$ platí $f(x,y) \ge f(x_0, y_0)$.

Jestliže pro $(x,y) \ne (x_0, y_0)$ jsou předchozí nerovnosti ostré, mluvíme o ostrém lokálním maximu respektive minimu. Společný název pro (ostré) lokální maximum a minimum je (ostrý) lokální extrém.

Jako u hledání lokálních extrémů funkcí jedné proměnné, je také zde důležité najít nutnou podmínku pro existenci lokálních extrému funkcí dvou proměnných.

Věta 2. 1.

Nechť funkce f má v bodě $(x_0,\ y_0)$ lokální extrém. Pak platí:

a) Parciální derivace $f_x(x_0, y_0)$ buď neexistuje, nebo je $f_x(x_0, y_0) = 0$.

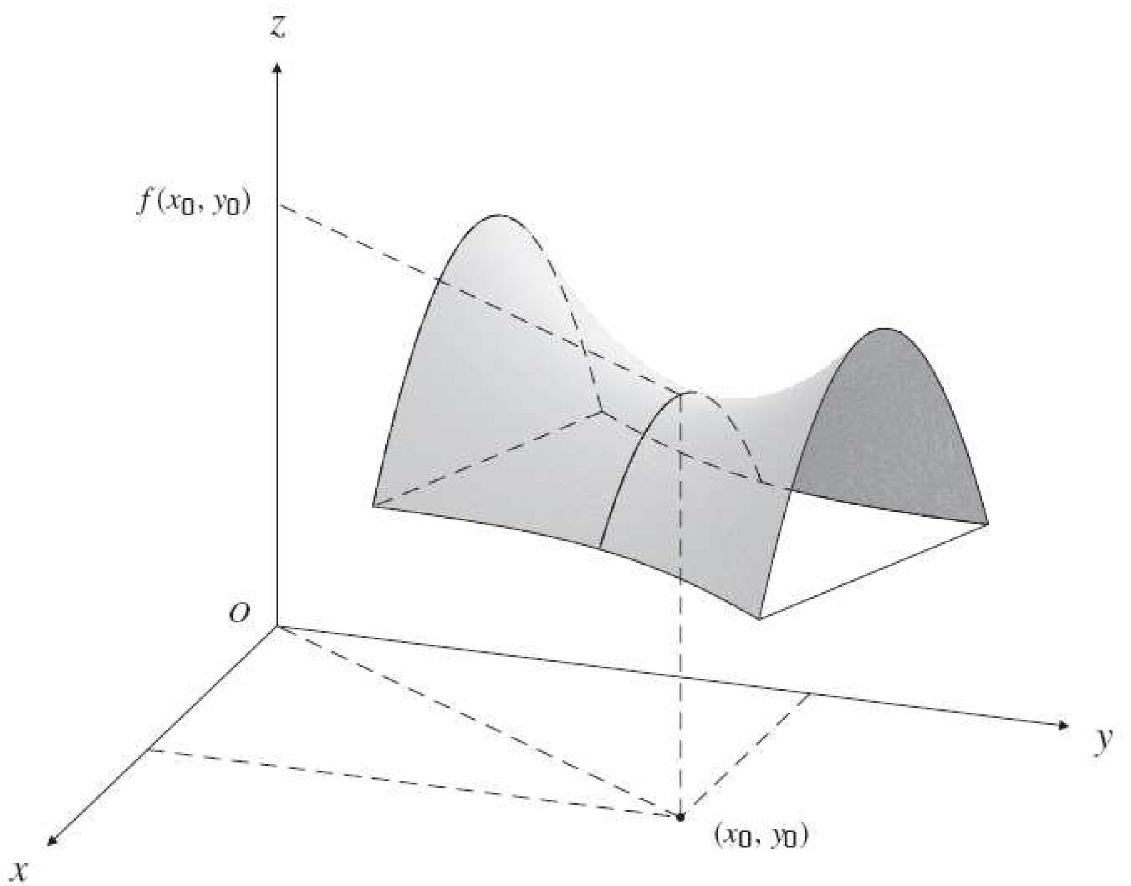
b) Parciální derivace $f_y(x_0, y_0)$ buď neexistuje, nebo je $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Důkaz 2. 1.

Předpokládejme, že některá z parciálních derivací funkce f v bodě $(x_0,\ y_0)$ je nenulová. Uvažujme, že platí například $f_x(x_0, y_0) \ne 0$. To vzhledem k definici parciální derivace znamená, že funkce $f(t) = f(x_0 + t \cdot e, y_0)$, kde $e = (0,\ 1)$, má nenulovou derivaci v bodě $t = 0$ a tedy nemůže zde mít lokální extrém. To však znamená, že ani funkce f nemůže mít v bodě (x_0, y_0) lokální extrém. Analogicky by se dokázalo i pro případ, že by platilo $f_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Poznámka 2. 1.

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ může mít lokální extrém pouze ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje. Stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému. Je tomu tak například u funkce $f(x, y) = f(x_0, y_0) + (y - y_0)^2 - (x - x_0)^2$, která má stacionární bod (x_0, y_0), avšak v tomto bodě nemá lokální extrém (takový bod se nazývá *sedlo*).



Obrázek 2.1: Stacionární bod typu sedlo

Definice 2. 2.

Řekneme, že bod $(x_0,\ y_0)$ je *stacionárním bodem* funkce f , jestliže platí $f_x(x_0,\ y_0) = 0$ a $f_y(x_0,\ y_0) = 0$.

Důsledek 2. 1.

Nechť funkce *f* má v bodě $(x_0,\ y_0)$, v němž existují první parciální derivace funkce *f*, lokální extrém. Pak $(x_0,\ y_0)$ je stacionární bod.

Ve stacionárním bodě extrém může být, ale nemusí, jak ukazuje obrázek 2.1. Na něm je znázorněn graf funkce $f : z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2$, která má stacionární bod $(x_0,\ y_0)$, avšak v tomto bodě není lokální extrém (takový bod se nazývá *sedlo*).

Nyní krátce připomeneme tzv. Taylorův polynom. Seznámili jsme se s ním při studiu funkcí jedné reálné proměnné.

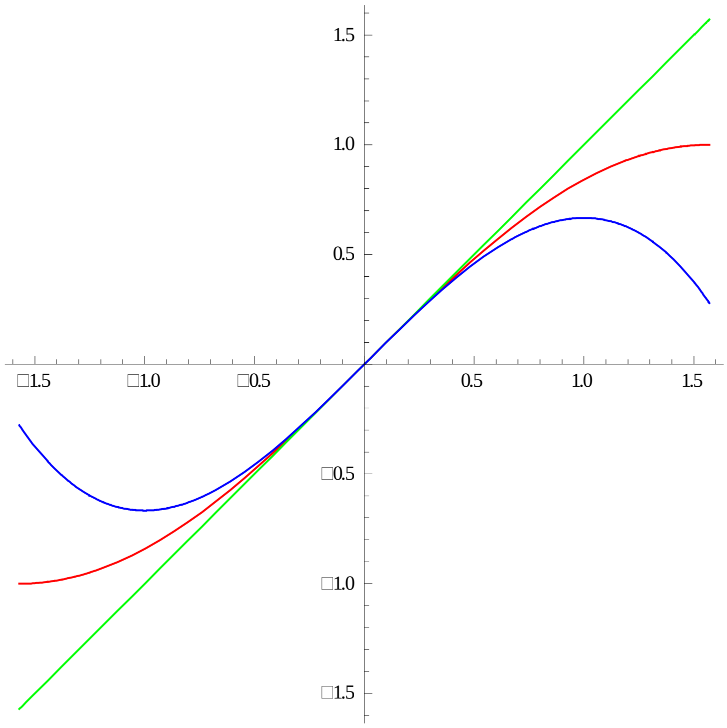
Nechť funkce *f* má v bodě x_0 vlastní derivace až do řádu *n* – tého, $n \varnothing$ N. Polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se nazývá Taylorův polynom stupně *n* funkce *f* v bodě x_0. Víme, že právě popsaný polynom je jediným polynomem stupně *n*, který má s funkcí *f* společnou funkční hodnotu v bodě x_0 a prvních *n* derivací.

Příklad 2.1.

Pro funkci $f(x) = \sin x$ je $T_1(x) = x$, $T_2(x) = x - \frac{x^3}{3}$. Vidíme, že druhý Taylorův polynom $T_2(x) = x - \frac{x^3}{3}$ již představuje dobrou aproximaci funkce $f(x) = \sin x$ v „malém“ okolí počátku.



Obrázek 2.2: Taylorův polynom

Stejnou koncepci bychom rádi přijali pro posuzování lokálních extrémů nejprve u funkce dvou reálných proměnných a pak i pro funkce více reálných proměnných. Za předpokladu spojitosti druhých parciálních derivací funkce $z = f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) a jeho okolí lze zapsat druhý Taylorův polynom ve tvaru

$$T_2(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) .h + f_y(x_0, y_0) . k + \frac{1}{2!}\left(f_{xx}(x_0, y_0). h^2 + 2 f_{xy}(x_0, y_0). h.k + f_{yy}(x_0, y_0). k^2 \right).$$

Celková strategie tedy je, že pro posuzování chování funkce $z = f(x, y)$ ve stacionárním bodě (x_0, y_0) hledíme využít nikoli přímo funkci samu, ale její Taylorův mnohočlen v právě uvedeném tvaru nebo v ekvivalentním tvaru. Využíváme přitom opět faktu, že Taylorův mnohočlen je velice dobrou aproximací funkce $z = f(x, y)$ v okolí bodu (x_0, y_0).

Stejně jako u funkce jedné proměnné, musíme uvést postačující podmínku pro existenci lokálního extrému funkcí dvou proměnných.

Věta 2. 2.

Nechť funkce f má v bodě (x_0, y_0) a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť (x_0, y_0) je její stacionární bod.

Označme

$$D(x,y)=\begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y) - f_{xy}^2(x,y).$$

Pak platí:

1) Jestliže je $D=(x_0,y_0)\ >\ 0$, nemá být všude, tj. i v dalších řádcích $D(x_0,y_0)$? je v bodě (x_0,y_0) ostrý lokální extrém.

Je-li $f_{xx}(x_0,y_0)\ >\ 0$, jedná se o minimum, je-li $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, jedná se o maximum.

2) Jestliže je $D=(x_0,y_0) < 0$, není v bodě (x_0,y_0) lokální extrém.
3) Jestliže je $D=(x_0,y_0)=0$, nedává věta odpověď (extrém zde může být, ale nemusí).

Poznámka 2.2.

$f_{x\,x}$, $f_{y\,y}$ je označení pro druhou parciální derivaci podle *x*, *y*.

Důkaz 2.2. (Důkaz věty 2.2.)

Nechť $D=(x_0,y_0)\neq 0$. Ze spojitosti parciálních derivací 2. řádu funkce *f* plyne spojitost funkce $D(x,y)=f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y)-\left[\,f_{xy}(x,y\right]^2$ a funkce $f_{x\,x}$ v bodě (x_0,y_0). Odtud plyne, že pro body $(x,\ y)$ dostatečně blízké bodu (x_0,y_0) platí:

$$\operatorname{sgn} D(x,y)=\operatorname{sgn} D(x_0,y_0),\quad \operatorname{sgn}\ f_{xx}(x,y)=\operatorname{sgn}\ f_{xx}(x_0,y_0).$$

Taylorův vzorec pro *n* = 1 se středem v (x_0,y_0) dává

$$f(x,y)=\ f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\left[\,f_{xx}(c_1,c_2)(x-x_0)^2+2\,f_{xy}(c_1,c_2)(x-x_0)(y-y_0)+\,f_{yy}(c_1,c_2)(y-y_0)^2\,\right],\qquad \textbf{(1.1)}$$

kde (c_1,c_2) leží na úsečce spojující (x_0,y_0) a (*x*, *y*).

Označme $A=\ f_{xx}(c_1,c_2), B=\ f_{xy}(c_1,c_2), C=\ f_{yy}(c_1,c_2), h=x-x_0, k=\ y-y_0$ a uvažujme kvadratický polynom dvou proměnných $P(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2$.

Pak můžeme vztah (1.1) můžeme psát ve tvaru:

$$f(x_0+h,y_0+k)=\ f(x_0,y_0)+P(h,k).\qquad \textbf{(1.2)}$$

Vyšetřeme nyní znaménko polynomu *P*(*h*, *k*). Uvažujeme dva příklady:

I. $D(x_0, y_0) > 0$: Pro $k = 0$ je $P(h,k) = Ah^2$, přičemž $A \neq 0$ (plyne ze vztahu $AC - B^2 > 0$). Proto $P(h,\ 0) > 0$ pro $A > 0$, $P\ (h, 0) < 0$ pro $A < 0$. Pro $k \neq 0$ lze $P(h,\ k)$ psát ve tvaru $P(h,k) = k^2\left(A\left(\dfrac{h}{k}\right)^2 + 2B\dfrac{h}{k} + C \right)$. Označme $Q(t) = At^2 + 2Bt + C$, kde $t = \dfrac{h}{k}$.

Jelikož $AC - B^2 > 0$, tj. Q má záporný diskriminant, je pro $A > 0$ polynom $Q(t) > 0$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$ a odtud $P(h,k) > 0$ pro všechna $h,k \in \mathbb{R}$. Podobně v případě $A < 0$ je $P(h,k) < 0$. To podle (1.2) znamená, že pro $A > 0$ má funkce f v (x_0, y_0) ostré lokální minimum a pro $A < 0$ ostré lokální maximum.

II. $D(x_0, y_0) < 0$, tj. diskriminant polynomu $Q(t)$ je kladný. To znamená, že existují $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ taková, že $Q(t_1) > 0$ a $Q(t_2) < 0$. Položme $[h_1, k_1] = [\alpha t_1, \alpha]$, $[h_2, k_2] = [\alpha t_2, \alpha]$, kde $\alpha \neq 0$. Pak $P(h_1, k_1) = \alpha^2 Q(t_1)$, $P(h_2, k_2) = \alpha^2 Q(t_2)$, tj. pro

$$(x_1, y_1) = (x_0 + h_1, y_0 + k_1), (x_2, y_2) = (x_0 + h_2, y_0 + k_2)$$

platí $f(x_1, y_1) > f(x_0, y_0)$, $f(x_2, y_2) < f(x_0, y_0)$. Protože $\alpha \neq 0$ bylo libovolné, tj. (x_1, y_1), (x_2, y_2) mohou být libovolně blízko (x_0, y_0), v tomto bodě extrém nenastává.

Poznámka 2.3.

1. Všimněme si tedy, že nemůže platit $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$. Jinak by $D(x_0, y_0) = -f_{xy}^2(x, y) \leq 0$, což je spor. Totéž platí pro $f_{yy}(x_0, y_0)$. Dokonce musejí mít tato čísla stejné znaménko, protože jinak by $f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) < 0$ a bylo by oproti předpokladu $D(x_0, y_0) < 0$. K rozhodnutí o maximu resp. minimu lze tedy použít rovnocenně $f_{yy}(x_0, y_0)$.

Ukážeme si na příkladech, že extrém může nastat, ale nemusí.

a) Pro funkci $f : z = x^4 + y^4$ je $f_x = 4x^3$, $f_y = 4y^3$ a z rovnic $4x^3 = 0$, $4y^3 = 0$ dostáváme jediný stacionární bod $(0,\ 0)$. Dále $f_{xx} = 12x^2$, $f_{yy} = 12y^2$, $f_{xy} = 0$, tedy $D(x, y) = 144\, x^2 y^2$ a $D(0,0) = 0$. V bodě $(0,\ 0)$ je lokální minimum, protože $f(0,\ 0) = 0$ a pro libovolné jiné $(x,\ y)$ (ne jen v okolí) je $f(x, y) > 0$.

b) Pro funkci $f : z = x^3 + y^3$ je $f_x = 3x^2,\ f_y = 3y^2$ a z rovnic $3x^2 = 0,\ 3y^2 = 0$ dostáváme jediný stacionární bod $(0,\ 0)$. Dále $f_{xx} = 6x,\ f_{yy} = 6y,\ f_{xy} = 0,$ tedy $D(x, y) = 36\,xy$ a $D(0,0) = 0$. V bodě $(0,\ 0)$ není lokální extrém, protože $f(0,\ 0) = 0$ a $f(x,\ 0) = x^3,$ takže pro $x > 0$ je $f(x,0) > 0$ a pro $x < 0$ je $f(x,0) < 0,$ což znamená, že v libovolně malém okolí jsou jak větší, tak menší funkční hodnoty než $f(0,\ 0)$.

Vyšetřování lokálních extrémů je tedy možné shrnout do následujících bodů:
Nejprve vytipujeme pomocí věty 2.1 nebo důsledku 2.1 „podezřelé“ body, v nichž by mohl být extrém (v ostatních bodech být nemůže). Nejčastěji půjde o nalezení stacionárních bodů, což znamená řešit dvě rovnice pro dvě neznámé. Obecně jde o nelineární rovnice, jejichž řešení může být velmi obtížné. Žádný univerzální postup neexistuje. Pokud je aspoň jedna z nich lineární, je možné z ní vyjádřit jednu proměnnou pomocí druhé a dosadit do zbývající rovnice. Tím dostaneme rovnici (obecně opět nelineární) pro jednu neznámou, jejíž řešení je snazší.

I v případě obou nelineárních rovnic někdy lze z jedné rovnice vyjádřit jednu neznámou pomocí druhé a dosadit nebo nějakými úpravami vyloučit jednu neznámou. Často je účinné, pokud se nám podaří rozložit levé strany rovnic na součin, na pravých stranách musí být nula. Aby součin byl nulový, musí být nulový některý činitel. Stačí tudíž kombinovat jednotlivé činitele z obou rovnic, čímž dostaneme několik většinou jednodušších rovnic. Pokud vše selže, nezbývá než použít numerické metody a nalézt kořeny alespoň přibližně.

O každém „podezřelém“ bodu rozhodneme, zda v něm lokální extrém je nebo není. K tomu použijeme větu 2.2, pokud jsou splněny její předpoklady. Pokud její předpoklady splněny nejsou nebo nastává situace 3) podle této věty, je potřeba použít nějaký speciální postup. To může být někdy velmi jednoduché, někdy naopak obtížné.

Příklad 2.2.

Najděte lokální extrémy funkce $f = z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.

Řešení: Funkce *f* je spojitá v $\mathbb{R}^2$ a má zde spojité parciální derivace (všech řádů). Podle důsledku 1.1 mohou být lokální extrémy pouze ve stacionárních bodech. Vypočteme první parciální derivace a určíme, kde jsou současně nulové:

$$z_x = 2x + y - 6 \qquad\qquad 2x + \ y - 6 = 0,$$
$$z_y = x + 2y - 9 \quad \Rightarrow \qquad x + 2y - 9 = 0.$$

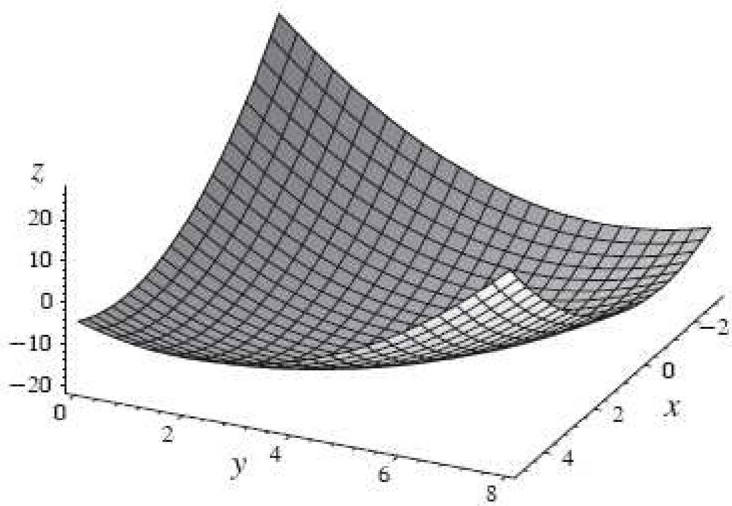
Dostali jsme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, jejímž řešením snadno dostaneme $x = 1,\ y = 4.$ Máme tedy jediný „podezřelý“ stacionární bod $(1,\ 4).$ Nyní vypočteme druhé parciální derivace:

$$z_{xx} = 2, \qquad z_{yy} = 2, \qquad z_{xy} = 1.$$

Abychom mohli použít větu 1. 5., určíme $D(x, y)$:

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{xy} & z_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

V tomto případě je hodnota konstantní (obecně je to funkce *x* a *y*, za něž musíme dosadit souřadnice stacionárních bodů). Protože je kladná, je v bodě $(1,\ 4)$ ostrý lokální extrém. Jelikož $z_{xx} = 2 > 0$, jde o ostré lokální minimum. Je $f(1,\ 4) = -21.$ Graf funkce je znázorněn na obrázku 1.2 (jde o eliptický paraboloid).



Obrázek 2.3: Graf funkce $f : z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$

Příklad 2.2.

Určete lokální extrémy funkce $f : z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Řešení: Funkce, jejíž extrémy hledáme, je polynomem proměnných *x*, *y* a proto jsou její parciální derivace spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Proto lokální extrémy mohou nastat pouze ve stacionárních bodech, které najdeme jako řešení soustavy rovnic

$$z_x = 3x^2 - 3y = 0, \quad z_y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Z první rovnice plyne $y = x^2$ a dosazením do druhé rovnice dostáváme

$$x^4 - x = x(x-1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

odtud $x_1 = 0,\ x_2 = 1$ (kvadratický trojčlen $x^2 + x + 1$ má záporný diskriminant a je proto vždy kladný). Existují tedy dva stacionární body $P_1 = [0,\ 0],\ P_2 = [1,\ 1]$.

Dále platí $z_{xx} = 6x,\ z_{yy} = 6y,\ z_{xy} = -3.$ Odtud dostáváme

$$D(x, y) = 36xy - 9 \text{, tj. } D(P_1) = -9 < 0,\ D(P_2) = 36 - 9 = 27 > 0.$$

Podle věty 2.2. v bodě P_1 extrém nenastává a v bodě P_2 nastává ostré lokální minimum, neboť $z_{xx}(P_1) = 6 > 0.$

Doposud jsme se zabývali funkcemi dvou reálných proměnných, nyní je potřeba provést zobecnění pro hledání extrémů funkcí více než dvou proměnných. K tomu však bude potřeba využít algebraický matematický aparát. Konkrétně půjde o tzv. kvadratické formy, kterým je věnována další kapitola této práce.

3. Bilineární a kvadratické formy

Před vysvětlením pojmu kvadratická forma, jež budou v závěrečné části práce využívány k určení lokálních extrémů funkce více proměnných je zapotřebí říci, co je to bilineární forma.

3.1. Bilineární formy

Definice 3.1.1.

Nechť *V* je reálný lineární vektorový prostor, tj. prostor nad tělesem reálných čísel. Zobrazení $f : V$ x $V \rightarrow$R se nazývá bilineární forma na *V*, jestliže pro každé $x, y \in V$ a pro každé $\lambda \in$ R platí

$$
\begin{aligned}
&f(x+z, y) = f(x, y) + f(z, y),\\
&f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y),\\
&f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z),\\
&f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y).
\end{aligned}
$$

Tato definice je hodně abstraktní, na konkrétních příkladech ukáži, co si pod pojmem bilineární forma představit.

Příklady bilineární formy:

1) Skalární násobení v euklidovském prostoru *V* je bilineární forma, neboť

$$
\begin{aligned}
&(x+z, y) = (x, y) + (z, y), (\lambda x, y) = \lambda (x, y)\\
&(x, y+z) = (x, y) + (x, z), (x, \lambda y) = \lambda (x, y)
\end{aligned}
$$

pro každé $x, y, z \in V$ a pro každé $\lambda \in R$.

2) Dá se dokázat, že v reálném prostoru R_2 zobrazení dané přepisem

$$f(x, y) = 2x_1y_1 + 3x_1y_2 - x_2y_1 + 5x_2y_2, \text{ kde } x = [x_1, x_2]^T, y = [y_1, y_2]^T$$

je bilineární forma.

Je třeba, abychom byli schopni libovolnou bilineární formu vyjádřit v nějakém vhodném tvaru. Ukazuje se, že každou bilineární formu lze vyjádřit pomocí matice bilineární formy.

Definice 3.1.2.

Nechť V je reálný lineární vektorový prostor konečné dimenze n, nechť $b_1, b_2, ..., b_n$ je báze prostoru V. Matice

$$A = \left[f\left(b_i, b_j\right) \right] = \begin{bmatrix} f\left(b_1, b_1\right) & f\left(b_1, b_2\right) & \cdots & f\left(b_1, b_n\right) \\ f\left(b_2, b_1\right) & f\left(b_2, b_2\right) & \cdots & f\left(b_2, b_n\right) \\ \vdots & & & \\ f\left(b_n, b_1\right) & f\left(b_n, b_2\right) & \cdots & f\left(b_n, b_n\right) \end{bmatrix}$$

se nazývá matice bilineární formy f v bázi $b_1, b_2, ..., b_n$.

Všimněte si, že uvedená matice bilineární formy je typu n x n, kde n je dimenze daného vektorového prostoru.

Pomocí následující věty je možné při znalosti matice bilineární formy v dané bázi určit hodnotu této formy pro libovolné dva prvky z vektorového prostoru *V*.

Věta 3.1.1.

Nechť *V* je reálný lineární vektorový prostor konečné dimenze n, nechť *f* je bilineární forma na *V*, nechť *A* je matice této bilineární formy v bázi $b_1, b_2, ..., b_n$ prostoru V. Potom pro každé dva vektory $x, y \in V$ platí $f(x, y) = \hat{x}^T A\hat{y},$ kde $\hat{x}, \hat{y}$ jsou souřadnice vektorů *x*, *y* v bázi $b_1, b_2, ..., b_n$.

Důkaz 3.1.1. (Důkaz věty 3.1.1.)

Označme $\hat{x} = [\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n]^T$, $\hat{y} = [\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n]^T$, potom je $f(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j f\left(b_i, b_j\right).$

Vynásobením matice *A* vektorem $\hat{y}$ získáme $A\hat{y} = \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j f(b_1, b_j), ..., \sum_{j=1}^{n} b_j f(b_n, b_j) \right]^T$, proto

$$\hat{x}^T A\hat{y} = [\alpha_1, ..., \alpha_n] . \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j f(b_1, b_j), ..., \sum_{j=1}^{n} b_j f(b_n, b_j) \right]^T = \alpha_1 \sum_{j=1}^{n} \beta_J f(b_1, b_j) + ... + \alpha_n \sum_{j=1}^{n} (b_n, b_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j f(b_i, b_j) = f(x, y).$$

Poznámka 3.1.1.

Je třeba zdůraznit, že matice dané bilineární formy je specifická pro danou bázi vektorového prostoru *V*. Při změně báze se změní i matice bilineární formy.

Příklad 3.1.1.

Mějme vektorový prostor $V = R^3$ a jeho bázi

$$\text{M:}\quad \begin{aligned} \vec{u}_1 &= (1,0,0) \\ \vec{u}_2 &= (0,1,0) \\ \vec{u}_3 &= (0,0,1) \end{aligned}$$

Na tomto vektorovém prostoru je definována bilineární forma, pro níž platí:

$$\begin{aligned} f(\vec{u}_1,\vec{u}_1) &= 3 \\ f(\vec{u}_1,\vec{u}_2) &= -2 \\ f(\vec{u}_1,\vec{u}_3) &= -1 \\ f(\vec{u}_2,\vec{u}_1) &= 1 \\ f(\vec{u}_2,\vec{u}_2) &= -2 \\ f(\vec{u}_2,\vec{u}_3) &= 3 \\ f(\vec{u}_3,\vec{u}_1) &= 2 \\ f(\vec{u}_3,\vec{u}_2) &= -1 \\ f(\vec{u}_3,\vec{u}_3) &= 4 \end{aligned}$$

Řešení:

Matici bilineární formy v bázi M určím jednoduše použitím definice 1.2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Nyní stanovme hodnotu této bilineární formy pro následující vektory:

$$\begin{aligned} \vec{u} &= (3,2,2), \\ \vec{v} &= (2,2,1) \end{aligned}$$

Při stanovení hodnoty formy pro zadané vektory musíme určit jejich souřadnice v bázi M.

$$\vec{u} = 3.\vec{u}_1 + 2.\vec{u}_2 + 2.\vec{u}_3$$
$$\vec{v} = 1.\vec{v}_1 + 1.\vec{v}_2 + 0.\vec{v}_3.$$

Z věty 3.1.1. pak rovnou dostáváme

$$f(\vec{u},\vec{v}) = (3,2,2).\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (3.3+2.1+2.2), (3.(-2)+2.2+2.(-1)), (3.(-1)+2.3+2.4) =$$

$$= (15,-4,1).\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (15.1)+(-4.1)+(1.0) = 11.$$

V praxi se velmi často setkáváme se speciálním případem bilineární formy, tzv. symetrickou bilinerární formou.

Definice 3.1.3.

Bilineární forma *f* na reálném lineárním prostoru *V* se nazývá symetrická, jestliže platí

$$f(x,y) = f(y,x) \text{ pro každé } x, y \in V.$$

Příklad symetrické bilineární formy:

Bilineární forma *f* na reálném lineárním prostoru *V* konečné dimenze *n* je symetrická právě tehdy, když je symetrická matice této bilineární formy. Z definice 3.1.2. matice bilineární formy *f* na reálném lineárním vektorovém prostoru konečné dimenze je zřejmé, že symetrická bilineární forma má symetrickou matici.

Příklad 3.1.2.

Určete matici ***A*** bilineární formy $f(x,y) = 3x_1y_1 - x_1y_2 + 2x_1y_3 - x_2y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_1 - 4x_3y_3$ na reálném prostoru $\mathbb{R}_3$, kde $x = [x_1, x_2, x_3]^T$, $y = [y_1, y_2, y_3]^T$, v bázi $v_1 = [1,1,1]^T, v_2 = [1,1,0]^T, v_3 = [1,0,0]^T$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
f(v_1,v_1) &= 3.1.1-1.1+2.1.1-1.1+5.1.1+2.1.1-4.1.1=6,\\
f(v_1,v_2) &= 3.1.1-1.1+2.1.0-1.1+5.1.1+2.1.1-4.1.0=8,\\
f(v_1,v_3) &= 3.1.1-1.0+2.1.0-1.1+5.1.0+2.1.1-4.1.0=4,\\
f(v_2,v_1) &= 3.1.1-1.1+2.1.1-1.1+5.1.1+2.0.1-4.0.1=8,\\
f(v_2,v_2) &= 3.1.1-1.1+2.1.0-1.1+5.1.1+2.0.1-4.0.0=6,\\
f(v_2,v_3) &= 3.1.1-1.0+2.1.0-1.1+5.1.0+2.0.1-4.0.0=2,\\
f(v_3,v_1) &= 3.1.1-1.1+2.1.1-0.1+5.0.1+2.0.1-4.0.1=4,\\
f(v_3,v_2) &= 3.1.1-1.1+2.1.0-0.1+5.0.1+2.0.1-4.0.0=2,\\
f(v_3,v_3) &= 3.1.1-1.0+2.1.0-0.1+5.0.0+2.0.1-4.0.0=3.
\end{aligned}$$

Hledaná matice má tedy tvar:

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 3.1.2

Pomocí symetrické bilineární formy můžeme definovat tzv. kvadratickou formu. V dalším textu této práce se pak budeme zabývat již jen kvadratickými formami.

3.2. Kvadratické formy

Definice 3.2.1.

Nechť f je symetrická bilineární forma na reálném lineárním vektorovém prostoru V konečné dimenze n. Zobrazení $\kappa : V \to \mathbb{R}$, definované předpisem $\kappa(x) = f(x,x)$ pro každé $x \in V$, se nazývá kvadratická forma na prostoru V.

Je-li reálný prostor V konečné dimenze n a $b_1, b_2, ..., b_n$ báze prostoru V, potom matici $\boldsymbol{A}$ symetrické bilineární formy f v bázi $b_1, b_2, ..., b_n$ nazýváme maticí kvadratické formy κ v bázi $b_1, b_2, ..., b_n$.

Poznámka 3.2.1

Matice kvadratické formy je vždy matice symetrická, neboť je to matice symetrické bilineární formy.

Bilineární forma v příkladu 3.1.2. je symetrická, určuje tedy kvadratickou formu $\kappa : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}$ určenou předpisem

$$\kappa(x) = f(x,x) = 3x_1x_1 - x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_2x_1 + 5x_2x_2 + 2x_3x_1 - 4x_3x_3 = 3x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3$$

pro každé $x = [x_1, x_2, x_3]^T$. Matice kvadratické formy κ v bázi $v_1 = [1,1,1]^T, v_2 = [1,1,0]^T, v_3 = [1,0,0]^T$ je matice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matice kvadratické formy κ ve standardní bázi $e_1 = [1,0,0]^T, e_2 = [0,1,0]^T, e_3 = [0,0,1]^T$ je poté

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

V dalších částech diplomové práce pro nás bude velmi důležitá klasifikace kvadratických forem provedená podle následující definice.

3.3. Klasifikace kvadratických forem

Definice 3.3.1.

Říkáme, že kvadratická forma κ na reálném lineárním vektorovém prostoru *V* konečné dimenze je

pozitivně definitní, *je-li* $\kappa(x) > 0$ *pro každé* $x \in V, x \neq 0$,

pozitivně semidefinitní, *je-li* $\kappa(x) \geq 0$ °*pro každé* $x \in V$ *a existuje* $x_0 \in V$ *tak, že* $\kappa(x_0) = 0$,

negativně definitní, *je-li* $\kappa(x) < 0$ *pro každé* $x \in V, x \neq 0$,

negativně semidefinitní, *je-li* $\kappa(x) \leq 0$ *pro každé* $x \in V$ *a existuje* $x_0 \in V$ *tak, že* $\kappa(x_0) = 0$,

indefinitní, *existují-li* $x_1, x_2 \in V$ *tak, že* $\kappa(x_1) > 0$, $\kappa(x_2) < 0$.

Samozřejmě musíme najít způsob, jak co nejjednodušším způsobem klasifikovat zadanou kvadratickou formu.

K určení tzv. *inercie* kvadratické formy mohu použít několik metod.

1. **Lagrangova metoda** nám slouží k převedení na diagonální tvar. Tato metoda funguje na principu doplnění na čtverec a musíme eliminovat smíšený člen.

Příklad 3.3.1.

$$f(\vec{x}) = x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$$
$$f(\vec{x}) = (x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2 - 3x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - 7x_2^2 = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2$$
$$x_1' = x_1 + 2x_2$$
$$x_2' = x_2$$
$$x_1', x_2' : f(x) = x_1^{2\prime} - 7x_2^{2\prime} \Rightarrow \mathit{INDEFINITNÍ\ \ FORMA}$$

V nových proměnných se nevyskytují smíšené členy, což znamená, že definitnost formy můžeme snadno posoudit podle znamének čísel před druhými mocninami. Protože znaménko u x_1 je kladné a u x_2 záporné, je forma indefinitní.

2. Pro větší počet proměnných je Lagrangeova metoda dost komplikovaná a proto je výhodnější použití jiné metody a to metody založené na **vlastních číslech matice**, respektive na tzv. **Sylvestrově kritériu.** V další kapitole definujeme tedy tzv. vlastní čísla matice.

4. Vlastní čísla matice a jejich užití ke klasifikaci kvadratických forem

4.1. Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Definice 4.1.1.

Nechť A je čtvercová matice řádu n, potom $\det(\lambda I - A)$ se nazývá charakteristický polynom matice A. Kořeny charakteristického polynomu nazýváme vlastní (charakteristická) čísla matice A. Jestliže λ_0 je vlastní číslo matice A, potom nenulový vektor h takový, že $(\lambda_0 I - A)h = 0,$ tj. $\lambda_0 h = Ah,$ se nazývá vlastní vektor matice A příslušný vlastnímu číslu λ_0. Množina všech vlastních čísel matice A se nazývá spektrum matice A.

Příklad 4.1.1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda).(3-\lambda) - 1.1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda + 5 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 - 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.5}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = vlastní\ čísla\ matice.$$

Poznámka 4.1.1.

Vedle vlastních čísel by bylo samozřejmě možné určit i tzv. vlastní vektory matice. Ty však nejsou pro určení definitnosti kvadratické formy podstatné a proto se jimi v této práci nebudeme zabývat.

Uvidíme, že o definitnosti dané kvadratické formy rozhodne to, jaké má matice kvadratické formy vlastní čísla. Víme však již, že v různých bázích má daná kvadratické forma různé matice. Je tedy třeba vyjasnit to, jaký vztah je mezi vlastními čísly matic jedné kvadratické formy v různých bázích. K tomu nám pomůže pojem podobnost matic a s tím související věty.

Definice 4.1.2.

Řekneme, že čtvercové matice ***A, B*** řádu n jsou podobné, jestliže existuje regulární matice ***T*** řádu n tak, že $\mathbf{A=TBT^{-1}}$.

Věta 4.1.1.

Podobné matice mají stejné charakteristické polynomy, a tedy stejná vlastní čísla.

Důkaz 4.1.1.

Nechť $A = TBT^{-1}$. Potom $(\lambda I - A) = \lambda TIT^{-1} - TBT^{-1} = T(\lambda I - B)T^{-1}$, a tedy

$$\det(\lambda I - A) = \det(T(\lambda I - B)T^{-1}) = \det T \det(\lambda I - B)\det T^{-1} = \det T \det T^{-1} \det(\lambda I - B) =$$
$$= \det(TT^{-1})\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - B).$$

Poznámka 4.1.2.

Větu 4.1.1. nelze obrátit, tj. jestliže dvě matice mají stejné charakteristické polynomy, nemusí být podobné.

Například $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, potom $\det(\lambda I - I) = (\lambda - 1)^2, \det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2$. Tyto matice nejsou podobné, neboť pro každou regulární matici T řádu 2 je $TIT^{-1} = TT^{-1} = I$, tj. jednotková matice je podobná pouze sama se sebou.

Nyní ukážeme, jak je vlastní čísla možné využít ke klasifikaci kvadratických forem. Nejprve bude třeba zjistit, v jakém vztahu jsou matice bilineárních forem v různých bázích.

4.2. Klasifikace kvadratických forem pomocí vlastních čísel

Věta 4.2.1.

Nechť ψ je bilineární forma na reálném lineárním vektorovém prostoru *V* konečné dimenze n. Nechť ***A*** je matice bilineární formy ψ v bázi $b_1, b_2, ..., b_n$ prostoru *V*, nechť ***B*** je matice bilineární formy ψ v jiné bázi $v_1, v_2, ..., v_n$ prostoru *V*. Potom jsou si matice **A, B** podobné.

Důsledek 4.2.1.(Důsledek věty 4.2.1.)

Matice bilineární formy v různých bázích mají stejná vlastní čísla.

Máme tedy již zajištěno, že matice dané kvadratické formy v různých bázích mají stejná vlastní čísla. Další problém by mohl souviset s tím, že vlastní čísla jsou kořeny charakteristického polynomu a mohou být tudíž obecně i imaginární. Existence imaginárních vlastních čísel u matice kvadratické formy by nám však znemožnila rozhodnutí o její definitnosti pomocí kritéria, které v další části práce uvedeme. Naštěstí platí, že matice kvadratické formy je vždy symetrická. A díky následující větě jsou vlastní čísla vždy reálná, problém s existencí imaginárních vlastních čísel tudíž u matice kvadratické formy nemůže nastat.

Věta 4.2.2.

Nechť *A* je reálná, symetrická matice řádu n. Potom platí: Všechna vlastní čísla matice *A* jsou reálná.

Důkaz 4.2.2.

1. Označme λ libovolné vlastní číslo matice *A* a *h* vlastní vektor matice *A* příslušný vlastnímu číslu $\lambda.$ Potom $(\lambda I - A)h = 0,$ tedy $\lambda h = Ah, h \neq 0$ a tedy

$$h^T A \overline{h} = h^T \overline{A}\,\overline{h} = h^T \overline{Ah} = h^T \overline{\lambda h} = h^T \overline{\lambda}\,\overline{h} = \overline{\lambda}(h^T \overline{h})$$

$$h^T A \overline{h} = h^T A^T \overline{h} = (Ah)^T \overline{h} = (\lambda h)^T \overline{h} = \lambda(h^T \overline{h}).$$

Tyto rovnosti jsme mohli napsat, neboť matice *A* je reálná, t. j. $\overline{A} = A,$ A symetrická, tj. $A^T = A.$

Proto $\overline{\lambda}(h^T \overline{h}) = \lambda(h^T \overline{h}),$ tedy $(\lambda - \overline{\lambda})(h^T \overline{h}) = 0.$ Označíme-li $h = [h_1, h_2, ..., h_n]^T,$ je

$h^T \overline{h} = h_1 \overline{h_1} + h_2 \overline{h_2} + \ldots + h_n \overline{h_n} = |h_1|^2 + |h_2|^2 + \ldots + |h_n|^2 > 0$, neboť vlastní vektor h je nenulový. Proto $\lambda - \overline{\lambda} = 0$, tedy $\lambda = \overline{\lambda}$. Libovolné vlastní číslo matice A je reálné.

Důsledek 4.2.2. (Důsledek věty 4.2.2.)

Větou 4.2.2. je dokázáno, že matice kvadratické formy má vždy reálná vlastní čísla.

Lze dokázat, že platí následující věta (4.2.3).

Věta 4.2.3.

Každá reálná, symetrická matice řádu n je podobná s reálnou diagonální maticí řádu n.

Tato věta říká, že v nějaké bázi je možné kvadratické formy vyjádřit pomocí diagonální matice, na jejíž diagonále se nacházejí vlastní čísla odpovídající dané kvadratické formě. Z diagonální matice však již velmi snadno zjistíme definitnost dané formy, a to pomocí znamének čísel na diagonále. Pokud budou všechna znaménka kladná, půjde o pozitivně definitní formu, pokud všechna kladná nebo nulová (alespoň jedno bude nulové), půjde o formu pozitivně semidefinitní apod. Přesněji tuto situaci popíšeme pomocí pojmu *inercie* matice.

V následující definici je zaveden pojem *inercie* matice

Definice 4.2.1.

Nechť A je čtvercová symetrická matice a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jsou její vlastní čísla, pak trojici čísel $i = (k, z, n),$, kde k je počet kladných vlastních čísel, z je počet záporných vlastních čísel a n je počet nulových vlastních čísel nazýváme INERCIE MATICE.

Poznámka 4.2.1.

Podle předcházejících vět mají různé matice odpovídající jedné kvadratické formě stejnou inercii. Z tohoto důvodu můžeme mluvit o INERCII KVADRATICKÉ FORMY.

Věta 4.2.4.

Nechť κ je kvadratická forma na reálném lineárním vektorovém prostoru V konečné dimenze *n*. Potom kvadratická forma κ je

pozitivně definitní právě tehdy, když $in(\kappa) = (n, 0, 0)$,

pozitivně semidefinitní právě tehdy, když $in(\kappa) = (k, 0, d),\ d \neq 0$,

negativně definitní právě tehdy, když $in(\kappa) = (0, n, 0)$,

negativně semidefinitní právě tehdy, když $in(\kappa) = (0, z, d),\ d \neq 0$,

indefinitní právě tehdy, když $in(\kappa) = (k, z, d),\ k \neq 0,\ z \neq 0$.

Pomocí předchozích vět jsme tedy našli metodu, jak jednoduše určit definitnost dané kvadratické formy. Uvedený postup je z výpočetního hlediska výhodný především v tom, že vlastní čísla lze numericky určovat i pro matice vysokého řádu, díky čemuž můžeme s pomocí výpočetní techniky snadno rozhodnout o definitnosti kvadratických forem s větším počtem proměnných. Uvědomme si ale hned i nevýhody tohoto postupu. Výpočet vlastních čísel numerickými metodami s sebou přináší i zaokrouhlování a to není žádoucí v jemných rozhodnutích typu matice se např. pozitivně definitní či pozitivně semidefinitní. Dále, člověk se většinou snaží mít elementární výpočty pod „lidskou“ kontrolou. Ovšem výpočet vlastních čísel matice vede k řešení rovnic vyšších stupňů a to je pro člověka problematická záležitost. Konkrétní určení pomocí analytického výpočtu ukážeme na příkladu kvadratické formy se čtyřmi proměnnými.

Příklad 4.2.1.

Určeme inercii, definitnost kvadratické formy

$$\kappa(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_4 - 4x_3x_4$$

a napišme kvadratickou formu ve tvaru lineární kombinace čtverců souřadnic.

Řešení:

V standardní bázi prostoru $\mathbb{R}_4$ $e_1 = [1, 0, 0, 0]^T, e_2 = [0, 1, 0, 0]^T, e_3 = [0, 0, 1, 0]^T, e_4 = [0, 0, 0, 1]^T$ má kvadratická forma κ matici $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$. Určíme vlastní čísla matice *A*. Protože $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 4)(\lambda - 8)\lambda(\lambda + 4)$, je $in(\kappa) = in(A) = (2,\ 1,\ 1)$ a kvadratická forma κ je indefinitní.

4.3. Klasifikace kvadratických forem pomocí Sylvesterova kritéria

Definice 4.3.1.

Nechť A je matice typu m/n. Pro libovolné $r \le \min\{m, n\}$, pro libovolnou volbu $1 \le k_1 < k_2 < ... < k_r \le m$ a $1 \le l_1 < l_2 < ... < l_r \le n$ budeme determinant matice $A(k_1, k_2, ..., k_r / l_1, l_2, ..., l_r)$ nazývat minor řádu r. Jestliže A je čtvercová matice řádu n, potom pro každé p = 1,..., budeme determinant matice $A[1, 2, ..., p / 1, 2, ..., p]$ nazývat hlavní minor matice A řádu p.

Příklad 4.3.1.

V matici $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ -1 & 8 & -2 & 9 \end{bmatrix}$ lze najít mnoho minorů, např. minory řádu 2 jsou:

$$\det A(1,2/1,3) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix},$$

$$\det A(1,2/2,4) = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix},$$

$$\det A(2,3/1,4) = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 9 \end{vmatrix},$$

$$\det A(1,3/2,3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}$$

a další, minory řádu 3 jsou:

$$\det A(1,2,3/1,2,3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & 8 & -2 \end{vmatrix},$$

$$\det A(1,2,3/1,2,4) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 7 \\ -1 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

$$\det A(1,2,3/1,3,4) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 7 \\ -1 & -2 & 9 \end{vmatrix},$$

$$\det A(1,2,3/2,3,4) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & -2 & 9 \end{vmatrix}.$$

Nyní ukážeme, jak nám hlavní minory mohou pomoci při rozhodování o definitnosti dané kvadratické formy.

Věta 4.3.1.

Nechť κ je kvadratická forma na reálném lineárním vektorovém prostoru *V* konečné dimenze *n*, nechť *A* je matice kvadratické formy κ v bázi $b_1, b_2, ..., b_n$ prostoru *V*.

(1) Kvadratická forma κ je pozitivně definitní právě tehdy, když všechny hlavní minory matice *A* jsou kladné.

(2) Kvadratická forma κ je negativně definitní právě tehdy, když hlavní minory matice *A* střídají znaménka.

(3) Kvadratická forma κ je indefinitní právě tehdy, když nenastává ani případ (1) ani případ (2) a zároveň jsou všechny hlavní minory matice *A* různé od nuly.

Důkaz je poměrně komplikovaný a rozsáhlý, proto jej zde nebudeme uvádět. Tuto větu zformuloval britský matematik Sylvester v 19.století, který je autorem řady dalších tvrzení týkajících se teorie matic. Podrobněji se jeho životu a dílu budeme věnovat v další části této práce. Nyní uvedeme příklad, při jehož řešení je výhodnější použít Sylvesterovo kritérium než dříve uvedenou metodu založenou na vlastních číslech matice.

Příklad 4.3.2.

Určeme definitnost kvadratické formy

$\kappa(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$ a napišme formu jako součet čtverců souřadnic.

Řešení:

Kvadratická forma κ je určena symetrickou bilineární formou

$$\psi(x,y) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 + 10x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2,$$

která ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}_3$ $e_1 = [1,0,0]^T, e_2 = [0,1,0]^T, e_3 = [0,0,1]^T$ má matici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

Zkusíme určit charakteristický polynom matice *A*.

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 17\lambda^2 + 66\lambda - 25$$

U tohoto polynomu je však velmi problematické analyticky určit jeho kořeny, lze pouze odhadnout intervaly, ve kterých budou kořeny ležet.

Zkusíme tedy zjistit, zda by nám k určení definitnosti kvadratické formy nepomohlo Sylvesterovo kritérium. Určíme hlavní minory matice *A*.

$$\Delta_1 = 2,$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 9$$
$$\Delta_3 = \det A = 25.$$

Je vidět, že všechny hlavní minory matice *A* jsou nenulové a kladné, proto je kvadratická forma κ pozitivně definitní.

$\kappa(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2 + 4x_2^2 + 10x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3 =$

$(x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 + 6x_1x_3 + 9x_3^2) + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + 3x_2)^2 + (2x_2 + x_3)^2.$

Dostali jsme vyjádření formy ve tvaru součtu tří čtverců, forma je pozitivně definitní.

Na závěr této kapitoly ukáži ještě několik dalších příkladů na klasifikaci kvadratické formy různými metodami:

Příklad 4.3.3.

Určete typ kvadratické formy $f(x,y,z) = 2x\,y - 4x\,z + 6y\,z$.

Řešení:

a) Lagrangeova metoda - užijeme například regulární substituce $x = u - v, y = u + v,\ z = w$:

$$2xy - 4xz + 6yz = 2(u-v).(u+v) - 4.(u-v).w + 6(u+v) =$$
$$= 2u^2 - 2v^2 - 4uw + 4vw + 6uw + 6vw = 2u^2 - 2v^2 + 2uw + 10vw =$$
$$= 2.(u^2 + uw) - 2v^2 + 10vw = 2\left[\left(u + \frac{w}{2}\right)^2 - \frac{w^2}{4}\right] - 2(v^2 - 5vw) =$$
$$= 2.\left(u + \frac{w}{2}\right)^2 - \frac{w^2}{4} - 2.\left(v - \frac{5}{2}w\right)^2 + \frac{25}{2}w^2 =$$
$$= 2.\left(u + \frac{w}{2}\right)^2 - 2.\left(v - \frac{5}{2}w\right)^2 + \frac{49}{4}w^2.$$

Odtud je vidět, že je forma indefinitní (koeficienty u prvního a třetího kvadrátu jsou totiž, kladné, u druhého však je koeficient záporný.

b) Sylvestrovo kritérium – musím sestavit matici kvadratické formy a stanovit hlavní minory této matice příslušné kvadratické formy:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$D = 0,$$
$$D_2 = -1,$$
$$D_3 = -6 - 6 = -12.$$

Podle Sylvestrova kritéria je tedy forma indefinitní.

Příklad 4.3.4.

Určete typ formy $f(x,y,z,u) = xy + xz + xu + 2yz + 3yu + 4zu$.

Řešení:

a) nejprve zkusíme stanovit znaménko pro dvě vhodné volby proměnných *x*, *y*, *z*, *u*. Zvolíme *x* = = *y* = 0 s tím, že „rozhodne“ *z*, *u*:

$$z = 1,\ u = 1 \quad f(0,0,1,1) = 4 > 0$$

$$z = 1,\ u = -1\ f(0,0,1,-1) = -4.$$

Protože při dvou různých volbách získáváme jednou kladnou a jednou zápornou hodnotu, musí být daná kvadratická forma indefinitní.

b) Lagrangeova metoda – navíc užijeme substituci $x = r - s, y = r + s$

$$\begin{aligned}
f &= r^2 - s^2 + (r-s).z + (r-s).u + 2.(r+s).z + 3.(r+s).u + 4zu = \\
&= r^2 - s^2 + rz - sz + ru - su + 2rz + 2sz + 3ru + 3su + 4zu = \\
&= r^2 - s^2 + 3rz + sz + 4ru + 2su + 4zu = \\
&= r^2 + 3rz + 4ru - (s^2 - sz - 2su) + 4zu = \\
&= \left(r + \frac{3}{2}z + 2u\right)^2 - \frac{9}{4}z^2 - 4u^2 - 6zu - \left(s - \frac{z}{2} - u\right)^2 + \frac{z^2}{4} + u^2 + zu + 4zu = \\
&= \left(r + \frac{3}{2}z + 2u\right)^2 - \left(s - \frac{r}{2} - u\right)^2 - 2z^2 - 3u^2 - zu
\end{aligned}$$

už teď je jasné, že je forma indefinitní (protože znaménka u prvního a druhého kvadrátu jsou různá)

$$\begin{aligned}
&= \left(r + \frac{3}{2}z + 2u\right)^2 - \left(s - \frac{z}{2} - u\right)^2 - 2.\left[z^2 + zu + \frac{3}{2}u^2\right] = \\
&= \left(r + \frac{3}{2}z + 2u\right)^2 - \left(s - \frac{z}{2} - u\right)^2 - 2.\left[\left(z + \frac{u}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}u^2\right] = \\
&= \left(r + \frac{3}{2}z + 2u\right)^2 - \left(s - \frac{z}{2} - u\right)^2 - 2.\left(z + \frac{u}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}u^2
\end{aligned}$$

Je vidět, že znaménko u 1. kvadrátu je kladné, u zbylých tří však záporné. Kvadratická forma má tedy inercii (1, 3, 0), tato kvadratická forma je tudíž indefinitní.

Příklad 4.3.5.

Rozhodněte o charakteru kvadratické formy: $f(x,y,z)=9x^2+10xy-2xz+12y^2-18yz+9z^2$.

Řešení: a) Lagrangeova metoda (bez užití substituce)

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= 9.\left(x^2+\frac{10}{9}xy-\frac{2}{9}xz\right)+12.\left(y^2-\frac{3}{2}yz+\frac{3}{4}z^2\right)= \\
&=9.\left[\left(x+\frac{5}{9}y-\frac{1}{9}z\right)^2-\frac{25}{81}y^2-\frac{1}{81}z^2+\frac{10}{81}yz\right]+12y^2-18yz+9z^2= \\
&=9.\left(x+\frac{5}{9}y-\frac{1}{9}z\right)^2-\frac{25}{9}y^2-\frac{1}{9}z^2+\frac{10}{9}yz+12y^2-18yz+9z^2= \\
&=9.\left(x+\frac{5}{9}y-\frac{1}{9}z\right)^2+\frac{83}{9}y^2-\frac{152}{9}yz+\frac{80}{9}z^2= \\
&=9.\left(x+\frac{5}{9}y-\frac{1}{9}z\right)^2+\frac{1}{9}\left[83y^2-152y^2+80z^2\right]= \\
&=9.\left(x+\frac{5}{9}y-\frac{1}{9}z\right)^2+\frac{83}{9}\left[y^2-\frac{152}{83}y^2+\frac{80}{83}z^2\right]= \\
&=9.\left(x+\frac{5}{9}y-\frac{1}{9}z\right)^2+\frac{83}{9}\left[\left(y-\frac{76}{83}z\right)^2+\frac{80}{83}z^2-\left(\frac{76}{83}\right)^2z^2\right]
\end{aligned}
$$

Znaménka u všech kvadrátů jsou kladná, je tudíž vidět, že forma je pozitivně definitní.

b) Sylvestrovo kritérium – musíme sestavit matici kvadratické formy a stanovit hlavní minory této matice příslušné kvadratické formy

$$
D=\begin{vmatrix} 9 & 5 & -1 \\ 5 & 12 & -9 \\ -1 & -9 & 9 \end{vmatrix}
$$

$$D_1=9>0$$

$$\mathrm{D}_2=108-25=83>0$$

$$\mathrm{D}_3=9.108+45+45-12-729-225=972+90-966=96>0$$

Všechny hlavní minory jsou kladné, forma je tudíž pozitivně definitní (inercie (3,0,0))

5. Historická poznámka – J. J. Sylvester a maticový počet

James Joseph Sylvester

Narodil se 3.9.1814 v židovské rodině, v Londýně v Anglii. Byl pojmenován jako James Joseph. Jeho otec, Josef Abraham, byl obchodník. James přijal příjmení Sylvester, když jeho starší bratr emigroval do USA, kde v té době museli mít všichni přistěhovalci křestní jméno, druhé jméno a příjmení, než jim bylo dovoleno získat pobyt.

Po základní škole, do které chodil v Londýně, navštěvoval střední školu v Liverpoolu a v letech 1831 až 1837 St. John´s College v Cambridgi, kde začal své první studium matematiky. Jeho učitelem byl John Hymers. V roce 1838 se stal profesorem přírodní filozofie na University College v Londýně.

O rok později získal titul bakalář a magistr od Trinity College v Dublinu. V témže roce se přestěhoval do Spojených států, kde zůstal šest měsíců a byl zaměstnán jako profesor Univerzity Virginia.

Do Anglie se vrátil v listopadu 1843. Po jeho návratu do Anglie studoval práva. Zde se seznámil s britským právníkem a matematikem Arthurem Cayley, s nímž učinil významné příspěvky do teorie matic. Zde také pracoval jako pojistný matematik. Jedním z jeho soukromých žáků byla Florence Nightingale, žena, která udělala mnoho pro záchranu životů britských vojáků za krymské války. Získat pozici vyučujícího matematiky na univerzitě se Sylvesterovi nedařilo až do roku 1855, kdy byl jmenován profesorem matematiky na Královské vojenské akademii ve Woolwichi, ze které odešel v roce 1869, protože dosáhl povinného důchodového věku 55 let.

Sylvestrovo celoživotní vášní byla poezie, četl a překládal díla z původní francouzské, německé, italské, latinské a řecké literatury a mnohé z jeho matematických písemností obsahují ilustrativní citáty z klasické poezie. Po svém předčasném odchodu do důchodu Sylvester vydal knihu s názvem Zákony veršů (1870), v níž se pokusil kodifikovat řadu zákonů pro prozódii v poezii.

V roce 1877 Sylvester znovu přeplul přes Atlantský oceán a stal se profesorem matematiky na nové Johns Hopkins Univerzitě v Baltimore, Maryland, USA. Jeho plat byl 5 000 dolarů, který se vyplácel ve zlatě. Přispěl k rozvoji moderní matematiky v Americe, kde v roce 1878 založil první americký matematický časopis.

V roce 1883, se vrátil zpět do Anglie a stal se profesorem geometrie na Oxfordské univerzitě. Tuto prestižní pozici zastával až do své smrti. Sylvester vynalezl velké množství matematických pojmů, jako je například diskriminant. Dal jméno Eulerově funkce $\varphi(n)$. Jeho sebrané vědecké práce vyplnily čtyři svazky. V roce 1880 Královská společnosti v Londýně udělila Sylvesterovi Copleyho medaili, což bylo jeho nejvyšší ocenění za vědecké dílo.

Během života Sylvester napsal více než 300 pojednání z algebry, teorie matic a determinantů, teorie invariantů, pravděpodobnosti, mechaniky a matematické fyziky. Společně s A. Cayleym a G. Salmonem založili spolek "invariantní trojice", v němž pracovali hlavně na teorii invariantů.

Mimo jiné také položil základy teorie elementárních dělitelů, zformuloval zákon setrvačnosti kvadratických forem, byl úspěšným tvůrcem matematických termínů (invariant, kovariant apod.), zavedl pojem matice.

6. Vyšetřování extrémů funkce více proměnných pomocí kvadratických forem

V této kapitole naváži na výsledky z kapitoly 2 a budu určovat extrémy funkcí více proměnných. Na rozdíl od kapitoly 2 se však již nebudu omezovat jen na dvě proměnné, ale budu používat obecný postup využívající vlastností kvadratických forem (viz kapitoly 3 a 4) , který se hodí i na komplikovanější příklady. V první části 6.1. budu určovat lokální extrémy bez vazebné podmínky, v části 6.2. se poté budu zabývat úlohami s vazebnou podmínkou, jež budu řešit Lagrangeovou metodou multiplikátorů. Konečně v části 6.3. budu s využitím předchozích postupů určovat absolutní extrémy na množině.

6.1. Extrémy funkce více proměnných bez vazebné podmínky

Stejně jako v kapitole 2 musíme stanovit nutnou a postačující podmínku pro existenci lokálních extrémů. Nutná podmínka bude analogická jako věta 2.1. , u podmínky postačující však již na rozdíl od kapitoly 2 využijeme klasifikaci pomocí kvadratických forem.

Věta 6.1.1. (nutná podmínka existence lokálního extrému)

Nechť funkce f má v bodě $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ lokální extrém. Pak platí, že každá z parciálních derivací v tomto bodě buď neexistuje nebo je rovna nule.

Věta 6.1.2. (postačující podmínka existence lokálního extrému)

Nechť funkce $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ má v bodě $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ všechny parciální derivace rovny nule, tj. $\frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{\partial x_n} = 0.$ Nechť funkce f má v bodě $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ totální diferenciál 2.řádu.

Pak platí:

a) Je-li kvadratická forma $d^2 f$ pozitivně definitní, má funkce f v $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ ostré lokální minimum.

b) Je-li kvadratická forma $d^2 f$ negativně definitní, má funkce f v $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ ostré lokální maximum.

c) Je-li $d^2 f$ indefinitní, nemá funkce f v $\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right)$ extrém.

Poznamenejme, že totální diferenciál 2.řádu se jeví být kvadratickou formou v přírůstcích dx_1, … , dx_n . Umíme napsat matici této formy a diskriminant této matice budeme značit

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}, \text{ kde } A = (a_1, a_2, \ldots, a_n) .$$

Je vidět, že právě uvedená věta využívá klasifikace kvadratických forem, jež byla provedena v předchozí části práce. Tím dochází k určitému propojení analýzy (extrémy funkce) a algebry (vlastnosti kvadratických forem).

Poznámka 6.1.1.

Všimněme si, že věta 6.1. 2. neříká nic o situaci, kdy je příslušná kvadratická forma pozitivně nebo negativně semidefinitní. V takovém případě bohužel není možné uvedenou metodu použít a je třeba příklad řešit jinými způsoby.

Poznámka 6.1.2.

Je třeba si uvědomit, že věta 2.2. je vlastně speciálním případem věty 6.1.2. pro případ funkce dvou proměnných. Klasifikace kvadratické formy je v této větě v zásadě postavená na Sylvestrovu kritériu formulovaném ve větě 4.3.1.

Nyní ukáži několik příkladů, v nichž budu k určení extrému funkce více proměnných používat větu 6.1.2, případně větu 2.2. Klasifikaci příslušné kvadratické formy budu provádět různými metodami popsanými v kapitole 4.

Příklad 6.1.1.

Nalezněte ostré lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{1}{2} z^2 - 3xz - 2y + 2z.$$

Řešení:

Nejprve určím pomocí věty 6.1.1. stacionární body funkce:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2-3z, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=2y-2, \quad \frac{\partial f}{\partial z}=z-3x+2,$$
$$x^2-z=0, \quad y=1, \quad z=3x-2 \quad .$$
$$x^2-3x+2=0,$$
$$(x-2)(x-1)=0$$

Stacionární body jsou $[2,\ 1,\ 4]$ a $[1,\ 1,\ 1]$.

Nyní využiji větu 6.2. Nejprve určím parciální derivace 2. řádu a sestavím příslušnou kvadratickou formu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial 2}=-3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial 2}=0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial 2^2}=1$$
$$d^2 f=6x.(dx)^2+0.dxdy-3dxdz+0.dydx+2(dy)^2+0dydz-3dzdx+0dydz+1(dz)^2=$$
$$=6x(dx)^2-6dxdz+2(dy)^2+(dz)^2.$$

Nyní provedu klasifikaci kvadratické formy ve stacionárních bodech pomocí determinantů (tj. v podstatě na základě Sylvestrova kritéria, viz věta 4.3.1.)

a) V bodě $[1,1,1]$ je

$$D=\begin{vmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$D_1=6,$$
$$D_2=12,$$
$$D_3=D=12-18=-6.$$

Forma je podle věty 4.3.1 indefinitní – lokální extrém tedy podle věty 6.1.2. nenastává.

b) V bodě $[2,1,4]$ je

$$D=\begin{vmatrix} 12 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$D_1=12,$$
$$D_2=24,$$
$$D_3=D=24-18=6$$

Forma je podle věty 4.3.1 pozitivně definitní (všechny hlavní minory jsou kladné), v bodě $[2,1,4]$ tedy podle věty 6.1.2. nastává ostré lokální minimum.

Příklad 6.1.2.

Určíme extrémy funkce $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$

Řešení:

Nejprve určím pomocí věty 6.1. 1. (tj. užitím parciálních derivací 1. řádu) stacionární body:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12y = 0 \Rightarrow x^2 - 24x = 0, x_1 = 0, x_2 = 24$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 12x = 0 \Rightarrow y = -6x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2z + 2 = 0 \Rightarrow z = -1$$

Získávám tedy dva stacionární body: $P_1 = [0,0,-1], P_2 = [24,-144,-1]$

Nyní provedu klasifikaci kvadratické formy ve stacionárních bodech pomocí vlastních čísel příslušné matice a inercie kvadratické formy (viz věta 4.2.4.).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 12,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0$$

$$d^2u = 6xdx^2 + 24dxdy + 0dxdz + 2dy^2 + 0dydz + 2dz^2$$

Obecně:

$$d^2u = 6xdx^2 + 24dxdy + 0dxdz + 2dy^2 + 4dydz + 2dz^2$$

$$d^2u(P_1) = 24dxdy + 2dy^2 + 4dydz + 2dz^2$$

a) určení pro stacionární bod $S_1(0,\ 0,\ -1)$:

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 12 & 0 \\ 12 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda.\left(4-4\lambda+\lambda^2\right) - 144.(2-\lambda) =$$
$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda - 288 + 144\lambda =$$
$$= -\lambda^3 + 4\lambda^2 + 144\lambda - 288$$

zkusmo pro $\lambda = 2: -2^3 + 4.2^2 + 140.2 - 288 = 0 \Rightarrow 2$ je vlastní číslo matice.

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 4 & 140 & -288 \\ 2 & & -2 & 4 & 288 \\ \hline & -1 & 2 & 144 & 0 \end{array}$$

$$-\lambda^2 + 2\lambda + 144 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{580}}{-2}$$

$$\lambda_1 = 1 - \frac{\sqrt{580}}{2}$$

$$\lambda_2 = 1 + \frac{\sqrt{580}}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 2 vlastní čísla jsou kladná, 1 záporné, inercie formy je (2, 1, 0). Podle věty 4.2.4. je tedy forma indefinitní a podle věty 6.1.2 tedy lokální extrém nenastává.

b) určení pro stacionární bod $S_2(24, -144, -1)$:

$$\begin{vmatrix} 144-\lambda & 12 & 0 \\ 12 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (144-\lambda).\left(4-4\lambda+\lambda^2\right) - 144.(2-\lambda) =$$

$$= 576 - 576\lambda + 144\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 288 + 144x = -\lambda^3 + 148\lambda^2 - 436\lambda + 288$$

$$(2-\lambda).(144-\lambda).(2-\lambda-144) = (2-\lambda).(144-146\lambda+\lambda^2)$$

$$\lambda^2 146\lambda + 144$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{146 \pm \sqrt{146^2 - 144.4}}{2} \Rightarrow \lambda_2 > 0$$

$$\lambda_3 > 0$$

Všechna vlastní čísla jsou kladná , inercie formy je tedy (3,0,0). Podle věty 4.2.4 je tedy forma pozitivně definitní a podle věty 6.1.2 nastává tedy v bodě S_2 lokální minimum.

Příklad 6.1.3.

Najděte lokální extrémy funkce $z = x^3 + y^3 - 3xy + 6$.

Řešení:

Nejprve určím pomocí věty 6.1.1. (tj. užitím parciálních derivací 1. řádu) stacionární body:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$
$$3\left(x^2 - y\right) = 0$$
$$3\left(y^2 - x\right) = 0$$
$$y = x^2, x^4 - x = 0, x(x^3 - 1) = 0, \; x_1 = 0, \; x_2 = 1$$
$$x(x-1)\left(x^2 + x + 1\right) = 0$$

Zjistíme odpovídající $y_1 = 0, \; y_2 = 1$. Stacionární body jsou tedy $A_1 = [0,0], \; A_2 = [1,1]$.

Nyní rozhodneme užitím věty 6.1.2 o tom, jaká je příslušná kvadratická forma, což rozhodne o tom, zda ve stacionárních bodech nastávají extrémy či nikoliv. Vypočteme

$$d_z^2, \; \frac{\partial_z^2}{\partial x^2} = 6x, \; \frac{\partial_z^2}{\partial x \partial y} = -3, \; \frac{\partial_z^2}{\partial y^2} = 6y$$
$$d_z^2 = 6x(dx)^2 - 6dxdy + 6y(dy)^2$$

a zjistíme typ odpovídající kvadratické formy v stacionárních bodech:

a) $A_1 = [0,0]$

Ze vztahu $d_z^2(0,0) = -6dxdy$ je přímo vidět, že forma je indefinitní, extrém v bodě $[0,0]$ nenastává.

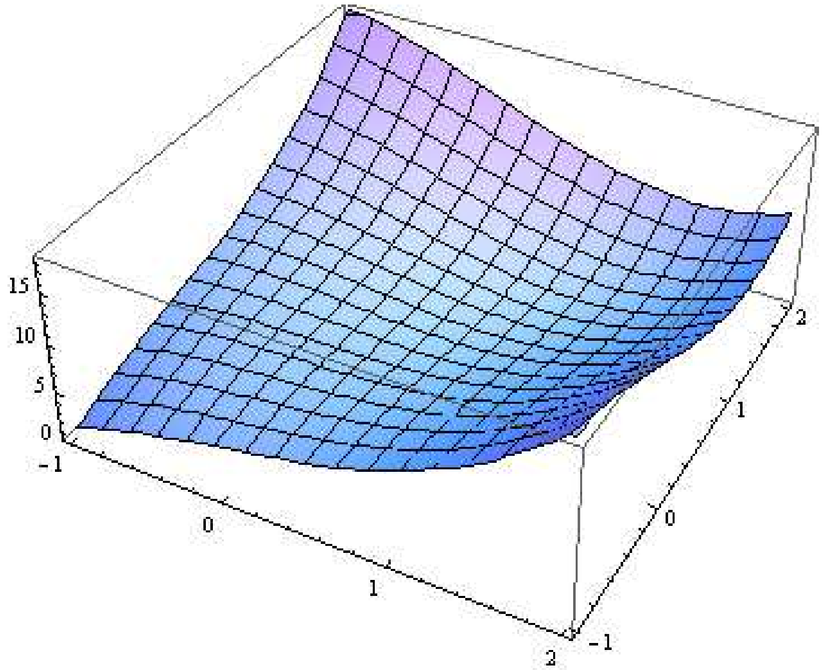
b) $A_2 = [1,1]$

Snadno určíme

$$d_z^2(1, \; 1) = 6 \; (dx)^2 - 6 \; dxdy + 6\left(dy\right)^2$$
$$D = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}, \quad D_1 = 6, \quad D_2 = D = 27 \; .$$

Forma je podle věty 4.3.1. pozitivně definitní, ve stacionárním bodě $[1,1]$ tedy podle věty 6.1.2. nastává ostré lokální minimum.

Snadno zjistíme, že hodnota ostrého lokálního minima je $f(1,1) = 5$. Z obrázku 1 vytvořeném v programu Mathematica je vidět, že minimum nastává skutečně v bodě [1,1], zatímco [0,0] je sedlový bod.



Obrázek 6.1.1.: Graf funkce z příkladu 6.1.3.

6.2. Extrémy funkce více proměnných s vazebnou podmínkou ve tvaru rovnosti

Definice 6.2.1.

Buďte $f: R^n \to R, m < \text{n}, \text{g}_1, ..., g_m : R^n \Rightarrow R$ funkce. Položme

$V = \{x \in R^n; g_1(x) = 0 \wedge ... \wedge g_m(x) = 0\}.$

Řekneme, že f má v bodě $a \in Df \cap V$ **vázané lokální maximum** podmínkou $a \in V$, když $\exists K(a, \delta)$ tak, že $\Rightarrow \forall x \in K(a, \delta) \cap Df \cap V$ platí $f(x) \leq f(a)$.

Řekneme, že *f* má v bodě $a \in Df \cap V$ **vázané lokální minimum** podmínkou $a \in V$, když $\exists K(a, \delta)$ tak, že $\Rightarrow \forall x \in K(a, \delta) \cap Df \cap V$ platí $f(x) \geq f(a)$.

Vázaná lokání minima a maxima funkce *f* se nazývají **vázané lokální extrémy**.

Poznámka 6.2.1.

Podmínka $a \in V$, se nazývá vazba a rovnice $g_1(x) = 0, ..., g_m(x) = 0$ se nazývají vazebné rovnice nebo též **vazebné podmínky**.

Vázané extrémy tohoto typu budeme hledat pomocí následující věty, tzv. **metodou Lagrangeových multiplikátorů.**

Věta 6.2.1. (Lagrange)

Buďte $f : R^n \to R, m < n$, $g_1, \ldots, g_m : R^n \Rightarrow R, m < n$ funkce spojitě diferencovatelné na otevřené množině Ω obsahující V a nechť $\forall x \in \Omega$ platí, že hodnost matice $\left[\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(x)\right]_{ij}$ je rovna *m*. Buď $L : R^n \to R$ funkce definovaná vztahem

$$L(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1, \ldots, x_n).$$

Funkce L se nazývá **Lagrangeova funkce** a konstanty $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in R$ se nazývají Lagrangeovy multiplikátory. Nechť systém $m+n$ rovnic o $m+n$ neznámých

$$\begin{aligned} L'_{x_1} &= 0, \\ &\vdots \\ L'_{x_n} &= 0, \\ &\vdots \\ g_m &= 0 \end{aligned}$$

má řešení $\left[a_1, \ldots, a_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0\right]$.

Má-li L v bodě $a = \left[a_1, \ldots, a_n\right]$ pro $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0$ lokální extrém, pak *f* má v *a* vázaný lokální extrém téhož typu s vazbou $a \in V$.

Nemá-li L lokální extrém, neplyne odtud, že *f* nemá vázaný lokální extrém.

Uvedený postup nyní budeme demonstrovat na dvojici konkrétních příkladů.

Příklad 6.2.1.

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, vázané podmínkou $g(x, y) = 0$, kde $g(x, y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y$.

Řešení:

Sestavíme příslušnou Lagrangeovu funkci obsahující Lagrangeův multiplikátor λ a následně provedeme její parciální derivace podle proměnných *x* a *y*: Tyto derivace nám společně s vazebnou podmínkou budou tvořit soustavu 3 rovnic o 3 neznámých. Z této soustavy spočteme hodnoty

$$\kappa(x, y) = x^2 + 2y^2 + \lambda(x^2 - 2x + 2y^2 + 4y)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial x} = 2x + \lambda.(2x-2), \qquad \frac{\partial \kappa}{\partial y} = 4y + \lambda.(4y+4),$$

$$2x + 2\lambda.(x-1) = 0 \qquad 4y + 4\lambda(y+1) = 0$$

$$x + \lambda.(x-1) = 0 \qquad y + \lambda(y+1) = 0$$

$$x(1+\lambda) = \lambda \qquad y(1+\lambda) = -\lambda$$

$$x = \frac{\lambda}{1+\lambda} \qquad y = \frac{-\lambda}{\lambda+1}$$

$$g(x,y) = 0: \quad \frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2} - 2.\frac{\lambda}{\lambda+1} + \frac{\lambda^2}{(2+1)^2} + 4.\frac{-\lambda}{\lambda+1} = 0$$

$$3\frac{\lambda^2}{(\lambda+1)^2} + 6\frac{-\lambda}{\lambda+1} = 0$$

$$3\lambda^2 - 6\lambda(\lambda+1) = 0$$

$$3\lambda^2 - 6\lambda = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -2$$

pro $\lambda = 0$ je $x = 0, \ y = 0$

pro $\lambda = -2$ je $x = 2, \ y = -2$.

Našli jsme tedy dva stacionární body [0,0] a [2,-2]. V těchto stacionárních bodech mohou nastávat lokální extrémy, musíme však ověřit, že je splněna postačující podmínka. Práci si zjednodušíme tím, že budeme diferencovat vazebnou podmínku, díky čemuž velice rychle dokážeme klasifikovat kvadratickou formu v daných stacionárních bodech a rozhodnout o znaménku extrému.

$$\frac{\partial^2 \kappa}{\lambda x^2} = 2 + 2\lambda \qquad \frac{\partial^2 \kappa}{\lambda x \lambda y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \kappa}{\partial y^2} = 4 + 4\lambda$$

$$d^2\kappa = 2(1+\lambda)(dx)^2 + 4(1+\lambda)(dy)^2$$

$$dg(x,y) = 0$$

$$(2x-2)dx + 4(y+1)dy = 0$$

Pro $[0,0]$ dostáváme $-2dx + 4dy = 0, \ dx = 2dy$

Pro $[2,-2]$ dostáváme $2dx - 4dy = 0, \ dx = 2dy$

Pro $[0,0]$ $\lambda = 0$ je $d^2\kappa = 2(dx)^2 + 4(dy)^2 = 2(2dy)^2 + 4(dy)^2 = 12dy^2$

Pro $[2,-2]$ $\lambda = -2$ je $d^2\kappa = -2(2dx)^2 - 4(dy)^2 = -12dy^2$

V bodě $[0,0]$ je příslušná kvadratická forma pozitivně definitní, tudíž podle vět 6.1.2 a 6.2.1 nastává v tomto bodě ostré lokální minimum. Naopak v bodě $[2,-2]$ je příslušná kvadratická forma negativně definitní, podle vět 6.1.2 a 6.2.1 tam tudíž nastává ostré lokální maximum vzhledem k uvažované množině.

Příklad 6.2.2.

Rozložte číslo 64 na 3 činitele, jejichž součet je minimální.

Hledání činitele označme *x*, *y*, *z*, jejich součet je *u*, tj: $u = x + y + z,$ vazbová podmínka $x.y.z = 64.$

Hledáme vázaný extrém funkce $u = x + y + z,$ s vazbou

$$x.y.z - 64 = 0.$$
$$\kappa(x, y, z) = x + y + z + \lambda(x.y.z - 64)$$
$$\frac{\partial \kappa}{\partial x} = 1 + \lambda yz = 0, \qquad \frac{\partial \kappa}{\partial y} = 1 + \lambda xz = 0, \qquad \frac{\partial \kappa}{\partial z} = 1 + \lambda xy = 0.$$

Z prvních dvou rovnic $yz = xz,\ z(y - x) = 0\ \ z = 0,$ celkem tedy $x = y = z.$

Do vazbové podmínky: $x^3 - 64 = 0, \quad x = 4.$

Stacionární bod:

$$A = [4, 4, 4].\ \lambda = -\frac{1}{16}.$$
$$\frac{\partial^2 \kappa}{\partial x^2} = 0,\ \frac{\partial^2 \kappa}{\partial x \partial y} = \lambda z, \quad \frac{\partial^2 \kappa}{\partial x \partial z} = \lambda y, \quad \frac{\partial^2 \kappa}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \kappa}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \kappa}{\partial y \partial z} = \lambda x$$
$$d^2\kappa = 2\lambda z dxdy + 2\lambda dxdz + 2\lambda dydz$$
$$d^2\kappa(4,4,4) = -\frac{1}{2}dxdy - \frac{1}{2}dxdz - \frac{1}{2}dydz$$
$$\lambda = -\frac{1}{16}$$

z vazbové podmínky $xyz - 64 = 0 \qquad yzdx + xzdy + xydz = 0,$ v bodě $[4,4,4]$

$$dx + dy + dz = 0, \quad dz = -(dx + dy)$$
$$d^2\kappa(4,4,4) = -\frac{1}{2}dxdy - \frac{1}{2}dx(-dx - dy) - \frac{1}{2}dy(-dx - dy) =$$
$$= -\frac{1}{2}dxdy + \frac{1}{2}(dx)^2 + \frac{1}{2}dxdy + \frac{1}{2}dxdy + \frac{1}{2}(dy)^2 = \frac{1}{2}.(dx^2 + dxdy + dy^2)$$
$$D_2 = D = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad D_1 = 1.$$

Forma je pozitivně definitní. V bodě $A = [4,\ 4,\ 4]$ nastává (vázané) lokální minimum. Čísla 4, 4, 4 tedy dávají ze všech možných činitelů nejmenší součet.

6.3. Určování globálních extrémů funkce více proměnných na množině

Definice 6.3.1.

Buď $f : R^n \to R, \Omega \subseteq Df, a \in \Omega.$.

Řekneme, že f má v bodě a globální maximum na Ω, když $\forall x \in \Omega$ platí $f(x) \le f(a)$. Klademe $\max f(\Omega) = f(a)$.

Řekneme, že f má v bodě a globální minimum na Ω, když $\forall x \in \Omega$ platí $f(x) \ge f(a)$. Klademe $\min f(\Omega) = f(a)$.

Hodnoty $\max f(\Omega)$ a $\min f(\Omega)$ se nazývají globální maximum a globální minimum funkce f na množině Ω. Místo globální též říkáme absolutní.

Věta 6.3.1. (Weierstrass)

Buď $\emptyset \ne \Omega \subseteq R^n$ ohraničená, uzavřená množina a $f : R^n \to R$ spojitá funkce na $\Omega \subseteq Df$. Platí následující tvrzení:

1. f je ohraničená na Ω.
2. Existují $a, b \in \Omega$ tak, že $\forall x \in \Omega : f(a) \le f(x) \le f(b)$, tzn. existuje $\min f(\Omega) = f(a)$ a $\max f(\Omega) = f(b)$.
3. Nechť $\min f(\Omega)$ nastane v bodě $a \in \Omega$. Pak f má v a lokální minimum, nebo $a \in h(\Omega)$.

Analogicky nechť $\max f(\Omega)$ nastane v bodě $a \in \Omega$. Pak f má v a lokální maximum, nebo $a \in h(\Omega)$.

Uvedená věta nám dává návod, jak globální extrémy hledat. Příslušný algoritmus podrobněji popíšeme v následující poznámce.

Poznámka 6.3.1. (algoritmus pro nalezení globálních extrémů na množině *Ω*)

1. Nalezneme lokální extrémy funkce f a z nich vybereme ty, které leží v uvažované množině Ω. Nechť A označuje množinu funkčních hodnot v nalezených bodech lokálních extrémů.

2. Nalezneme vázané extrémy funkce f s vazbou $V = h(\Omega)$ (tj. vázané extrémy na hranicích oblasti). Nechť B označuje množinu funkčních hodnot v nalezených bodech vázaných extrémů a dále v bodech, které jsou průniky různých vazeb.

3. Nechť $M = A \cup B$. Pak globální maximum je hodnota max(M) a globální minimum na množině hodnota min(M).

Příklad 6.3.1.

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ v množině Ω, dané podmínkami $0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 2x^2$.

I. Nabývá-li f extrémní hodnoty v bodě ležícím uvnitř M, pak v tomto bodě musí nastávat podle věty 6.3.1. lokální extrém. Podle věty 6.1.1. musí být tudíž v tomto bodě parciální derivace rovny nule.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 3\left(x^2 - y\right) = 0, \; tj. \; x^2 = y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 3\left(y^2 - x\right) = 0, \; tj. \; x = y^2$$
$$y^4 - y = 0 \quad y_1 = 0, y_2 = 1$$
$$x_1 = 0, x_2 = 1$$

Do množiny A z poznámky 6.3.1. patří pouze funkční hodnota v bodě S_1 [1,1] (druhý stacionární bod [0,0] je totiž na hranici oblasti a jeho funkční hodnota do A tudíž nepatří). V tomto bodě získáváme $f(S_1) = -1$.

II. Jestliže $f(x,y)$ nabývá své největší nebo nejmenší hodnoty na oblouku paraboly $y = 2x^2$, musí mít funkce $f(x,2x^2) = x^3 + \left(2x^2\right)^3 - 3x.2x^2 = x^3 + 8x^6 - 6x^3$ lokální extrém.

Derivace:
$$48x^5 - 15x^2 = 0, \; 3x^2\left(16x^3 - 5\right) = 0, \quad x \in (0,3)$$
$$x^3 = \frac{5}{16}, \quad x_0 = \sqrt[3]{\frac{5}{16}}$$

V úvahu tedy přichází bod $S_2 \left[\sqrt[3]{\frac{5}{16}}, 2.\sqrt[3]{\frac{5}{256}}\right]$. s funkční hodnotou patřící do množiny B.

Tato funkční hodnota je $f(S_2) = -\frac{25}{32}$.

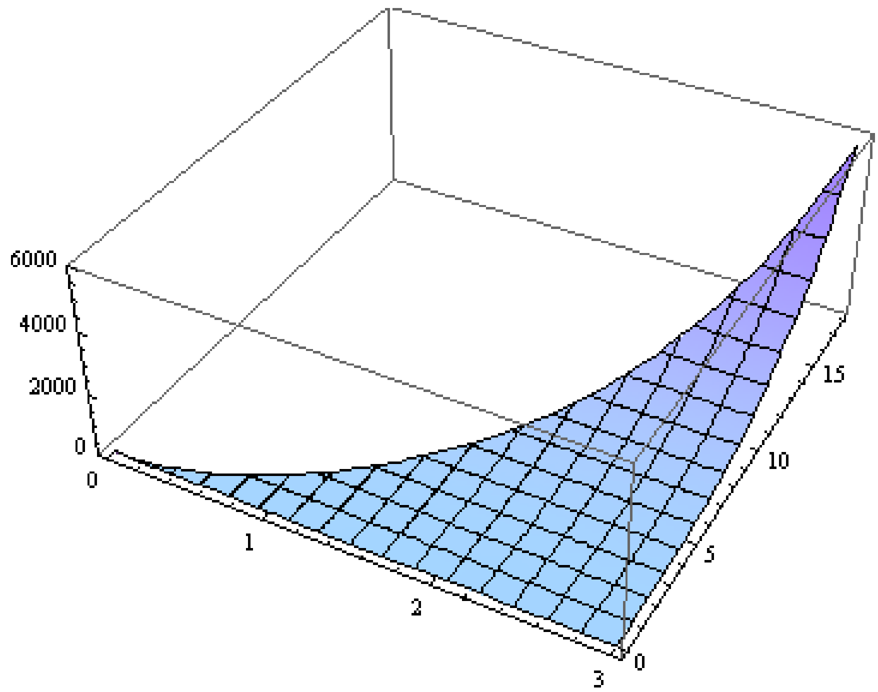
III. Pro úsečku $y = 0$, $y = 0, \quad 0 < x < 3$ má funkce $f(x,0) = x^3$ nenulovou derivaci $3x^2$, extrém nenastane, žádný bod do množiny B tudíž nezískáváme.

IV. Pro úsečku $x = 3, \; 0 < y < 18$ má funkce $f(3,y) = 27 + y^3 - 9y$, derivaci $3y^2 - 9$

Extrém tedy může nastat v tomto případě pouze v bodě $S_3\left[3,\sqrt{3}\right]$., jehož funkční hodnota tedy patří do množiny B. Tato funkční hodnota je $f(S_3) = 27-6\sqrt{3}$.

V. Dále si musíme uvědomit, že do množiny *B* musíme zařadit i body, v nichž dochází k průniku různých vazeb (v podstatě rohové body uvažované množiny *Ω*). Těmito body jsou S_4 [0,0], S_5 [3,0] a konečně S_6 [3,18]. V těchto bodech určíme funkční hodnoty. V bodě S_4 získáváme funkční hodnotu $f(S_4) = 0$, v bodě S_5 funkční hodnotu $f(S_5) = 27$, v bodě S_6 poté funkční hodnotu $f(S_6) = 5697$.

Nyní můžeme přistoupit k poslednímu kroku algoritmu z poznámky 6.3.1. a zjistit, v kterém ze 6 nalezených bodů S_1 – S_6 nastává globální maximum a ve kterém z nich globální minimum (věta 6.3.1. nám zaručuje, že nikde jinde globální extrém nastat nemůže!).
Přímým srovnáním se zjistí, že z šesti hodnot funkce v těchto bodech je největší hodnota v bodě S_6 (5697), nejmenší pak hodnota v bodě S_1 (–1).
Z obrázku 2 vytvořeném v programu Mathematica je vidět, že maximální hodnota na dané množině skutečně nastává v bodě [3,18]. Minimální hodnotu není možné z obrázku odvodit kvůli velkému měřítku.



Obrázek 6.3.1.: Graf funkce z příkladu 6.3.1.

Příklad 6.3.2.

Vyšetřete absolutní extrémy funkce $z = x^3 + 2x^2 + y^2 - 2$ v uzavřené oblasti Ω ohraničené křivkami $y = 4, y = x^2$.

Řešení:

I. Nabývá-li f extrémní hodnoty v bodě ležícím uvnitř , pak v tomto bodě musí nastávat podle věty 6.3.1. lokální extrém. Podle věty 6.1.1. musí být tudíž v tomto bodě parciální derivace rovny nule.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4x = 0, \quad x_1 = 0, \; x_2 = -\frac{4}{3}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y = 0, \quad y = 0$$

Vzhledem k tomu, že $y = 0$, nezískali jsme žádný stacionární bod uvnitř oblasti, množina A z poznámky 6.3.1 je tudíž prázdná.

II. Budeme hledat extrém na hranici oblasti dané úsečkou na přímce $y = 4$: Dosazením získáme funkci jedné proměnné a určíme její derivaci:

$$z = x^3 + 2x^2 + 14, \quad x \in \langle -2, 2 \rangle$$
$$z' = 3x^2 + 4x, \quad x_1 = 0, \; x_2 = -\frac{4}{3}$$

Našli jsme tedy dva možné body extrému $S_1 = [0, 4]$, $S_2 = \left[-\frac{4}{3}, 4\right]$ V těchto bodech určíme funkční hodnoty. V bodě S_1 získáváme funkční hodnotu $f(S_1) = 14$, v bodě S_2 poté funkční hodnotu $f(S_2) = \frac{155}{27}$.

III. Budeme hledat extrém na hranici oblasti dané parabolou $y = x^2$. Dosazením získáme funkci jedné proměnné a určíme její derivaci:

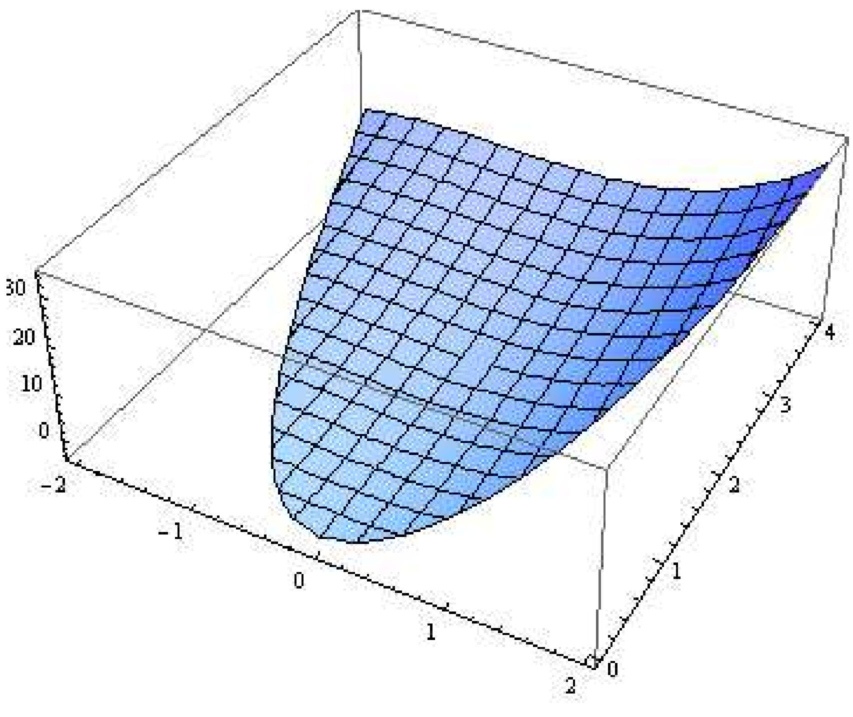
$$y = x^2: \quad z = x^3 + 2x^2 + x^4 - 2, \; x \in \langle -2, 2 \rangle$$
$$z = x^4 + x^3 + 2x^2 - 2$$

$$z' = 4x^3 + 3x^2 + 4x = x\left(4x^2 + 3x + 4\right)$$
$$z(0) = 2$$

Řešením jsme získali jediný bod, kde se může nacházet extrém, je jim bod S_3 [0,0]. V tomto bodě určíme funkční hodnotu, získáváme funkční hodnotu $f(S_3) = -2$.

IV. Dále si musíme uvědomit, že do množiny *B* (zatím obsahuje body $S_1 - S_3$) je třeba přiřadit i body, kde dochází k průniku různých vazeb. V našem případě jsou to body S_4 [2,4] a S_5 [-2,4]. V těchto bodech určíme funkční hodnoty. V bodě S_4 získáváme funkční hodnotu $f(S_4) = 30$, v bodě S_5 poté funkční hodnotu $f(S_5) = 14$.

Nyní můžeme přistoupit k poslednímu kroku algoritmu z poznámky 6.3.1. a zjistit, v kterém ze šesti nalezených bodů $S_1 - S_5$ nastává globální maximum a ve kterém z nich globální minimum (věta 6.3.1. nám zaručuje, že nikde jinde globální extrém nastat nemůže).
Přímým srovnáním se zjistí, že z šesti hodnot funkce v těchto bodech je největší hodnota v bodě S_4 (30), nejmenší pak hodnota v bodě S_3 (–2).
Z obrázku 2 vytvořeném v programu Mathematica je vidět, že maximální hodnota na dané množině skutečně nastává v bodě [2,4] a minimální hodnotu v bodě [0,0].



Obrázek 6.3.2.: Graf funkce z příkladu 6.3.2.

Příklad 6.3.3.

Nalezněte největší a nejmenší hodnoty funkce $z = e^{-x^2-y^2}.\left(2x^2+3y^2\right)$ v kruhu $x^2+y^2 \le 4$.

Řešení:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-x^2-y^2}.(-2x).\left(2x^2+3y^2\right)+e^{-x^2-y^2}.4x=e^{-x^2-y^2}\left(-4x^3-6xy^2+4x\right)=0$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-x^2-y^2}.(-2x).\left(2x^2+3y^2\right)+e^{-x^2-y^2}.6y=e^{-x^2-y^2}\left(-4x^2y-6y^3+6y\right)=0$$

rovnice:

A)

$$2x.\left(2-2x^2-3y^2\right)=0$$
$$2y.\left(2-2x^2-3y^2\right)=0$$
$$1.\ x=0\wedge y=0\left[0,0\right]-\textit{stacionární bod}$$
$$2.\ x=0\wedge 3-2x^2-3y^2=0,\ y^2=1:\left[0,1\right],\left[0,-1\right]$$
$$3.\ y=0\wedge 2-2x^2-3y^2=0,\ x^2=1:\left[1,0\right],\left[-1,0\right]$$
$$4.\ 2-2x^2-3y^2=0\wedge 3-2x^2-3y^2=0\ \textit{nekompatibi}\ln\textit{í}\ \emptyset.$$

všech pět stacionárních bodů leží uvnitř kruhu o poloměru 2.

B) Hledáme extrémy na kružnici $x^2+y^2=4$ - vázané extrémy

$$\kappa(x,y)=e^{-x^2-y^2}.\left(2x^2+3y^2\right)+\lambda.\left(x^2+y^2-4\right)$$
$$\frac{\partial\kappa}{\partial x}=e^{-x^2-y^2}.\left(-4x^3-6xy^2+4x\right)+2\lambda x=0$$
$$\frac{\partial\kappa}{\partial y}=e^{-x^2-y^2}.\left(-4x^2y-6y^3+6y\right)+2\lambda y=0$$
$$e^{-x^2-y^2}.\left(-4x^3-6xy^2+4x\right)+2\lambda x=0$$
$$\underline{e^{-x^2-y^2}.\left(-4x^2y-6y^3+6y\right)+2\lambda y=0}$$
$$e^{-x^2-y^2}.2xy=0\quad x=0\vee y=0$$
$$\left[0,2\right],\left[0,-2\right],\left[2,0\right],\left[-2,0\right]$$

Celkem 9 stacionárních bodů:

$$f(0,0)=0,\ f(0,1)=e^{-1}.3=\frac{3}{e}=f(0,-1),$$
$$f(1,0)=e^{-1}.2=\frac{2}{e}=f(-1,0),\ f(0,2)=e^{-4}.12=\frac{12}{e^4}=f(0,-2)$$
$$f(2,0)=e^{-4}.8=f(-2,0)=\frac{8}{e^4}$$

Závěr: Minimální hodnota $z=0$ nastává v bodě $\left[0,0\right]$. Maximální hodnota $z=\frac{3}{e}$ nastává v bodech $\left[0,1\right]$ a $\left[0,-1\right]$.

Závěr

Tato diplomová práce je věnována využití kvadratických forem při vyšetřování extrémů funkce více reálných proměnných. Tato problematika je probírána ve vysokoškolském kurzu matematické analýzy, cílem mé práce bylo zpracovat stručný teoretický souhrn tématu a především připravit řadu řešených příkladů, které by čtenáři umožnily pochopit, jak se v různých situacích řeší problém nalezení extrémů funkce více proměnných.

V první části práce ve stručnosti uvádím základní informace o určování lokálních extrémů funkce jedné reálné proměnné, pojem extrém je zde definován a je zformulována je příslušná nutná a postačující podmínka. V další části se analogickou problematikou zabývám u funkce dvou proměnných. Ke zobecnění uvedeného postupu pro případ n proměnných je však třeba zavést využít poznatků z lineární algebry a zavést pojem kvadratická forma. Dále je třeba se naučit se tyto kvadratické formy klasifikovat. Tomu je věnována kapitola 3. Ke klasifikaci kvadratických forem mohou významně pomoci vlastní čísla matice případně Sylvestrovo kritérium opírající se o výpočet tzv. minorů matice. Toto téma bylo řešeno v kapitole 4. Osobě slavného britského matematika Jamese Josepha Sylvestra, jenž se v 19. století významně zasloužil o rozvoj maticového počtu, je věnována další část této diplomové práce. V závěrečné 6. kapitole se již na základě výsledků předchozích částí zabývám přímo hledáním lokálních extrémů v obecném případě n reálných proměnných. Věnuji se i určování vázaných extrémů příslušných funkcí a zjišťování největší a nejmenší hodnoty funkce na množině. Teoretický výklad je doplněn řadou řešených příkladů, které mohou být užitečné případným zájemcům a tuto problematiku.

Použitá literatura

Angot, A.: Užitá matematika pro elektrotechnické inženýry, SNTL, Praha 1972.

Bican, L.:Lineárná algebra, SNTL, Praha 1979.

Bican, L.: Lineární algebra v úlohách, SPN, Praha 1979. Skriptum MFF UK Praha.

Bečvář, J.:Lineární algebra, Matfyzpress, 2005.

Černý, I.: Úvod do inteligentního kalkulu I, II Academia, Praha 2002.

Rektorys, K. a kol.: Přehled užité matematiky I, Prometheus, Praha 2000.

Škrášek, J. a kol.: Základy aplikované matematiky I, SNTL, Praha 1983.

Vizualizace výsledků [online], [cit. 2012-02-05], dostupné z www

< http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/DataVisualization.html>.

Resume

This diploma thesis is devoted to application of quadratic forms for investigation of extrema of functions of n real variables. In the first part, I shortly described basic points about extrema of functions of one real variable. I defined this term and formulated the necessary and sufficient condition for the existence of extrema. I generalized this concept for the case of function of two variables in the second chapter of the thesis. However, for the formulation of general solution it is necessary to define the term quadratic form and be able to make a classification of such forms. The third chapter of the thesis is devoted to this topic. Eigenvalues of the matrix and Sylvester criterion which is based on the minors of the matrix may be very useful from the point of view of classification of the quadratic forms. The next part of the thesis is thus closely connected with the matrix theory. Some basic information about James Joseph Sylvester, a mathematician who greatly contributed to the development of matrix theory, are included in the fifth chapter. Finally, the last chapter is devoted to the general investigation of the extrema of functions of n variables using the methods developed in the previous parts of the thesis. Not only typical local extrema without special conditions, but too extrema subject to equality constraints and global extrema on the defined set, are discussed. Theory is accompanied by a number of examples which may be useful for potential persons interested in this topic.