Západočeská univerzita v Plzni

FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY
ODDĚLENÍ MATEMATIKY

ROZVÍJENÍ KOMBINATORICKÉHO MYŠLENÍ PŘI VÝUCE MATEMATIKY NA ZŠ
DIPLOMOVÁ PRÁCE

Jana Pancová
Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma-Bi
léta studia (2010-2012)

Vedoucí práce: *RNDr. Jiří Potůček, CSc.*

Děkuji panu RNDr. Jiřímu Potůčkovi, CSc. za odborné vedení mé diplomové práce.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně
s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 10. března 2012

……………………………………………

vlastnoruční podpis

OBSAH

1 ÚVOD

Jako téma své diplomové práce jsem si zvolila rozvíjení kombinatorického myšlení u žáků druhého stupně základní školy. Zajímaly mě totiž možnosti, jakými lze obohatit výuku matematiky na základní škole, a to tématem, které se běžně objevuje až v učebnicích matematiky pro školy vyššího stupně. Lze namítnout, že v učebním plánu pro základní školy již není dostatečný časový prostor pro toto téma a je to jistě připomínka na místě. Řešení kombinatorických úloh ovšem nevyžaduje obsáhlé teoretické znalosti, je zaměřeno spíše na logické myšlení. Žáci nemusí znát kombinatorická pravidla v podobě, v jaké jsou předkládána studentům středních škol, ale nadaní jedinci je jistě dokážou užívat intuitivně. Proto jsem přesvědčena o tom, že úlohy z oblasti kombinatoriky mohou nalézt své místo i ve výuce na základní škole, přinejmenším ve třídách s rozšířenou výukou matematiky nebo jako problémové úlohy pro nadané žáky.

V první části své práce jsem se zaměřila na teoretické základy kombinatoriky v podobě, v jaké jsou předkládány studentům středních škol. Vycházela jsem při tom z běžně dostupných učebnic matematiky. Jsou zde vysvětlena základní kombinatorická pravidla, dále vzorce pro výpočet počtu variací, permutací a kombinací s opakováním prvků i bez, včetně jejich odvození. Vše je doplněné jednoduchými ukázkovými příklady.

Stěžejní část práce tvoří zpracování učiva kombinatoriky pro základní školy. V běžných učebnicích se toto téma v podstatě nevyskytuje, vycházela jsem proto z učebnic pro základní školy určených pro třídy s rozšířenou výukou matematiky. Většina z nich byla vydána v osmdesátých letech minulého století. Obsahují úlohy zaměřené zejména na kombinace a jejich řešení staví na základních znalostech o množinách. Velmi zajímavé a pro žáky srozumitelné je řešení těchto úloh pomocí procházek po čtvercové síti. Věnuji mu proto samostatnou kapitolu, ve které na ukázkových příkladech vysvětlím základní principy řešení.

Součástí práce jsou také obtížnější kombinatorické úlohy včetně řešení, z nichž některé by mohly být využitelné i pro žáky základní škol. Další už ovšem vyžadují hlubší znalosti, například práce s kombinačními čísly, proto by je byli schopni vyřešit spíše studenti škol vyšších stupňů.

Vzhledem k tomu, že se v poslední době dostávají stále více do popředí moderní technologie, kterými je možné výuku obohatit, rozhodla jsem se pro zpracování některých částí práce v programu Smart Notebook (verze 10 společnosti Smart Technologies) pro interaktivní tabule. Ve čtyřech souborech je zde k dispozici základní teorie a vybrané příklady vhodné pro žáky základních škol. Materiál může usnadnit pochopení problematiky, zpestřit výuku a poskytuje prostor nejen pro samostatnou, ale i skupinovou práci žáků. V textu jsou interaktivně zpracované části označeny symboly s číslem souboru, ve kterém se nachází:

1_dvouprvkové kombinace

2_*k*-prvkové kombinace

3_procházky po síti

4_pořadí

Popis jednotlivých snímků z těchto interaktivních souborů se nachází v příloze této práce, samotné soubory pro program Smart Notebook jsou uloženy na CD. Učitelům mohou pomoci doporučené formy práce a komentáře, které by mohly žákům sloužit k lepšímu pochopení dané problematiky.

2 MNOŽINY A JEJICH ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Ve výuce kombinatoriky je často využíváno množinové pojetí. Nejprve tedy uvedu základní pojmy týkající se množin, které budu dále ve své práci užívat.

Definice 1: Množina je **konečná**, je-li počet jejích prvků vyjádřen přirozeným číslem (včetně nuly).

Definice 2: Množina je **M podmnožinou** množiny **N** právě tehdy, když všechny prvky množiny **M** jsou prvky množiny **N.** Zapisujeme $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$.

Podmnožiny můžeme blíže určit počtem prvků, které obsahují. Hovoříme pak o jednoprvkové, dvouprvkové až ***k*-prvkové podmnožině** dané množiny.

Věta 1: Každá množina je podmnožinou sebe samé.

Definice 3: Prázdná množina je množina, která neobsahuje žádný prvek. Značíme $\emptyset$.

Věta 2: Prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Definice 4: Mějme danou základní množinu **Z** a její podmnožinu **M**. Množinu všech prvků základní množiny **Z**, které nejsou prvky množiny **M**, nazýváme **doplněk množiny M** (v základní množině **Z**). Značíme např. **M'**.

Definice 5: Průnik množin A a **B** je množina, která obsahuje prvky náležící množině A i množině B:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x; x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B}\}.$$

Definice 6: Množiny **A, B** nazýváme **disjunktní**, právě když

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset.$$

3 ZÁKLADNÍ KOMBINATORICKÉ POJMY A PRAVIDLA

V této kapitole objasním základní kombinatorické pojmy a pravidla, kterými se řídíme při řešení kombinatorických úloh. Uvádím je na úrovni žáků středních škol, je tedy zřejmé, že žáci základní školy se s nimi v této podobě nesetkají. Používají je ovšem často intuitivně.

3.1 ZÁKLADNÍ KOMBINATORICKÁ PRAVIDLA

3.1.1 KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČINU

Věta 3: Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního členu n_2 způsoby atd. až k-tý člen po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, je roven součinu $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Příklad 1: Určete počet všech přirozených dvojciferných čísel, v jejichž dekadickém zápisu se každá číslice vyskytuje nejvýše jednou.

Řešení: Na místě desítek může stát libovolná z celkem devíti číslic (1, 2, …, 9). Nula na pozici desítek být nesmí, nejednalo by se potom o dvojciferné číslo. Ke každé z těchto devíti číslic lze na místo jednotek přiřadit libovolnou z dalších devíti číslic – na pozici jednotek může být nula, avšak nesmí se zde nacházet vybraná číslice, které stojí na místě desítek. Počet možných dvojciferných čísel je tedy $9 \cdot 9 = 81$. (*Calda, Dupač, 2010, s. 8*)

3.1.2 KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČTU

Věta 4: Jsou-li $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \ldots, p_n$ prvků, a jsou-li každé dvě disjunktní, pak počet prvků množiny $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ je roven součtu $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$.

Příklad 1 lze podle pravidla součtu řešit také následujícím způsobem:

Všechna přirozená čísla lze rozdělit do dvou disjunktních skupin následovně: v první skupině se nacházejí všechna dvojciferná čísla s různými číslicemi, jejich počet označíme p. Ve druhé skupině jsou dvojciferná čísla se stejnými číslicemi (11, 22, …, 99), tj. 9 čísel. Všech dvojciferných čísel je 90. Hledaný počet dvojciferných čísel s různými číslicemi je tedy

$$p + 9 = 90,$$

odtud $p = 81$. (*Calda, Dupač, 2010, s. 8*)

3.2 VARIACE

Definice 7: k-členná variace z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

Pro ilustraci uvádím všechny dvojčlenné variace ze tří prvků a, b, c:

$$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).$$

Z předchozího tedy jasně vyplývá, že záleží na pořadí prvků ve vybírané skupině. Pro lepší pochopení je možné žákům uvést konkrétní příklad, např. ptáme se, kolika způsoby je možné rozdělit mezi určitý počet závodníků zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili. Samozřejmě zde záleží na tom, který závodník obdrží jakou medaili, proto nám při vybírání těchto trojic oceněných závodníků záleží na pořadí a tedy jedná se o variace.

Při určování počtu všech k-členných variací z n prvků vycházíme z kombinatorického pravidla součinu. Pro výběr prvního členu uspořádané k-tice máme n možností. Pro výběr druhého členu už jen $n - 1$ možností atd. Pro výběr k-tého členu máme po výběru všech předcházejících právě $n - (k - 1)$ možností. Počet uspořádaných k-tic (značíme $V(k, n)$, příp. $V_k(n)$) je tedy roven součinu

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Věta 5: Počet $V(k, n)$ všech k-členných variací z n prvků je

$$V(k, n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1),$$

pro $n, k \in N, k \leq n$.

Příklad 2: O telefonním čísle své spolužačky si Iveta pamatovala jen to, že začíná šestkou, je sedmimístné, dělitelné 10 a neobsahuje žádné dvě stejné číslice. Kolik čísel přichází v úvahu?

Řešení: Je zřejmé, že v telefonním čísle záleží na pořadí číslic, jedná se tudíž o variace.

Na začátku čísla může stát jediná číslice, a to 6. Číslo je dělitelné 10, na konci čísla tedy musí být 0.

$$\underline{6}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \underline{0}$$

Na zbývajících 5 pozic vybíráme číslice z 8 zbylých možných, protože víme, že číslice se v telefonním čísle neopakují. Na pořadí číslic záleží, jedná se tedy o pětičlenné variace z 8 prvků.

$$p = 1 \cdot V(5,8) \cdot 1 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720.$$

V úvahu přichází 6720 telefonních čísel.

3.3 PERMUTACE

Definice 8: Permutace z *n* prvků je uspořádaná n-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý vyskytuje právě jednou.

Jinak řečeno: Permutace z n prvků je každá n-členná variace z těchto prvků.

Pro ilustraci uvádím všechny permutace ze tří prvků a, b, c:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Počet všech permutací $P(n)$ z n prvků lze získat tak, že do vzorce uvedeného ve Větě 5 dosadíme $k = n$:

$$P(n) = V(n, n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Pro tento výsledek, tj. pro součin všech přirozených čísel od 1 do n se zavádí symbol ***n*! (*n* faktoriál).**

Počet všech permutací $P(n)$ z n prvků lze tedy uvést i takto:

$$P(n) = n!$$

Nyní lze pro počet variací $V(k, n)$ odvodit vzorec vyjádřený pomocí faktoriálů, a to následujícím způsobem:

$$V(k, n) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Poznámka: Je definováno, že $0! = 1$, proto předchozí vzorec platí i pro $n = k$. Nenastane tak situace, kdy by se ve jmenovateli nacházela nula.

Příklad 3: Určete, kolika způsoby se v pětimístné lavici může posadit 5 děvčat, jestliže dvě chtějí sedět vedle sebe.

Řešení: Jedná se o permutace. Pokud chtějí 2 děvčata sedět vedle sebe, můžeme je považovat za jeden prvek. Dále mohou své pozice měnit zbývající 3 děvčata – řešíme tedy permutaci ze čtyř prvků. Je důležité si uvědomit, že ona 2 děvčata si ještě mohou měnit místo sama mezi sebou, proto vše násobíme dvěma. Výpočet je tedy následující:

$$p = 2 \cdot P(4) = 2 \cdot 4! = 48.$$

Děvčata se mohou v lavici posadit 48 způsoby.

3.4 KOMBINACE

Definice 9: k-členná kombinace z n prvků je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše jednou.

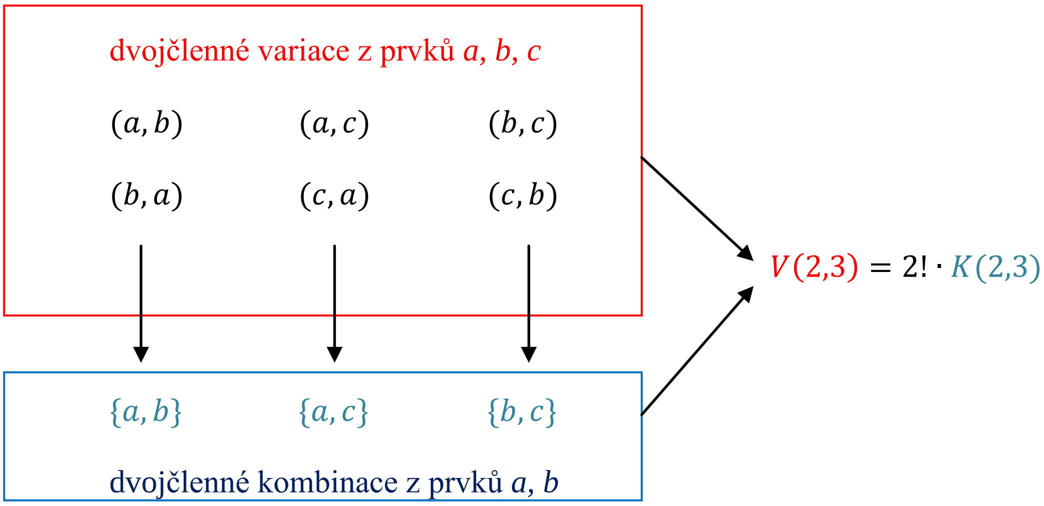
Zabýváme se tedy nyní neuspořádanými k-ticemi, nebude nám tedy záležet na pořadí prvků v těchto skupinách.

Počet $K(k, n)$ všech k-členných kombinací z n prvků odvodíme s použitím vzorce pro počet variací. Utvoříme tedy z n prvků k-členné variace, ty poté rozdělíme do skupin tak, aby se všechny variace v dané skupině lišily pouze pořadím prvků a každé dvě variace z různých skupin se lišily alespoň v jednom prvku. k prvků lze uspořádat $k!$ způsoby, proto každá skupina obsahuje $k!$ uspořádaných k-tic. Těchto $k!$ upořádaných k-tic splyne v jedinou neuspořádanou k-tici, pokud nám nebude záležet na pořadí prvků ve skupině, tedy v jedinou k-člennou kombinaci z n prvků. Počet skupin, do kterých jsme původně k-členné variace rozdělili, je roven počtu k-členných kombinací z daných n prvků. V každé skupině je $k!$ variací, platí tedy

$$V(k, n) = k! \cdot K(k, n).$$

(Calda, Dupač, 2010, s. 26)

Pro lepší ilustraci uvádím schéma pro dvojčlenné variace ze tří prvků a, b, c:



Obr. 1

Věta 6: Počet $K(k, n)$ k-členných kombinací z n prvků je roven:

$$K(k, n) = \frac{1}{k!} \cdot V(k, n) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

pro $n, k \in N_0, k \leq n$.

Pro zlomek $\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ se používá symbol $\binom{n}{k}$, čteme „n nad k“ a nazývá se **kombinační číslo.**

Počet $K(k, n)$ všech k-členných kombinací z n prvků lze pomocí kombinačního čísla zapsat takto:

$$K(k, n) = \binom{n}{k}.$$

Příklad 4: Určete, kolika způsoby je možné vybrat z pěti mužů a sedmi žen čtyřčlennou skupinu, ve které budou právě dvě ženy a dvě muži.

<u>Řešení</u>: Je zřejmé, že se jedná o kombinace – není důležité, v jakém pořadí dané muže a ženy do skupiny vybereme. Vybíráme tedy dvě ženy ze sedmi možných, jedná se tedy o dvojčlenné kombinace ze sedmi prvků $K(2,7)$, podobně vybíráme dva muže z pěti možných, tedy tvoříme dvojčlenné kombinace z pěti prvků $K(2,5)$. Při výpočtu dále uplatníme kombinatorické pravidlo součinu podle Věty 3:

$$p = \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{2} = \frac{7!}{2! \cdot (7-2)!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 210.$$

Čtyřčlenné skupiny je možné utvořit 210 způsoby.

3.5 VARIACE S OPAKOVÁNÍM

Definice 10: k-členná variace s opakováním z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k-krát.

Pro ilustraci uvádím všechny dvoučlenné variace ze dvou prvků (a, b):

$$(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c).$$

Rozdíl mezi variacemi bez opakování a variacemi s opakováním je také v tom, pro jaká n a k existují. Zatímco variace bez opakování existovaly pro $k \leq n$, variace s opakováním platí i pro $k > n$. Například je možné utvořit i tříčlenné variace ze dvou prvků (a, b):

$$(a, a, a), (a, a, b), (a, b, a), (b, a, a), (a, b, b), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b).$$

Počet k-členných variací s opakování z n prvků lze jednoduše odvodit. Pro výběr každého členu uspořádané k-tice máme n možností. Počet těchto k-tic je podle kombinatorického pravidla součinu roven $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k\,-\,\text{krát}} = n^k$. *(Calda, Dupač, 2010, s. 36)*

Věta 7: Počet k-členných variací s opakování z n prvků je roven

$$V'(k, n) = n^k.$$

3.6 PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM

Definice 11: Permutace s opakování z n prvků je uspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň jednou.

Nyní tvoříme uspořádané skupiny z n prvků, kde každý je označen alespoň jednou – označíme je $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Každý bude zastoupen v daném počtu: prvek a_1 se ve skupině bude vyskytovat k_1-krát, prvek a_2 k_2-krát, …, prvek a_n k_n-krát. Pro ilustraci vypíšeme uspořádané skupiny dvou prvků a, b, tedy permutace s opakováním ze dvou prvků a, b, kde prvek a se bude vyskytovat třikrát a prvek b dvakrát, tedy $k_1 = 3$ a $k_2 = 2$:

$$(a,a,a,b,b),(a,a,b,a,b),(a,a,b,b,a),(a,b,a,a,b),(a,b,a,b,a),$$

$$(a,b,b,a,a),(b,a,a,a,b),(b,a,a,b,a),(b,a,b,a,a),(b,b,a,a,a).$$

(Calda, Dupač, 2010, s. 40-41)

Počet všech permutací s opakováním odvodíme na konkrétním případě. Uvažujme skupinu čtyř prvků a_1, a_2, b_1, b_2. Z těchto prvků utvoříme nejprve 4! permutací, poté odstraníme u prvků indexy, tj. položíme $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$ a zkoumáme, kolik permutací se ztotožní.

Permutace ze 4 prvků a_1, a_2, b_1, b_2

(a_1,a_2,b_1,b_2) (a_1,b_1,a_2,b_2) (a_1,b_1,b_2,a_2) (b_1,a_1,a_2,b_2)

(a_1,a_2,b_2,b_1) (a_1,b_2,a_2,b_1) (a_1,b_2,b_1,a_2) (b_2,a_1,a_2,b_1)

(a_2,a_1,b_1,b_2) (a_2,b_1,a_1,b_2) (a_2,b_1,b_2,a_1) (b_1,a_2,a_1,b_2)

(a_2,a_1,b_2,b_1) (a_2,b_2,a_1,b_1) (a_2,b_2,b_1,a_1) (b_2,a_2,a_1,b_1)

(b_1,a_1,b_2,a_2) (b_1,b_2,a_1,a_2)

(b_2,a_1,b_1,a_2) (b_2,b_1,a_1,a_2)

(b_1,a_2,b_2,a_1) (b_1,b_2,a_2,a_1)

(b_2,a_2,b_1,a_1) (b_2,b_1,a_2,a_1)

(a,a,b,b) (a,b,a,b) (a,b,b,a) (b,a,a,b)

(b,a,b,a) (b,b,a,a)

Permutace s opakováním ze dvou prvků a, b, z nichž se každý opakuje dvakrát

Obr. 2

Je vidět, že například s permutací (a, a, b, b) se ztotožnily permutace, v nichž byly prvky a_1 a a_2 na prvním a druhém místě a prvky b_1 a b_2 na třetím a čtvrtém místě. Pro umístění na těchto místech máme ale 2! možností pro prvky a_1, a_2 a obdobně pro prvky b_1, b_2. S permutací (a, a, b, b) tedy splynou celkem $2! \cdot 2! = 4$ původní permutace z prvků a_1, a_2, b_1, b_2. Každá skupina těchto původních permutací odpovídá jedné permutaci s opakováním ze dvou prvků a a dvou prvků b a má tedy $2! \cdot 2!$ členů. Pro počet permutací s opakování $P'(2,2)$ tedy platí:

$$P'(2,2) = \frac{(2+2)!}{2! \cdot 2!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$$

Obecně lze pravidlo pro výpočet počtu permutací s opakováním formulovat takto:

Věta 8: Počet $P'(k_1, k_2, \dots, k_n)$ permutací s opakováním z n prvků, v nichž se jednotlivé prvky opakují $k_1, k_2, \dots k_n$ - krát je

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}.$$

Příklad 6: Určete počet způsobů, jimiž lze přemístit písmena slova ABRAKADABRA.

Řešení: Jedná se o permutace s opakování z prvků A, B, R, D, K, v nichž se A vyskytuje pětkrát, B dvakrát, R dvakrát, D jednou a K jednou. Počet všech způsobů, jakými lze tyto prvky přemístit je tedy

$$P'(5,2,2,1,1) = \frac{(5+2+2+1+1)!}{5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{11!}{480} = 83\,160.$$

Písmena lze přemístit 83 160 způsoby. *(Calda, Dupač, 2010, s. 44)*

3.7 KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM

Definice 12: *k*-členná kombinace s opakováním z *n* prvků je neupořádaná *k-tice* sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše *k*-krát.

Odvodíme nyní vzorec pro výpočet počtu všech k-členných kombinací s opakováním. Využijeme konkrétního příkladu, kdy budeme hledat počet tříčlenných kombinací s opakováním ze tří prvků *a, b, c.* Každou kombinaci s opakováním

„zašifrujeme" pomocí uspořádané skupiny koleček, které rozdělíme do tří přihrádek; každá přihrádka je určena pro daný prvek a, b nebo c. Rozhraní mezi přihrádkami jsou znázorněna lomítkem. Pro každý z prvků zakreslíme do příslušné přihrádky tolik koleček, kolikrát se v dané kombinaci prvek nachází. Dostaneme tedy tento systém přihrádek:

(a, a, a) → (o o o / /)	(a, c, c) → (o / / o o)
(a, a, b) → (o o / o /)	(b, b, b) → (/ o o o /)
(a, a, c) → (o o / / o)	(b, b, c) → (/ o o / o)
(a, b, b) → (o / o o /)	(b, c, c) → (/ o / o o)
(a, b, c) → (o / o / o)	(c, c, c) → (/ / o o o)

Každé tříčlenné kombinaci odpovídá jedna uspořádaná pětice tvořená dvěma lomítky a třemi kolečky. Počet $K'(3,3)$ kombinací s opakováním je roven počtu permutací s opakováním ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje dvakrát (lomítka) a druhý třikrát (kolečka).

Pokud bychom nyní určovali obecně počet k-členných kombinací s opakováním z n prvků, přiřadili bychom každé kombinaci uspořádanou skupinu s k kolečky a $n-1$ lomítky. Počet kombinací s opakováním by tedy byl roven počtu permutací s opakováním ze dvou prvků, z nichž jeden se opakuje k-krát a druhý $(n-1)$-krát. Tedy platí:

$$K'(k,n) = P'(k,n-1) = \frac{[k+(n-1)]!}{k!\cdot(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!}.$$

Nyní upravíme:

$$\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{k!\cdot[(n+k-1)-k]!} = \binom{n+k-1}{k}.$$

(Calda, Dupač, 2010, s. 47 – 48)

Věta 9: Počet $K'(k,n)$ všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků je

$$K'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Jinými slovy: Počet $K'(k,n)$ všech k-členných kombinací s opakováním z n prvků je roven počtu všech k-členných kombinací (bez opakování) z $n+k-1$ prvků.

Příklad 7: V sáčku jsou bílé, černé a modré kuličky. Urči, kolika způsoby lze vybrat 6 kuliček, jestliže v sáčku je:

a) alespoň 6 kuliček od každé barvy.

b) 6 bílých, 5 černých a 5 modrých kuliček.

Řešení:

a) Vybíráme 6 kuliček ze tří možných barev, jedná se tedy o kombinace s opakováním $K'(6,3)$. Kuliček je dostatečné množství, můžeme tedy utvořit všechny možné šestice.

$$K'(6,3) = \binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28.$$

Šest kuliček lze vybrat 28 způsoby.

b) V tomto případě nemáme dostatečný počet černých a modrých kuliček. Odečteme proto 2 možnosti, kdy bychom vytáhli 6 černých a 6 modrých kuliček, protože taková situace nemůže nastat.

$$K'(6,3) - 2 = 26.$$

Šest kuliček lze vybrat 26 způsoby.

4 KOMBINATORIKA V UČEBNICÍCH PRO ZŠ

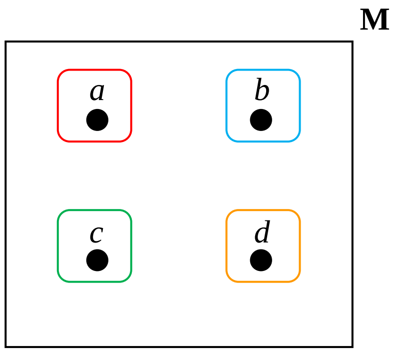
V současných učebnicích matematiky pro základní školy se učivo kombinatoriky jako takové v podstatě nevyskytuje. V učebnicích, které vycházely před rokem 1989, lze ovšem nalézt celé kapitoly, které se věnují kombinatorice a pravděpodobnosti. Jedná se však ve většině případů o učebnice, které jsou určeny pro žáky s hlubším zájmem o matematiku nebo pro třídy s rozšířenou výukou matematiky.

4.1 KOMBINACE

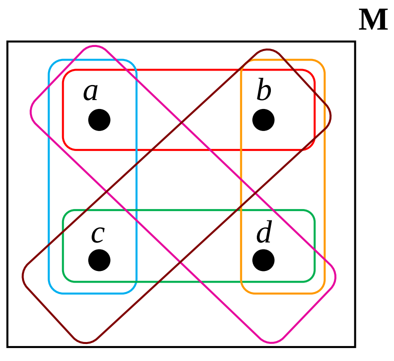
Učivu o kombinatorice předcházejí ve výše zmíněných učebnicích kapitoly věnované množinám. Kombinace množiny **M** můžeme definovat také takto:

Definice 13: Podmnožiny konečné množiny M se nazývají **kombinace množiny M.** Podle počtu prvků patřících kombinaci se rozeznává kombinace prázdná (tj. prázdná množina), jednoprvková, dvouprvková, tříprvková….*k*-prvková. *(Melichar, 1980, s. 49)*

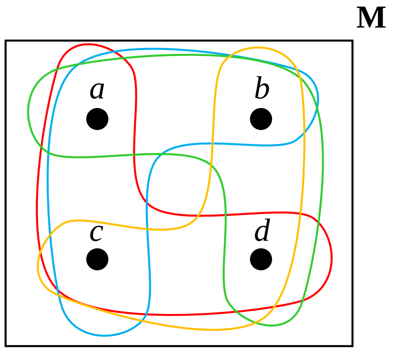
Pro názornost ukážeme jednotlivé kombinace na čtyřprvkové množině $\mathbf{M} = \{a, b, c, d\}$. Množina **M** má celkem jednu prázdnou kombinaci $\emptyset$, čtyři jednoprvkové kombinace {*a*}, {*b*}, {*c*}, {*d*} (obr. 3), šest dvouprvkových kombinací {*a*, *b*}, {a, c}, {*a*, *d*}, {*b*, *c*}, {*b*, *d*}, {*c*, *d*} (obr. 4), čtyři tříprvkové kombinace {*a*, *b*, *c*}, {*a*, *b*, *d*}, {*a*, *c*, *d*}, {*b*, *c*, *d*} (obr. 5) a jednu čtyřprvkovou kombinaci {*a*, *b*, *c*, *d*} (obr. 6).



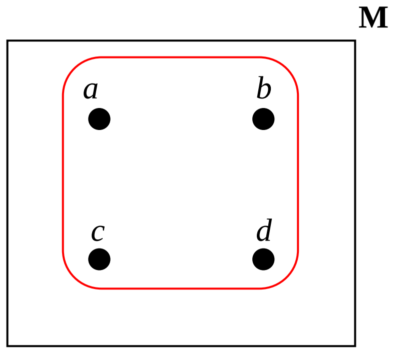
Obr. 3



Obr. 4



Obr. 5

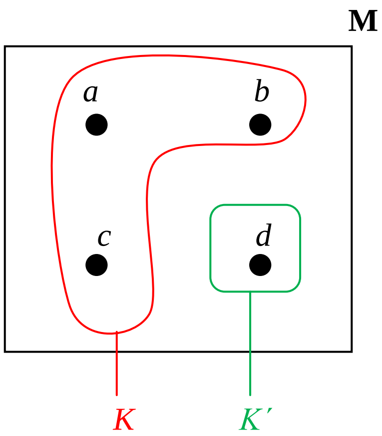


Obr. 6

Dále je třeba definovat doplňkovou kombinaci ke kombinaci *K*:

Definice 14: Doplněk *K´* kombinace *K* množiny M se nazývá **doplňková kombinace ke kombinaci *K***. *(Melichar, 1980, str. 50)*

Na obrázku 7 jsou pro názornost zobrazeny vybraná tříprvková kombinace $K = \{a, b, c\}$ množiny $\mathbf{M} = \{a, b, c, d\}$ a její doplňková kombinace $K' = \{d\}$.



Obr. 7

4.1.1 DVOUPRVKOVÉ KOMBINACE

Než se budeme věnovat hledání *k*-prvkových kombinací *n*-prvkové množiny, začneme pouze s dvouprvkovými kombinacemi.

Je zřejmé, že známe-li všechny dvouprvkové kombinace množiny $\mathbf{M} = \{1,2,3, \dots, n\}$, známe i všechny doplňkové kombinace, tj. $(n - 2)$-prvkové kombinace množiny **M**.

Úlohy, kdy hledáme všechny dvouprvkové kombinace, lze řešit dvěma způsoby – grafickou a tabulkovou metodou.

Grafická metoda spočívá ve znázornění prvků množiny **M** pomocí bodů, z nichž žádné tři neleží v jedné přímce. Úsečky spojující tyto body pak znázorňují jednotlivé kombinace.

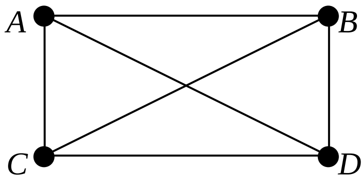
Tabulková metoda může mít několik podob, vždy však přehledně zaznamenáváme všechny možné kombinace.

Obě metody použijeme při řešení následujícího příkladu.

Příklad 8: Adam, Bedřich, Cyril a David hrají turnaj v tenise systémem „každý s každým jeden zápas“. Kolik zápasů se bude hrát? Zapište všechny dvojice.

Řešení:

a) Řešení grafickou metodou je znázorněno na obrázku 8:



Obr. 8

Hráče označíme písmeny *A, B, C, D,* tyto tvoří dohromady množinu **M**. Prvky množiny **M** znázorníme čtyřmi body, z nichž žádné tři neleží na jedné přímce. Narýsujeme poté všechny úsečky, které spojují tyto čtyři body. Dvojice krajních bodů udávají všechny dvouprvkové kombinace. Zapíšeme tedy všechny úsečky na obrázku 8:

úsečky vycházející z bodu *A*	*AB, AD, AC*
zbylé úsečky vycházející z bodu *B*	*BC, BD*
zbylé úsečky vycházející z bodu *C*	*CD*
zbylé úsečky vycházející z bodu *D*	-

Je vidět, že počet všech dvouprvkových kombinací, tedy počet odehraných zápasů, je 6.

Z obrázku 8 lze odvodit vzorec pro počet dvouprvkových kombinací množiny **M,** tento vzorec pak bude platit pro libovolný počet prvků *n* množiny **M**, pro $n \geq 2$. Každý z *n* bodů jsme spojili s $(n - 1)$ zbývajícími. Dostali jsme tak $n \cdot (n - 1)$ spojnic. Každá z těchto spojnic však byla započítána dvakrát, počet spojnic (dvouprvkových kombinací) je tedy roven $n \cdot (n - 1) : 2$.

Věta 10: Počet všech dvouprvkových kombinací množiny **M** o *n* prvcích, kde $n \geq 2$, je roven

$$K(2, n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1).$$

b) <u>Řešení tabulkovou metodou:</u>

Hledání dvouprvkových kombinací pomocí tabulky může mít několik podob, některé z nich jsou znázorněny v následujících třech ukázkách:

schéma postupu	*dvouprvkové kombinace*
A *B* *C* *D*	*A* *B* *C* *D* *A* *B* *C* *D* *A* *B* *C* *D*
A ***B*** *C* *D*	*A* *B* *C* *D* *A* *B* *C* *D*
A *B* ***C*** *D*	*A* *B* *C* *D*

Tabulka 1

(Melichar, 1982, s.54)

	A	*B*	*C*	*D*
A		*AB*	*AC*	*AD*
B			*BC*	*BD*
C				*CD*
D				

Tabulka 2

(Koman, Vyšín, 1974, s. 91)

A	*B*	*C*	*D*
/	/	-	-
/	-	/	-
/	-	-	/
-	/	/	-
-	/	-	/
-	-	/	/

Tabulka 3

(Koman, Vyšín, 1974, s. 91)

Příklad 9:

a) Tabulkovou metodou znázorněte všechny dvouprvkové kombinace množiny $\mathbf{M} = \{A, B, C, D, E\}$.

b) Zvolte 5 bodů A, B, C, D, E, z nichž žádné tři neleží v přímce. Tyto body spojte přímkami. Přímky rýsujte barevně:

- červeně přímky jdoucí bodem A,
- modře zbylé přímky jdoucí bodem B,
- zeleně zbylé přímky jdoucí bodem C,
- žlutě zbylou přímku jdoucí bodem D.

Vybarvěte stejnými barvami odpovídající části tabulky ze cvičení a).

c) Užitím tabulky ze cvičení b) vypište všechny trojúhelníky s vrcholem C a zbylými dvěma vrcholy v bodech A, B, C, D. *(Melichar, 1980, s. 55-56)*

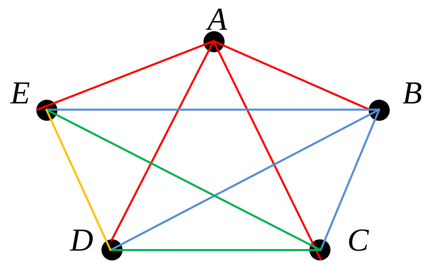
Řešení:

a)

A	*B*	*C*	*D*	*E*
/	/	-	-	-
/	-	/	-	-
/	-	-	/	-
/	-	-	-	/
-	/	/	-	-
-	/	-	/	-
-	/	-	-	/
-	-	/	/	-
-	-	/	-	/
-	-	-	/	/

Tabulka 4

b)



Obr. 9

c) Lze říci, že požadované trojúhelníky jsou **doplňkovými kombinacemi** k dvouprvkovým kombinacím, který neobsahují prvek C, např. k dvouprvkové kombinaci $\{A, B\}$ je doplňkovou kombinací $\{C, D, E\}$, což je tedy i jeden z trojúhelníků s vrcholem v bodě C. Podobně nalezneme i všechny ostatní trojúhelníky:
ΔBCE, ΔBCD, ΔACE, ΔACD, ΔABC.

4.1.2 KOMBINACE *K* – PRVKOVÉ

Nyní můžeme obecně definovat *k-prvkové* kombinace.

Definice 15: Je dána konečná množina $\mathbf{M} \neq \emptyset$, která má n prvků a dále přirozené číslo $k \leq n$. Každou podmnožinu $\mathbf{M_k} \subset \mathbf{M}$, která má k prvků, nazveme k-prvkovou kombinací množiny **M**. *(Koman, Vyšín, 1974, s.98)*

Definice 16: Je-li C_k libovolná k-prvková kombinace množiny **M**, pak její doplněk C_{n-k} je $(n - k)$-prvkovou kombinací množiny **M**. Kombinace C_{n-k} se nazývá **doplňková kombinace** ke kombinaci C_k. *(Koman, Vyšín, 1974, s.99)*

Říkáme, že kombinace C_k a C_{n-k} jsou **kombinace navzájem doplňkové.** *(Koman, Vyšín, 1974, s.100)*

V učebnicích pro základní školy navrhují řešení úloh, kde hledáme všechny k-prvkové kombinace množiny **M**, tabulkovou metodou.

Příklad 10: Než vyjel výtah z přízemí do 7. patra, v nižších patrech třikrát zastavil. Přitom minul druhé patro. Zapište všechny možnosti, kde výtah zastavil.

<u>Řešení:</u> Víme, že výtah nezastavil ve druhém patře, nepočítáme také s přízemím a sedmým patrem. Mohl tedy zastavit v prvním, třetím, čtvrtém, pátém nebo šestém patře. Hledáme tedy tříprvkové kombinace z pěti prvků. K řešení použijeme tabulkovou metodu.

1.	3.	4.	5.	6.
/	/	/	-	-
/	/	-	/	-
/	/	-	-	/
/	-	/	/	-
/	-	/	-	/
/	-	-	/	/
-	/	/	/	-
-	/	/	-	/
-	/	-	/	/
-	-	/	/	/

Tabulka 5

Je tedy celkem 10 možností, kde mohl výtah zastavit, a to: $\{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\}, \{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{1,5,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\}, \{3,5,6\}, \{4,5,6\}$.

4.1.3 KOMBINAČNÍ ČÍSLA

Počet všech k-prvkových kombinací z n-prvkové množiny značíme pomocí kombinačních čísel $\binom{n}{k}$.

Žáky je vhodné upozornit na to, že se nejedná o zlomek, tedy je nutné vynechat zlomkovou čáru a zároveň nesmíme opomenout zapsat čísla do závorky. Kombinační čísla čteme „n nad k“ (tedy například „čtyři nad dvěma“).

Na středoškolské úrovni by nyní následovalo zavedení vzorce pro výpočet kombinačního čísla s užitím faktoriálů, jak jsem uvedla v kapitole 3.4. Učebnice pro základní školy (s rozšířenou výukou matematiky) se omezují pouze na zavedení několika pravidel, která platí pro kombinační čísla. Bez důkazu se zde uvádí například vlastnosti, kdy platí

$$\binom{n}{0} = 1 \text{ a } \binom{n}{n} = 1 \quad \text{pro } n \geq 1.$$

Z definice doplňkových kombinací také plyne

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Příklad 11: Množina $\mathbf{M} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ má šest prvků. Vypište všechny dvouprvkové a čtyřprvkové kombinace této množiny.

<u>Řešení:</u> Dvouprvkové kombinace množiny **M** jsou: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{1,6\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{2,6\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{3,6\}$, $\{4,5\}$, $\{4,6\}$, $\{5,6\}$.

Čtyřprvkové kombinace množiny **M** jsou: $\{3,4,5,6\}$, $\{2,4,5,6\}$, $\{2,3,5,6\}$, $\{2,3,4,6\}$, $\{2,3,4,5\}$, $\{1,4,5,6\}$, $\{1,3,5,6\}$, $\{1,3,4,6\}$, $\{1,3,4,5\}$, $\{1,2,5,6\}$, $\{1,2,4,6\}$, $\{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3,6\}$, $\{1,2,3,5\}$, $\{1,2,3,4\}$.

Povšimněme si, jakým způsobem byly pomocí dvouprvkových kombinací tvořeny čtyřprvkové – jako doplňkové kombinace.

Počet dvouprvkových kombinací je tedy 15 = $\binom{6}{2}$, počet čtyřprvkových kombinací je také 15 = $\binom{6}{4}$. Platí tedy $\binom{6}{2} = \binom{6}{6-2}$. *(Koman, Vyšín, 1974, s.108)*

4.1.4 PASCALOVO SCHÉMA

Jak již bylo řečeno, žáci základních škol nebývají seznamováni s pojmem *faktoriál*, a proto nejsou schopni hodnoty kombinačních čísel pomocí nich vypočítat. Pro malá *n* a *k*, $k \leq n$, se proto zavádí tzv. **Pascalova tabulka (Pascalovo schéma) pro kombinační čísla.** Je tvořena podle následujícího klíče:

a	***b***
	a* + *b

k \ n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Tabulka 6

Vidíme, že první sloupec tabulky je tvořen pouze jedničkami (známe vlastnost $\binom{n}{0} = 1$), podobně se nacházejí jedničky vždy na konci řádku podle vlastnosti kombinačních čísel $\binom{n}{n} = 1$. Řádky jsou souměrné „podle středu“, např.:

1	8	28	56	70	56	28	8	1

Přepsáním klíče, podle kterého je tvořeno Pascalovo schéma, pomocí kombinačních čísel, dostaneme vzorec

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

což je tzv. **součtový vzorec pro kombinační čísla.**

Příklad 12: Ověřte součtový vzorec pro $n = 5$, $k = 3$.

Řešení: Víme, že kombinační číslo $\binom{6}{4}$ udává počet čtyřprvkových kombinací ze šestiprvkové množiny $\mathbf{M} = \{a, b, c, d, e, f\}$. Tyto kombinace tvoří množinu **K**. Tuto množinu nyní rozdělíme na dvě podmnožiny $\mathbf{K_1}$ *a* $\mathbf{K_2}$.

Podmnožina $\mathbf{K_1}$ je množina všech čtyřprvkových kombinací množiny **M**, které obsahují prvek *f*.

Podmnožina $\mathbf{K_2}$ je množina všech čtyřprvkových kombinací množiny **M**, které prvek *f* neobsahují.

Podmnožinu $\mathbf{K_1}$ vytvoříme nejjednoduševji tak, že sestrojíme všechny tříprvkové kombinace množiny $\{a, b, c, d, e\}$, tedy množiny **M** bez prvku *f*, tj.

$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,d,e\},\{b,c,d\},\{b,c,e\},\{b,d,e\},\{c,d,e\}$$

a připojíme k nim prvek *f*. Získali jsme tedy všechny prvky podmnožiny $\mathbf{K_1}$:

$$\mathbf{K_1} = \{abcf, abdf, abef, acdf, acef, adef, bcdf, bcef, bdef, cdef\}.$$

Vybírali jsme vždy tři prvky z pěti možných, počet prvků podmnožiny $\mathbf{K_1}$ je tudíž $\binom{5}{3}$.

Podmnožina $\mathbf{K_2}$ je množina všech čtyřprvkových kombinací množiny **M** bez prvku *f*, tedy množiny $\{a, b, c, d, e\}$, tj.

$$\mathbf{K_2} = \{abcd, abce, abde, acde, bcde\}.$$

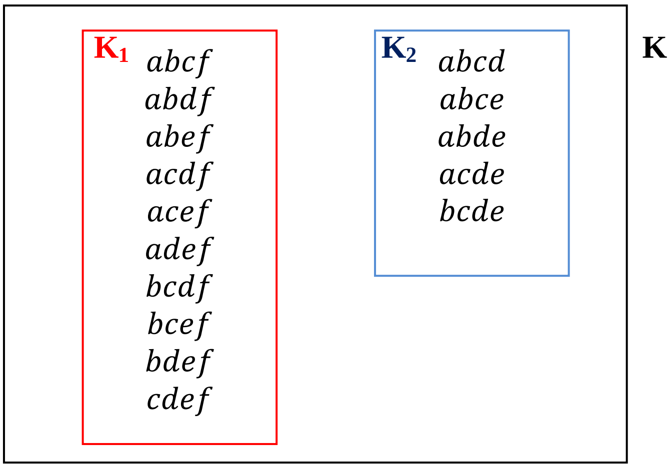
Počet prvků podmnožiny $\mathbf{K_2}$ je tedy $\binom{5}{4}$.

Počet prvků množiny **K** dostaneme sečtením počtu prvků podmnožin $\mathbf{K_1}$ a $\mathbf{K_2}$, tj. $\binom{5}{3} + \binom{5}{4}$.

Vytvářeli jsme čtyřprvkové kombinace ze šestiprvkové množiny **M**, rozdělením těchto kombinací na podmnožiny jsme ověřili, že skutečně platí součtový vzorec:

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{4} = \binom{6}{4}$$

Pro lepší názornost poslouží ještě následující schéma:



Obr. 10

Pro výpočty hodnot kombinačních čísel s většími hodnotami, na které Pascalova tabulka nestačí (byla by příliš obsáhlá), se pro žáky základní školy může zavést následující postup výpočtu, aniž by je bylo nutné seznamovat s pojmem *faktoriál*.

Příklad 13: Vypočtěte $\binom{12}{4}$.

Řešení: Nejprve vyznačíme zlomkovou čáru a do jmenovatele zapíšeme součin všech přirozených čísel od 1 do 4:

$$\binom{12}{4} = \frac{}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Do čitatele zapíšeme součin – prvním činitelem je 12, pak postupně zmenšujeme čísla o 1. Zapíšeme tolik činitelů, kolik je jich ve jmenovateli.

$$\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Zlomek nyní co nejvíce krátíme a vypočítáme.

$$\binom{12}{4} = \frac{11 \cdot 5 \cdot 9}{1} = 495.$$

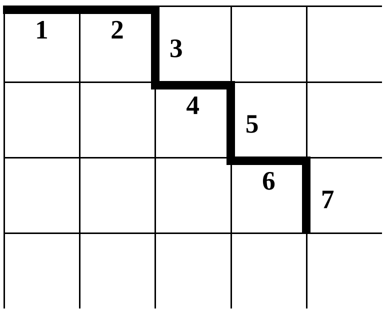
4.2 PROCHÁZKY PO SÍTI A PASCALOVA ČÍSLA

4.2.1 PROCHÁZKY PO ČTVERCOVÉ SÍTI

Procházky po čtvercové síti jsou jedním ze způsobů, jakým lze znázorňovat počty kombinací. Procházky jsou dané tabulkou, ve které jsou zaznamenané kroky jižním a východním směrem v pravoúhlé síti. Pro lepší pochopení je uveden následující příklad.

Příklad 14: Turista šel ve městě s pravoúhlou sítí ulic na procházku „jihovýchodním směrem“. Na každé křižovatce šel buď na jih (↓) nebo na východ (→).

Křižovatka	**M**	1	2	3	4	5	6	7
Směr cesty	**J**	—	—	|	—	|	—	|



Obr. 11

Procházka na obrázku 11 znázorňuje tříprvkové kombinace *J* ze sedmiprvkové množiny **M** = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

4.2.2 PASCALOVA ČÍSLA A JEJICH VLASTNOSTI

Počet procházek ve čtvercové síti, které začínají v daném bodě a jejichž všechny úseky vedou jižním nebo východním směrem, právě tak jako počet *j*-prvkových kombinací, udávají tzv. **Pascalova čísla** $\boldsymbol{P(j,v)}$, kde *j* je počet jižních směrů, tedy i počet prvků kombinace a *v* je počet východních směrů, tedy počet prvků doplňkové kombinace. Je také zřejmé, že $j + v$ je délka procházky, neboli počet prvků množiny.

Pro zjištění hodnot Pascalových čísel je možné použít upravenou Tabulku 6 (Pascalovu tabulku pro kombinační čísla), vytvoříme ji však podle posunutého klíče:

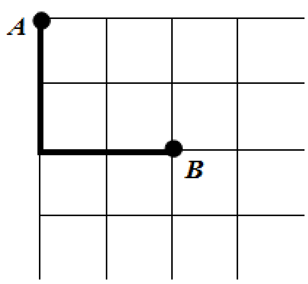
	b
a	***a* + *b***

V **tabulce Pascalových čísel pro počty procházek ve čtvercové síti** se ve svislém sloupci nacházejí procházky jižním směrem, vodorovně procházky východním směrem. První řádek a sloupec obsahují jedničky, ostatní čísla jsou tvořena podle uvedeného klíče a vyjadřují celkový počet procházek v síti.

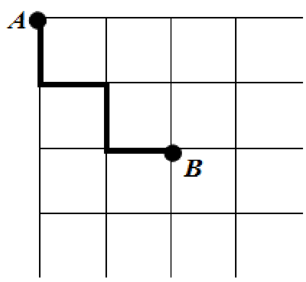
j \ *v*	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
3	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220
4	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715
5	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002
6	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005
7	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440
8	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310
9	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620

Tabulka 7

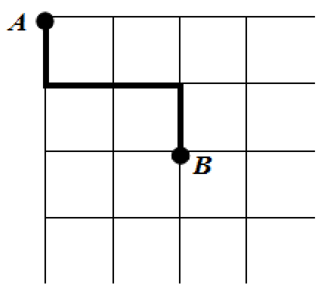
Kupříkladu na obrázku 12 jsou zobrazeny všechny možné procházky z bodu A do bodu B. Jsou určeny dvouprvkovými kombinacemi množiny **M** = {1, 2, 3, 4}.



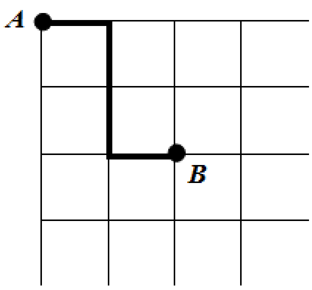
$J_1 = \{1,2\}$



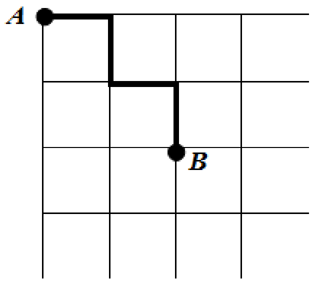
$J_2 = \{1,3\}$



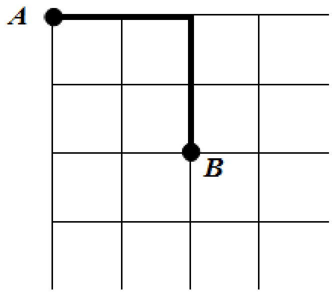
$J_3 = \{1,4\}$



$J_4 = \{2{,}3\}$



$J_5 = \{2{,}4\}$

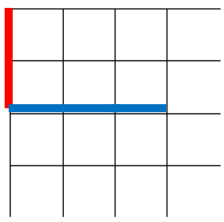


$J_6 = \{3{,}4\}$

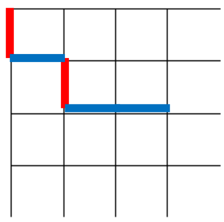
Obr. 12

(Melichar, 1982, s.65)

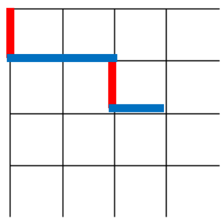
Příklad 15: Znázorněte pomocí procházek v síti červeně všechny dvouprvkové kombinace a modře všechny doplňkové kombinace množiny **M** $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *(Melichar, 1982, s.68)*



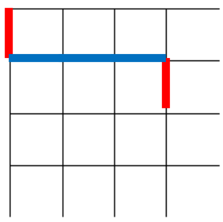
$J_1 = \{1{,}2\}$
$J_1{'} = \{3{,}4{,}5\}$



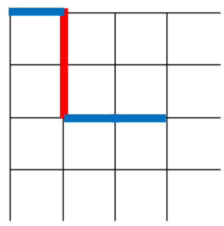
$J_2 = \{1{,}3\}$
$J_2{'} = \{2{,}4{,}5\}$



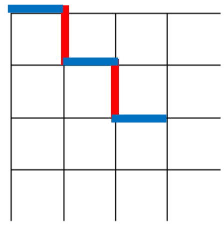
$J_3 = \{1{,}4\}$
$J_3{'} = \{2{,}3{,}5\}$



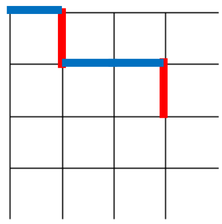
$J_4 = \{1{,}5\}$
$J_4{'} = \{2{,}3{,}4\}$



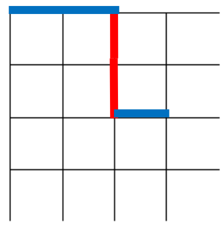
$J_5 = \{2{,}3\}$
$J_5{'} = \{1{,}4{,}5\}$



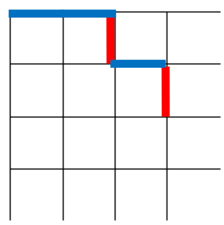
$J_6 = \{2{,}4\}$
$J_6{'} = \{1{,}3{,}5\}$



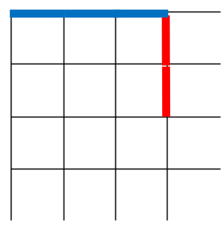
$J_7 = \{2{,}5\}$
$J_7{'} = \{1{,}3{,}4\}$



$J_8 = \{3{,}4\}$
$J_8{'} = \{1{,}2{,}5\}$



$J_9 = \{3{,}5\}$
$J_9{'} = \{1{,}2{,}4\}$



$J_{10} = \{4{,}5\}$
$J_{10}{'} = \{1{,}2{,}3\}$

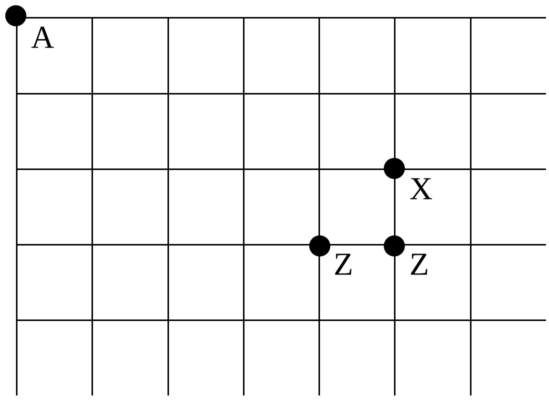
Obr. 13

Vidíme, že všechny procházky končí v bodě $\{j, v\} = \{2,3\}$. Podle Pascalovy tabulky si můžeme ověřit, že celkový počet procházek končících v tomto bodě je skutečně 10.

Povšimněme si některých vlastností Pascalových čísel. Z obrázku 13 vidíme, že platí $P(2,3) = P(3,2) = 10$. Stejně tak je možné tuto vlastnost ověřit v tabulce 7. Pro Pascalova čísla tedy platí

$$P(r, s) = P(s, r).$$

Příklad 16: Určete počet procházek z bodu A do bodu Z.



Obr. 14

Řešení: Počet procházek z bodu A do bodu Z na obrázku 14 můžeme zjistit pomocí Pascalových čísel dvěma způsoby:

- přímo podle Pascalovy tabulky: $P(3,5) = 56$,
- do bodu Z vedou procházky dvěma způsoby:
  - přes bod X – do tohoto bodu vede $P(2,5) = 21$ procházek,
  - přes bod Y – do tohoto bodu vede $P(3,4) = 35$ procházek.

Celkem tedy vede do bodu Z: $P(2,5) + P(3,4) = 56$ procházek.

Vidíme, že platí $P(3,5) = P(2,5) + P(3,4)$.

Tato rovnost je patrná i z Pascalovy tabulky pro procházky po síti, jak je zde vyznačeno:

j \ v	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7
2	1	3	6	10	15	21	28
3	1	4	10	20	35	56	84
4	1	5	15	35	70	126	210

Tabulka 8

Pro Pascalova čísla tedy platí **součtový vzorec**

$$P(j, v) = P(j-1, v) + P(j, v-1).$$

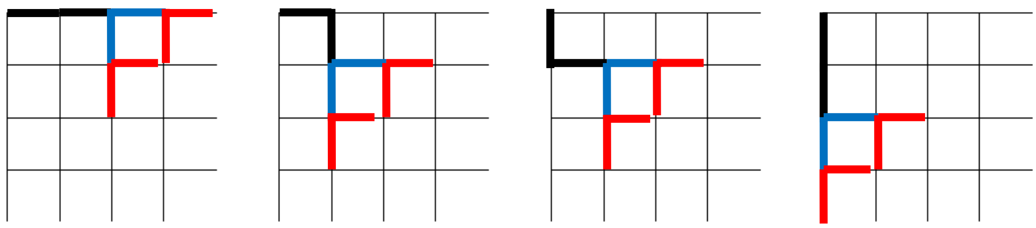
(Melichar, 1982, s. 69 – 71)

4.2.3 PROCHÁZKY DANÉ DÉLKY

Věta 11: Součet všech Pascalových čísel $P(j, v)$, kde $j + v = n$, je roven 2^n, tj.

$$P(0, n) + P(1, n-1) + P(2, n-2) + \cdots + P(n, 0) = 2^n.$$

Snadno ukážeme, že tato věta platí: na obrázku 15 jsou černě znázorněny všechny procházky délky $n = 2$; jsou celkem 4 (= 2^2). Každou z těchto procházek lze prodloužit na délku 3 dvěma způsoby (znázorněny modře). Počet procházek délky $n = 3$ je 8 ($= 4 \cdot 2 = 2^3$). Každou lze opět prodloužit dvěma způsoby (znázorněny červeně); procházek délky $n = 4$ je tedy 16 ($= 8 \cdot 2 = 2^4$), atd.



Obr. 15

Zapsáno pomocí Pascalových čísel:

$n = 2$: $\quad P(0,2) + P(1,1) + P(2,0) = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$,

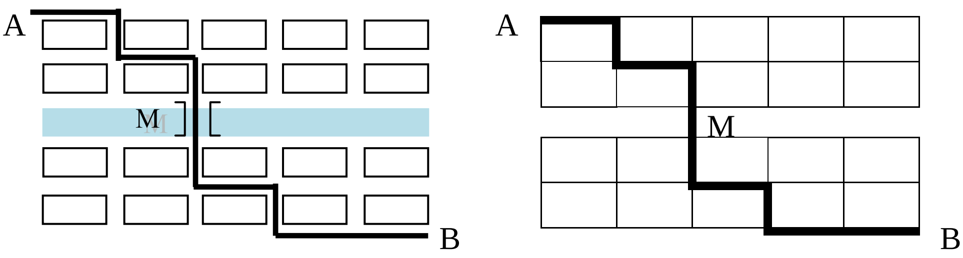
$n = 3$: $\quad P(0,3) + P(1,2) + P(2,1) + P(3,0) = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$,

$n = 4$: $\quad P(0,4) + P(1,3) + P(2,2) + P(3,1) + P(4,0) = 1 + 4 + 6 + 4 = 16 = 2^4$.

4.2.4 PROCHÁZKY S PŘEKÁŽKAMI

Příklady využívající procházky po čtvercové síti lze ještě poněkud ztížit o „překážky“. V řešení se pak často využívá kombinatorického pravidla součinu.

Příklad 17: Řidič se má dostat nejkratší cestou z místa A do místa Z. Mezi městy ale teče řeka, kterou lze přejet pouze po mostě M. Kolika různými cestami může jet?

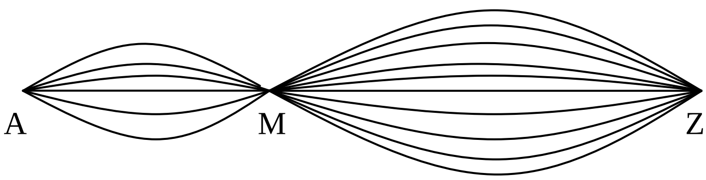


Obr. 16

Řešení:

Každou možnost lze zakreslit jako procházku procházející bodem M. Z bodu A do bodu M vede $P(2,2) = 6$ procházek. Z bodu M do bodu B vede $P(2,3) = 10$ procházek.

Všechny možnosti lze znázornit uzlovým grafem:



Obr. 17

Ke každé ze šesti možností v první části trasy existuje deset dalších tras do bodu Z. Procházek z místa A do místa Z přes bod M je $6 \cdot 10 = 60$. *(Bobok, 1984, s. 14,15)*

4.2.5 PROCHÁZKY PO POVRCHU KVÁDRU A KRYCHLE

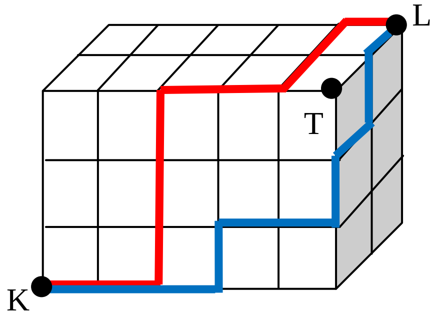
Procházky lze znázorňovat také na povrchu těles s vyznačenou čtvercovou sítí. Znázornění se provádí otočením bočních stěn do jedné vodorovné roviny.

Příklad 18: Určete počet procházek na viditelné části povrchu kvádru z obrázku 18 vedoucích z bodu K do bodu L, které vedou

a) přes přední a horní stěnu,

b) přes přední a pravou boční stěnu,

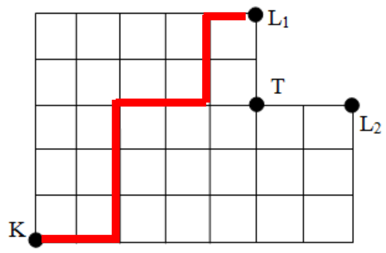
c) přes tři viditelné stěny. *(Melichar, 1982, s.79)*



Obr. 18

Řešení:

a) Nejprve otočíme boční stěny do vodorovné roviny, tím situaci převedeme do jedné roviny:



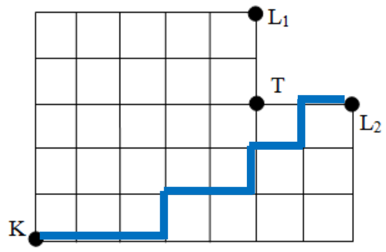
Obr. 19

Procházkám přes přední a horní stěnu odpovídají procházky z bodu K do bodu L_1. Jedna z nich je zobrazena na obr.19. Počet možných procházek je

$$P(5,5) = 252.$$

b) Procházkám přes přední a pravou boční stěnu odpovídají procházky z bodu K do bodu L_2. Jedna z nich je znázorněna na obr. 20. Počet možných procházek je v tomto případě

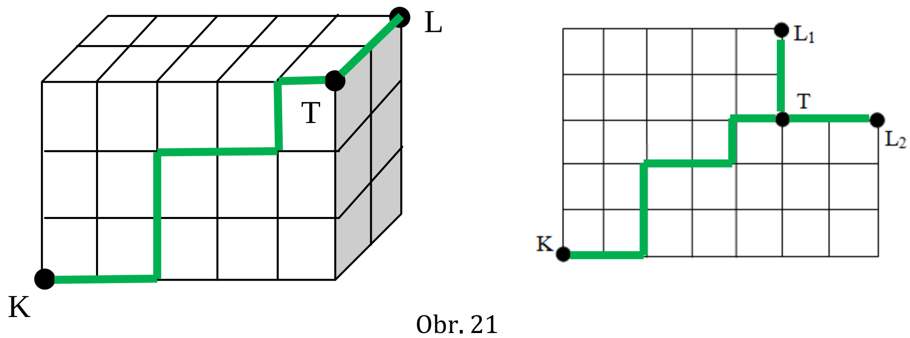
$$P(7,3) = 120.$$



Obr. 20

c) Při určování počtu možných procházek přes všechny tři viditelné stěny je důležité si uvědomit, že řešením není součet předchozích dvou možností. Počítali bychom totiž procházky po hraně TL dvakrát. Počet procházek z bodu K do bodu L po hraně TL odpovídá počtu procházek z bodu K do bodu T, tj.

$$P(5,3) = 56.$$



Obr. 21

Počet procházek po třech viditelných stranách z bodu K do bodu L je tedy

$$P(5,5) + P(7,3) - P(5,3) = 316.$$

4.3 POŘADÍ

V některých učebnicích pro žáky základních škol s rozšířenou výukou matematiky jsou žáci seznámeni kromě kombinací i s permutacemi. V některých situacích je totiž pořadí prvků zkoumaných množin rozhodující. Pro názorné vysvětlení poslouží např. následující příklad.

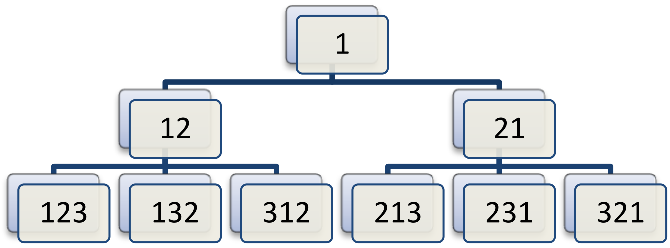
Příklad 19: Jirka cosi hledal v naučném třídílném slovníku. Zjistěte, kolika způsoby mohl slovník uložit zpět do knihovny.

<u>Řešení:</u> Představíme si, že Jitka díly ukládal do knihovny postupně, všechny možnosti můžeme znázornit graficky pomocí *stromu všech možností:*

uložení 1.dílu:

uložení 2. dílu:

uložení 3. dílu:



Ze schématu je vidět, že tři díly můžeme uspořádat do šesti různých pořadí. *(Šedivý, 1987, s. 70)*

Podobný příklad je nyní možné řešit s více knihami a žáci jsou pak schopni odvodit sami, jakým způsobem lze určit počet permutací, a vytvořit tak základ pro pozdější práci s faktoriály.

Věta 12: Počet všech pořadí, která lze utvořit z *n* prvků, je roven

$$P(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

5 PŘÍKLADY

V následující kapitole uvádím několik dalších kombinatorických příkladů. Některé jsou zpracovány i v příloze mé práce, ve které jsou uvedeny názorně v programu Smart Notebook pro interaktivní tabule. Způsob vysvětlení je zde zvolen tak, aby ho mohli pochopit i nadaní žáci základní školy bez znalosti středoškolské kombinatoriky.

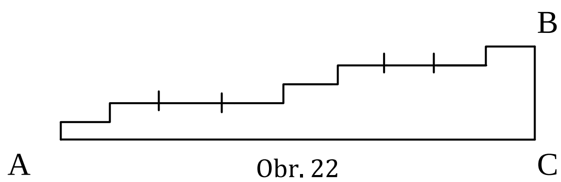
Příklad 20: Krotitel šelem chce přivést do manéže cirkusu 5 lvů a 4 tygry. Přitom však nesmějí jít žádní dva tygři bezprostředně za sebou. Kolika způsoby může šelmy seřadit?

Řešení: Nejprve postavíme všechny lvy tak, aby mezi nimi byla mezera. Jelikož nám záleží na jejich pořadí, můžeme je seřadit 5! = 120 způsoby. Mezi lvy jsou čtyři mezery, dále můžeme tygry postavit také na začátek nebo konec. Čtyři tygry tedy umisťujeme na 6 možných pozic, jinými slovy jedná se o čtyřprvkové variace ze šesti prvků:

$$V(4,6) = \frac{6!}{(6-4)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Každou z možností postavení lvů pak můžeme kombinovat s možnostmi rozmístění tygrů, celkem tedy můžeme šelmy uspořádat $120 \cdot 360 = 43200$ způsoby. *(Vilenkin, 1977, s. 58)*

Příklad 21: Plánuje se stavba schodiště, které má vést z bodu A do bodu B (obr. 22). Vzdálenost AC je rovna 4,5 m a vzdálenost CB 1,5 m. Výška každého schodu má být 30 cm a šířka celým násobkem 50 cm. Kolika způsoby lze schodiště postavit?



Obr. 22

Řešení: Je jasné, že pokud má být výška schodu 30 cm, na schodiště bude zapotřebí $1{,}5 : 0{,}3 = 5$ schodů. Schod je možné postavit na 10 místech, protože $4{,}5 : 0{,}5 = 9$ a počítáme i bod B. Vybíráme tedy 5 míst z 10, na pořadí schodů nám nezáleží, a proto se jedná o kombinace:

$$K(5,10) = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

Obecně lze úlohy tohoto typu zakódovat tak, že budeme řešit, kolik existuje posloupností nul a jedniček, v nichž žádné dvě jedničky nestojí bezprostředně za sebou. Nuly by v tomto případě představovala místa, kde lomená čára postupuje na obr. 22 doprava, a jednička místo, kde postupuje směrem nahoru. Pro náš konkrétní obrázek je tato posloupnost 10100010100010. Protože se na schodišti nevyskytuje schod dvojité výšky, nemohou být v posloupnosti dvě jedničky za sebou. Obecně platí, že počet posloupností (konkrétně počet schodišť) obsahujících n nul a k jedniček, v nichž žádné dvě jedničky nestojí za sebou, je roven k-prvkovým kombinacím z $n + 1$ prvků. *(Vilenkin, 1977, s. 58-59)*

Příklad 22: Na poličce stojí 12 knih. Kolika způsoby z nich můžeme vybrat 5, z nichž žádné dvě nestojí vedle sebe?

Řešení: Výběr knih můžeme zakódovat do posloupnosti nul a jedniček. Každé knize, která na poličce zůstane, přiřadíme číslo 0, a každé, kterou vybereme, číslo 1. Dostaneme tedy posloupnost sestavenou ze 7 nul a 5 jedniček. Protože ale nesmíme vzít dvě knihy, které stojí vedle sebe, nesmí v získané posloupnosti nikde následovat dvě jedničky za sebou. Příklad je tedy pouze variantou předchozího příkladu 21 – počet způsobů, jakými můžeme vybrat pět knih je roven

$$K(5,8) = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56.$$

(Vilenkin, 1977, s.60)

Příklad 23: Na hradě krále Artuše sedí za kulatým stolem 12 rytířů. Vztahy mezi nimi jsou složité. Každý z nich má 2 nepřátele a ti jsou právě jeho sousedy u stolu. Je třeba vybrat 5 rytířů, kteří by osvobodili zakletou princeznu. Kolika způsoby je možno výběr provést, požadujeme-li, aby mezi osvoboditeli nebyli žádní dva znepřátelení?

Řešení: Tento příklad je velmi podobný předchozímu, avšak s tím rozdílem, že rytíři sedí v kruhu. Převedeme jej na případ, kdy by rytíři seděli vedle sebe (podobně jako stály knihy na poličce). Vybereme si jednoho z rytířů, například Lancelota. Pětičlenné skupiny rytířů, které budeme vybírat, rozdělíme do dvou skupin – v první budou pětičlenné skupinky s rytířem Lancelotem, v druhé budou pětičlenné skupinky, ve kterých Lancelot účasten nebude.

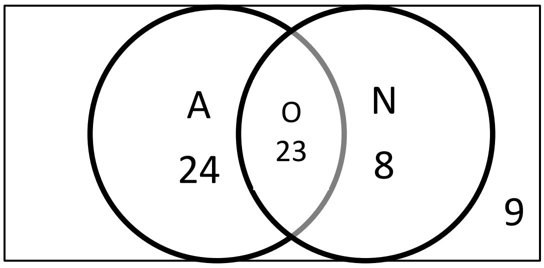
Pokud Lancelot bude členem vybrané skupinky, zbývá vybrat další 4 rytíře, kteří půjdou osvobodit princeznu s ním. Víme, že určitě nemohou jít znepřátelení rytíři sedící vedle něj. Tato trojice tak kruh u stolu roztrhla, proto můžeme vybírat z devíti rytířů sedících v řadě. Musíme však dát pozor, aby nebyli nepřátelé. Nyní je postup stejný jako v úloze s knihami, kde jsme nesměli vybrat dvě vedle sebe. Pomoci bychom si opět mohli označením rytířů pomocí jedniček a nul. Za těchto podmínek můžeme vybrat čtveřici $K(4,6)$ způsoby, tj. 15 způsoby.

Pokud Lancelot nebude mezi vybranými, můžeme ho ihned z kruhu vyloučit. Opět se tím rozpadne na řadu, ve které zůstává 11 rytířů. Z nich vybereme 5 tak, aby žádní dva neseděli vedle sebe. To lze provést $K(5,7)$ způsoby, tj. 21 způsoby.

Celkový počet možných výběrů pětičlenných skupinek rytířů je tedy $15 + 21 = 36$. *(Vilenkin, 1977, s. 60 – 61*).

Příklad 24: V jazykové škole pracuje 64 lidí, 47 z nich ovládá angličtinu, 31 němčinu a 23 zná oba z těchto jazyků. Kolik pracovníků ústavu neumí ani německy, ani anglicky?

<u>Řešení:</u> Pro názornou představu situace poslouží zobrazení pomocí množin na obrázku 23.



Obr. 23

Do části A patří lidé, kteří umí jen anglicky, tj. $47 - 23 = 24$. Do části N pak ti, kteří umí jen německy, tj. $31 - 23 = 8$. Oba jazyky umí 23 lidí, což odpovídá části O. Celkový počet pracovníků, kteří ovládají alespoň jeden z cizích jazyků, je tudíž 24 $+23 + 8 = 55$. Pokud má jazyková škola dohromady 64 zaměstnanců, žádný jazyk pak neumí $64-55 = 9$ z nich.

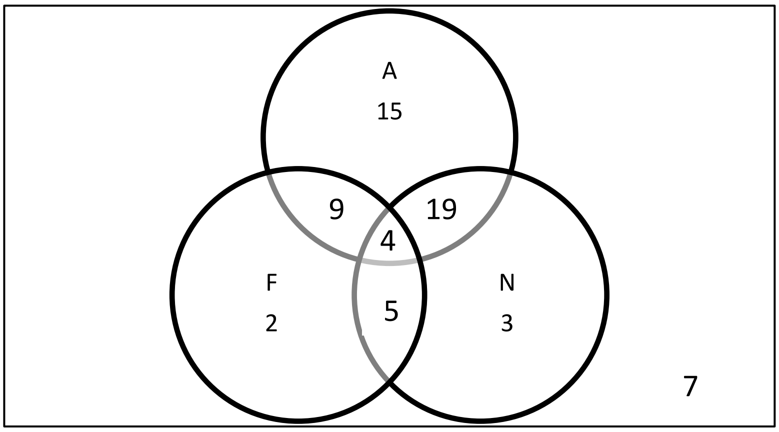
Postup, jakým jsme došli k tomuto číslu lze souhrnně zapsat jako

$$9 = 64 - 23 - (47 - 23) - (31 - 23) = 64 - 47 - 31 + 23.$$

Od celkového počtu zaměstnanců jsme odečetli počet ovládajících angličtinu a počet ovládajících němčinu. Odečetli jsme však dvakrát ty pracovníky, kteří ovládají oba jazyky a je proto nutné je přičíst, abychom dostali správný počet těch, kteří neumí žádný z jazyků.

Příklad 25 (obtížnější varianta příkladu 24): V zahraniční firmě pracuje 64 lidí. 47 z nich ovládá angličtinu, 31 němčinu a 23 zná oba z těchto jazyků. Francouzsky umí 20 lidí, německy a francouzsky 9 zaměstnanců, anglicky a francouzsky 13 lidí, a všemi třemi jazyky hovoří 4 pracovníci. Kolik zaměstnanců nehovoří žádným z uvedených jazyků?

Řešení: Na obrázku 24 je opět znázorněna celá situace.



Obr. 24

Jen francouzsky a německy, nikoliv anglicky, umí $9 - 4 = 5$ lidí. Pouze anglicky a francouzsky hovoří $13 - 4 = 9$ pracovníků. Dále můžeme odvodit, že pouze francouzsky mluví $20 - 5 - 9 - 4 = 2$ lidé. Z předchozího příkladu víme, že anglicky ani německy neumí 9 lidí. Mezi ně patří i tito 2, kteří hovoří pouze francouzsky. Z toho vyplývá, že ani jeden jazyk neumí $9 - 2 = 7$ zaměstnanců.

Celý postup lze zapsat takto:

$$7 = 9 - 2 = 64 - 47 - 31 + 23 - (20 - 5 - 9 - 4) =$$

$$= 64 - 47 - 31 + 23 - 20 + (9 - 4) + (13 - 4) + 4 =$$

$$= 64 - 47 - 31 - 20 + 23 + 9 + 13 - 4.$$

Z této úpravy je celý princip jasný. Od celkového počtu zaměstnanců jsme nejprve odečetli ty, kteří znají alespoň jeden jazyk. Ti, co ovládají jazyky dva (nebo tři), ale byli odečteni dvakrát, proto je přičítáme. Pracovníky, kteří ovládají všechny tři jazyky, jsme tak třikrát odečetli a pak třikrát přičetli. Zbývá tedy odečíst ještě tyto čtyři.

Tento zákon platí i obecně – nejprve se vylučují všechny předměty, které mají alespoň jednu ze zadaných vlastností, potom se připojují předměty, jež mají alespoň dvě z těchto vlastností, vylučují se ty, které mají aspoň tři vlastnosti atd. Tento princip bývá uváděn jako *princip inkluze a exkluze,* popř. *princip připojování a vylučování. (Vilenkin, 1977, s. 27)*

Příklad 26: Kolika způsoby lze posadit do řady 3 Angličany, 3 Francouze a 3 Turky tak, aby žádní tři krajané neseděli vedle sebe? *(Vilenkin, 1977, s. 208)*

Řešení: Devět lidí můžeme posadit do řady 9! způsoby. Musíme ovšem vyloučit případy, kdy by krajané seděli vedle sebe.

Trojice Angličanů sedících vedle sebe by si mohla sednout 3! způsoby. Dalších 6 lidí by si mohlo libovolně přesedat a dále také celou skupinu Angličanů můžeme přemisťovat. Přesazujeme tedy celkem 7 prvků, což lze 7! způsoby. Celkem si tedy v tomto případě mohou sednout $3! \cdot 7!$ způsoby.

Podobné situace nastanou, pokud by vedle sebe seděli všichni tři Francouzi nebo Turci.

Další možností je, že vedle sebe bude sedět trojice Angličanů i Francouzů. Každá z trojic si může přesednout 3! způsoby, dále lze tyto 3 trojice a další 3 Turky libovolně přesazovat, těchto možností je 5!. V tomto případě si mohou přesednout $3! \cdot 3! \cdot 5!$ způsoby.

Podobně počítáme i v případech, kdy vedle sebe sedí trojice Francouzů a Turků nebo Angličanů a Turků.

Poslední možností je, že vedle sebe sedí všechny trojice, každého z trojice lze libovolně přesazovat a zároveň celé národnosti lze posadit 3! způsoby. Celkově tak existuje $(3!)^4$ možností, jak se posadí.

Pokud zohledníme všechny tyto situace, po využití principu inkluze a exkluze dojdeme k závěru, že tito lidé se mohou posadit $9! - 3 \cdot 3! \cdot 7! + 3 \cdot 3! \cdot 3! \cdot 5! - (3!)^4 = 283\,824$ způsoby.

Příklad 27: Ze skupiny 7 mužů a 4 žen se má vybrat osmičlenná skupina, v níž je aspoň 5 mužů. Kolika způsoby můžeme skupinu vytvořit?

Řešení: Vytváříme kombinace, kde bude mezi vybranými pět, šest nebo sedm mužů. Pět mužů můžeme vybrat $\binom{7}{5}$ způsoby, k nim vybíráme do osmičlenné skupiny tři ženy a to lze $\binom{4}{3}$ způsoby. Podobně bychom utvářeli skupinky se šesti muži a dvěma ženami nebo se sedmi muži a jednou ženou. Celkem tedy dostáváme

$$\binom{7}{5}\cdot\binom{4}{3}+\binom{7}{6}\cdot\binom{4}{2}+\binom{7}{7}\cdot\binom{4}{1}=67 \text{ způsobů.}$$

Příklad 28: Skupina 7 chlapců a 10 dívek tančí. Valčík půjdou tančit všichni chlapci.

a) Kolik existuje variant pro účast dívek v tomto tanci?

b) Kolik existuje variant v případě, kdy nás pouze zajímá, které dívky zůstanou sedět?

c) Řešte pro případ, kdy s jistotou víme, že dvě dívky tančit půjdou. *(Vilenkin,1977, s. 197)*

Řešení:

a) V tomto případě nás zajímá, kterých sedm dívek bude valčík tančit a také s kterými chlapci budou jednotlivá děvčata v páru. Jedná se tedy o variace, kdy vybíráme sedm dívek z deseti:

$$V(7,10)=\frac{10!}{3!}=604\,800.$$

b) Nyní vybíráme pouze tři dívky z deseti, které tančit nebudou. Na jejich pořadí nezáleží, jedná se proto o kombinace:

$$K(3,10)=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=120.$$

c) Víme, že dvě dívky tančit půjdou a je třeba pro ně vybrat partnery. Záleží na tom, ke které dívce je přiřadíme, možností pro jejich volbu je proto $V(2,7)$. Poté zbývá ještě vybrat pět dívek pro zbylé chlapce, to lze provést $V(5,8)$ způsoby. Celkově dostáváme

$$V(2,7)\cdot V(5,8)=\binom{7!}{5!}\cdot\binom{8!}{3!}=282\,240.$$

Příklad 29: Pan Novák 12 známých – 5 žen a 7 mužů, paní Nováková má mezi svými známými 7 žen a 5 mužů. Kolika způsoby lze sestavit skupinu, v níž je 6 mužů a 6 žen tak, aby 6 osob pozval pan Novák a 6 osob paní Nováková? *(Vilenkin, 1977, s. 198)*

Řešení: Pozve-li pan Novák 1 ženu, musí pozvat 5 mužů. V takové situaci by pak paní Nováková musela pozvat 5 žen a 1 muže. Po uplatnění kombinatorického pravidla součinu můžeme říct, že způsobů, jakými lze tento výběr provést, je

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{7}{5}\cdot\binom{7}{5}\cdot\binom{5}{1}=\binom{5}{1}^2\cdot\binom{7}{5}^2$$

Obecně lze tedy říct, že pokud pan Novák pozve k žen, musí pozvat $(6 - k)$ mužů a paní Nováková pozve $(6 - k)$ žen a k mužů. Nyní uplatníme kromě pravidla součinu ještě kombinatorické pravidlo součtu a dojdeme k následujícímu řešení úlohy:

$$\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}^2\cdot\binom{7}{6-k}^2=267\,148$$

Příklad 30: Na každý bok loďky se vejdou 4 lidé. Kolika způsoby lze vybrat posádku této loďky z 30 kandidátů, z nichž 8 chce sedět na levém boku, 13 na pravém boku a 9 je to lhostejné?

Řešení: Na pravém boku může sedět jeden až čtyři, popř. žádný z těch, kterým je výběr strany lhostejný. Pokud tedy vybereme na pravý bok k lidí z těchto devíti, musíme k nim posadit ještě $(4 - k)$ osob ze 13. Na levý bok pak můžeme posadit $8 + (9 - k)$ osob, z nichž vybereme čtyři. Podle kombinatorického pravidla součinu pak dostáváme počet možných výběrů:

$$\binom{9}{k}\cdot\binom{13}{4-k}\cdot\binom{17-k}{4}$$

Protože k může nabývat hodnot od nuly do čtyř, využijeme kombinatorického pravidla součtu a sečteme získaná čísla podle k:

$$\sum_{k=0}^{4}\binom{9}{k}\cdot\binom{13}{4-k}\cdot\binom{17-k}{4}=11\,402\,482.$$

Příklad 31: Kolika způsoby si mohou Petr, Honza a Luboš rozdělit mezi sebou 6 stejných jablek, 1 banán, 1 švestku, 1 pomeranč, 1 broskev, 1 meruňku a 1 ananas tak, aby každý dostal 4 plody? *(Vilenkin, 1977, s. 205)*

Řešení: Nejprve rozdělíme šest jablek. Víme, že každý z chlapců může dostat nejvýše čtyři. Jablka lze rozdělit několika způsoby a na těch pak záleží rozdělení dalšího ovoce. Budeme tedy řešit několik různých situací – v tabulce 9 je jejich přehled. Třetí chlapec dostane vždy všechny zbylé plody.

Rozdělení jablek	Ovoce pro 1. chlapce	Ovoce pro 2. chlapce	Celkem možností (s ohledem na permutaci lidí)
4 + 2 + 0	4 jablka	vybereme zbývající 2 plody ze 6 = C (2,6)	$3! \cdot \binom{6}{2}$
4 + 1 + 1	4 jablka	vybereme 3 plody ze 6 = C (3,6)	$3 \cdot \binom{6}{3}$
3 + 3 + 0	vybereme 1 chybějící plod ze 6 = C (1,6)	vybereme 1 chybějící plod ze zbylých 5 = C (1,5)	$3 \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1}$
3 + 2 + 1	vybereme 1 chybějící plod ze 6 = C (1,6)	vybereme 2 chybějící plody ze zbylých 5 = C (2,5)	$3! \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2}$
2 + 2 + 2	vybereme 2 chybějící plody ze 6 = C (2,6)	vybereme 2 chybějící plody ze zbylých 4 = C (2,4)	$\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}$

Tabulka 9

Po uplatnění kombinatorického pravidla součtu pak dostáváme celkový počet možných způsobů rozdělení ovoce:

$$3! \cdot \binom{6}{2} + 3 \cdot \binom{6}{3} + 3 \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{1} + 3! \cdot \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2} + \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} = 690.$$

Příklad 32: Zápas mezi Slávií a Spartou skončil nerozhodně 3 : 3.

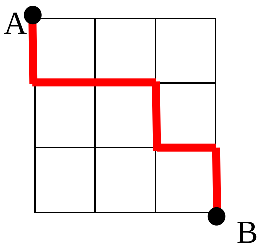
a) Kolik bylo možných průběhů zápasu?

b) Kolik bylo možných průběhů zápasu, jestliže Sparta vyrovnala v posledních vteřinách zápasu?

c) Kolik bylo možných průběhů zápasu, jestliže třetiny skončily 1 : 2, 0 : 0, 2 : 1? *(Melichar, 1982, s.76)*

Řešení:

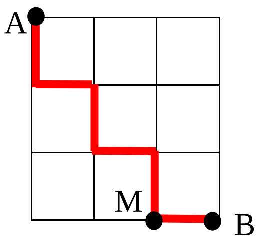
a) Všechny možné průběhy zápasu je možné zobrazit jako procházky po čtvercové síti 3 x 3. Jeden takový průběh je zakreslen na obrázku 25. V tomto zápase střílela mužstva branky v pořadí Slavia, Sparta, Sparta, Slavia, Sparta, Slavia.



Obr. 25

Je tedy zřejmé, že počet procházek z bodu A do bodu B je roven Pascalovu číslu $P(3,3) = 20$.

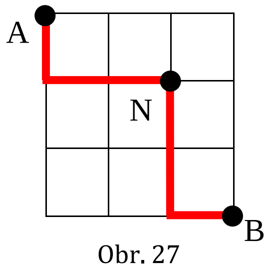
b) Jestliže Sparta vyrovnala v posledních vteřinách zápasu, musí procházka vést bodem M (obrázek 26).



Obr. 26

Počet procházek z bodu A do bodu M je roven $P(3,2) = 10$.

c) Třetina, která skončila 0 : 0 nijak neovlivňuje počet možných průběhů zápasu. Zbylé dvě opět zakreslit do čtvercové sítě jako procházky z bodu A do bodu B přes bod N (obr. 27).



Obr. 27

Počet procházek přes bod N se rovná $P(1,2) \cdot P(2,1) = 3 \cdot 3 = 9$.

Příklad 33: Určete na krychli na obr. 28 počty nejkratších procházek, které vedou

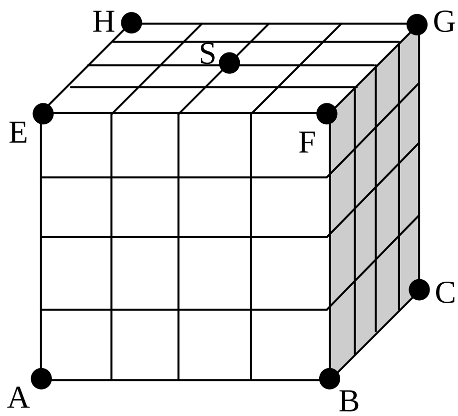
a) z vrcholu A do vrcholu G po třech viditelných stěnách;

b) z vrcholu B do vrcholu H po některé ze dvou bočních stěn;

c) z vrcholu B do středu S horní stěny;

d) z vrcholu A přes střed S horní stěny do vrcholu C;

e) z vrcholu A přes střed S horní stěny do vrcholu B po viditelných stěnách.



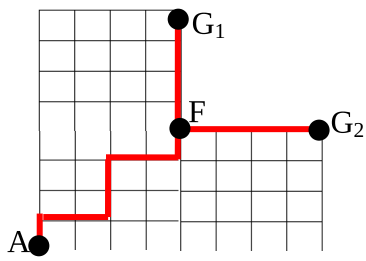
Obr. 28

<u>Řešení</u>:

a) Počet procházek z bodu A do bodu G přes přední a vrchní stěnu krychle je $P(8{,}4) = 495$. podobně můžeme k cestě do bodu G využít přední a boční stěnu, počet těchto procházek je také $P(4{,}8) = 495$. Nesmíme však zapomenout, že jsme počítali dvakrát procházku po hraně FG (obr. 29). Počet procházek z bodu A do bodu G po hraně FG odpovídá počtu procházek z bodu A do bodu F, kterých je $P(4{,}4) = 70$.

Počet procházek z bodu A do bodu G je tedy

$$P(8{,}4) + P(4{,}8) - P(4{,}4) = 920.$$



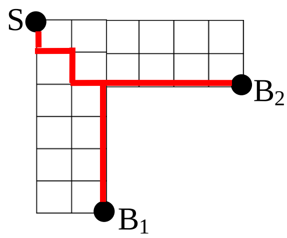
Obr. 29

b) Počet procházek z vrcholu B do vrcholu H přes přední stěnu je roven $P(8{,}4) = 495$, stejný počet cest vede přes pravou boční stěnu. Celkový počet procházek z bodu B do bodu H je tak

$$2 \cdot P(8{,}4) = 990.$$

c) Z vrcholu B do středu S lze jít přes přední stěnu, počet takových procházek je $P(6{,}2) = 28$. Stejný počet možných cest vede i přes boční stěnu. Musíme však ještě odečíst procházky z vrcholu F do bodu S, jelikož byly započítány dvakrát (obr. 30). Procházek z bodu B do bodu S je celkem

$$P(6{,}2) + P(2{,}6) - P(2{,}2) = 28 + 28 - 6 = 50.$$



Obr. 30

d) Cestu z vrcholu A do vrcholu C přes bod S rozdělíme na dvě části. Z bodu A do středu S vede stejně jako v části c) 50 různých cest. Stejný počet vede ze středu S do vrcholu C. Celkový počet procházek z bodu A do bodu C je proto

$$50^2 = 2500.$$

e) Z vrcholu A do středu S vede $P(6,2) = 28$. Počet cest ze středu S do vrcholu B po viditelných stěnách jsme již spočítali v části c). Počet procházek z vrcholu A do vrcholu B přes střed S je

$$P(6,2) \cdot [P(6,2) + P(2,6) - P(2,2)] = 28 \cdot (28 + 28 - 6) = 1400.$$

6 ZÁVĚR

Ve své práci jsem se snažila zmapovat různá pojetí učiva kombinatoriky a také možnosti jejího využití ve výuce na základní škole.

Pojetí kombinatoriky jako učiva základních a středních škol prošlo zajímavým vývojem. Dříve byly kombinace k-té třídy z n prvků definovány jako skupiny k prvků, kde nezáleží na jejich pořadí a variace k-té třídy jako skupiny k prvků, na jejichž pořadí záleží. V tomto přístupu je však nutné definovat kombinační čísla $\binom{n}{n}, \binom{n}{1}$ a $\binom{n}{0}$ uměle, dále je třeba vždy zmínit, zda na pořadí prvků záleží či ne. V moderních učebnicích, které využívají množinového pojetí matematiky, jsou kombinace definovány jako libovolné k-prvkové podmnožiny dané množiny a variace jako libovolné uspořádané k-tice. Tento přístup využívají ve svých učebnicích pro střední školy i Calda s Dupačem, pouze s tím rozdílem, že při zavádění k-prvkových kombinací nehovoří o podmnožině prvků množiny. Množinové pojetí kombinatoriky usnadňuje definování kombinací a variací (není nutné uvádět, zda záleží na pořadí prvků), umožňuje na základě definice kombinací jednoduše definovat i hodnoty kombinačních čísel $\binom{n}{n}, \binom{n}{1}$ a $\binom{n}{0}$. Učivo kombinatoriky se tak stává pochopitelnější nejen pro studenty středních škol, ale je možné s ním seznámit i žáky škol základních. Například procházky po čtvercové síti jsou dle mého názoru vhodným úvodem do této problematiky, jelikož řešení těchto úloh nevyžaduje hluboké teoretické znalosti. Žáci se také mohou naučit řešit jednoduché kombinatorické úlohy, s kterými se setkávají v běžném životě. Jejich prostřednictvím se seznámí se základními principy kombinatorického myšlení, které mohou využít v dalším studiu i v praktickém životě.

7 SEZNAM OBRÁZKŮ

8 SEZNAM TABULEK

9 SEZNAM LITERATURY

BOBOK, Ján; KOMAN, Milan. *Matematika pro 6. ročník základní školy, I. díl.* 1. vydání. Praha: SPN, 1984. 160 s.

BOBOK, Ján; DLOUHÝ, Zbyněk; KOMAN, Milan. *Matematika pro 6. ročník základní školy, II. díl.* 1. vydání. Praha: SPN, 1984.160 s.

CALDA, Emil; DUPAČ, Václav. *Matematika pro gymnázia: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*. 5. vydání. Praha: Prometheus, 2010. 170 s. ISBN 978-80-7196-365-3.

MELICHAR, Jan, et al. *Cvičení z matematiky pro 5. ročník*. 3. vydání. Praha: SPN, 1982. 144 s.

KOMAN, Milan; VYŠÍN, Jan. *Malý výlet do moderní matematiky*. 2. vydání. Praha: Mladá fronta, 1974. 192 s.

VILENKIN, Naum Jakovlevič. *Kombinatorika*. 1. vydání. Praha: SNTL, 1977.

ŠEDIVÝ, Ondrej, et al. *Matematika pro 7. ročník základní školy, II. díl.* 1. vydání. Praha: SPN, 1987. 128 s.

10 RESUMÉ

This thesis is considering conception of combinatorics especially at primary school. This topic is usually taught at secondary school and I was wondering if there is any way how to explain some basic rules to younger students.

First part of this work is based on textbooks for secondary school. There are explained basic combinatorial rules for combinations and permutations. These both refers to counting possibilities to select *k* distinct elements from a set of *n* elements, where for *k*-permutations the order of selection is taken into account, but for *k*-combinations it is ignored.

The modern textbooks for primary school dedicated to talented students are focused on combinations. I explained it specifically in the second part of this work. There is no need for students to know the terms like *factorial* or counting with combinatorial numbers.

The next part of this thesis is using combinatorics for number of walks across the square network. The students of primary school could easily understand these tasks and it could help them to develop their mathematic thought.

At the end of this work there are some more difficult tasks with solutions, some of them could be solved by students of primary school.

The modern technologies are more used in teaching lately. That was the reason why I decided to make the interactive files with some basic rules and tasks from this work in Smart Notebook program for interactive boards. They could be used for students of primary school. They are placed at the CD that goes with this work. This could motivate students, make teaching more varied, there is also space for student´s cooperation, individual work or didactic games. Description of these files with comments for teachers are at the end of this work.

11 PŘÍLOHY

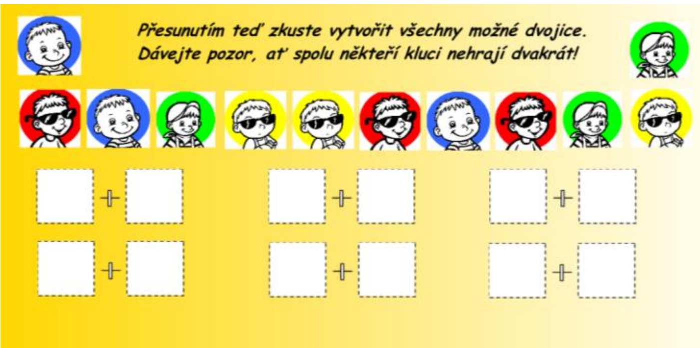
V posledních letech se ve výuce stále více využívá nových vyučovacích prostředků jako např. interaktivní tabule. Podporuje aktivní činnost žáků v hodinách, probouzí v nich zájem o probíranou látku a často může posloužit i k lepšímu a názornějšímu vysvětlení problému. Proto jsem se rozhodla zpracovat ve své práci teorii a některé příklady vhodné pro základní školy i v programu Smart Notebook pro interaktivní tabule. Tento materiál je možné využít ve výuce kombinatoriky zejména na základních školách. Na následujících stránkách jsou popsány jednotlivé snímky včetně doporučených komentářů pro učitele, se kterými by měli dle mého názoru žáky seznámit.

1_DVOUPRVKOVÉ KOMBINACE

Prezentace obsahuje tři příklady řešené nejprve experimentální cestou. Žáci se seznámí s řešením kombinatorických úloh pomocí tabulkové nebo grafické metody. V závěru je uveden obecný vzorec pro určení počtu dvouprvkových kombinací.

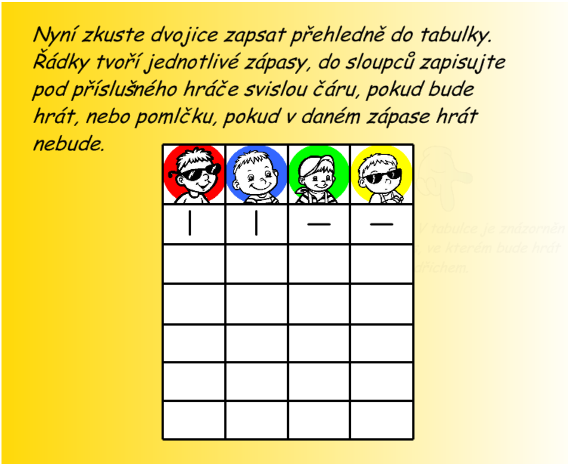
Stránka 2: Zadání motivačního příkladu (*Příklad 8*).

Stránka 3: Přesunutím obrázků do bílých polí tvoří žáci různé dvojice.



Stránka 3: Řešení předchozího příkladu pomocí tabulkové metody.

Žáky seznámíme se způsobem zapisování (svislé a vodorovné čáry). Upozorníme, že je vhodné postupovat popořadě (nejprve vyplníme všechny možnosti, kdy bude hrát první chlapec, poté budeme tvořit dvojice, ve kterých bude účastem druhý hráč atd.). Žáci by měli dojít k 6 možným dvojicím.

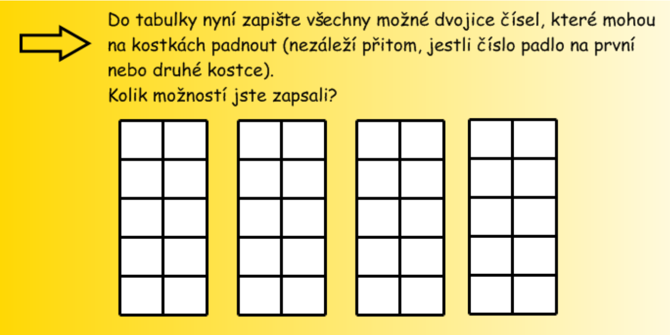


Stránka 4: Příklad s hracími kostkami.

Hod kostkami provedeme kliknutím na ně. Žáky nejprve necháme provést asi deset hodů, kdy si budou zapisovat dvojice čísel, které na kostkách padly (upozorníme na to, že nám nezáleží na tom, zda číslo padlo na první nebo druhé kostce).

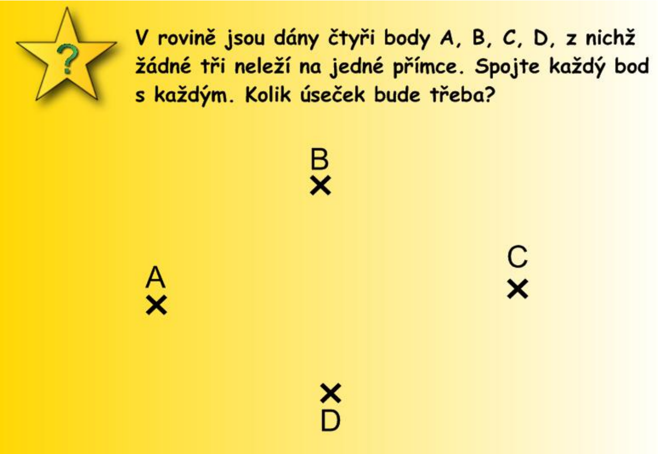
Stránka 5: Pokračování předchozího příkladu.

Žáci nyní do tabulky zapíšou všechny možné dvojice čísel, které na kostkách mohou padnout. Měli by dojít k závěru, že těchto dvojic je 15.



Stránka 6: Příklad na grafické řešení kombinatorických úloh.

Žáky nejprve necháme pracovat samostatně, správnost jejich řešení prověří kvíz na následující stránce.

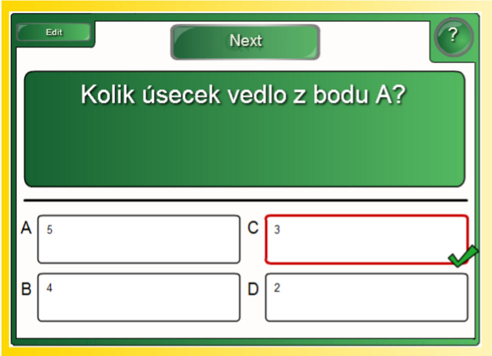


Stránka 7: Kvíz na ověření správného postupu a výsledku předchozího příkladu.

Žákům jsou položeny tři otázky:

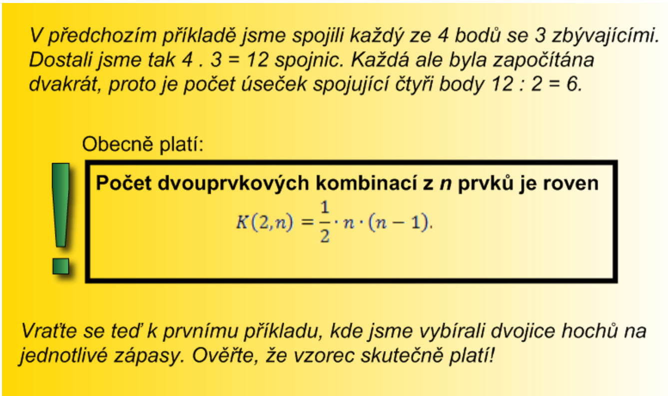
- kolik úseček vedlo z bodu A? (*3*)
- kolik úseček vedlo z bodu C? (*3*)
- kolik bylo třeba úseček na spojení všech 4 bodů? (*6*)

Po kliknutí na odpověď program sám vyhodnotí její správnost, po stisknutí tlačítka Next následuje další otázka.



Stránka 8: Zavedení obecného vzorce pro počet dvouprvkových kombinací.

Po uvedení obecného vzorce je vhodné vrátit se k předchozím příkladům a ověřit, že skutečně platí.

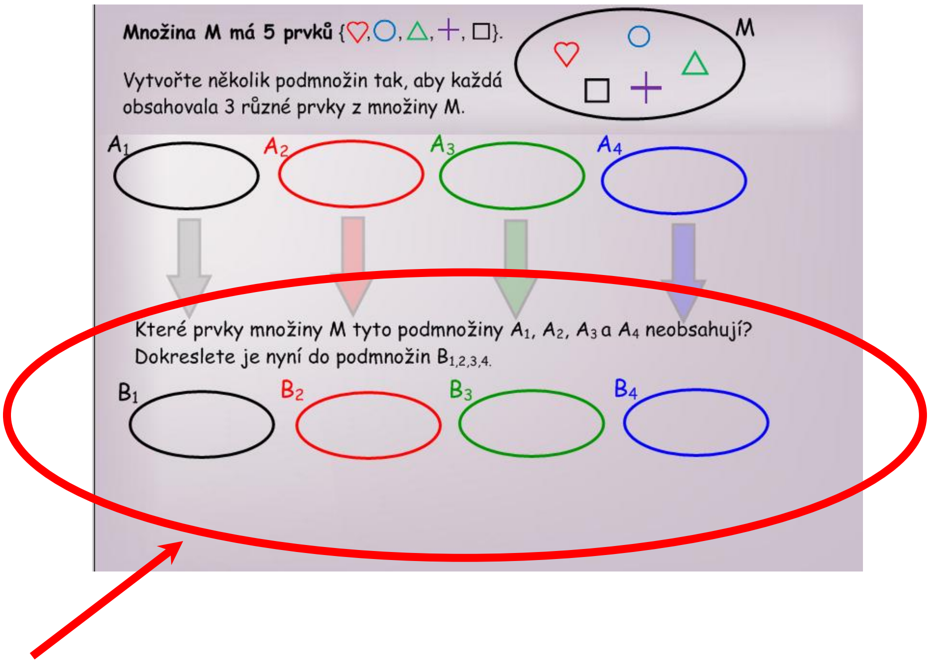


2_ *K*-PRVKOVÉ KOMBINACE

V prezentaci si žáci procvičí tvoření *k*-prvkových kombinací, seznámí se s pojmy *doplňková kombinace* a *kombinační číslo*, naučí se vyhledávat hodnoty kombinačních čísel v Pascalově tabulce a užívat některé vzorce platné pro kombinační čísla. Dále procvičí řešení kombinatorických úloh tabulkovou metodou a výčtem prvků, ověří platnost součtového vzorce pro kombinační čísla. Prezentace poskytuje prostor pro samostatnou i skupinovou práci žáků.

Stránka 2: Tvoření tříprvkových a doplňkových množin.

Žáci nejprve tvoří tříprvkové množiny z uvedené množiny **M** (do množin $\mathbf{A}_{1,2,3,4}$ dokreslí prvky, které obsahují).



Druhá část úlohy se zobrazí po kliknutí do této oblasti.

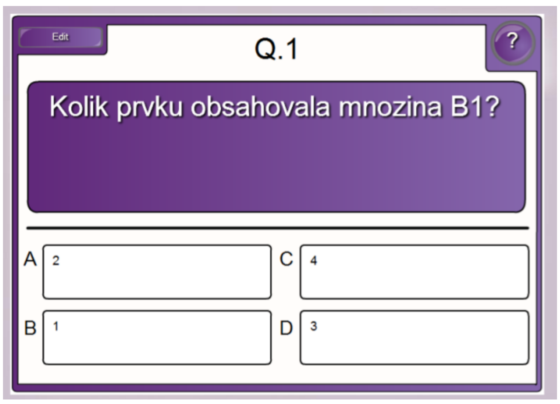
Žáci do množin $\mathbf{B}_{1,2,3,4}$ dokreslují prvky množiny **M**, které neobsahují odpovídající množiny $\mathbf{A}_{1,2,3,4}$ (množiny $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{B}_1$ jsou navzájem doplňkové atd.).

Stránka 3: Kvíz pro ověření poznatků z předchozí úlohy.

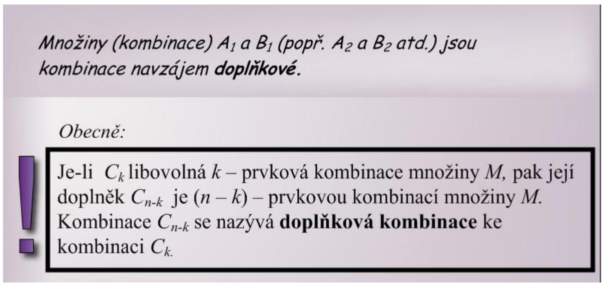
Žákům budou položeny následující otázky:

- kolik prvků obsahovala množina $\mathbf{B}_1$? (*2*)
- kolik prvků obsahovaly dohromady množiny $\mathbf{A}_2$ a $\mathbf{B}_2$? (*5*)
- která množina odpovídala rozdílu množin $\mathbf{M} - \mathbf{B}_3$? ($A_3$)

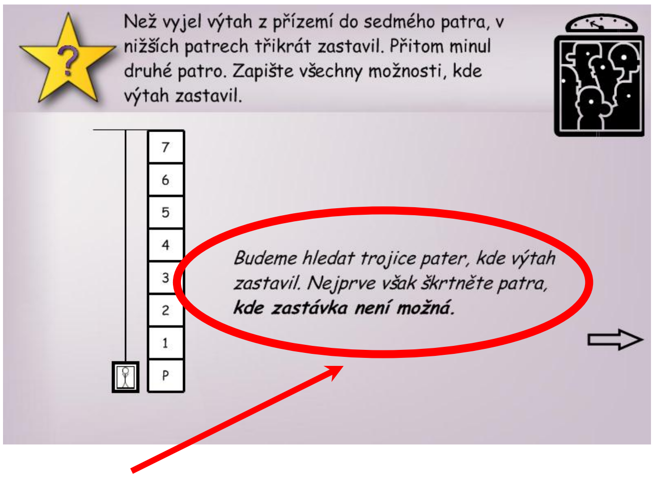
Otázky by měly pomoci žákům uvědomit si vztahy mezi vzájemně doplňkovými množinami.



Stránka 4: Obecné zavedení pojmu *doplňková kombinace.*



Stránka 5: Příklad na *k*-prvkové kombinace (*Příklad 10*).

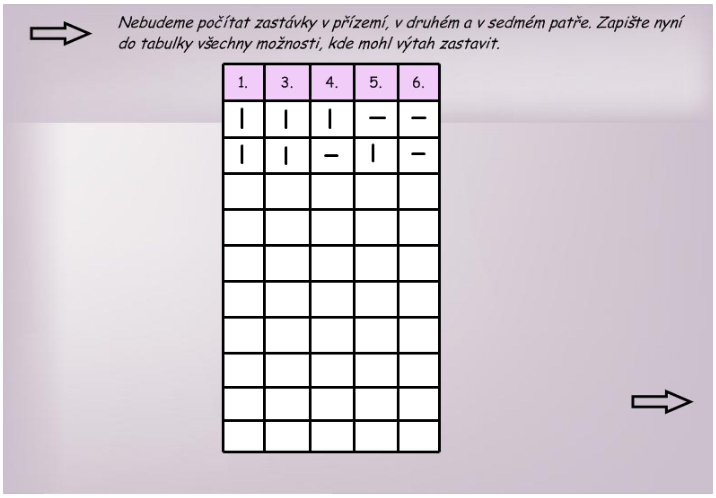


Text se zobrazí po kliknutí.

Žáci nejprve na obrázku škrtnou patra, ve kterých výtah nemohl zastavit (přízemí, druhé a sedmé patro).

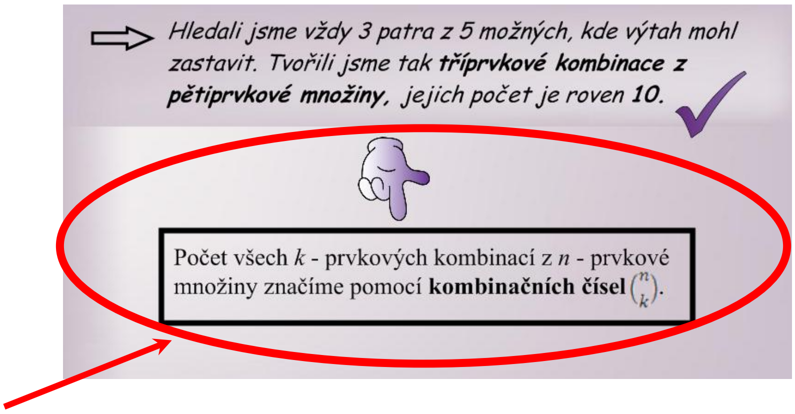
Stránka 6: Pokračování předchozího příkladu.

Pomocí tabulkové metody žáci zaznamenají všechny možnosti, kde výtah mohl zastavit.



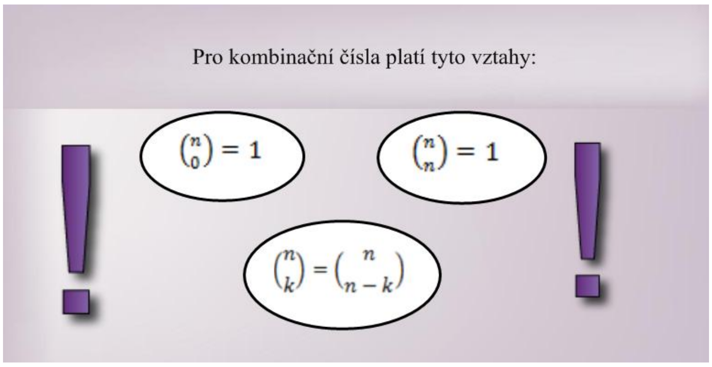
Stránka 7: Vyřešení předchozího příkladu. Zavedení pojmu *kombinační číslo*.

Žáky seznámíme se zápisem a čtením kombinačních čísel (upozorníme na to, že se nejedná o zlomek). Jako konkrétní příklad je možné uvést zápis kombinačního čísla $\binom{5}{3}$, které odpovídá řešení předchozího příkladu.



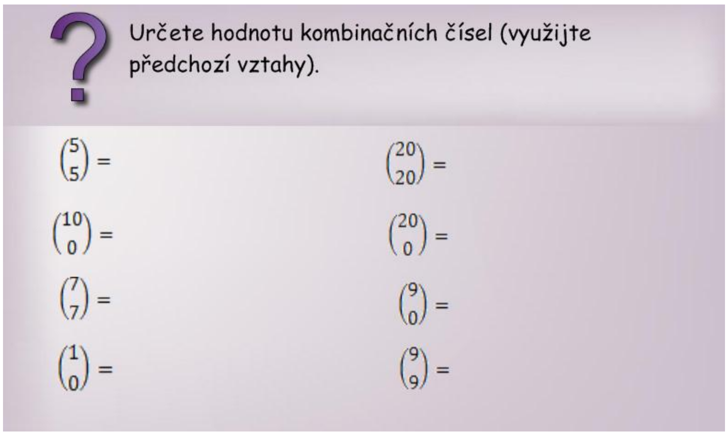
Text se zobrazí po kliknutí.

Stránka 8: Zavedení několika vztahů platných pro kombinační čísla.



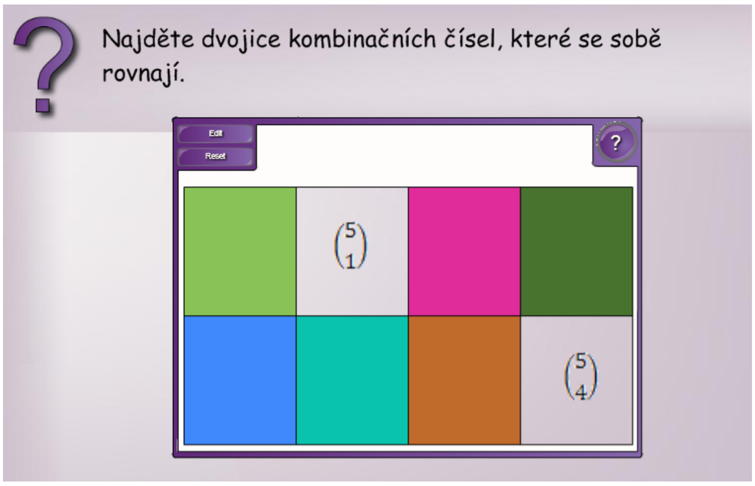
Stránka 9: Využití uvedených vztahů.

Žáci doplní hodnoty kombinačních čísel (provedeme např. formou samostatné individuální práce žáků s následnou kontrolou).



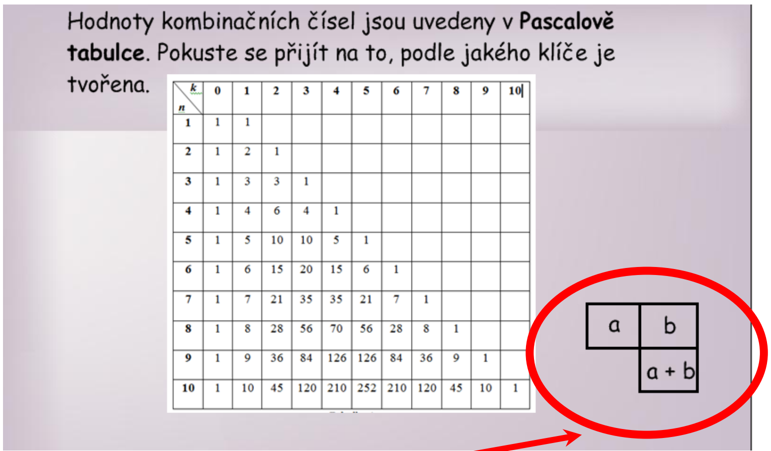
Stránka 10: Pexeso (procvičení uvedených vztahů pro kombinační čísla).

Tento materiál je vhodné využít např. jako soutěž žáků ve skupinách. Podle pravidel pexesa žáci kliknutím otáčejí vždy 2 políčka, poté musí rozhodnout, zda se uvedená kombinační čísla rovnají či ne. Pokud ano, skupinka získává bod, pokud ne, opětovným kliknutím pole opět zakryjí. Ve hře pokračuje další skupinka.



Stránka 11: Pascalova tabulka pro hodnoty kombinačních čísel.

Pro zjištění hodnot menších kombinačních čísel žákům poslouží uvedená Pascalova tabulka. Učitel je seznámí s principem hledání hodnot, žáci mají poté za úkol vypozorovat, podle jakého klíče je tabulka tvořena.

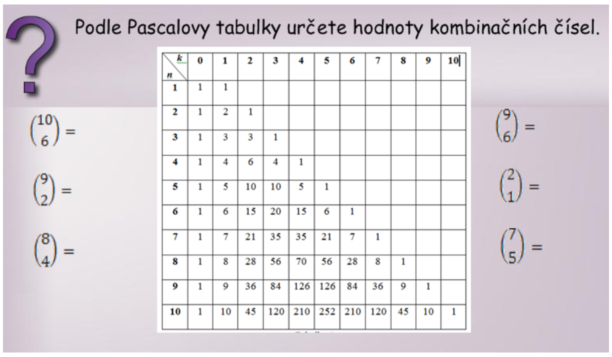


n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Klíč se zobrazí až po kliknutí.

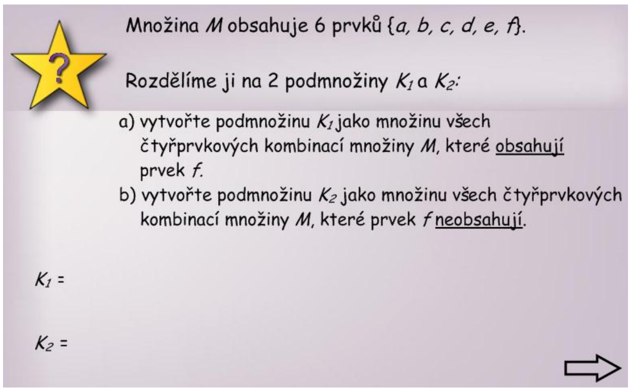
Stránka 12: Vyhledávání hodnot kombinačních čísel v Pascalově tabulce.

Žáci si procvičí vyhledávání hodnot v Pascalově tabulce, nejlépe formou samostatné individuální práce s následnou kontrolou výsledků.



n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Stránka 13: Příklad na vytváření *k*-prvkových kombinací s ověřením platnosti součtového vzorce pro kombinační čísla (*Příklad 12*).



Žáci nejprve vytváří čtyřprvkové kombinace podle zadaných kritérií (kombinace dopíší k podmnožinám $\mathbf{K_1}$ *a* $\mathbf{K_2}$).

Žákům poradíme, že podmnožinu $\mathbf{K_1}$ vytvoříme nejjednoduševeji tak, že sestrojíme všechny tříprvkové kombinace množiny $\{a, b, c, d, e\}$, tedy množiny **M** bez prvku *f*, tj.

$$\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,b,e\},\{a,c,d\},\{a,c,e\},\{a,d,e\},\{b,c,d\},\{b,c,e\},\{b,d,e\},\{c,d,e\}$$

a připojíme k nim prvek *f*.

Podmnožina $\mathbf{K_2}$ je pak množina všech čtyřprvkových kombinací množiny **M** bez prvku *f*, tedy množiny $\{a, b, c, d, e\}$.

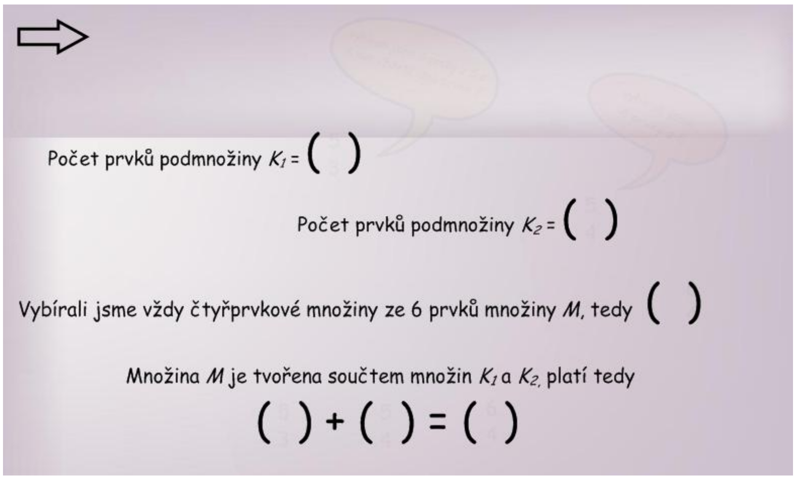
(Správné řešení:

$\mathbf{K_1}$= $\{abcf, abdf, abef, acdf, acef, adef, bcdf, bcef, bdef, cdef\}$,

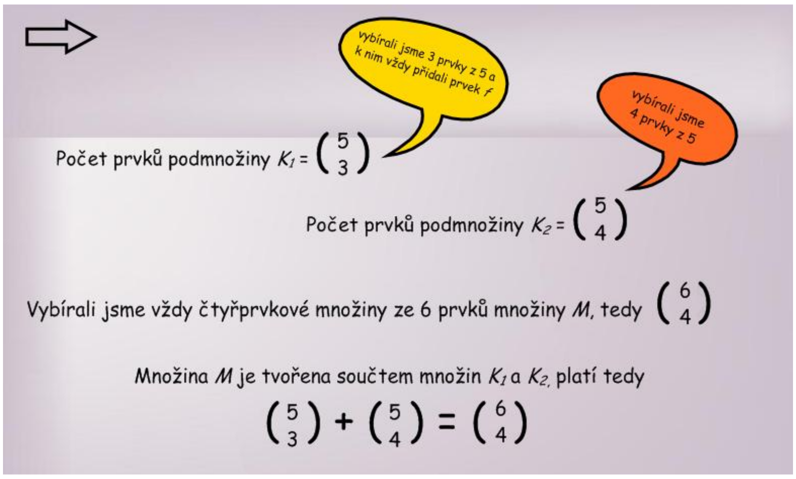
$\mathbf{K_2}$ = $\{abcd, abce, abde, acde, bcde\}$.)

Stránka 14: Dokončení předchozího příkladu s vysvětlivkami, zavedení součtového vzorce pro kombinační čísla.

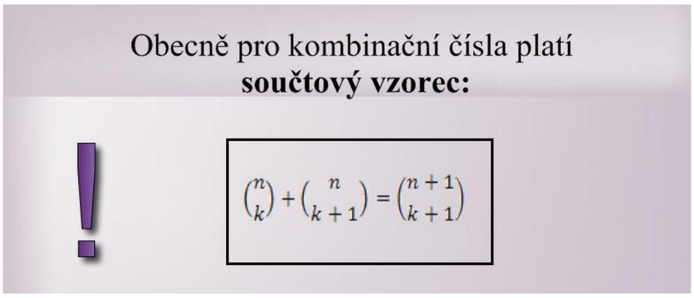
Žáci nyní určují počet prvků podmnožin $\mathbf{K_1}$ a $\mathbf{K_2}$ pomocí kombinačních čísel, jejichž hodnoty dohledají v Pascalově tabulce. Ověří si, že platí součtový vzorec.



Stránka po rozkliknutí všech řešení a vysvětlivek:



Stránka 15: Obecné zavedení součtového vzorce pro kombinační čísla.

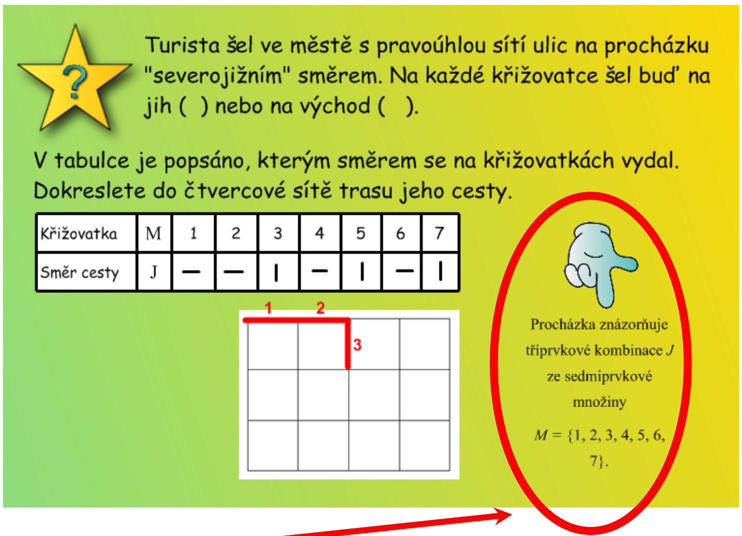


3_PROCHÁZKY PO SÍTI

V prezentaci se žáci naučí zaznamenávat kombinace jako procházky severojižním směrem ve čtvercové síti. Naučí se vyhledávat hodnoty Pascalových čísel v tabulce. Zjistí také, jakým způsobem lze určit počet procházek s překážkami nebo jak lze pomocí procházek po síti zjistit možné průběhy například fotbalového zápasu. V prezentaci mohou žáci pracovat samostatně i ve skupině, je zde také možnost zařazení didaktické soutěže.

Stránka 2: Příklad pro objasnění záznamu procházek do čtvercové sítě (*Příklad 14*).

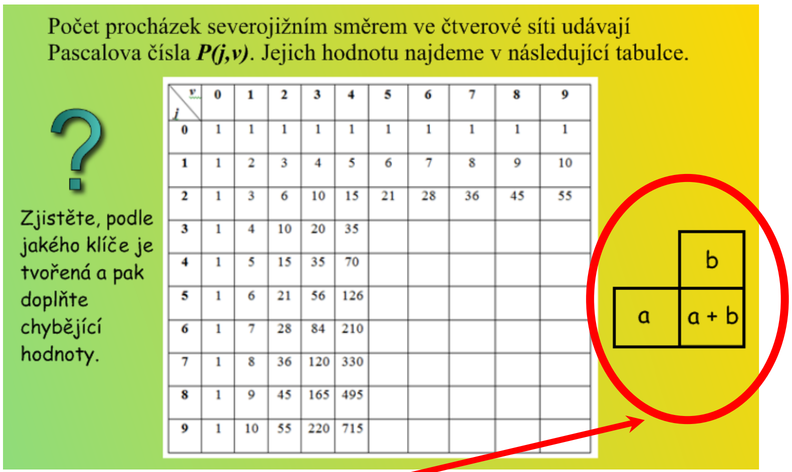
Žáci dokreslí podle tabulky turistovu cestu do čtvercové sítě. Procházka znázorňuje tříprvkové kombinace ze sedmiprvkové množiny. Žáci by měli být upozorněni, že procházky mohou vést pouze jižním nebo východním směrem.



Zobrazí se po kliknutí.

Stránka 3: Pascalova tabulka pro počet procházek.

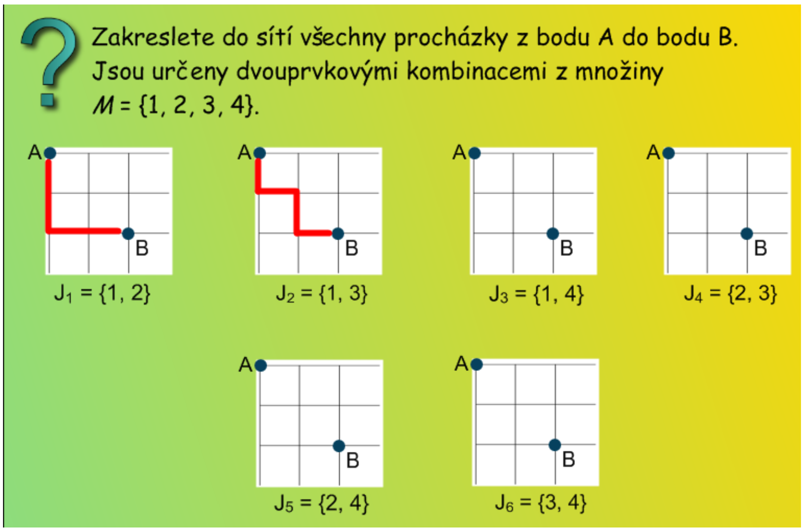
Pascalova tabulka udává počty procházek severojižním směrem ve čtvercové síti. Žáky seznámíme se způsobem vyhledávání hodnot, poté by se měli sami pokusit objevit klíč, podle kterého je tabulka tvořena. Následně doplní do tabulky hodnoty, které nejsou vyplněny (pro kontrolu poslouží tabulka 7 na str. 26 této práce).



Klíč se zobrazí až po kliknutí.

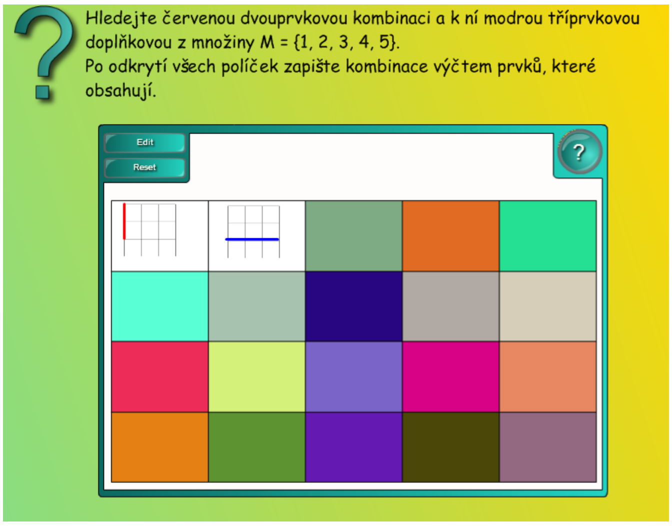
Stránka 4: Příklad na zakreslování dvouprvkových kombinací do čtvercové sítě.

Žáci do obrázků zakreslí procházky odpovídající dvouprvkovým kombinacím uvedeným pod nimi. Každá kombinace uvádí vždy pořadí části procházky, která vede jižním směrem (první dvě procházky jsou již zakresleny, lze na nich proto princip objasnit).



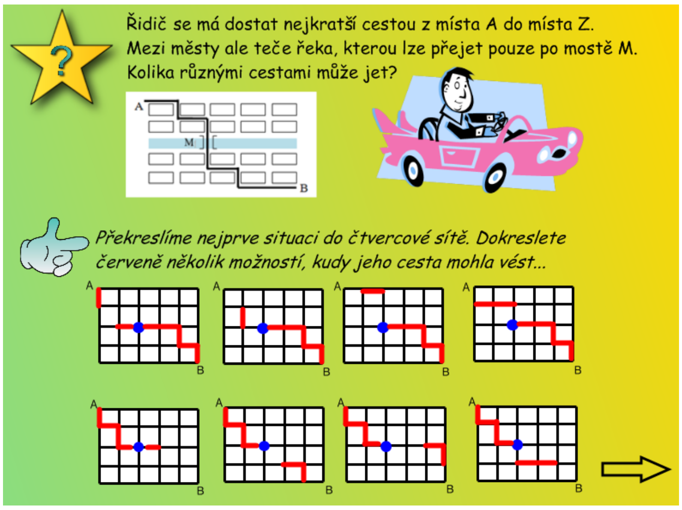
Stránka 5: Pexeso – hledání vzájemně doplňkových kombinací znázorněných jako procházky ve čtvercové síti (*Příklad 15*). Lze využít jako soutěž družstev.

Vybraná skupinka žáků podle pravidel pexesa odkrývá kliknutím vždy 2 políčka. Hledají vzájemně doplňkové červené dvouprvkové a modré tříprvkové kombinace z množiny **M** = {1, 2, 3, 4, 5}. Po odkrytí políček rozhodnou, zda jsou kombinace vzájemně doplňkové. Pokud ne, kliknutím otočí políčka zpět, pokud ano, políčka zůstanou odkrytá a skupina získává bod.



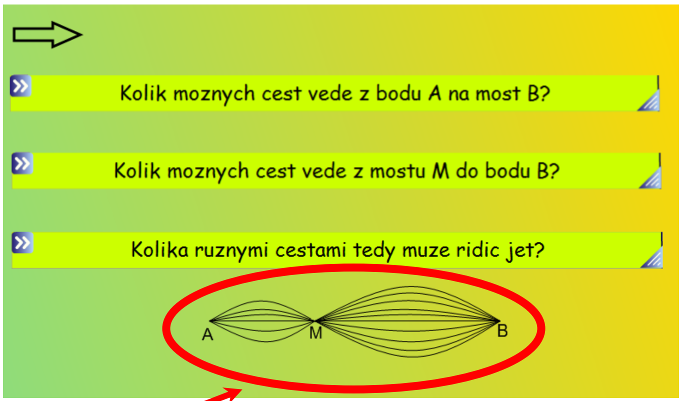
Stránka 6: Příklad na procházky s překážkami (*Příklad17*).

Žáci do obrázků libovolně dokreslují chybějící části procházek znázorněných v sítích červeně. První čtyři obrázky se shodují v části trasy za mostem, další čtyři obrázky v trase před mostem. Žáky bychom měli na tuto skutečnost upozornit, aby si lépe uvědomili, jakým způsobem dospějeme k celkovému počtu možností.



Stránka 7: Otázky k předchozímu příkladu.

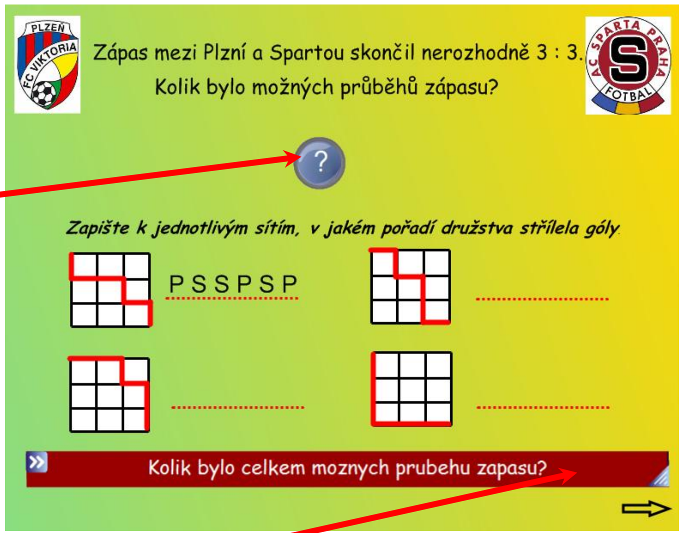
Žákům budou položeny 3 otázky (odpovědi se zobrazí kliknutím na otázku). Otázky jsou položeny tak, aby si uvědomili, že cestu je nutné rozdělit na dvě části, ve kterých počítáme počty možných procházek. Tyto části lze pak mezi sebou kombinovat. Vše lze i názorně ukázat na uzlovém grafu, který se zobrazí po kliknutí pod poslední otázkou.



Zobrazí se po kliknutí.

Stránka 8: Příklad – průběh fotbalového zápasu (*Příklad 32*).

Žáci nejprve podle vzoru doplňují možné průběhy zápasu znázorněné ve čtvercových sítích.

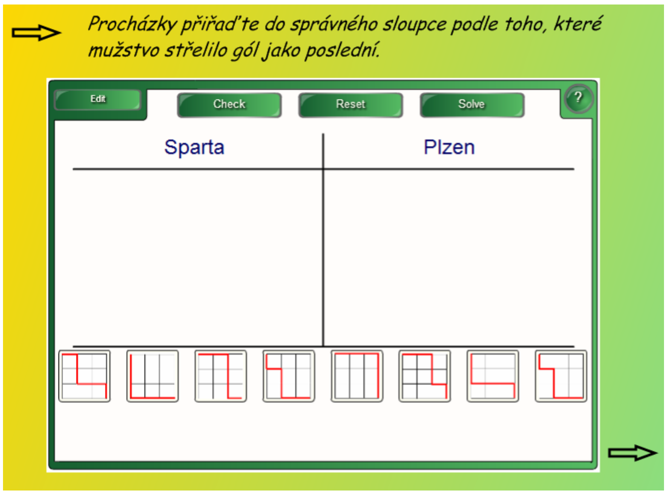


Po kliknutí se zobrazí nápověda: „Využijeme znázornění do čtvercové sítě. Procházky jižním směrem zobrazují góly Plzně, procházky východním směrem góly Sparty.“

Odpověď se zobrazí po kliknutí na otázku.

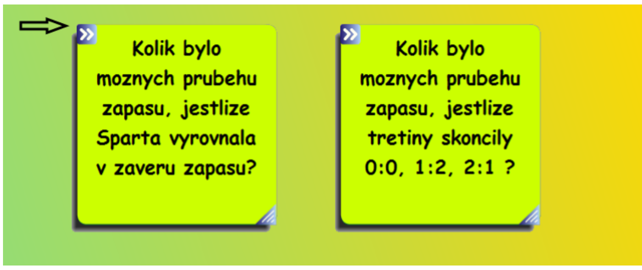
Stránka 9: Pokračování předchozího příkladu – procvičení znázorňování průběhu zápasu do sítě.

Žáci přesunují jednotlivé záznamy průběhu zápasu v sítích do sloupců podle toho, zda poslední gól střelila Plzeň nebo Sparta (pokud je poslední část procházky jižním směrem, poslední gól střelila Plzeň, pokud je východním směrem, naposledy skórovala Sparta). Kliknutím na tlačítko Solve se zobrazí správné řešení.



Stránka 10: Doplňující otázky k předchozímu příkladu.

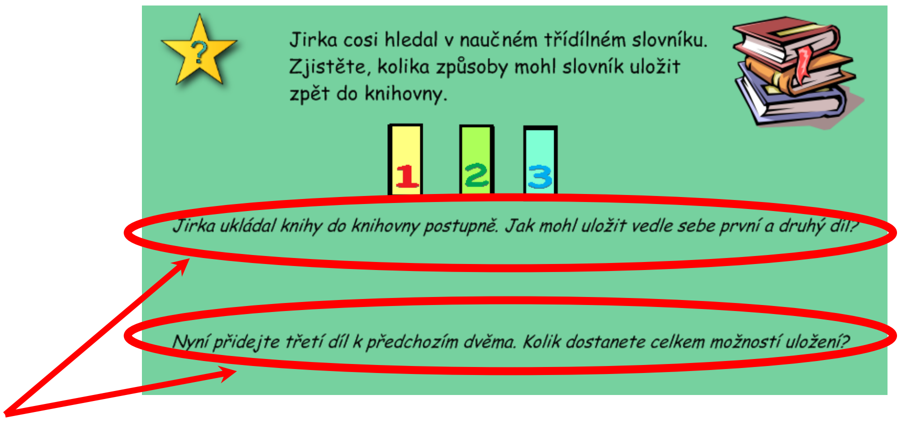
Odpovědi na otázky se zobrazí po kliknutí na ně. Je možné je podrobněji okomentovat podle řešení příkladu na stranách 42 a 43 této práce.



4_POŘADÍ

Poslední prezentace obsahuje dva příklady, které mohou sloužit jako příprava pro zavedení pojmu *permutace*. Žáci se již seznámí s pojmem *faktoriál*, na základě konkrétního příkladu sami odvodí způsob jeho výpočtu.

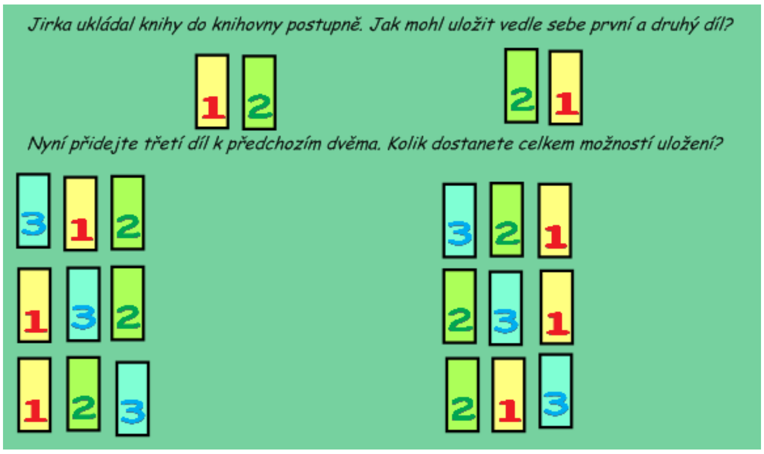
Stránka 2: Řešení *příkladu 19.*



Otázky se zobrazí po kliknutí.

Příklad lze řešit tak, že knihy do knihovny ukládáme postupně. Žáci nejprve přesunou obdélníky představující první 2 díly slovníku a umístí je vedle sebe tak, jak je mohl uložit Jirka do slovníku.

Následně k těmto dvěma dílům přidávají na všechny možné pozice díl třetí. Po přesunutí obdélníků může řešení vypadat například takto:



Stránka 2: Zobecnění výpočtu možných pořadí (permutací).

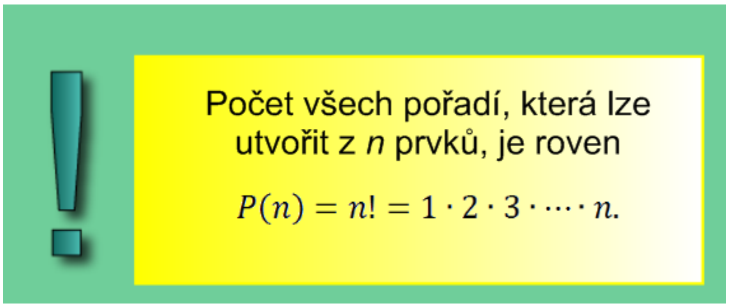
Cílem této aktivity je objevení obecného výpočtu počtu možných pořadí prvků. Žáci pozorují rozklad čísel 2 a 6, který je dán do souvislosti s předchozím příkladem. Nakonec sami zkusí doplnit, jakým způsobem je možné vypočítat všechna možná pořadí 4 prvků (umístění čtyřdílného slovníku do knihovny).

Zobrazí se po kliknutí.

Na volná místa žáci dopíší $24 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Stránka 3: Obecný vzorec pro výpočet možných pořadí prvků.

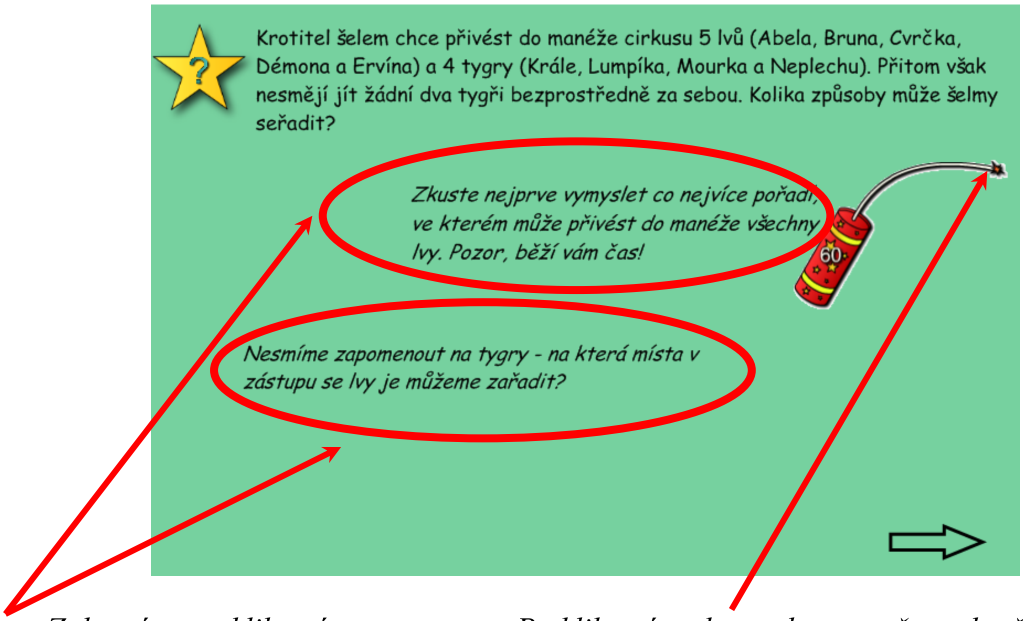
Učitel by měl objasnit žákům význam symbolu **!** (*faktoriál)* a způsob výpočtu jeho hodnoty. V učebnicích pro ZŠ nebývá užíván termín *permutace* prvků, ale spíše jen *pořadí.*



Stránka 4: Řešení *příkladu 20.*

V první části příkladu žáci zkusí samostatně zapsat co nejvíce pořadí lvů (píšou jen první písmena jmen lvů tak, jak půjdou za sebou). Učitel může tuto úlohu zadat jako individuální samostatný úkol na rychlost (po kliknutí na knot bomby začne odpočítávání času, výchozí je nastavené na 1 minutu, učitel však může tento čas upravit dle potřeby).

Poté žáci rozhodnou, na která místa lze zařadit tygry, pokud nemají jít žádní dva za sebou (musí tedy mezi nimi stát lev nebo mohou stát na krajích řady).



Zobrazí se po kliknutí. *Po kliknutí na konec knotu začne odpočítávání.*

Stránka 5: Otázky k předchozímu příkladu.

Odpovědi se zobrazí po kliknutí na otázky. V řešení poslední otázky je využito kombinatorického pravidla součinu.