Západočeská univerzita v Plzni

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA TECHNICKÉ VÝCHOVY, FYZIKY A MATEMATIKY

ODDĚLENÍ MATEMATIKY

ROZKLAD PSD POLYNOMŮ V SOUČTY ČTVERCŮ

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Lenka Šteflová

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Tělesná výhova-Matematika

Vedoucí práce: *Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.*

Plzeň, 25. červen 2012

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 25. červen 2012

....

vlastnoruční podpis

Touto cestou bych chtěla poděkovat vedoucímu práce Doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za vstřícný přístup, pomoc a věcné připomínky při realizaci mé práce.

OBSAH

1 ÚVOD

V diplomové práci navazuji na práci bakalářskou, kde jsem studovala 17. Hilbertův problém, který řešil nalezení způsobu, jak vyjádřit definitní racionální funkci jako součet několika čtverců racionálních funkcí. Zaměřili jsme se také na algoritmus pro zapsání polynomu ve tvaru součtu čtverců reálných polynomů a na součty čtverců a Gramovy matice.

V diplomové práci se zaměřím na případy, kdy množina všech pozitivně semidefinitních polynomů splývá s SOS (součtem čtverců). Podíváme se také na polynom homogenního stupně. Řekneme si, kdy je kvadratická forma pozitivně definitní, negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní a indefinitní a jak to zjistit pomocí vhodné úpravy formy.

V druhé kapitole předvádíme nalezení rozkladu polynomu v součet čtverců, při čemž využíváme množství poznatků z lineární algebry a také poznatků všeobecného charakteru, jako je Descartovo znaménkové pravidlo. Během řešení několika příkladů také využíváme programy počítačové algebry jako je Mathematica 7 a 8 a pro kontrolní výpočty také využívám WolframAlpha.

2 POLYNOMY JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ, HOMOGENNÍ POLYNOMY

Pokusme se vyřešit příklad, pocházející z Finska a určený pro přípravu budoucích řešitelů matematické olympiády:

Příklad 1: Určete počet reálných kořenů polynomu

$f(x) = x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}$.

Řešení: A) Pomineme zatím absolutní člen $\frac{5}{2}$ a povšimneme si, že z jemu předcházejících dvou sčítanců by bylo možné vytknout číslo 4 a získat $4(x^2 - x)$. Podobně lze psát

$3x^4 - 3x^3 = 3x^2(x^2 - x)$, dále

$2x^6 - 2x^5 = 2x^4(x^2 - x)$ a nakonec

$x^8 - x^7 = x^6(x^2 - x)$.

Můžeme proto celkově napsat

$f_1(x) = x^8 - x^7 + 2x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x = (x^2 - x).(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4)$. (1)

Výraz $x^2 - x$ je roven nule pro $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. Rozlišíme tedy tři případy:

a) Pro $x \in (-\infty, 0)$ je činitel $x^2 - x = x(x - 1)$ kladný a výraz $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4$ je kladný dokonce pro každé $x \in$ R. Proto je polynom $f_1(x)$ v intervalu $(-\infty, 0)$ kladný.

b) Pro $x \in (1, \infty)$ platí totéž. Je dále $f_1(0) = f_1(1) = 0$. V tuto chvíli již víme, že nerovnost $f_1(x) \geq 0$ platí v $(-\infty, 0\rangle \cup \langle 1, \infty)$ a zbývá prozkoumat chování funkce f_1 v intervalu $(0, 1)$.

c) V tomto intervalu je součin $x(x - 1)$ záporný. Snadno také nahlédneme, že nejmenší hodnoty tento součin nabývá v bodě $x = \frac{1}{2}$ a touto hodnotou je $-\frac{1}{4}$.

Naproti tomu činitel $(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4)$ je v $(0, 1)$ kladný. Vidíme také, že pro $0 < x < 1$ platí $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4 < 1^6 + 2.1^4 + 3.1^2 + 4 = 10$. V $(0, 1)$ tedy z jedné strany platí $x(x - 1) \geq -\frac{1}{4}$ a z druhé strany $x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4 < 10$. Pro součin dostáváme

$f_1(x) = x(x - 1).(x^6 + 2x^4 + 3x^2 + 4) > 10.-\frac{1}{4} = -\frac{5}{2}$.

Nyní se vyjasnil význam absolutního členu $\frac{5}{2}$ v zadání původního polynomu $f(x)$, v intervalu (0, 1) totiž je $f(x) > 0$.

Shrneme – li výsledky získané v bodech a), b) a c), můžeme konstatovat, že pro všechna $x \in$ R platí $f(x) > 0$, tj. polynom ***f*** **nemá žádné reálné kořeny**.

To je jedna cesta, jak ukázat, že polynom $f(x)$ je kladný pro všechna $x \in$ R. Ukážeme si ještě druhou možnost, jak dospět ke stejnému výsledku.

B) Můžeme psát $x^8 - x^7 + 2x^6 = x^6(x^2 - x + 2) = x^6\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\right]$. Teď je již vidět, že jsme schopni zapsat první tři členy polynomu $f(x)$ ve tvaru součtu čtverců vhodných polynomů, ale vedoucí člen „nezpracovaného zbytku“ polynomu $f(x)$ je $-2x^5$ a to není dobré. Je proto „chytřejší“ vzít mezi první členy jenom jedno x^6 a druhé si ponechat „v rezervě“ pro další trojčlen. Pišme tedy formálně

$f(x) = x^8 - x^7 + x^6 + x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}$ a nyní máme

$x^8 - x^7 + x^6 = x^6(x^2 - x + 1) = x^6\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]$. Proto je

$f(x) = x^6\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] + x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}$ a teď vhodně upravíme další tři sčítance. Je

$x^6 - 2x^5 + 3x^4 = x^4\left[(x-1)^2+2\right]$ a opět si můžeme $2x^4$ „odložit“ pro další úpravy.

Máme pak

$f(x) = x^6\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right] + x^4(x-1)^2 + 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 4x + \frac{5}{2}$ a pokusíme se upravit trojčlen $2x^4 - 3x^3 + 4x^2$. Můžeme psát

$2x^4 - 3x^3 + 4x^2 = 2x^2(x^2 - 3x + 2) = 2x^2\left[(x-\frac{3}{4})^2 + \frac{23}{16}\right]$.

Celkem tedy už máme

$f(x) = x^6\left[\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}\right] + x^4\,(x-1)^2 + 2\,x^2(x-\tfrac{3}{4})^2 + \dfrac{23}{8}\,x^2 - 4\,x + \tfrac{5}{2}$. Nakonec bychom rádi upravili poslední trojčlen. Platí

$$\frac{23}{8}\,x^2 - 4\,x + \frac{5}{2} = \frac{23}{8}\left[\left(x-\frac{16}{23}\right)^2 + \frac{20}{23} - \frac{16^2}{23^2}\right] = \frac{23}{8}\left(x-\frac{16}{23}\right)^2 + \frac{23}{8}.\left(\frac{20}{23}-\frac{16^2}{23^2}\right) =$$

$$= \frac{23}{8}\left(x-\frac{16}{23}\right)^2 + \frac{51}{46}.$$

Můžeme tudíž zapsat

$$f(x) = x^6\left[\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\tfrac{3}{4}\right] + x^4\,(x-1)^2 + 2\,x^2(x-\tfrac{3}{4})^2 + \frac{23}{8}\left(x-\frac{16}{23}\right)^2 + \frac{51}{46}. \qquad (2)$$

Ze zápisu (2) již nezápornost polynomu $f(x)$ přímo vyplývá, nejde tu však o „čistý“ zápis ve tvaru součtu čtverců. K tomu bychom se však již snadno dostali:

$$f(x) = \left(x^4 - \tfrac{1}{2}x^3\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^3\right)^2 + \left(x^3 - x^2\right)^2 + \left(\sqrt{2}\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)\right)^2 + \left[\frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}}\left(x-\frac{16}{23}\right)\right]^2 +$$

$$+\left(\sqrt{\frac{51}{46}}\right)^2. \qquad (3)$$

Ze zápisu (3) znovu vidíme, že polynom ***f*(*x*) je pro všechna *x* ∈ R kladný a nemá tedy reálné kořeny.** Mimochodem, z algebry víme, že každý polynom s reálnými koeficienty, který nemá reálné kořeny, musí mít za své kořeny dvojice komplexně sdružených čísel. To je tedy i případ mnohočlenu $f(x)$.

Prostudujme, jak se chovají polynomy tohoto typu, tj. takové, které nemají žádný reálný kořen.

Příklad 2: Monický polynom $p(x) \in \mathrm{R}[x]$ (tj. koeficient u vedoucího členu je 1) má právě dva sdružené komplexní kořeny $x_1 = 1 - 2i$ a $x_2 = 1 + 2i$. Potom platí:

$p(x) = (x - 1 + 2i)\,(x - 1 + 2i) = (x - 1)^2 + 4 = x^2 - 2\,x + 5$. Vidíme, že tento polynom je součtem dvou čtverců.

Příklad 3: Monický polynom $p(x) \in R[x]$ má právě dvě dvojice komplexně sdružených kořenů, a to $x_1 = 3 - 2i$, $x_2 = 3 + 2i$ a $x_3 = 4 - 3i$ a $x_4 = 4 + 3i$. Potom platí $p(x) = (x - 3 + 2i)(x - 3 - 2i)(x - 4 + 3i)(x - 4 - 3i) = ((x - 3)^2 + 4)((x - 4)^2 + 9) =$

$= (x^2 - 6x + 13)(x^2 - 8x + 25) = x^4 - 14x^3 + 86x^2 - 254x + 325$. Polynom $p(x)$ jsme nalezli v explicitním tvaru, ale nezískali jsme jeho rozklad v součet čtverců. Zkusme ještě jednu úpravu s jiným pořadím činitelů. Pišme

$p(x) = ((x - 3 + 2i)(x - 4 + 3i))((x - 3 - 2i)(x - 4 - 3i)) =$

$= ((x^2 - 7x + 6) + (5x - 17)i)((x^2 - 7x + 6) - (5x - 17)i) =$

$= (x^2 - 7x + 6)^2 + (5x - 17)^2$. Vidíme, že i tento polynom je součtem dvou čtverců.

Otevřeli jsme si cestu k důkazu obecného tvrzení:

Lemma 1: Jestliže monický polynom $p(x) \in R[x]$ má výhradně jen sdružené komplexní kořeny, **pak je součtem dvou čtverců**.

Důkaz: Polynom $p(x)$ lze psát ve tvaru součinu

$$p(x) = \prod_{j=1}^{s}\left(x - z_j\right)\left(x - \overline{z_j}\right),$$

kde z_j a $\overline{z_j}$ jsou pro $j = 1, 2, \ldots, s$ komplexně sdružené kořeny polynomu p. Utvořme si součin

$$\prod_{j=1}^{s}\left(x - z_j\right) = q(x) + i\,r(x).$$

Pak, jak se snadno přesvědčíme a jak jsme viděli v předchozím příkladu, platí též rovnost

$$\prod_{j=1}^{s}\left(x - \overline{z_j}\right) = q(x) - i\,r(x).$$

Potom ovšem platí

$$p(x) = \prod_{j=1}^{s}\left(x - z_j\right)\left(x - \overline{z_j}\right) = (q(x) + i\,r(x)) \,.\, (q(x) - i\,r(x)) = q^2(x) + r^2(x).$$

Také polynom $f(x)$ z příkladu 1 musí být součtem pouhých dvou čtverců polynomů. Takovýto rozklad ale může být těžké najít. V daném případě totiž neznáme všech osm jeho komplexních kořenů, proto nemůžeme aplikovat cestu, známou z příkladu 3 anebo z lemmatu 1.

Postoupíme tedy v teorii.

Definice: Polynom $p(x) \in R[x]$ se nazývá pozitivně semidefinitní, jestliže pro všechna $x \in R$ platí $p(x) \geq 0$.

Definice: Polynom $p(x) \in R[x]$ je součtem čtverců (polynomů), jestliže existují polynomy $g_1(x)$, $g_2(x)$, …, $g_s(x) \in R[x]$ takové, že $p(x) = \sum_{i=1}^{s} g_i^2(x)$. (Užívá se i zkratka SOS, Sum of Squares).

Jaký je vztah obou definic? Okamžitě vidíme, že je – li $p(x) \in R[x]$ součtem čtverců, je také pozitivně definitní. Platí pro reálné polynomy jedné neurčité též opak?

Buď $p(x) \in R[x]$ pozitivně semidefinitní polynom. Nepožadujeme ani, aby byl monický, tj. koeficient u vedoucího členu buď $a \in R$. Z algebry víme, že $p(x)$ může mít jen reálné kořeny anebo jistý počet dvojic komplexně sdružených kořenů. To je tedy poněkud obecnější situace než jakou jsme zpracovali v lemmatu 1. Označme reálné kořeny polynomu $p(x)$ jako α_1, α_2, …, α_k a tyto kořeny ještě mohou mít násobnosti r_1, $r_{2,\ \ldots,}$ r_k. Existuje tedy rozklad polynomu $p(x)$ v součin kořenových činitelů ve tvaru

$$p(x) = a \prod_{j=1}^{s}\left(x - z_j\right)\left(x - \overline{z_j}\right) . \prod_{i=1}^{k}\left(x - a_i\right)^{r_i} .$$

Z toho, že platí $p(x) \geq 0$ pro všechna $x \in R$, vidíme, že $a > 0$ a že reálné kořeny α_1, α_2, …, α_k se musejí vyskytovat jedině se sudými násobnostmi. (Pokud by tomu tak nebylo, musel by polynom p „v blízkosti“ reálného kořene s lichou násobností měnit znaménko a zřejmě by tedy neplatilo $p(x) \geq 0$ pro všechna $x \in R$). Pak ale můžeme modifikovat nám už známý důkaz lemmatu 1. Lze psát

$$p(x) = \left(\sqrt{a}\prod_{j=1}^{t}\left(x - z_j\right)\right)\left(\sqrt{a}\prod_{j=1}^{t}\left(x - \overline{z_j}\right)\right),$$

kde nyní některá z čísel z_j mohou být reálná. Závěrečná argumentace je stejná jako při důkazu lemmatu 1. Jestliže $\left(\sqrt{a}\prod_{j=1}^{t}\left(x-z_j\right)\right)$ = $q(x)$ + i $r(x)$, kde oba polynomy $q(x)$ i $r(x)$ mají reálné koeficienty, pak zřejmě $\left(\sqrt{a}\prod_{j=1}^{t}\left(x-\overline{z_j}\right)\right)$ = $q(x) - i\, r(x)$, takže celkem platí

$$p(x) = \left(\sqrt{a}\prod_{j=1}^{t}\left(x-z_j\right)\right)\left(\sqrt{a}\prod_{j=1}^{t}\left(x-\overline{z_j}\right)\right) = (q(x) + i\, r(x)).(\, q(x) - i\, r(x)) = q^2(x) + r^2(x).$$

Ukázali jsme tedy, že pokud je polynom s reálnými koeficienty p o jedné neurčité pozitivně semidefinitní, pak je již součtem čtverců polynomů (a to přesněji dvou čtverců). (Pokud p má výhradně jen reálné kořeny, lze jej vyjádřit dokonce jen jako jediný čtverec jistého polynomu).

Závěr: Pro reálné polynomy jedné neurčité pojmy „být pozitivně definitní“ a „být součtem čtverců“ splývají.

Ilustrujme hlavní ideu předchozího důkazu příkladem.

Příklad 4: Monický polynom $p(x) \in \mathrm{R}[x]$ má jediný reálný kořen 2 a tento kořen je dvojnásobný, $x_1 = x_2 = 2$ a právě dva sdružené komplexní kořeny $x_3 = 4 - 2i$ a $x_4 = 4 + 2i$. Určete tento polynom a zapište jej jako součet čtverců.

Řešení: Nejprve určeme polynom $p(x)$ explicitně. Je $a = 1$ a $p(x) = (x-2)^2\,(x-4+$ $+\,2i)\,(\,x-4-2i).= (x^2 - 4\,x + 4)(\,x^2 - 8\,x + 20) = x^4 - 12\,x^3 + 56\,x^2 - 112\,x + 80$.

Teď ukažme, jak jej zapsat jakožto součet čtverců: $p(x) = (\,(x-2)(\,(x-4+2i)\,).(\,(\,x-2)$ $((x-4+2i)\,) =\ (x^2 - 6x + 8 + (2\,x-4\,)\,i)\,((x^2 - 6x + 8 - (2\,x-4\,)\,i) = (x^2 - 6x + 8)^2 +$ $+\,(2\,x-4\,)^2$.

Takto lze postupovat, pokud bychom znali všechny kořeny polynomu p. V části B) našeho úvodního příkladu jsme se naučili, jak se obvykle postupuje ve snaze získat rozklad polynomu v součet čtverců „lidskými metodami“. Jenže rozklad (3) obsahuje až příliš mnoho čtverců. Učiňme ještě pokus (s nejistým výsledkem), zda by se nedal polynom $2\,f(x)$ zapsat jakožto součet dvou čtverců. Polynom f jsme vynásobili dvěma, abychom se v dalším vyhnuli počítání se zlomky. Je $2\,f(x) = 2x^8 - 2x^7 + 4\,x^6 - 4\,x^5\ + 6\,x^4 - 6\,x^3 +$ $+\,8\,x^2 - 8\,x + 5$. Zkusíme, zda by tento polynom nebylo možné zapsat ve tvaru $2\,f(x) =$ $= (x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + 1)^2 + (x^4 + d\,x^3 + e\,x^2 + f\,x + 2)^2$, přičemž koeficienty $a, b, c, d, e,$

$f \in$ R se pokusíme určit. Výrazy vpravo umocníme s využitím programů počítačové algebry a poté porovnáme koeficienty obou polynomů. V programu Mathematica zadáme

```
Expand[(x^4+a*x^3+b*x^2+c*x+1)^2+(x^4+d*x^3+e*x^2+f*x+2)^2]
```

a obdržíme

$5 + 2\,c\,x + 4\,f\,x + 2\,b\,x^2 + c^2\,x^2 + 4\,e\,x^2 + f^2\,x^2 + 2\,a\,x^3 + 2\,b\,c\,x^3 + 4\,d\,x^3 + 2\,e\,f\,x^3 + 6\,x^4 + b^2\,x^4 + 2\,a\,c\,x^4 + e^2\,x^4 + 2\,d\,f\,x^4 + 2\,a\,b\,x^5 + 2\,c\,x^5 + 2\,d\,e\,x^5 + 2\,f\,x^5 + a^2\,x^6 + 2\,b\,x^6 + d^2\,x^6 + 2\,e\,x^6 + 2\,a\,x^7 + 2\,d\,x^7 + 2\,x^8$.

Dostáváme zřejmě soustavu sedmi nelineárních rovnic pro neznámé a, b, c, d, e, f:

x^7: $a + d = -1$

x^6: $a^2 + 2\,b + d^2 + 2\,e = 4$

x^5: $2\,a\,b + 2\,c + 2\,d\,e + 2\,f = -4$

x^4: $6 + b^2 + 2\,a\,c + e^2 + 2\,d\,f = 6$

x^3: $2a + 2\,b\,c + 4\,d + 2\,e\,f = -6$

x^2: $2\,b + c^2 + 4\,e + f^2 = 8$

x: $2\,c + 4\,f = -8$.

Jde zřejmě o relativně velmi obtížný problém, proto využijeme programu Mathematica:

Reduce [a+d= = a -1 && a^2 + 2 b + d^2 + 2 e = = 4 && 2 a *b + 2 c + 2 d *e + 2 f = = -4

&& 6+b^2 + 2 a* c + e^2 + 2 d *f= = 6 && 2a + 2 b *c + 4 d + 2 e* f= = -6 && 2 b
+ c^2 + 4 e + f^2 = = 8 && 2 c + 4 f = = -8, {a, b, c, d, e, f}, Reals]

a dostáváme výsledek

```
False.
```

Co to znamená? Ve snaze si poněkud usnadnit výpočet jsme si zadali některé hodnoty sami, tj. předepsali jsme „sympatické“ absolutní členy 1, resp. 2 a stalo se, že úloha již nemá řešení. I když podle teorie lze zadaný polynom zapsat jako součet dvou čtverců, mohou hledané polynomy mít „ošklivé“ koeficienty.

Můžeme tedy v programu Mathematica obecně zapsat

```
Expand[(a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e)^2+(f*x^4+g*x^3+h*x^2+k*
x +l)^2]
```

upravit si vzniklý polynom a nechat program řešit vzniklou soustavu, např. povelem

```
FindInstance[e²+l²==5/2&&(2d*e+2k*l)==-4&&
(d²+2ce+k²+2hl)==4&&(2cd+2be+2hk+2gl)==
3&&(c²+2bd+2ae+h²+2gk+2fl)==3&&(2bc+2ad+2gh+2fk)==
2&&(b²+2ac+g²+2fh)==2&&(2ab+2fg)==1
&&(a²+f²)==1,{a,b,c,d,e,f,g,h,k,l},Reals].
```

Jenže s každou přidanou neznámou prudce roste doba potřebná k výpočtu a na běžném počítači je zřejmě neúnosně dlouhá. To rehabilituje shora popsaný „lidský“ přístup, kdy jsme nalezli rozklad polynomu f v součet více čtverců než jen dvou. Navíc postupně vyvineme systematičtější metodu využívající lineární algebru pro hledání podobných rozkladů, případně alespoň metodu, vydávající potvrzení o tom, že testovaný polynom je pozitivně (semi)definitní. Mathlab v balíčku SeDuMi vydá výsledek:

```
>> syms x ;
>> p = x^8-x^7+2*x^6-2*x^5+3*x^4-3*x^3+4*x^2-4*x+5/2;
>> [Q,Z,D]=findsos(p,'rational')
Size: 25   9
 SeDuMi 1.1R3 by AdvOL, 2006 and Jos F. Sturm, 1998-2003.
Alg = 2: xz-corrector, Adaptive Step-Differentiation, theta = 0.250, beta = 0.500
eqs m = 9, order n = 6, dim = 26, blocks = 2
nnz(A) = 15 + 0, nnz(ADA) = 81, nnz(L) = 45
 it :    b*y      gap    delta  rate   t/tP*  t/tD*   feas cg cg  prec
  0 :            2.47E+000 0.000
```

```
  1 : -4.58E-001 5.07E-001 0.000 0.2058 0.9000 0.9000   1.12  1  1  1.5E+000
  2 : -3.71E-002 3.92E-002 0.000 0.0773 0.9900 0.9900   1.59  1  1  6.5E-001
  3 : -3.61E-006 4.19E-005 0.000 0.0011 0.9999 0.9999   1.12  1  1  2.1E-003
  4 : -4.06E-013 4.23E-012 0.000 0.0000 1.0000 1.0000   1.00  1  1  2.4E-010

iter seconds digits       c*x               b*y
  4      0.3   2.7  0.0000000000e+000 -4.0622631943e-013
|Ax-b| =  8.1e-012, [Ay-c]_+ =  6.6E-013, |x|= 6.9e+000, |y|= 2.6e-012

Detailed timing (sec)
   Pre          IPM          Post
2.500E-001    3.438E-001    7.813E-002
Max-norms: ||b||=4, ||c|| = 0,
Cholesky |add|=0, |skip| = 0, ||L.L|| = 1.
 Residual norm: 8.1026e-012
          iter: 4
     feasratio: 1.0000
          pinf: 0
          dinf: 0
        numerr: 0
        timing: [0.2500 0.3438 0.0781]
        cpusec: 0.6719
```

```
Q =

   10   -8    0   -3    0
   -8   16   -3    0    0
    0   -3   12   -4    0
   -3    0   -4    8   -2
    0    0    0   -2    4

Z =

   1
   x
  x^2
  x^3
  x^4

D =  4
```

V Matlabu a „balíčcích SOOSTOOLS a Sedumi“ jsme zjistili, že pro vektor $\vec{z} = (1, x, x^2, x^3, x^4)$ platí $\vec{z}\,\mathrm{Q}\,\vec{z}^{\,\mathrm{T}} = \mathrm{D}.p = 4.p(x)$. Oním certifikátem semidefinitnosti polynomu p jsou vlastnosti matice Q. Obdobné situace budeme studovat později i pro polynomy více neurčitých.

Nyní přejdeme k reálným polynomům ve více neurčitých. Buď tedy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ polynom s reálnými koeficienty stupně d. (Připomeňme, že stupněm polynomu více neurčitých rozumíme maximální prvek ze stupňů jeho monomů, tj. členů polynomu tvaru $a\, x_1^{i_1} x_2^{i_2} .... x_n^{i_n}$).

Příklad: Polynom $p(x, y, z) = 3x^2y + 2xy + x - 4y$ obsahuje čtyři monomy po řadě stupňů 3, 2, 1, 1. Je max (3, 2, 1, 1) = 3 a je tedy st p = 3.

I na polynomy více neurčitých lze zobecnit nám již známé definice z teorie polynomů jedné reálné proměnné.

Definice: Řekneme, že polynom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je pozitivně semidefinitní, jestliže pro každý bod $[a_1, a_2, \ldots, a_n] \in R^n$ platí $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geq 0$.

Je známo, že dokázat toto tvrzení je obecně velmi obtížné.

Definice: Polynom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je součtem čtverců (polynomů), jestliže existují polynomy $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, …, $g_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ takové, že $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{s} g_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. (Užívá se opět i zkratka SOS, Sum of Squares).

Nyní chceme dospět k pojmu homogenní polynom.

Příklad: Polynom $p(x, y, z) = x^3 y^2 + 6\, x\, y^4 + y^5$ je homogenní stupně 5. Všechny jeho monomy mají totiž stejný stupeň $d = 5$. Naproti tomu polynom $q(x, y) = x\, y^2 - 3\, x\, y + y^4 + 11$ není homogenní.

Definice: Řekneme, že polynom $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ je homogenní stupně d, jestliže platí $f(t\, x_1, t\, x_2, \ldots, t\, x_n) = t^n f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Populárně můžeme říci, že homogenní polynomy by obstály v rozměrové zkoušce běžné ve fyzice. Kdybychom každé z proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ přiřadili rozměr metr [m], měl by každý z monomů tohoto polynomu rozměr m^d.

Homogenní polynomy stupně d se také nazývají formy. Posoudíme teď, jak je možné jakýkoli polynom homogenizovat a proč německý matematik David Hilbert studoval jen formy.

Příklad: Polynom $q(x, y) = x\, y^2 - 3\, x\, y + y^4 + 11$ není homogenní, jak víme z předchozího příkladu. Jde o polynom stupně $d = 4$. Zavedeme nyní novou proměnnou x_0 a budeme psát $q(x_0, x, y) = x_0^d \,.\, q(x / x_0, y / x_0) = x_0^4 \,.\, \left(\left(\frac{x}{x_0}\right).\left(\frac{y}{x_0}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{x_0}\right).\left(\frac{y}{x_0}\right) + \left(\frac{y}{x_0}\right)^4 + 11\right) = x_0.x.y^2 - 3\, x_0^2\, x\, y + y^4 + 11\, x_0^4$. Polynom $q(x_0, x, y)$ je již formou stupně $d = 4$.

Obecně budiž $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polynom stupně d. Položme

$\tilde{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^d \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$. Polynom $\tilde{f}$ se nazývá homogenizací polynomu f.

Naším hlavním cílem je studovat pozitivní semidefinitnost polynomu $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, resp. fakt, zda je součtem čtverců. To má zřejmě smysl pouze pro polynomy sudého stupně d. Nicméně existuje jasná souvislost mezi tím, jak se chová f a jak se chová homogenizace $\tilde{f}$ polynomu f.

Věta: Je –li $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, polynom sudého stupně d, pak platí:

a) $f \geq 0$ pro všechna $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$, právě když $\tilde{f} \geq 0$ na R^{n+1};

b) f je součtem čtverců polynomů právě tehdy, když $\tilde{f}$ je součtem čtverců polynomů.

Důkaz: a) Abychom dokázali implikaci $\tilde{f} \geq 0$ na $\mathrm{R}^{n+1} \Rightarrow f \geq 0$ na R^n, postačí užít faktu $\tilde{f}(1, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. K důkazu obrácené implikace stačí užít identitu $\tilde{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = x_0^d \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$ pro $x_0 \neq 0$ a faktu, že $\tilde{f}(0, x_1, \dots, x_n) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{f}(\varepsilon, x_1, \dots, x_n)$, pokud $x_0 = 0$.

b) Jestliže $\tilde{f} = \sum_{i=1}^{k} g_i^2$, potom $f = \tilde{f}(1, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} g_i^2(1, x_1, \dots, x_n)$. Jestliže naopak $f = \sum_{i=1}^{k} f_i^2$, potom st $(f_i) \leq d/2$ a $\tilde{f} = \sum_{i=1}^{k} \left[x_0^{d/2} . f_i\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)\right]^2$, což je součet čtverců forem stupně $d/2$.

Důležitý příklad polynomiálních forem představují kvadratické formy, známé z lineární algebry. Zopakujeme si základní poznatky a definice. Především je známo, že pro každou kvadratickou formu $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathrm{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ platí $f(0, 0, \dots, 0) = 0$. Podle toho, jak se kvadratická forma chová pro jiné hodnoty proměnných, rozeznáváme různé druhy kvadratických forem.

Definice: Kvadratickou formu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazýváme

pozitivně definitní, je – li $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ pro všechna $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ taková, že aspoň jedno $x_i \neq 0$;

negativně definitní, je – li $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0$ pro všechna $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ taková, že aspoň jedno $x_i \neq 0$;

pozitivně semidefinitní, je – li $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$ pro všechna $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ taková, že aspoň jedno $x_i \neq 0$, přičemž alespoň v jednom nenulovém bodě je funkční hodnota rovna nule;

negativně semidefinitní, je – li $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$ pro všechna $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ taková, že aspoň jedno $x_i \neq 0$, přičemž alespoň v jednom nenulovém bodě je funkční hodnota rovna nule;

indefinitní, existují – li dva body $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathrm{R}^n$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathrm{R}^n$, takové, že je –li $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) > 0$ a $f(b_1, b_2, \ldots, b_n) < 0$.

Příklad: Kvadratická forma $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + 7z^2$ je zřejmě pozitivně definitní. To je snadné nahlédnout z jejího zadání, je totiž součtem tří čtverců.

Obsahuje – li kvadratická forma $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jen čtverce proměnných, potom

1) vyskytují – li se v dané formě čtverce všech n proměnných a jsou – li všechny koeficienty kladné, pak je forma pozitivně definitní,

2) vyskytují – li se v dané formě čtverce všech n proměnných a jsou – li všechny koeficienty záporné, pak je forma negativně definitní,

3) vyskytuje – li se v dané formě jen k čtverců proměnných, $k < n$ a jsou – li všechny koeficienty kladné, pak je forma pozitivně semidefinitní,

4) vyskytuje – li se v dané formě jen k čtverců proměnných, $k < n$ a jsou – li všechny koeficienty záporné, pak je forma negativně semidefinitní,

5) pokud jsou koeficienty u některých čtverců kladné a u některých záporné, je forma indefinitní.

V našem případě je ihned vidět, že nastává situace z bodu 1). Naproti tomu kvadratická forma $g(x, y, z) = 5x^2 - 4y^2 + 0z^2$ je indefinitní a kvadratická forma $h(x, y, z) = -x^2 - 5y^2$ je negativně semidefinitní.

Nyní jde o to, jak obecnou kvadratickou formu uvést do některého z tvarů 1) – 5).

Příklad: Rozhodněte o charakteru formy $f(x, y, z) = x^2 + 5y^2 - 4z^2 + 2xy - 4xz$.

Řešení: Sdružíme sčítance obsahující x a provedeme doplnění na čtverec:

$f(x, y, z) = x^2 + 2xy - 4xz + 5y^2 - 4z^2 = (x + y - 2z)^2 + 4y^2 - 8z^2 + 4yz$. Dostali jsme jeden čtverec a „zbytkovou kvadratickou formu“ ve dvou proměnných $f_1(y, z) = 4y^2 - 8z^2 + 4yz = 4(y^2 + yz - 2z^2)$. Je ale $4(y^2 + yz - 2z^2) = 4.\left([y + z/2]^2 - 9z^2\right)$ a celkem máme $f(x, y, z) = (x + y - 2z)^2 + 4(y + z/2)^2 - 9z^2$. Kdybychom označili $u = x + y - 2z$, $v = y + z/2$ a $w = 3z$, dostali bychom $f = u^2 + 4v^2 - w^2$. Zadaná forma je indefinitní.

Poznamenejme ještě, že pokud by původní forma neobsahovala čtverce, kupř. $g(x, y, z) = x.y - 5xz$, mohli bychom si pomoci známým trikem. Položíme – li $x = u + v$, $y = u - v$, dostaneme zřejmě formu $g(u, v, z)$, která již čtverce neznámých obsahuje a lze aplikovat výše uvedený postup.

Můžeme učinit závěr, že v případě kvadratických forem v n reálných proměnných máme k dispozici postup, který umožňuje rozhodnout, zda je forma některého z typů 1) – 5). V tomto případě zřejmě splývají kvadratické formy, které jsou pozitivně (semi)definitní a ty, které jsou součtem čtverců. **Pro kvadratické formy tedy PSD a SOS (sum of squares) splývají.**

Existuje ještě jeden případ, kdy oba pojmy splývají. **Tato situace nastane pro formy ve dvou proměnných (n = 2) stupně d = 4.**

Hilbertův kolega Minkowski se ale domníval, že obecně z PSD neplyne SOS. To dokázal v roce 1888 sám Hilbert, ale jeho důkaz byl složitý a nekonstruktivní. Bylo to období, kdy se v matematice začaly objevovat tzv. čistě existenční důkazy. Dejme jeden příklad této situace.

Biologové tvrdí, že na lidské hlavě nemůže být více než milion vlasů. Z toho plyne, že v Praze, která má více než milion obyvatel, nutně existují dva lidé se stejným počtem vlasů. Takovýto důkaz je „čistě existenční“, ti lidé existují, ale nikdo tu dvojici nenalezl a ani by nemělo smysl ji hledat.

Do podobné kategorie se dostalo Hilbertovo tvrzení. Dost dlouho trvalo, než někdo nalezl explicitní příklad. Podařilo se to americkému matematiku Motzkinovi v roce 1967. Jeho polynom je $p(x; y) = 1 - 3x^2y^2 + x^2y^4 + x^4y^2$ a nezápornost tohoto polynomu dokážeme poměrně snadno.

Nejprve si připomeneme nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem, platnou pro dvě kladná reálná čísla a, b. Je $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$, přičemž rovnost nastává, právě když je $a = b$. Obdobné tvrzení platí i pro trojice kladných reálných čísel a, b, c, dokonce pro n – tice, ale postačí využít tvrzení pro trojice. Je tedy $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{a.b.c}$. Pišme teď $a = x^2$, $b = y^2$ a $c = \frac{1}{x^2y^2}$, kde $x \neq 0$, $y \neq 0$. Součin $a \cdot b \cdot c$ je roven jedné a tedy $a + b + c \geq 3$, tj. $x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2} \geq 3$. Odtud po vynásobení $x^2 y^2$ máme $(x^2 + y^2) \cdot$ $\cdot\, x^2 y^2 + 1 \geq 3\, x^2 y^2$ a vidíme, že Motzkinův polynom $p(x; y) = 1 - 3x^2y^2 + x^2y^4 + x^4y^2$ je skutečně nezáporný.

Nechť nyní

(2) $\quad p(x,y) = \sum_{j=1}^{k} p_j^2\,(x,y),$

kde $p_j(x,y) \in R\,[x,y]$. Protože stupeň polynomu $p\,(x,y)$ je šest, je stupeň každého polynomu $p_j\,(x,y)$ nejvýše tři. Protože dále pak $p\,(x,0) = 1$, musí být $|p_j(x,0)| \leq 1$, $|\mathrm{p}\,j(0,\ \mathrm{y})| \leq 1, \mathrm{j} = 1, 2, \dots n$ pro všechna $x, y \in R$, tj. $p_j(x,0) =$ $= p_j(0,y) = a_j$ je konstanta. Je tedy $p_j(x,y) = a_j + xy\, l_j\,(x,y)$, kde $l_j \in R\,[x,y]$ jsou polynomy stupně nejvýše jedna. Srovnáme-li pak koeficienty u členu $x^2\, y^2$ ve vztahu (2), dostáváme

$-3 = \sum_{j=1}^{k} l_j^2\,(0,0),$

což zřejmě není možné.

Od té doby se objevila celá řada polynomů, které jsou pozitivně semidefinitní, ale nejsou součtem čtverců. Je dosti fascinující, že úloha na toto téma byla zadána v roce 1981 v celosvazové matematické olympiádě.

Na 15. všesvazové matematické olympiádě roku 1981 (Alma Ata) byla zadána následující úloha:

a) Najděte nejmenší možnou hodnotu mnohočlenu:

$$\mathrm{P}(x, y) = 4 + x^2.y^4 + x^4.y^2 - 3\,x^2.y^2.$$

b) Dokažte, že tento mnohočlen nelze zapsat jako součet čtverců polynomů v proměnných x, y.

Autorské řešení je následující:

a) Z nerovnosti o střední hodnotě mezi aritmetickým a geometrickým průměrem plyne, že $1 + x^2.y^4 + x^4.y^2 \geq 3\,x^2\,y^2$.

b) Nechť $\mathrm{P}(x, y) = g_1^2(x,y) + g_2^2(x,y) + \ldots + g_m^2(x,y)$, kde $g_i^2(x,y)$, $i = 1,2, \ldots, m$ jsou polynomy. Jelikož $\mathrm{P}(x,0) = \mathrm{P}(0, y) = 4$, polynomy g_i nemohou obsahovat jednočleny typu $a.\,x^k$ a $b.\,y^i$. Proto musí být koeficient u $x^2.y^2$ kladný. [6]

Při hledání rozkladu obecného polynomu sudého stupně v součet čtverců tedy můžeme obecně utrpět nezdar. Je ovšem řada polynomů, které se dají zapsat jako součet čtverců polynomů. K získání takovýchto rozkladů ale může vést velmi dlouhá cesta, využívající řady poznatků z lineární algebry. V jednodušších případech jsme tuto cestu realizovali již v bakalářské práci. V závěru tohoto textu vyřešíme ještě několik příkladů, které budou složitější a při jejich zvládnutí se neobejdeme bez pomoci programů počítačové algebry.

3 PŘÍKLAD 1

Mějme polynom $4x^4 + 4x^3y - 7x^2y^2 - 2xy^3 + 10y^4$. Je součtem čtverců? V tomto polynomu se vyskytují monomy x^2, xy, y^2. Položme $\beta_1 = (2{,}0)$, $\beta_2 = (1{,}1)$, $\beta_3 = (0{,}2)$. Chceme vypočítat čtvercovou matici B typu 3 x 3, která já symetrická. Prozaatím ji napíšeme ve tvaru $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.

Nyní přejdeme k výpočtu matice B, ke kterému budeme požívat výraz

$\sum_{\beta_i+\beta_j=\alpha} b_{i,j} = a_\alpha$.

Výraz b_{11} vyjádříme jako součet $\beta_1 + \beta_1$, kde po dosazení za $\beta_1 = (2{,}0)$, dostaneme $b_{11} = \beta_1 + \beta_1 = (2{,}0) + (2{,}0) = (4{,}0)$, výraz $(4{,}0)$ představuje x^4, který má v našem polynomu koeficient 4. Z toho dostáváme $b_{11} = 4$.

Neznámou b_{12} vyjádříme jako součet $\beta_1 + \beta_2$, ale také jako součet $\beta_2 + \beta_1$, dosazením za $\beta_1 = (2{,}0)\ a\ \beta_2 = (1{,}1)$ získáme rovnici $b_{12} = \beta_1 + \beta_2 = \beta_2 + \beta_1 =$ $= (3{,}1)$. Výraz $(3{,}1)$ představuje x^3y. Ten má v polynomu p koeficient 4. Dostáváme rovnici $2b_{12} = 4$, vydělením celé rovnice dvěma dostáváme $b_{12} = 2$. Vzhledem k symetričnosti matice je i $b_{21} = 2$.

Monom x^2y^2 se v polynomu p vyskytuje s koeficientem -7 a lze psát $(2{,}2) =$ $= \beta_2 + \beta_2 = \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1$. Odtud plyne $b_{22} + 2b_{13} = -7$. Položíme-li $b_{13} = -s$, získáme $b_{22} = 2s - 7$.

b_{23} dostaneme součtem $\beta_2 + \beta_3$, kde po výpočtu získáme, že $b_{23} = -1$. Obdobně získáme b_{33}, které má hodnotu 10.

Obdrželi jsme symetrickou matici $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -s \\ 2 & 2s-7 & -1 \\ -s & -1 & 10 \end{pmatrix}$.

Abychom věděli, pro jaké hodnoty s je matice B pozitivně semidefinitní, potřebujeme najít její charakteristický polynom. Nejprve napíšeme charakteristickou matici B, to je $\begin{pmatrix} 4-y & 2 & -s \\ 2 & 2s-7-y & -1 \\ -s & -1 & 10-y \end{pmatrix}$. Výpočtem determinantu této charakteristické matice, získáme hledaný polynom.

$$f(\mathrm{y}) = \det\begin{pmatrix} 4-y & 2 & -s \\ 2 & 2s-7-y & -1 \\ -s & -1 & 10-y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 4-y & 2 & -s \\ 2 & 2s-7-y & -1 \\ -s & -1 & 10-y \end{vmatrix}.$$

Než se pustíme do výpočtu determinantu Sarrusovým pravidlem, vysvětlíme si, v čem toto pravidlo spočívá. Sarrusovo pravidlo lze využít pouze pro výpočet determinantu matice třetího řádu, který vyčíslíme tak, že od součtu součinů na hlavních diagonálách odečteme součet součinů čísel na vedlejších diagonálách. Jako názorný příklad uvedeme obecné řešení.

Mějme determinant třetího řádu $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} +$ $+ a_{13}a_{21}a_{32} + +a_{12}a_{23}a_{31}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$.

Nyní se vrátíme zpět k výpočtu našeho determinantu. Sarrusovým pravidlem a postupnými úpravy dostaneme:

$$[(4-y)(2s-7-y)(10-y) + (-s)\cdot 2\cdot(-1) + 2(-1)(-s)] - [(-s)(2s-7-y)\cdot$$
$$\cdot(-s) + (4-y)(-1)(-1) + 2\cdot 2(10-y)] =$$

$$= [(2s-7-y)(40-4y-10y+y^2) + 2s + 2s] -$$
$$-[s^2(2s-7-y) + 4 - y + 40 - 4y] =$$

$$= [(2s-7-y)(40-14y+y^2) + 4s] - [2s^3 - 7s^2 - s^2y + 44 - 5y] =$$

$$= [(80s - 28sy + 2sy^2 - 280 + 98y - 7y^2 - 40y + 14y^2 - y^3 + 4s] -$$

$$-(2s^3 - 7s^2 - s^2y - 5y + 44) =$$

$$= 84s - 28sy + 2sy^2 - 280 + 58y + 7y^2 - y^3 - 2s^3 + 7s^2 + s^2y + 5y - 44 =$$

$$= -y^3 + 7y^2 + 63y + 84s - 28sy + 2sy^2 - 2s^3 + 7s^2 + s^2y - 324 =$$

$$= -y^3 + y^2(7+2s) + y(63 - 28s + s^2) + 84s + 7s^2 - 2s^3 - 324.$$

Získali jsme tzv. charakteristický polynom a chceme určit podmínky pro to, aby měl jen nezáporné kořeny. Upravíme tento výsledný charakteristický polynom. U lichých mocnin změníme znaménka:

$$f(-y) = y^3 + (7-2s)y^2 + (28s - s^2 - 63)y + 84s + 7s^2 - 2s^3 - 324.$$

Využijeme Descartova znaménkového pravidla a určíme podmínky, za nichž má $f(-y)$ jen kořeny, které nejsou kladné. Polynom $f(y)$ pak má jen kořeny, které nejsou záporné a těmito kořeny jsou vlastní hodnoty matice B.

Chceme získat všechny kořeny větší, případně rovno nule. Z $f(-y)$ proto dostaneme jednotlivé podmínky, které musí nastat zároveň:

P1. $7 + 2s \geq 0$, odtud plyne, že $s \geq -\frac{7}{2}$.

P2. $28s - s^2 - 63 \geq 0$.

Vyřešíme kvadratickou rovnici $28s - s^2 - 63 = 0$ s využitím determinantu: $D = 28^2 + 4 * 63 = 1036$. A dosazením do vzorce $s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, dostaneme: $s_{1,2} = \frac{-28 \pm \sqrt{1036}}{-2} = -\frac{-28 \pm \sqrt{4*259}}{2} = -\frac{2(14 \pm \sqrt{259})}{2} = -(14 \pm \sqrt{259})$

a. $s_1 = -14 + \sqrt{259}$

b. $s_2 = -14 - 3\sqrt{259}$

P3. $84s + 7s^2 - 2s^3 - 324 \geq 0$.

Pro výpočet této nerovnice využijeme programu Mathematica:

```
CharacteristicPolynomial[(_{

  {4, 2, -s},
  {2, 2s-7, -1},
  {-s, -1, 10}  }_),y]
```

$-324 + 84s + 7s^2 - 2s^3 + 63y - 28sy + s^2y + 7y^2 + 2sy^2 - y^3$

Collect[$-324 + 84s + 7s^2 - 2s^3 + 63y - 28sy + s^2y + 7y^2 + 2sy^2 - y^3$ **,y]**

$-324 + 84s + 7s^2 - 2s^3 + (63 - 28s + s^2)y + (7 + 2s)y^2 - y^3$

Reduce[$7 + 2s \geq 0$ **&& -** $63 + 28s - s^2$ **>= 0&& -** $324 + 84s + 7s^2 - 2s^3$ **>= 0,{s},Reals]**

$1/4\ (-5 + \sqrt{457}) \leq s \leq 6.$

Oborem pravdivosti této nerovnice tedy je $\frac{1}{4}(-5 + \sqrt{457}) \leq s \leq 6$.

Tyto podmínky musí nastat zároveň. Zjistíme proto průnik všech oborů pravdivosti: $P1 \cap P2 \cap P3 = \langle\frac{1}{4}(-5 + \sqrt{457}); 6\rangle$. Do matice B můžeme tedy volit parametr $s \in \langle\frac{1}{4}(-5 + \sqrt{457}); 6\rangle$. Aby další výpočty nebyly tolik náročné, zvolíme za s celá čísla 5 a 6.

Zvolením $\boldsymbol{s = 6}$ dostaneme matici $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & -1 \\ -6 & -1 & 10 \end{pmatrix}$. Abychom mohli využít vzorce $D = A^T BA$, potřebujeme matici B převést na diagonální.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -1 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ odečtením prvního řádku od dvojnásobku druhého a přičtením trojnásobku prvního k dvojnásobku třetího řádku získáme matici $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & -6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$, aby první část matice zůstala symetrická, musíme odečíst první sloupec od dvojnásobku druhého sloupce a přičíst trojnásobek prvního sloupce k dvojnásobku třetího sloupce: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 4 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right)$. Nyní potřebujeme dostat na místě průniku druhého sloupce a třetího řádku nulu, přečteme tedy druhý řádek k dvojnásobku třetího řádku: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & -8 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -2 & 4 \end{array}\right)$, opět musíme symetricky přičíst i druhý sloupce k dvojnásobku třetího sloupce. Dostaneme matici: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & -2 & 4 \end{array}\right)$.

Tímto jsme získali diagonální matici $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a transponovanou matici $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Zkontrolujeme správnost výpočtu dosazením do vzorce $D = A^T BA$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & -1 \\ -6 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tím jsme ověřili správnost výpočtu diagonální matice.

Abychom měli dobrý přehled, dáme si teď všechna potřebná data k sobě.

$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 5 & -1 \\ -6 & -1 & 10 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, z transponované matice A^T dostaneme matici A vyměněním řádků a sloupců. Nebo - li první řádek napíšeme jako první sloupec, druhý a třetí převedeme stejně. Tudíž $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

K dalšímu výpočtu potřebujeme inverzní matici k matici A. Tu snadno získáme využitím programu Matematika 7.0:

Inverse[{{1,1,7},{0,-2,-2},{0,0,4}}]

$\{\{1,\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\},\{0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\},\{0,0,\frac{1}{4}\}\}$

Získali jsme inverzní matici A^{-1} k matici A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Konečně provedeme jednu z posledních úprav, rozložení na čtverce. Použijeme vzorec $U = \sqrt{D} * A^{-1}$.

$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Na začátku jsme měli monomy $\mathrm{x}^2, \mathrm{xy}, \mathrm{y}^2$, kterými teď vynásobíme jednotlivé řádky matice U.

$U * (\mathrm{x}^2, \mathrm{xy}, \mathrm{y}^2)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * (\mathrm{x}^2, \mathrm{xy}, \mathrm{y}^2)^T = (2x^2 + xy - 3y^2, -2xy - y^2, 0)^T$.

Odtud již dostaneme umocněním každého členu na druhou a jejich sečtením součet jednotlivých čtverců. $(2x^2 + xy - 3y^2)^2 + (-2xy - y^2)^2$.

Pro kontrolu můžeme tento výraz umocnit a sečíst.

$(2x^2 + xy - 3y^2)^2 + (-2xy - y^2)^2 = 4x^4 + 2x^3y - 6x^2y^2 + 2x^3y + x^2y^2 -$
$- 3xy^3 - 6x^2y^2 - 3xy^3 + 9y^4 + 4x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 =$
$= 4x^4 + 4x^3y - 7x^2y^2 - 2xy^3 + 10y^4$.

Tento polynom nám souhlasí s původním polynomem v zadání, tudíž je celý výpočet v pořádku.

Zvolením $\boldsymbol{s = 5}$ vznikne matice $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & -1 & 10 \end{pmatrix}$. Tuto matici taktéž musíme převést na diagonální tvar.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 10 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ odečtením prvního řádku od dvojnásobku druhého a přičtením pětinásobku prvního řádku k čtyřnásobku třetího řádku dostaneme matici $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 15 & 5 & 0 & 4 \end{array}\right)$ a odečtením prvního sloupce od dvojnásobku druhého sloupce a přičtením pětinásobku prvního sloupce ke čtyřnásobku třetího sloupce získáme $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -12 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -12 & 60 & 5 & 0 & 4 \end{array}\right)$. Nyní trojnásobek druhého řádku přičteme k dvojnásobku třetího řádku $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -12 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 84 & 13 & -6 & 8 \end{array}\right)$ a opět symetricky přičteme trojnásobek druhého sloupce k dvojnásobku třetího $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 168 & 13 & -6 & 8 \end{array}\right)$. Dostali jsme diagonální matici $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 168 \end{pmatrix}$ a transponovanou matici $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 13 & -6 & 8 \end{pmatrix}$.

Pro jistotu provedeme kontrolu výpočtu dosazením do vzorce $D = A^T BA$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 13 & -6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -5 & -1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 13 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 168 \end{pmatrix}.$$

Tímto jsme zkontrolovali správnost výpočtu diagonální matice.

V programu Mahematica 7.0 vypočítáme inverzní matici k matici A:

Inverse[{{1,1,13},{0,-2,-6},{0,0,8}}]

$\{\{1,\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\},\{0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{8}\},\{0,0,\frac{1}{8}\}\}$.

Tento výsledek si přepíšeme do maticového tvaru:

$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4}\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8}\\ 0 & 0 & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$. Nyní pomocí vzorce $U=\sqrt{D}*A^{-1}$ vypočítáme U:

$$U=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{8} & 0\\ 0 & 0 & 2\sqrt{42}\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4}\\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8}\\ 0 & 0 & \frac{1}{8}\end{pmatrix}$$

$U=\begin{pmatrix}2 & 1 & -\frac{5}{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{4}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{42}}{4}\end{pmatrix}$. Získanou matici U vynásobíme monomy $\mathrm{x}^2,\mathrm{xy},\mathrm{y}^2$.

$U*(\mathrm{x}^2,\mathrm{xy},\mathrm{y}^2)^T=$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1 & -\frac{5}{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{4}\\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{42}}{4}\end{pmatrix}*(\mathrm{x}^2,\mathrm{xy},\mathrm{y}^2)^T=$$

$$=(2x^2+xy-\frac{5}{2}y^2,-\sqrt{2}xy--\frac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{y}^2,\frac{\sqrt{42}}{4}\mathrm{y}^2)^T.$$

Součet těchto členů umocníme na druhou a získáme rozložení na součet čtverců.

$$(2x^2+xy-\frac{5}{2}y^2)^2+(-\sqrt{2}xy-\frac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{y}^2)^2+(\frac{\sqrt{42}}{4}\mathrm{y}^2)^2.$$

Pro kontrolu provedeme zkoušku umocněním:

$$(2x^2 + xy - \frac{5}{2}y^2)^2 + (-\sqrt{2}xy - \frac{3\sqrt{2}}{4}\mathrm{y}^2)^2 + (\frac{\sqrt{42}}{4}\mathrm{y}^2)^2 =$$

$$= 4x^2 + 2x^3y - 5x^2y^2 + 2x^3y + x^2y^2 - \frac{5}{2}xy^3 - 5x^2y^2 - \frac{5}{2}xy^3 + \frac{25}{4}y^4 +$$

$$+\left(2x^2y^2 + 2 * \sqrt{2} * \frac{3\sqrt{2}}{4}x\mathrm{y}^3 + \frac{9 * 2}{16}\mathrm{y}^4\right) + \frac{42}{16}\mathrm{y}^4 =$$

$$= 4x^2 + 4x^3y - 9x^2y^2 - 5xy^3 + \frac{25}{4}y^4 + 2x^2y^2 + 3x\mathrm{y}^3 + \frac{9}{8}\mathrm{y}^4 + \frac{42}{16}\mathrm{y}^4 =$$

$$= 4x^4 + 4x^3y - 7x^2y^2 - 2xy^3 + 10y^4.$$

Výsledný polynom nám vyšel stejně jako polynom původní. Celý výpočet tedy proběhl v pořádku a rozklad v součet čtverců je správný.

4 PŘÍKLAD 2

Mějme polynom $x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + 2y^4$. Je součtem čtverců? V tomto polynomu se vyskytují monomy x^2, xy, y^2. Položme $\beta_1 = (2{,}0)$, $\beta_2 = (1{,}1)$, $\beta_3 = (0{,}2)$. Chceme vypočítat čtvercovou matici B typu 3 x 3, která je symetrická. Prozatím ji napíšeme ve tvaru $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$.

Nyní přejdeme k výpočtu matice B, ke kterému budeme požívat výraz

$\sum_{\beta_i+\beta_j=\alpha} b_{i,j} = a_\alpha$.

Výraz b_{11} vyjádříme jako součet $\beta_1 + \beta_1$, kde po dosazení za $\beta_1 = (2{,}0)$, dostaneme $b_{11} = \beta_1 + \beta_1 = (2{,}0) + (2{,}0) = (4{,}0)$, výraz $(4{,}0)$ představuje x^4, který má v našem polynomu koeficient 1. Z toho dostáváme $b_{11} = 1$.

Neznámou b_{12} vyjádříme jako součet $\beta_1 + \beta_2$, ale také jako součet $\beta_2 + \beta_1$, dosazením za $\beta_1 = (2{,}0)\ a\ \beta_2 = (1{,}1)$ získáme rovnici $b_{12} = \beta_1 + \beta_2 = \beta_2 + \beta_1 = = (3{,}1)$. Výraz (3,1) představuje x^3y. Ten má v polynomu koeficient 2. Dostáváme rovnici $2b_{12} = 2$, vydělením celé rovnice dvěma dostáváme $b_{12} = 1$. Vzhledem k symetričnosti matice je i $b_{21} = 1$.

Monom x^2y^2 se v polynomu vyskytuje s koeficientem 3 a lze psát $(2{,}2) = \beta_2 + + \beta_2 = \beta_1 + \beta_3 = \beta_3 + \beta_1$. Odtud plyne $b_{22} + 2b_{13} = 3$. Položíme-li $b_{13} = s$, získáme $b_{22} = 3 - 2s$.

b_{23} dostaneme součtem $\beta_2 + \beta_3$, kde po výpočtu získáme, že $b_{23} = 1$. Obdobně získáme b_{33}, které má hodnotu 2.

Obdrželi jsme symetrickou matici $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & s \\ 1 & 3-2s & 1 \\ s & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Abychom věděli, pro jaké hodnoty s je matice B pozitivně semidefinitní, potřebujeme najít její charakteristický polynom. Tento polynom získáme výpočtem determinantu, který získáme z charakteristické matice B. Tu můžeme zapsat ve tvaru $B = \begin{pmatrix} 1-y & 1 & s \\ 1 & 3-2s-y & 1 \\ s & 1 & 2-y \end{pmatrix}$.

Nyní přejdeme k výpočtu determinantu této matice.

$$f(\mathrm{y}) = \det\begin{pmatrix} 1-y & 1 & s \\ 1 & 3-2s-y & 1 \\ s & 1 & 2-y \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-y & 1 & s \\ 1 & 3-2s-y & 1 \\ s & 1 & 2-y \end{vmatrix}.$$

U předchozího příkladu jsme si vysvětlovali Sarrusovo pravidlo. Jelikož máme determinant třetího řádu, nic nám nebrání toto pravidlo opět využít. Nejprve si připomeneme obecný vzorec:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + +a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Nyní do toho vzorce dosadíme:

$$[(1-y)(3-2s-y)(2-y) + s + s] - [s * (3-2s-y) * s + (1-y) + (2-y)] =$$

$$= [(2-y-2y+y^2)(3-2s-y) + 2s] - [3s^2 - 2s^3 - ys^2 + 3 - 2y] =$$

$$= [(2-3y+y^2)(3-2s-y) + 2s] + 2s^3\text{-}3s^2 + ys^2 + 2y - 3 =$$

$$= (6 - 4s - 2y - 9y + 6ys + 3y^2 + 3y^2 - 2y^2s - y^3 + 2s + 2s^3 - 3s^2 + ys^2 +$$
$$+ 2y - 3 =$$

$$= -y^3 + 6y^2 - 2y^2s - 9y + 6ys + ys^2 + 2s^3 - 3s^2 - 2s + 3 =$$

$$= -y^3 + 2y^2(3-s) + y(s^2 + 6s - 9) + 2s^3 - 3s^2 - 2s + 3.$$

Nyní hledáme takové hodnoty parametru s, pro něž má tento polynom pouze nezáporné kořeny. Jinak řečeno nemá žádný záporný kořen. Podle Descartova znaménkového pravidla vytvoříme polynom $f(-y)$:

$$f(-y) = y^3 + 2y^2(3-s) + y(9 - s^2 - 6s) + 2s^3 - 3s^2 - 2s + 3.$$

Pokud v tomto polynomu nemají nastat znaménkové změny, musí platit tyto podmínky:

P1. $3 - s \geq 0$

P2. $9 - s^2 - 6s \geq 0$

P3. $2s^3 - 3s^2 - 2s + 3 \geq 0$

Z první podmínky P1 dostaneme obor pravdivosti $P1 = (-\infty;\ 3\rangle$.

V druhé nerovnosti nejprve vypočítáme kořeny kvadratické rovnice:

$9 - s^2 - 6s = 0$. Diskriminant této rovnice, který vypočítáme pomocí vzorce $D = b^2 - 4ac$, je roven $D = 72$. Kořeny této rovnice se vypočítají pomocí vzorce $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Rovnají se tedy $s_1 = -3 + 3\sqrt{2}$ a $s_2 = -3 - 3\sqrt{2}$. Oborem pravdivosti druhé podmínky $P2$ je tedy $P2 = \langle 3\left(-1 - \sqrt{2}\right); 3\left(-1 + \sqrt{2}\right) \rangle$.

Zbývá nám poslední, třetí podmínka $P3$, která má obor pravdivosti dva intervaly. $P3 = \langle -1; 1\rangle \cup \langle \frac{3}{2}; \infty)$. Tento výsledek nám pomohl získat program počítačové algebry.

Abychom zjistili, kdy má charakteristický polynom jen nezáporné kořeny, musíme ještě dát všechny tři podmínky dohromady a zjistit průnik jejich oborů pravdivosti:

$P = P1 \cap P2 \cap P3 = \langle -1; 1\rangle$.

Zvolením $\boldsymbol{s = -1}$ dostaneme matici $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Abychom mohli využít vzorce $D = A^T BA$, potřebujeme matici B převést na diagonální.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ odečtením prvního řádku od druhého a odečtením prvního řádku od třetího získáme matici $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$, aby první část matice zůstala symetrická, musíme odečíst první sloupec od druhého a zároveň i odečíst první sloupec od třetího: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Nyní přičteme k dvojnásobku třetího řádku druhý řádek: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$, opět musíme symetricky přičíst i k dvojnásobku třetího sloupce sloupec druhý. Dostaneme matici: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$.

Těmito výpočty jsme získali diagonální matici $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ a transponovanou matici $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dosazením do vzorce $D = A^T BA$, zkontrolujeme správnost výpočtu:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tím jsme ověřili správnost výpočtu diagonální matice. Matice D má hodnost 2, v zápisu polynomu ve tvaru součtu čtverců tedy očekáváme dva sčítance.

Abychom měli dobrý přehled, dáme si teď k sobě všechna potřebná data.

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, z transponované matice A^T dostaneme matici A vyměněním řádků a sloupců. Tudíž $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

K dalšímu výpočtu potřebujeme inverzní matici k matici A. Tu snadno získáme využitím programu Matematika 7.0.:

```
Inverse[{{1,1,3},{0,-1,-1},{0,0,2}}]
```

$\{\{1,1,-1\},\{0,-1,-\frac{1}{2}\},\{0,0,\frac{1}{2}\}\}$

Získali jsme inverzní matici A^{-1}k matici A. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Konečně provedeme jednu z posledních úprav, rozložení na čtverce. Použijeme vzorec $U = \sqrt{D} * A^{-1}$:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Na začátku jsme měli monomy $\mathrm{x}^2, \mathrm{xy}, \mathrm{y}^2$, kterými teď vynásobíme jednotlivé řádky matice U:

$$U * (\mathrm{x}^2, \mathrm{xy}, \mathrm{y}^2)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} * (\mathrm{x}^2, \mathrm{xy}, \mathrm{y}^2)^T =$$

$$= (x^2 + xy - y^2, -2xy - y^2, 0)^T.$$

Odtud již dostaneme umocněním každého členu na druhou a jejich sečtením součet jednotlivých čtverců: $(x^2 + xy - y^2)^2 + (-2xy - y^2)^2$.

Pro kontrolu můžeme tento výraz umocnit a sečíst:

$$(x^2 + xy - y^2)^2 + (-2xy - y^2)^2 =$$

$$= x^4 + x^3y - x^2y^2 + 2x^3y + x^2y^2 - xy^3 - x^2y^2 - xy^3 + y^4 + 4x^2y^2 +$$
$$+ 4xy^3 + y^4 =$$

$$= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + 2y^4.$$

Tento polynom nám souhlasí s původním polynomem v zadání, tudíž je celý výpočet v pořádku.

Zvolením $\boldsymbol{s = 1}$ nám vznikne matice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tuto matici taktéž musíme převést na diagonální tvar.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ odečtením prvního řádku od druhého a zároveň odečtením prvního řádku od třetího řádku dostaneme matici $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ a odečtením prvního sloupce od druhého a taktéž odečtením prvního sloupce od třetího získáme

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Dostali jsme diagonální matici $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ a transponovanou matici $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pro jistotu provedeme kontrolu výpočtu dosazením do vzorce $D = A^T BA$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tímto jsme zkontrolovali správnost výpočtu diagonální matice.

V programu Mathematica 7.0. vypočítáme inverzní matici A^{-1} k matici A:

```
Inverse[{{1,-1,-1},{0,1,0},{0,0,1}}]
{{1,1,1}, {0,1,0}, {0,0,1}}
```

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nyní pomocí vzorce $U = \sqrt{D} * A^{-1}$ vypočítáme U:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matici U vynásobíme monomy $\mathrm{x}^2, \mathrm{xy}, \mathrm{y}^2$:

$$U * (\mathrm{x}^2, \mathrm{xy}, \mathrm{y}^2)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * (\mathrm{x}^2, \mathrm{xy}, \mathrm{y}^2)^T =$$

$$= (x^2 + xy + y^2, 0, \mathrm{y}^2)^T.$$

Součet těchto členů umocníme na druhou a získáme rozložení na součet čtverců:

$$(x^2 + xy + y^2)^2 + (\mathrm{y}^2)^2.$$

Pro kontrolu vypočítáme rozdělení na čtverce:

$$(x^4 + x^3y + x^2y^2 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + x^2y^2 + xy^3 + y^4 + y^4) =$$

$$= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + 2y^4.$$

Výsledný polynom nám vyšel stejně jako polynom původní. Tím jsme ověřili, že celý výpočet proběhl v pořádku.

Zvolením $\boldsymbol{s = 0}$ nám vznikne matice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tuto matici taktéž musíme převést na diagonální tvar.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ odečtením prvního řádku od druhého dostaneme matici $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, nyní musíme symetricky odečíst první sloupec od druhého: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. Abychom dostali diagonální matici, musíme ještě k mínus dvojnásobku třetího řádku přičíst druhý řádek $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ a k mínus dvojnásobku třetího sloupce přičíst druhý sloupec $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$.

Dostali jsme diagonální matici $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ a transponovanou matici $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Pro jistotu provedeme kontrolu výpočtu dosazením do vzorce $D = A^T BA$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tímto jsme zkontrolovali správnost výpočtu diagonální matice.

K dalšímu výpočtu potřebujeme znát inverzní matici A^{-1} k matici A, i tu získáme jednoduchým využitím programu Mathemtica 7.0:

```
Inverse[{{1,-1,-1},{0,1,1},{0,0,-2}}]
```

$\{\{1,1,0\},\{0,1,\frac{1}{2}\},\{0,0,-\frac{1}{2}\}\}$

Získali jsme hodnotu hledané inverzní matice $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Nyní pomocí vzorce $U = \sqrt{D} * A^{-1}$ vypočítáme U, které pak dále využijeme v posledním kroku výpočtu.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}.$$

V posledním kroku vynásobíme právě nalezenou matici U s monomyx^2, xy, y^2:

$$U * (x^2, xy, y^2)^T =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix} * (x^2, xy, y^2)^T =$$

$$= (x^2 + xy, \sqrt{2}xy + \tfrac{\sqrt{2}}{2}y^2, -\tfrac{\sqrt{6}}{2}\, y^2)^T.$$

Součet těchto členů umocníme na druhou a získáme rozložení na součet čtverců. $(x^2 + xy)^2 + (\sqrt{2}xy + \frac{\sqrt{2}}{2}y^2)^2 + (-\frac{\sqrt{6}}{2}y^2)^2$.

Provedeme zkoušku správnosti výpočtu:

$$(x^4 + 2x^3y + x^2y^2 + 2x^2y^2 + 2xy^3 + \tfrac{2}{4}y^4 + \tfrac{6}{4}y^4) =$$

$$= x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + 2y^4.$$

Výsledný polynom nám vyšel stejně jako polynom původní. Tím jsme ověřili, že celý výpočet proběhl v pořádku.

5 PŘÍKLAD 3

Mějme polynom $6x^2 - 2xy + 8y^2 - 2y^3 + 3x^4 + 6x^2y^2 + 3y^4$. Je součtem čtverců? Nejprve si vypíšeme monomy, které se v tomto polynomu vyskytují: x, y, x^2, xy, y^2. Položme $\beta_1 = (1,0)$, $\beta_2 = (0,1)$, $\beta_3 = (2,0)$, $\beta_4 = (1,1)$, $\beta_5 = (0,2)$. Nyní chceme vypočítat čtvercovou symetrickou matici B typu 5 x 5. Prozatím ji napíšeme ve tvaru $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix}$.

Nyní přejdeme k výpočtu matice B, ke kterému budeme opět používat vzorec

$\sum_{\beta_i+\beta_j=\alpha} b_{i,j} = a_\alpha$.

Výraz b_{11} vyjádříme jako součet $\beta_1 + \beta_1$, kde po dosazení za $\beta_1 = (1,0)$, dostaneme $b_{11} = \beta_1 + \beta_1 = (1,0) + (1,0) = (2,0)$, výraz $(2,0)$ představuje x^2, který má v našem polynomu koeficient 6. Z toho dostáváme $b_{11} = 6$.

Neznámou b_{12} vyjádříme jako součet $\beta_1 + \beta_2$, ale také jako součet $\beta_2 + \beta_1$. Dosazením za $\beta_1 = (1,0)$ a za $\beta_2 = (0,1)$ získáme rovnici $2b_{12} = (1,1)$, z tohoto výrazu dostaneme rovnici $2b_{12} = -2$, po vydělení této rovnice 2 získáme $b_{12} = -1$.

b_{13} po dosazení představuje koeficient u x^3, které se ovšem v našem polynomu nevyskytuje. Tudíž je $b_{13} = 0$.

$b_{14} = \beta_1 + \beta_4 = \beta_4 + \beta_1 = (2,1)$, těmto hodnotám ovšem odpovídá i $\beta_2 + \beta_3$ a $\beta_3 + \beta_2$. Dáme tyto hodnoty dohromady a vznikne nám rovnice $2b_{14} + 2b_{23} = 0$, tuto rovnici můžeme vydělit 2: $b_{14} + b_{23} = 0$. Položme $b_{14} = s$, dosazením do rovnice a dopočítáním, získáme $b_{23} = -s$.

Dříve, než uděláme průběžný souhrn výpočtů, vypočítáme ještě hodnotu b_{15}. $b_{15} = \beta_1 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_1 = (1,2)$, i v tomto případě, lze $(1,2)$ vyjádřit i pomocí jiných sčítanců a to $\beta_2 + \beta_4$ a $\beta_4 + \beta_2$. Dostaneme tedy rovnici $2b_{15} + 2b_{24} = 0$, kterou můžeme vydělit 2: $b_{15} + b_{24} = 0$. Pokud si za b_{15} zvolíme parametr r, po dosazení tohoto parametru do rovnice nám vyjde $b_{24} = -r$.

Výraz $b_{22} = (0,2)$, což odpovídá výrazu y^2, který má v zadaném polynomu koeficient 8. Proto má b_{22} hodnotu 8.

Pro lepší orientaci, si nyní vypíšeme již spočítané členy hledané matice B, abychom věděli, které členy nám ještě zbývají zjistit.

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & s & r \\ -1 & 8 & -s & -r & b_{25} \\ 0 & -s & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ s & -r & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ r & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{pmatrix}.$$

Ještě nám mimo jiné chybí výraz b_{25}. Ten odpovídá součtu $\beta_2 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_2 =$ $= (0,3)$, který odpovídá koeficientu u y^3, který má hodnotu -2. Jelikož rovnice je ve tvaru $2b_{25} = -2$, tak po vydělení dvěma, dostaneme $b_{25} = -1$.

Jednoduchý je výpočet b_{33}. Tento výraz představuje koeficient u x^4, které má v našem polynomu hodnotu 3, tím jsme získali $b_{33} = 3$.

b_{34} představuje výraz x^3y, který se ovšem v našem polynomu nevyskytuje. Odpovídá proto hodnotě $b_{34} = 0$.

Pozice posledního sloupce třetího řádku patří výrazu $b_{35} = \beta_3 + \beta_5 = \beta_5 + \beta_3 =$ $= (2,2)$. Tuto závorku, která představuje x^2y^2 a má koeficient 6, ovšem získáme i součtem $\beta_4 + \beta_4$. Dostaneme tedy rovnici $2b_{35} + b_{44} = 6$. Pokud za b_{35} zvolíme parametr t, dopočítáme, že $b_{44} = 6 - 2t$.

Výraz b_{54} dostaneme sečtením $\beta_4 + \beta_5 = (1,3)$. V úvodním polynomu se výraz xy^3 nevyskytuje, což nám říká, že $b_{54} = 0$ i $b_{45} = 0$.

A konečně výraz b_{55}, který představuje y^4. y^4 má v polynomu koeficient 3, tudíž $b_{55} = 3$.

Vznikla nám hledaná symetrická matice B:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & s & r \\ -1 & 8 & -s & -r & -1 \\ 0 & -s & 3 & 0 & 6 \\ s & -r & 0 & 6-2t & 0 \\ r & -1 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Abychom věděli, pro jaké hodnoty r, s, t je matice B pozitivně semidefinitní, musíme najít její charakteristický polynom. Nejprve si napíšeme charakteristickou matici

$$B = \begin{pmatrix} 6-y & -1 & 0 & s & r \\ -1 & 8-y & -s & -r & -1 \\ 0 & -s & 3-y & 0 & 6 \\ s & -r & 0 & 6-2t-y & 0 \\ r & -1 & 6 & 0 & 3-y \end{pmatrix},$$

ze které vytvoříme determinant:

$$D = \begin{vmatrix} 6-y & -1 & 0 & s & r \\ -1 & 8-y & -s & -r & -1 \\ 0 & -s & 3-y & 0 & 6 \\ s & -r & 0 & 6-2t-y & 0 \\ r & -1 & 6 & 0 & 3-y \end{vmatrix}.$$

Výpočtem tohoto determinantu dostaneme potřebný charakteristický polynom.

Výpočet tohoto determinantu není jednoduchý, proto využijeme programu Mathematica 8.:

```
FindInstance[26 - 2t ≥ 0&& - (-259 + 2r^2 + 2s^2 + 40t + t^2)
≥ 0&&(1233 + 2r - 29r^2 + 2rs - 29s^2 - 278t + 2r^2t + 2st + 2s^2t
- 20t^2 + 2t^3) ≥ 0&&-(-2799 - 18r + 135r^2 - r^4 - 12rs + 2r^2s +
128s^2 - r^2s^2 - s^4 + 798t + 4rt - 22r^2t - 24st + 2rst - 18s^2t +
131t^2 - r^2t^2 + 4st^2 - s^2t^2 - 28t^3) ≥ 0&&(2430 + 36r - 198r^2 + 3r^4
+ 18rs - 6r^2s - 177s^2 + 6r^2s^2 + 3s^4 - 810t - 12rt + 48r^2t + 72st
- 12rst + 36s^2t - 2s^3t - 282t^2 + 6r^2t^2 - 24st^2 + 2rst^2 + 8s^2t^2 +
94t^3) ≥ 0,{r,s,t},Reals]
```

Abychom mohli s takto složitou soustavou nerovnic něco rozumného provést, nechali jsme si v Mathematice 8 zjistit tři celočíselné trojice parametrů r, s, t:

```
FindInstance[26 - 2t ≥ 0&&-(-259 + 2r^2 + 2s^2 + 40t + t^2) ≥
0&&(1233 + 2r - 29r^2 + 2rs - 29s^2 - 278t + 2r^2t + 2st + 2s^2t -
20t^2 + 2t^3) ≥ 0&&-(-2799 - 18r + 135r^2 - r^4 - 12rs + 2r^2s +
128s^2 - r^2s^2 - s^4 + 798t + 4rt - 22r^2t - 24st + 2rst - 18s^2t +
131t^2 - r^2t^2 + 4st^2 - s^2t ^2 -28t^3) ≥ 0&&(2430 + 36r - 198r^2 + 3r^4
+ 18rs - 6r^2s - 177s^2 + 6r^2s^2 + 3s^4 - 810t - 12rt + 48r^2t + 72st
```

- 12rst + 36s²t - 2s³t - 282t² + 6r²t² - 24st² + 2rst² + 8s²t² + 94t³) ≥ 0,{r,s,t},Integers,4]

{{r→0,s→0,t→0},{r→-1,s→3,t→1},{r→-1,s→-4,t→-2},{r→2,s→2,t→-2}}

V předcházejícím odstavci vidíme, jaké celočíselné parametry můžeme volit, aby výpočet měl smysl. Ještě si tyto parametry přepíšeme. Můžeme tedy volit:

1. $r = 0, s = 0, t = 0$
2. $r = -1, s = 3, t = 1$
3. $r = -1, s = -4, t = -2$
4. $r = 2, s = 2, t = -2.$

Dosazením $\boldsymbol{s = 0, r = 0, t = 0}$

$B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Tuto matici potřebujeme převést na diagonální.

$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ přičtením šestinásobku prvního řádku k druhému dostaneme $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 47 & 0 & 0 & -6 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, nyní musíme symetricky přičíst první sloupec k šestinásobku druhého: $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & -6 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

Dále přičteme druhý řádek k čtyřicetisedminásobku pátého řádku:

$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & -6 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 135 & 1 & 6 & 0 & 0 & 47 \end{array}\right)$ a opět symetricky přičteme druhý sloupec ke čtyřicetisedminásobku pátého sloupce: $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6345 & 1 & 6 & 0 & 0 & 47 \end{array}\right)$.

Poměrně rychlými a jednoduchými úpravami jsme získali diagonální matici $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6345 \end{pmatrix}$ a transponovanou matici $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 47 \end{pmatrix}$.

Pro jistotu si zkontrolujeme správnost výpočtu dosazením do vzorce $D = A^T BA$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 47 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 47 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 47 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 135 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 47 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6345 \end{pmatrix}$$

Tímto jsme ověřili správnost výpočtu diagonální matice Ta má hodnost 5, proto tedy ve výsledku očekáváme součet pěti sčítanců. Nyní se můžeme pustit do dalšího kroku. Abychom mohli dojít k hledanému výsledku, potřebujeme inverzní matici k matici A. K její nalezení využijeme program Mathematica 7.0.

Inverse[{{1,1,0,0,1},{0,6,0,0,6},{0,0,1,0,0},{0,0,0,1,0},{0,0,0,0,47}}]

$$\left\{\left\{1,-\frac{1}{6},0,0,0\right\},\left\{0,\frac{1}{6},0,0,-\frac{1}{47}\right\},\{0,0,1,0,0\},\{0,0,0,1,0\},\left\{0,0,0,0,\frac{1}{47}\right\}\right\}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{47} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{47} \end{pmatrix}.$$

Máme všechny potřebné dílčí výpočty k tomu, abychom mohli využít vzorce $U=\sqrt{D}*A^{-1}$ a tím dojít k hledanému rozkladu na součet čtverců.

$$U=\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{282} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{6345} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & -\frac{1}{47} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{47} \end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{282}}{6} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{282}}{47} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6345}}{47} \end{pmatrix}.$$

Nyní vynásobíme jednotlivé řádky matice monomy x, y, x^2, xy, y^2.

$$U*(x,y,x^2,xy,y^2)^T=\begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{282}}{6} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{282}}{47} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{6345}}{47} \end{pmatrix}*(x,y,x^2,xy,y^2)^T=$$

$$=(\sqrt{6}x-\frac{\sqrt{6}}{6}y,\frac{\sqrt{282}}{6}y-\frac{\sqrt{282}}{47}y^2,\sqrt{3}x^2,\sqrt{6}xy,\frac{\sqrt{6345}}{47}y^2).$$

Umocněním každého členu na druhou a jejich sečtením, dostaneme hledaný součet čtverců:

$$(\sqrt{6}x-\frac{\sqrt{6}}{6}y)^{2}+(\frac{\sqrt{282}}{6}y-\frac{\sqrt{282}}{47}y^{2})^{2}+\left(\sqrt{3}x^{2}\right)^{2}+\left(\sqrt{6}xy\right)^{2}+\left(\frac{\sqrt{6345}}{47}y^{2}\right)^{2}.$$

Tento výpočet nebyl zcela triviální, proto provedeme kontrolu umocněním a sečtením jednotlivých čtverců.

$$(\sqrt{6}x-\frac{\sqrt{6}}{6}y)^{2}+(\frac{\sqrt{282}}{6}y-\frac{\sqrt{282}}{47}y^{2})^{2}+\left(\sqrt{3}x^{2}\right)^{2}+\left(\sqrt{6}xy\right)^{2}+\left(\frac{\sqrt{6345}}{47}y^{2}\right)^{2}=$$

$$=6x^{2}-\frac{\sqrt{6}*\sqrt{6}}{3}xy+\frac{6}{36}y^{2}+\frac{282}{36}y^{2}-\frac{282}{3*47}y^{3}+\frac{282}{47^{2}}y^{4}+3x^{4}+6x^{2}y^{2}+$$

$$+\frac{6345}{47^{2}}y^{4}=$$

$$=6x^{2}-2xy+8y^{2}-2y^{3}+3x^{4}+6x^{2}y^{2}+3y^{4}.$$

Tento polynom nám souhlasí s původním polynomem v zadání, tudíž je celý výpočet v pořádku.

Dosazením $\boldsymbol{r=-1, s=3, t=1}$, dostaneme matici

$$B=\begin{pmatrix}6&-1&0&3&-1\\-1&8&-3&1&-1\\0&-3&3&0&1\\3&1&0&4&0\\-1&-1&1&0&3\end{pmatrix}.$$ Tuto matici potřebujeme převést na diagonální.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}6&-1&0&3&-1&1&0&0&0&0\\-1&8&-3&1&-1&0&1&0&0&0\\0&-3&3&0&1&0&0&1&0&0\\3&1&0&4&0&0&0&0&1&0\\-1&-1&1&0&3&0&0&0&0&1\end{array}\right)$$ přičtením prvního řádku k šestinásobku druhého řádku, prvního řádku k mínus dvojnásobku čtvrtého řádku a prvního řádku k šestinásobku posledního řádku získáme

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}6&-1&0&3&-1&1&0&0&0&0\\0&47&-18&9&-7&1&6&0&0&0\\0&-3&3&0&1&0&0&1&0&0\\0&-3&0&-5&-1&1&0&0&-2&0\\0&-7&6&3&17&1&0&0&0&6\end{array}\right).$$ Abychom zachovali symetričnost matice, přičteme první sloupec k šestinásobku druhého sloupce, první sloupec k mínus

dvojnásobku čtvrtého sloupce a opět první sloupec k šestinásobku pátého sloupce:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & -18 & -18 & -42 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 & 10 & -6 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -42 & 6 & -6 & 102 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right).$$

V dalším kroku přičteme trojnásobek druhého řádku k čtyřicetisedminásobku třetího řádku, trojnásobek druhého řádku k čtyřicetisedminásobku čtvrtého řádku a sedminásobek druhého řádku k čtyřicetisedminásobku pátého řádku:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & -18 & -18 & -42 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 87 & -54 & 156 & 3 & 18 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -54 & 416 & -408 & 50 & 18 & 0 & -94 & 0 \\ 0 & 0 & 156 & -408 & 4500 & 54 & 42 & 0 & 0 & 282 \end{array}\right).$$ Opět musíme symetricky přičíst trojnásobek druhého sloupce k čtyřicetisedminásobku třetího sloupce, trojnásobek druhého sloupce k čtyřicetisedminásobku čtvrtého sloupce a sedminásobek druhého sloupce k čtyřicetisedmi násobku pátého sloupce:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4089 & -2538 & 7332 & 3 & 18 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2538 & 19552 & -19176 & 50 & 18 & 0 & -94 & 0 \\ 0 & 0 & 7332 & -19176 & 211500 & 54 & 42 & 0 & 0 & 282 \end{array}\right).$$ Nyní přičteme osmnáctinásobek třetího řádku k dvacetidevítinásobku čtvrtého řádku a zároveň přičteme padesátidvojnásobek třetího řádku k mínus dvacetidevítinásobku posledního řádku:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4089 & -2538 & 7332 & 3 & 18 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 521324 & -424128 & 1504 & 846 & 846 & -2726 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 424128 & -5752236 & -1410 & -282 & 2444 & 0 & -8178 \end{array}\right).$$

Zde symetricky přičteme osmnáctinásobek třetího sloupce k dvacetidevítinásobku čtvrtého sloupce a padesátidvojnásobek třetího sloupce k dvacetidevítinásobku pátého sloupce:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4089 & 0 & 0 & 3 & 18 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15118396 & 12299712 & 1504 & 846 & 846 & -2726 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12299712 & 166814844 & -1410 & -282 & 2444 & 0 & -8178 \end{array}\right).$$

Jednou z posledních operací bude přičtení čtyřicetiosminásobku čtvrtého řádku k mínus padesátidevítinásobku pátého řádku:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4089 & 0 & 0 & 3 & 18 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15118396 & 12299712 & 1504 & 846 & 846 & -2726 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9251689620 & -155382 & -57246 & 103588 & 130848 & -482502 \end{array}\right).$$

A konečně symetricky přičteme čtyřicetiosminásobek čtvrtého sloupce k mínus padesátidevítinásobku pátého sloupce:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4089 & 0 & 0 & 3 & 18 & 47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15118396 & 0 & 1504 & 846 & 846 & -2726 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 545849687580 & -155382 & -57246 & 103588 & 130848 & -482502 \end{array}\right).$$

Konečně jsme získali diagonální matici

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4089 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15118396 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 545849687580 \end{pmatrix}$$ a transponovanou matici

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 18 & 47 & 0 & 0 \\ 1504 & 846 & 846 & -2726 & 0 \\ -155382 & -57246 & 103588 & 130848 & -482502 \end{pmatrix}.$$

Pro jistotu si zkontrolujeme správnost výpočtu dosazením do vzorce $D = A^T BA$.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 18 & 47 & 0 & 0 \\ 1504 & 846 & 846 & -2726 & 0 \\ -155382 & -57246 & 103588 & 130848 & -482502 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 8 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1504 & -155382 \\ 0 & 6 & 18 & 846 & -57246 \\ 0 & 0 & 47 & 846 & 103588 \\ 0 & 0 & 0 & -2726 & 130848 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -482502 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 47 & -18 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 87 & 27 & 26 \\ 0 & 0 & 0 & -5546 & -1504 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1131290 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1504 & -155382 \\ 0 & 6 & 18 & 846 & -57246 \\ 0 & 0 & 47 & 846 & 103588 \\ 0 & 0 & 0 & -2726 & 130848 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -482502 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4089 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15118396 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 545849687580 \end{pmatrix}.$$

Tímto jsme ověřili správnost výpočtu diagonální matice, která má hodnost 5. Ve výsledku očekáváme tedy součet pěti sčítanců.

Abychom mohli dojít k hledanému výsledku, potřebujeme inverzní matici k matici A. K její nalezení využijeme program Mathematica 8.

$$A = \text{Inverse}[\{\{1,1,3,1504,-155382\},\{0,6,18,846,-57246\},\{0,0,47,846,103588\},$$
$$\{0,0,0,-2726,130848\},\{0,0,0,0,-482502\}\}]$$

$$\{\{1,-\frac{1}{6},0,\frac{1}{2},-\frac{1}{6}\},\{0,\frac{1}{6},-\frac{3}{47},\frac{3}{94},-\frac{7}{282}\},\{0,0,\frac{1}{47},\frac{9}{1363},\frac{26}{4089}\},$$
$$\{0,0,0,-\frac{1}{2726},-\frac{8}{80417}\},\{0,0,0,0,-\frac{1}{482502}\}\}//\text{MatrixForm}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{3}{47} & \frac{3}{94} & -\frac{7}{282} \\ 0 & 0 & \frac{1}{47} & \frac{9}{1363} & \frac{26}{4089} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2726} & -\frac{8}{80417} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{482502} \end{pmatrix}$$

V programu jsme hned využili funkce MatrixForm, která nám přepíše výpočet rovnou do tvaru matice.

Konečně máme všechny potřebné dílčí výsledky a můžeme přejít k předposlednímu kroku. Podle vzorce $U = \sqrt{D} * A^{-1}$ vypočítáme matici U, kterou v posledním kroku vynásobíme monomy a dostaneme rozklad polynomu v součet čtverců.

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{282} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{4089} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{15118396} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{545849687580} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{3}{47} & \frac{3}{94} & -\frac{7}{282} \\ 0 & 0 & \frac{1}{47} & \frac{9}{1363} & \frac{26}{4089} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2726} & -\frac{8}{80417} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{482502} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{282}}{6} & -\frac{3*\sqrt{282}}{47} & \frac{3*\sqrt{282}}{94} & -\frac{7*\sqrt{282}}{282} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{4089}}{47} & \frac{9*\sqrt{4089}}{1363} & \frac{26*\sqrt{4089}}{4089} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{15118396}}{2726} & -\frac{8*\sqrt{15118396}}{80417} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{545849687580}}{482502} \end{pmatrix}.$$

Tato matice má velmi nepříjemné hodnoty. Roznásobovat ji monomy by bylo poměrně obtížné, proto tento případ opustíme nedořešený a zkusíme za parametry dosadit ještě jiné hodnoty.

Dosazením $\boldsymbol{r = -1, s = -4, t = -2}$, získáme matici

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ -4 & 1 & 0 & 10 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matici B potřebujeme stejně jako v předchozích případech převést na diagonální tvar $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & -1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$. V prvním kroku přečteme první řádek k šestinásobku druhého řádku, dvojnásobek prvního řádku k trojnásobku čtvrtého řádku a zároveň přičteme první řádek k šestinásobku posledního:

$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & -1 & 0 & -4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 47 & 24 & 2 & -7 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 22 & -2 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & 36 & -4 & 17 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$. V druhém kroku musíme symetricky přičíst první sloupec k šestinásobku druhého sloupce, dvojnásobek prvního sloupce k trojnásobku čtvrtého sloupce a zároveň první sloupec k šestinásobku pátého:

$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 24 & 6 & -42 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 3 & 0 & 36 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 66 & -12 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -42 & 36 & -12 & 102 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$. Ve třetím kroku přičteme čtyřnásobek druhého řádku k mínus čtyřicetisedminásobku třetího řádku, třetí řádek k mínus čtyřnásobku čtvrtého řádku a sedminásobek čtvrtého řádku k poslednímu řádku:

$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 24 & 6 & -42 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -45 & 24 & -1860 & 4 & 24 & -47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -264 & 84 & -8 & 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 36 & 450 & 18 & 15 & 0 & 0 & 21 & 6 \end{array}\right)$. Ve čtvrtém kroku opět symetricky přičteme čtyřnásobek druhého sloupce k mínus čtyřicetisedminásobku třetího sloupce, třetí sloupec k mínus čtyřnásobku čtvrtého sloupce a sedminásobek čtvrtého sloupce k pátému sloupci:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2115 & -141 & -1692 & 4 & 24 & -47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -141 & 1059 & -1764 & -8 & 0 & 1 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -1692 & -1764 & 3168 & 15 & 0 & 0 & 21 & 6 \end{array}\right).$$

V kroku pátém přičteme třetí řádek k patnáctinásobku čtvrtého a k mínus jednonásobku pátého řádku přičteme dvanáctinásobek čtvrtého řádku:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2115 & -141 & -1692 & 4 & 24 & -47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15744 & -28152 & -116 & 24 & -32 & -180 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14472 & -24336 & -111 & 0 & 12 & -165 & -6 \end{array}\right).$$

Nyní opět symetricky přičteme třetí sloupec k patnáctinásobku čtvrtého a k mínus jednonásobku pátého sloupce přičteme dvanáctinásobek čtvrtého sloupce:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2115 & 0 & 0 & 4 & 24 & -47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 236160 & 217080 & -116 & 24 & -32 & -180 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 217080 & 198000 & -111 & 0 & 12 & -165 & -6 \end{array}\right).$$

V předposledním kroku přičteme šestisettrojnásobek čtvrtého řádku k mínus šestisetpadesátišestinásobku pátého řádku:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2115 & 0 & 0 & 4 & 24 & -47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 236160 & 217080 & -116 & 24 & -32 & -180 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1011240 & 2868 & 14742 & -27168 & -300 & 3936 \end{array}\right).$$

Konečně v posledním kroku přičteme šestisettrojnásobek čtvrtého sloupce k mínus šestisetpadesátišestinásobku pátého sloupce:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2115 & 0 & 0 & 4 & 24 & -47 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 236160 & 0 & -116 & 24 & -32 & -180 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -663373440 & 2868 & 14742 & -27168 & -300 & 3936 \end{array}\right).$$

Po dlouhých a poměrně náročných početních úpravách jsme získali diagonální matici $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2115 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 236160 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -663373440 \end{pmatrix}$ a transponovanou matici

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 24 & -47 & 0 & 0 \\ -116 & 24 & -32 & -180 & 0 \\ 2868 & 14742 & -27168 & -300 & 3936 \end{pmatrix}.$$

Pro jistotu si zkontrolujeme správnost výpočtu dosazením do vzorce $D = A^T BA$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 24 & -47 & 0 & 0 \\ -116 & 24 & -32 & -180 & 0 \\ 2868 & 14742 & -27168 & -300 & 3936 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 6 \\ -4 & 1 & 0 & 10 & 0 \\ -1 & -1 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -116 & 2868 \\ 0 & 6 & 24 & 24 & 14742 \\ 0 & 0 & -47 & -32 & -27168 \\ 0 & 0 & 0 & -180 & -300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3936 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 47 & 24 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -45 & 8 & -310 \\ 0 & 0 & 0 & -1312 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -168540 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -116 & 2868 \\ 0 & 6 & 24 & 24 & 14742 \\ 0 & 0 & -47 & -32 & -27168 \\ 0 & 0 & 0 & -180 & -300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3936 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 282 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2115 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 236160 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -663373440 \end{pmatrix}.$$

Zkontrolovali jsme výpočet diagonální matice. Její hodnost je 5. Další výpočty vzhledem k vysokým hodnotám budou velmi obtížné, jako v předchozím případě. Zakončíme tedy výpočet na tomto místě. Jediné co můžeme ještě konstatovat je, že bychom hledali součet pěti čtverců.

Počítala jsem i další možnosti, ale dopadnou velmi obdobně jako tyto dva případy, proto je zde neuvádím.

6 ZÁVĚR

Při zpracovávání diplomové práce se ukázalo, že nejtěžším místem při nalézání řešení rozkladu polynomu v součet čtverců bývá řešení soustavy algebraických nerovnic. To se ukázalo zvlášť názorně v posledním příkladu druhé kapitoly. My jsme si vybrali řešit rozklad polynomu především pro parametry $r = 0, s = 0, t = 0$, protože se tento případ jevil jako nejjednoduší, což se také potvrdilo. Ještě jsme se pokoušeli o další řešení, která ovšem byla o dost složitější, což je uvedeno v diplomové práci.

V této diplomové práci jsem se snažila překonat obtížností úlohy řešené v předchozí bakalářské práci. Je patrné, že obecně lze nalézt nekonečně mnoho rozkladů pozitivně semidefinitního polynomu v součet čtverců. Nicméně málokterý z nich bude mít "vkusné", pro člověka přijatelné reálné koeficienty. Úplné řešení soustav algebraických nerovnic představuje velmi těžký problém sám o sobě, proto byla naznačena jen cesta k určení několika vzorových rozkladů polynomu v součet čtverců.

Velmi obtížné početní operace při rozkladu pozitivně semidefinitního polynomu v součet čtverců mi pomohly řešit programy Mathemtica 7.0 a novější verze Mathematica 8.0. Také jsem využívala program WolframAlpha, který mi pomáhal při kontrolování jednotlivých výpočtů.

7 SEZNAM LITERATURY

[1] BEČVÁŘ. J, Lineární algebra, 2. vydání, Matfyzpress, Praha 2002

[2] Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 20/1975, č. 3, str. 154 - 158.

[3] POWERS, V. WOERMANN, T., An algorithm for sum sof square sof real polynomials, J. Pure and Appl. Alg. 127 (1998), 99-104

[4] PRASOLOV, V. V, Mnogočleny. 2. vydání, MCNMO, 2001

[5] Prasolov, V.V., Solovjev, J. P.: Eliptičeskije funkcii i algebraičeskije uravnenija, Moskva, Faktorial, 1997. – str. 18

[6] Vasiljev, H. B, Jegorov, A. A. Zadači vsesojuznych matematičeskich olympiad, Nauka, Moskva, 1988.

8 RESUMÉ

In my thesis refer to the graduate work, where I studied 17th Hilbert problem. He dealt with finding a way to express definite rational function as the sum of squares of rational functions. We also focused on the sums of squares of real polynomials and sums of squares and Grammovy matrix.

In this thesis we focused on cases where the set of all positive semidefinite polynomials coincides with the SOS (sum of squares). We looked also for a homogeneous polynomial of degree. We say, when the quadratic form is positive definite, negative definite, positive semidefinite, negative semidefinite and indefinitní.

In the second part we present the decomposition of a polynomial in finding the sum of squares, with the added use of knowledge of linear algebra and knowledge of a general nature, such as Descartes' rule.

The most difficult point in finding a solution in polynomial decomposition of the sum of squares of the solution of algebraic inequalities. It has been shown at the third example.

Very difficult calculations helped me deal with programs Mathemtica 7.0 and newer versions of Mathematica 8.0. I also used the program WolframAlpha, which helped me when checking the individual calculations.