Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta pedagogická

Diplomová práce

SFÉRICKÁ TRIGONOMETRIE

Martina Polaufová

Plzeň 2012

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 15. března 2012 Martina Polaufová

…………………………….

Poděkování

Tímto bych ráda poděkovala vedoucímu diplomové práce RNDr. Jiřímu Potůčkovi, CSc. za cenné profesionální rady, připomínky a metodické vedení práce.

Zde je vložena stránka se zadáním

Obsah

Úvod

Sférická trigonometrie je teoreticko-matematickým základem pro řešení mnoha problémů týkajících se kartografie, astronomie, geodézie a dalších věd, které se zabývají řešením geometrických úloh na kulové ploše.

,, Trigonometrie hledá rovnice mezi stranami a úhly trojúhelníka a užívá nalezených vztahů k výpočtu neznámých prvků závislých na daných prvcích geometrických útvarů.“ (Vojtěch, 1935)

Jméno trigonometrie je odvozeno z řeckého trigón, což znamená trojúhelník, a metrein - měřiti.

Tato oblast matematiky byla od nejstarších dob usilovně studována, jelikož její uplatnění se týká většiny oborů, o které se člověk zajímal již od začátku studia přírody a světa. Proto cílem mé diplomové práce je informace o sférické trigonometrii, tedy o výpočtech na kulové ploše. Tento obor je však příliš rozsáhlý a tak se zaměřím zejména na historii její výuky na středních školách, na uvedení a vysvětlení základních pojmů sférické trigonometrie a na ukázky řešení všech typů pravoúhlého a obecného sférického trojúhelníku, což by mohlo sloužit jako výukový materiál.

Diplomová práce je rozdělena do sedmi kapitol. V první kapitole je uvedena historie sférické trigonometrie od počátku matematiky. Ve druhé kapitole je popsán vývoj postavení sférické trigonometrie ve školské matematice. Tato kapitola je rozdělena do dalších podkapitol podle období od konce 20. století do současnosti. Druhá část této kapitoly se zabývá významem sférické trigonometrie pro geografii. Ve třetí kapitole jsou popsány základní pojmy sférické trigonometrie a jejich charakteristika. Ve čtvrté kapitole je uvedeno i Neperovo pravidlo a základní věty sférické trigonometrie, které jsou potřebné pro pochopení řešených příkladů. Pátá kapitola pojednává o vztazích mezi stranami a úhly sférického trojúhelníku. V šesté kapitole je srovnání rovinné a sférické trigonometrie. V poslední sedmé kapitole jsou uvedeny ukázky úloh a jejich řešení ve sférické trigonometrii.

Nejprve jsou řešeny příklady obecných sférických trojúhelníků. Na ně navazují úlohy, v nichž se řeší pravoúhlý sférický trojúhelník. V závěru jsou úlohy, ve kterých je sférická trigonometrie použita v geodezii a astronomii.

1. Historický vývoj sférické trigonometrie

1.1 Počátky matematiky

Jak uvádí Dirk J. Struik (1963,s.14), již u velmi primitivních kmenů se setkáváme s určitým dělením času, a proto též s určitými poznatky o pohybu Slunce, Měsíce a hvězd. Užívání lunárního kalendáře vychází z pradávného období lidské historie, kdy se začaly spojovat vegetační změny s periodickými změnami Měsíce. Primitivní národy také pozorovaly východy souhvězdí při stmívání a slunovraty. Tyto národy užívaly souhvězdí pro orientaci při mořeplavbě.

Z astronomie pramenily některé znalosti o vlastnostech kruhu, koule a úhlů. „Nejstarší známý příspěvek k teorii astronomie pochází od řeckého matematika Eudoxa z Kindu (asi 408 – 355 př. n. l.), který se pokusil vysvětlit pohyb planet." (Vospěl, 1976, s. 87)

1.2 Starý Orient

Babylónská astronomie, která v té době dosahovala skutečně vědecké podoby, byla charakteristická pečlivým studiem drah Měsíce, Slunce a planet. Babylónská astronomie této doby ovlivňovala řeckou astronomii.

Úloha Mezopotámie v době Peršanů při rozšiřování starověké a antické astronomie není dosud dostatečně vysvětlena, ale všechny dosavadní doklady ukazují, že tato úloha byla významná. (Struik, 1963)

V Čínská matematice, ve sborníku Deset klasiků, je vysvětlen výpočet kalendáře. Matematika ,, Deseti klasiků" je považována za jednoduchou a nezdá se, že by přesahovala úroveň egyptské matematiky. V tomto díle nalezneme i trigonometrii, zvláště v klasiku Haj tchao suang ťing (tj. Matematický traktát o mořském ostrově). (Struik, 1963)

1.3 Řecko

Za zakladatele trigonometrie je považován Hipparchos (140 let. př. n. l.), který položil základy jak rovinné tak sférické trigonometrii. Jak uvádí Vospěl Z. (1978,s.55), Hipparchovi se též připisuje metoda určení zeměpisné šířky a délky astronomickými prostředky, i když starověk nebyl ještě schopen provádět jakákoliv vědecká měření či mapování ve velkých měřítkách.

Dalším matematikem této doby byl Aristarchos ze Samu, jemuž Archimédes připisuje hypotézu, že Slunce je středem pohybu planet.

Za alexandrijského období byla jednou z nejdůležitějších dokumentů Ptolemaiova Velká sbírka (kolem roku 150 n. l.), neboli Megalé Syntaxis, zvaná později arabsky Almagest.

Tato práce, která obsahuje také poznatky z trigonometrie je inspirována prací Hipparcha, Kidinny či jiných babylónských astronomů. Almagest také obsahuje formule pro kosiny a siny součtu a rozdílu dvou úhlů a začátky sférické trigonometrie. Formulace těchto vět je ale geometrická a dnešní zápis trigonometrie pochází z 18. století od Leonharda Eulera.

V Ptolemaiově práci Planisphaerium je rozebírána stereografická projekce. V díle Geographia je určována poloha města na Zemi s pomocí délky a šířky zemské sféry. Tento způsob je příkladem užití souřadnic ve středověku.

Na základě stereografické projekce byl zkonstruován astroláb, což byl přístroj na určování polohy místa na Zemi. Tento přístroj byl znám již v antice a používal se až do 18. století, kdy byl zaveden sextant. (Struik, 1963)

O něco starší než Ptolemaios byl Menelaos Alexandrijský, který žil kolem roku 100 n. l. Menelaos je autorem díla Sférika, která obsahuje geometrii koule včetně diskuse sférického trojúhelníku. „Obsahuje Menelaovu větu pro trojúhelníky a její rozšíření na kulovou plochu . Zatímco Ptolemaiova astronomie užívá do značné míry i výpočtů v šedesátinných zlomcích, zachovává geometrické díle Menelaovo důsledně ryze euklidovskou tradici“ (Struik, 1963, s. 58)

1.4 Orient po úpadku řecké společnosti

Dílo Siddhántás, v jehož části Súrya (přibližně 3. – 4. stol. n. l.), která se zachovala v exempláři, jež snad odpovídá originálu, jsou uvedeny hlavně poznatky o astronomii. (Struik, 1963)

Muhammad Ibn Músa Al-Chvárizmí pocházející z Chívy, zavedl roku 825 astronomické a trigonometrické tabulky obsahující siny a tangenty.

Jak uvádí Dirk J. Struik (1963,s.70), arabská astronomie se obzvláště zajímala o trigonometrii - slovo „sinus“ je latinským překladem arabského zápisu sanskrtského slova džjá. Hodnoty sinu se rovnaly hodnotám poloviční tětivy dvojnásobného oblouku a nebyly chápány jako čísla, ale jako úsečky.

Značnou část trigonometrie můžeme nalézt v díle al-Battáního (Albategnius, asi 858-929), jež je považován za jednoho z nejvýznamnějších arabských astronomů, který měl tabulku kotangent s intervalem jednoho stupně „ umbra extensa“ a znal kosinovou větu pro sférický trojúhelník.

Dalším autorem, který se zabýval sférickou trigonometrií, byl Abu-l-Vafá (940-997). Ten odvodil sinovou větu sférické trigonometrie.

Násiruddin Túsí (1201-1274), učenec působící v centru Marábha, vydělil z astronomie trigonometrii jako samostatnou vědní disciplínu.

Astronom Al-Zarkálí (Arzachel, kolem 1029-1087) působící v Cordobě, vydal Toledské planetární tabulky. Trigonometrické tabulky obsažené v tomto dokumentu, měly vliv na rozvoj trigonometrie v době renesance.

1.5 Počátky rozvoje matematiky v Západní Evropě

„ Hospodářství západní částí se nikdy neopíralo o zavlažování, zemědělství zde bylo extenzívní a neposkytovalo žádné popudy pro studium astronomie.“ (Struik, 1963, s. 76)

Prvním autorem tohoto období byl obchodník Leonardo Pisanský zvaný též Fibonaci, který po návratu ze svých cest po Orientu napsal dílo Practica Geometriae. Toto dílo z roku 1220 popisuje poznatky, které na svých cestách poznal z geometrie a trigonometrie.

Za nejvýznamnějšího matematika 15. století, který se zabýval trigonometrií, je považován Johanes Müller zvaný Regiomontanus. Regiomontanovým hlavním dílem z roku 1464 (vytištěno až roku 1533) bylo De Triangulis Omnimodus Libri Guingue. Jedná se o systematický úvod do trigonometrie. Jak uvádí Vospěl Z. (1978,s.84), obsahuje toto dílo základní věty sférické trigonometrie, ale bez užití vhodné matematické symboliky. Od té doby se trigonometrie stala vědou nezávislou na astronomii.

Násiruddín Túsí došel ke stejným poznatkům jako Regiomontanus již ve 13. století. Rozdíl mezi těmito autory je v tom, že na dílo Násiruddína Túsího další vývoj nenavázal, zatímco Regiomontanova kniha hluboce ovlivnila další rozvoj trigonometrie.

Regiomontanus též věnoval mnoho času výpočtem trigonometrických tabulek. V roce 1490 vydal tabulky sinů pro intervaly jedné minuty při poloměru 60 000. Hodnoty sinů vyjádřil jako úsečky, které definoval jako poloviční tětivy pro dvojnásobné úhly. Hodnoty sinů tedy závisely na délce poloměru. Větší poloměr umožňoval větší přesnost. (Struik, 1963)

Další astronom, který významně přispěl k rozvoji trigonometrie, byl polský astronom Mikuláš Koperník (1473 – 1543) stejně jako francouzský matematik Francois Viete (1540 - 1603), který se zasloužil o vysvětlení kosinovy věty v trigonometrické podobě.

S prvním označením funkce „sin“ se setkáváme v knize francouzského matematika Hérigona v roce 1634.

Dalším autorem byl františkánský mnich Luca Paciolli, který v roce 1494 vydal knihu psanou v italštině Summa de aritmetica. V tomto díle jsou shrnuty všech dosud známé poznatky z algebry, aritmetiky a trigonometrie.

V Německu se objevovaly trigonometrické a astronomické tabulky s neustále stoupající přesností.

Tabulky G. J. Rhetica, které dokončil roku 1596 jeho žák Valentin Otho, obsahují hodnoty trigonometrických funkcí po deseti vteřinách na deset desetinných míst. Tabulky Pitiscovy z roku 1613 mají patnáct desetinných míst.

Dalším autorem, který se zabýval sférickou trigonometrií byl skotský zeman John Napier (německy Neperem – 1550 – 1610). Jak uvádí Vospěl Z. (1978,s.88), John Napier shrnul vzorce pro řešení pravoúhlého sférického trojúhelníku v důmyslné pravidlo a také objevil dvě z tzv. analogií o sférickém trojúhelníku.

V 16. století si řada matematiků pohrávala s možností uvést v souvislost geometrické a aritmetické posloupnosti a zjednodušit tím práci s komplikovanými trigonometrickými tabulkami.

V té době působí v Praze astronom Tycho Brahe, který zde zanechal rukopisy obsahující poznatky z planimetrie a také především z trigonometrie.

1.6 Osmnácté století

Za nejvýznamnějšího autora tohoto období je považován švýcarský matematik Leonhard Euler, který dal sférické trigonometrii dnešní jednoduchý a přehledný tvar. Jako první označil úhly a strany sférického trojúhelníku způsobem, jakým to děláme dnes. Obvyklý zápis pochází z Eulerova díla Introductio in analysin infinitorum z roku 1748.

Abrahem de Moivre je autor, jehož jméno je spjato s trigonometrickou větou, která se ve své dnešní podobě $(\cos\varphi + i\sin\phi)^n = \cos n\varphi + i.\sin n\varphi$ objevuje teprve v Eulerově Introductio.

Dalším úspěšným matematikem ve sférické trigonometrii byl Eulerův žák Švéd A. Lexel (1740 – 1784). Sférickou trigonometrií se zabývali také francouzští učenci J. Delambre (1749 – 1822) a A. Legendre (1752 – 1833).

V tomto období také pracoval Ženevan L´Huilier, který odvodil obsah sférického trojúhelníku z jeho stran.

Vývoj matematiky v našich zemích v 18. století je charakteristický prací Wácslawa Jozeffa Veselého, který je autorem díla Gruntowní počátek mathematického umění. ,,Obsahující v širokém rozsahu praktické zeměměřičství včetně trigonometrie, v níž se používá i logaritmů“ (Struik, 1963, s. 139)

Další autor, který věnoval pozornost trigonometrii, je matematik Pelikán. Jediným výsledkem jeho práce však bylo zpřesnění symboliky a snaha o zavedení algebraického odvozování trigonometrických formulí.

Významným představitelem je také český jezuitský matematik Jakub Kresa, po jehož smrti vyšla jeho kniha Analysis speciosa trigonometriae sphaericae, která pojednává o sférické trigonometrii.

1.7 Devatenácté a dvacáté století

Jak uvádí Vospěl Z. (1976,s.89), další významné práce ve sférické trigonometrii podal francouzský matematik J. Lagrange (1736 – 1813), A. Mobius (1790 – 1868) a věhlasný německý vědec K. F. Gauss (1777-1855).

Z českých matematiků pracovali v tomto oboru F. J. Studnička (1836 – 1903) a Václav Láska (1862 – 1943).

2. Historický vývoj postavení sférické trigonometrie ve školské matematice a její význam pro geografii

2. 1 Historický vývoj postavení sférické trigonometrie ve školské matematice

2.1.1 Období do roku 1908

V roce 1854 byla schválena Exner-Bonitzova reforma školství, která se týkala organizace gymnázií a reálek. Gymnázia od této reformy přestala být jedinými všeobecně vzdělávacími školami. Do středoškolského vzdělávání byly zařazeny nové školy považované do roku 1849 za odborné - reálné školy.

Na rozvoj české matematické literatury měla velký vliv Jednota českých matematiků a fyziků. To vedlo k tomu, že matematika na českých školách měla velmi vysokou úroveň srovnatelnou s předními evropskými zeměmi.

Doba studia byla na gymnáziích osm let a na reálkách sedm let. Sférická trigonometrie byla vyučována na reálkách v VII. třídě 5. hodin týdně. Zabývala se objasněním nejdůležitějších vlastností sférického trojúhelníku, základními vzorci a výkladem hlavních případů řešení pravoúhlého sférického trojúhelníku, stejně tak i ostroúhlého trojúhelníku. Dále se vyučovalo využití sférické trigonometrie ve stereometrii a řešení některých elementárních úloh v matematickém zeměpisu.

Na gymnáziích byla sférická trigonometrie vyučována v VI. třídě. Probíráno bylo srovnávání trigonometrických vět a metod s planimetrickými a stereometrickými větami a metodami. Další součástí učiva bylo použití trigonometrie na úlohy v zeměpise a astronomii. Základy sférické trigonometrie se na reálkách vyučovány naprosto běžně. Na gymnáziích se vyučovaly jen pokud zbyl na konci roku čas. Reálky měly týdně vyšší hodinovou dotaci matematiky, jelikož zde žáci získávali matematické vzdělání. Tyto školy sloužily jako příprava pro studium na technice. (Červený, 2007)

Do roku 1860 nebyly vydávány žádné česky psané matematické učebnice. V letech 1864 – 1867 vyšla první česky psaná učebnice Václava Janečky, která se jmenuje Geometria pro vyšší gymnasia, ve které se vyskytuje učivo o sférické trigonometrii. Právě její třetí díl Trigonometria byl zaměřen na trigonometrii.

Karel Domin vydal v roce 1880 učebnici, Geometrii pro ústavy učitelské, jejíž druhý díl obsahuje poznatky z trigonometrie.

Dalším významným autorem byl Alois Strnad, který v roce 1905 vydal učebnici Sférická trigonometrie a analytická geometrie pro VII třídu. Alois Strnad ve svých dílech používal pojmy, které se dnes již nepoužívají např. vstava znamenal sinus, dostava – kosinus, tečnice- tangens a dotečnice vyjadřovala kotangens. (Červený, 2007)

2.1.2 Období od roku 1908 do roku 1948

Na začátku tohoto období je výuka na školách ovlivněna poznatky z pedagogiky a psychologie ze Západní Evropy, a také především z USA. Tento proces se nazývá pedagogický reformismus.

Typy středních škol, sedmileté reálky a osmiletá gymnázia zůstala zachována, ale změnily se jejich učební osnovy. Nově byl vytvořen nový typ střední školy, a to osmileté reformní reálné gymnázium, které vzniklo spojením gymnázia a reálky. V této době se také uskutečnil reformní návrh tzv. Meránský program, který matematice ve středoškolském vzdělávání přiřazoval jedno z nejdůležitějších míst ve výuce.

Autorem učebnic obsahujících sférickou trigonometrii byl Josef Vinš, který v roce 1913 vydal Geometrii pro VI. třídu, která byla vydána pro reálky.

Marchetova reforma obsahovala upravené osnovy pro klasická gymnázia a pro reálky, dále také osnovy pro nový typ středních škol, a to pro reálné reformní gymnázium. (Červený, 2007)

Po těchto změnách v osnovách byly ve třicátých letech sepsány nové učebnice matematiky, protože knihy vydané před touto změnou již nebyly aktuální. Byla také zavedena jednotná terminologie zásluhou Jednoty českých matematiků a fyziků.

Velmi kvalitní byly učebnice sepsané Janem Vojtěchem. Jan Vojtěch vydává v roce 1935 učebnici Geometrie pro VI. třídu reálek, v niž byla popsána krátká historie trigonometrie a dále se zabývala jak trigonometrií rovinnou tak trigonometrií sférickou.

Za II. světové války byl vývoj našeho školství ovlivňován Němci, kteří zasahovali do obsahu školního vyučování. Docházelo k cenzuře učebnic a zásahům do personálního obsazení sboru. Po konci II. světové války vzniká Výchovný ústav pedagogický.

2.1.3 Období od roku 1948 do roku 1968

Po roce 1948 bylo školství ovlivňováno komunistickou stranou Československa. V roce 1948 byly zavedeny jednotné devítileté školy. Dále bylo možné pokračovat čtyřmi roky třetího stupně, který nahrazoval zrušená klasická gymnázia a reálky. Celkem měla poválečná škola 13. ročníků.

V roce 1953 byla zkrácena povinná školní docházka z devíti na osm let a současně vznikaly jedenáctileté střední školy. V roce 1960 byla povinná školní docházka prodloužena opět na devět let.

Po roce 1948 docházelo ke sporům o to, zda se bude trigonometrie nadále vyučovat jako součást geometrie.

Trigonometrie se tedy nevyučovala jako samostatný předmět, ale v učebnicích Eduarda Čecha z roku 1953 bylo jasně odděleno učivo o goniometrických funkcích. Jednotné učebnice pro výuku matematiky byly vydávány od roku 1954.

V učebnicích novějšího vydání je však trigonometrie zařazena zpět do geometrie. Autorem učebnice v tomto období je např. Jiří Mikulčák a jeho učebnice Matematiky pro II. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol z roku 1964.

Další významný autor matematických učebnic je Jiří Kůst, který se jako autor a spoluautor podílel na tvorbě mnoha učebnic matematiky pro základní školy a vysoké školy. V roce 1964 napsal dílo Sférická trigonometrie.

2.1.4 Období od roku 1968 do roku 1990

Vznikl nový typ střední školy, který měl poskytnout úplné střední vzdělání jako na ostatních středních školách, a to střední odborné učiliště.

Základní škola byla osmiletá a všichni žáci museli povinnou školní docházku splnit i absolvováním prvního a druhého ročníku na střední škole. V roce 1984 byl vydán nový školský zákon a byla zrušena devítiletá povinná školní docházka. Byly vydány nové učebnice, které měly sjednotit učivo.

Významným autorem tohoto období byl O. Odvárka, který vydal v roce 1985 dílo Matematika pro 2. ročník gymnázií. Autor zde vynechal složitých goniometrických vzorců.

2.1.5 Období od roku 1990 do současnosti

V roce 1990 je vydán nový školský zákon, který byl novelizací zákonu z roku 1984. Byla zavedena povinná devítiletá docházka.

Vznikají také nové typy škol jako základní umělecká škola, která připravuje pro studium na konzervatoři, dále byly založeny i soukromé a církevní školy.

V roce 2001 byly nové principy vzdělávání zohledněny v Národním programu rozvoje vzdělávání v České republice tzv. Bílé knize. Nový pojem, který se v této souvislosti objevuje, je Rámcově vzdělávací program (dále jen RVP), který vydává Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy (dále jen MŠMT). Je zde vymezen povinný obsah, rozsah a podmínky vzdělávání. Na RVP dále navazují školní vzdělávací programy, které vydávají ředitelé škol. Sférická trigonometrie se dnes učí jen na vysokých školách.

2.2 Význam sférické trigonometrie pro geografii

Pro matematickou geografii má sférická trigonometrie velký význam. Pomocí sférické trigonometrie jsou vyjádřeny některé pojmy.

2.2.1 Pojmy

- Ortodroma – část menšího oblouku hlavní kružnice na sféře procházející dvěma danými body A, B.
- Azimut A – úhel, který svírá ortodroma v jistém bodě s místním poledníkem, měřený od severního směru poledníku ve smyslu pohybu hodinových ručiček.

2.2.2 Vypočítat nejkratší vzdálenost dvou bodů zemského povrchu

Pokud máme zadány dva body na zemském povrchu sférickými zeměpisnými souřadnicemi $A \equiv (\varphi_1, \lambda_1)$, $B \equiv (\varphi_2, \lambda_2)$, lze vypočítat nejkratší vzdálenost těchto bodů a azimuty A_1, A_2 v obou koncových bodech oblouku.

Tato úloha se nazývá druhá hlavní geodetická úloha, která se řeší za pomocí sférického trojúhelníku ABS, pro který známe strany $a = R - \varphi_2, b = R - \varphi_1$ a úhel S (severní pól)

$\Delta\lambda = |\lambda_2 - \lambda_1|$. Známe dvě strany a úhel jimi sevřený. Lze tedy vypočítat nejkratší vzdálenost dvou bodů.

2.2.3 Využití zeměpisné šířky a délky

Zemský povrch budeme považovat za kulovou plochu o poloměru r = 6 381,6 km. Polohu bodů na této referenční kouli budeme udávat v zeměpisných sférických souřadnicích λ, φ, kde

$\varphi \in < -R, R >$ se nazývá zeměpisnou šířkou,

$\lambda \in < -2R, 2R >$ se nazývá zeměpisnou délkou.

Zeměpisná šířka v záporných hodnotách se nazývá též jižní šířka a udává se bez znaménka, kladné hodnoty se pak nazývají severní šířky. Stejným způsobem se hovoří o východní a západní délce.

Základními čarami soustavy sférických zeměpisných souřadnic je nultý poledník a rovník.

Dále lze k lehkému vyhledání určitého místa na referenční kouli kromě rovníku a nultého poledníku vytvořit celou síť rovnoběžek a poledníků. Rovnoběžky jsou čáry spojující místa o stejné zeměpisné šířce. Poledníky jsou čáry spojující místa o stejné zeměpisné délce.

3. Základní pojmy sférické trigonometrie a jejich charakteristika

3.1 Kulová plocha

Mějme v E_3 danou uzavřenou jednotkovou kouli K se středem v bodě O, to je množina

$$K = \{A : \rho(O, A) \leq 1\},$$

kde $\rho(O, A)$ znamená vzdálenost bodu A od bodu O. Tím dostáváme i příslušnou kulovou plochu K_p jako množinu

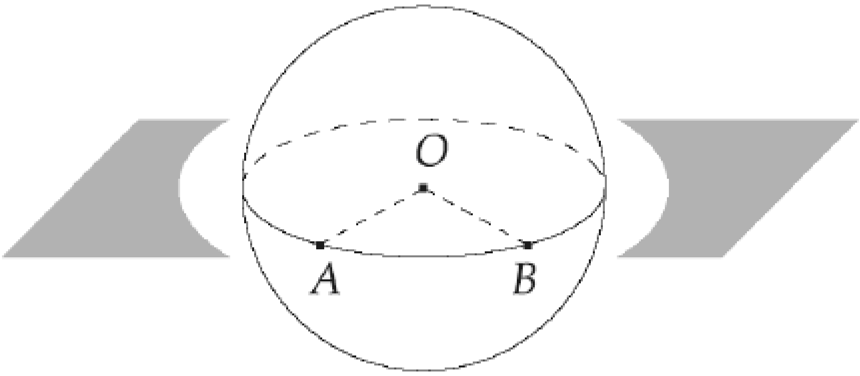
$$K_p = \{A : \rho(O, A) = 1\}.$$

3.2 Hlavní kružnice

Hlavní kružnicí na sféře $\kappa(O, r)$ je kružnice, která je průnikem roviny, jež prochází středem O sféry a sféry κ.

Jsou-li body A, B dva různé body na sféře κ takové, že přímka AB neprochází středem O sféry, pak body A, B prochází jediná hlavní kružnice.

Body A, B rozdělují hlavní kružnici na dva oblouky, nejkratší z nich je ortodroma $\overset{\frown}{AB}$.



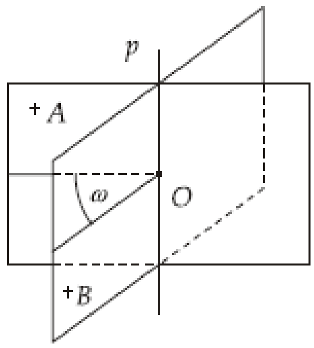
Obrázek 3.1 Hlavní kružnice

3.3 Sférický úhel α

Sférický úhel α - odchylka dvou rovin, ve kterých leží hlavní kružnice sféry.

3.4 Sférický dvojúhelník

Je část kulové plochy ohraničená dvěma hlavními polokružnicemi. Se sférickým dvojúhelníkem je úzce spojen pojem klín.



Obrázek 3.2 Klín

Definice 3.1.

Nechť v E_3 je dána uzavřená jednotková koule K se středem v bodě O a na ní tři body A, B, C tak, aby jednotkové vektory

$$\underline{a} = A - O,\ \underline{b} = B - O \text{ a } \underline{c} = C - O$$

tvořily trojici lineárně nezávislých vektorů v $E_{3.}$

Potom tedy :

Klínem $p_a BC$ nazveme množinu všech bodů $X \in E_3$, pro které vektor $\underline{x} = X - O$ lze zapsat ve tvaru $\underline{x} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c}$, kde λ_2, λ_3 jsou pouze nezáporná čísla a λ_1 je libovolné reální číslo.

Přímka p_a, která je definovaná vektorem $\underline{a}$ a bodem O se nazývá hrana klínu, poloroviny $p_a B$, $p_a C$ stěny klínu a úhel α, jako úhel polorovin $p_a B$, $p_a C$, nazýváme úhel klínu.

Průnik klínu $p_a BC$ a kulové plochy K_p definuje na ploše právě sférický dvojúhelník se dvěma vrcholy A, A', což jsou průsečíky přímky p_a s plochou K_p, dvěma stranami, které tvoří oblouky hlavních kružnic spojující body A a A´.

Konečně úhel α se nazýváme úhel sférického dvojúhelníku.

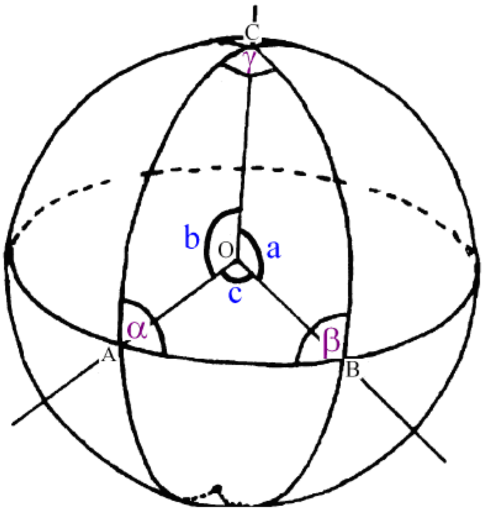
3.5 Trojhran

Trojhran OABC je množina všech bodů $X \in E_3$, pro které vektory $\underline{x} = X - O$ je možno zapsat ve tvaru $\underline{x} = \lambda_1 \underline{a} + \lambda_2 \underline{b} + \lambda_3 \underline{c}$, kde λ_1, λ_2 a λ_3 jsou nezáporná čísla.

Bod O nazýváme vrcholem trojhranu a polopřímky OA, OB, OC jsou hranami trojhranu OABC.

α, β, γ jsou úhly klínů a $p_a BC,\ p_b CA$ a $p_c AB,$ nazýváme stěnové úhly trojhranu. Úhly $a = \angle(\underline{b}, \underline{c}),\ b = \angle(\underline{c}, \underline{a}),\ c = \angle(\underline{a}, \underline{b}),$ (což znamená, že a je odchylka vektorů $\underline{b}, \underline{c}$ atd.) nazýváme hranové úhly trojhranu. Průnik plochy κ a trojhranu nazýváme sférický trojúhelník ABC s vrcholy A, B, C, stranami *a*, *b*, *c* a úhly α, β, γ.

3.6 Sférický trojúhelník



Obrázek 3.3 Sférický trojúhelník

Sférický trojúhelník je menší část kulové plochy ohraničená oblouky tří hlavních kružnic. Jedná se o část sféry κ ohraničenou oblouky tří ortodrom.

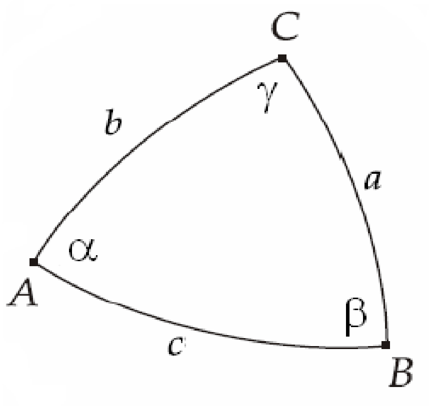
Sférický trojúhelník má tři vrcholy A,B a C. Dále má tři strany AB = *c*, BC = *a*, AC = *b* a úhly α, β a γ.

Strany sférického trojúhelníku jsou odchylky polopřímek OA,OB,OC:

$$a = \angle(OB, OC),$$
$$b = \angle(OA, OC),$$
$$c = \angle(OA, OB).$$

Úhly sférického trojúhelníku ABC jsou odchylky rovin, ve kterých leží ortodromy:

$$\alpha = \angle(OAB, OAC),$$
$$\beta = \angle(OAB, OBC),$$
$$\gamma = \angle(OAC, OBC).$$



Obrázek 3. 4 Sférický trojúhelník

Vlastnosti sférického trojúhelníku:

- $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in (0^\circ, 180^\circ)$
- proti stejným stranám leží stejné úhly, proti větší straně leží větší úhel
- součet libovolných dvou stran je větší než strana třetí
- $a + b + c < 360^\circ$ tzn. součet všech stran je menší než 360°
- $180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$ tzn. součet úhlů je větší než 180° a menší než 540°
- v případě sférického trojúhelníku neplatí vztah jako u planimetrického trojúhelníku, a to $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Můžeme tedy zadat i tři nezávislé úhly. Rozdíl mezi součtem všech úhlů sférického trojúhelníku a rovinného trojúhelníka se nazývá exces ε. $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ$.

Určenost sférického trojúhelníku

Definice 3.2.

Budeme říkat, že sférický trojúhelník je jednoznačně určen danými prvky (např. stranami *a*, *b* a úhlem γ), jestliže:

a) existuje sférický trojúhelník ABC, který má příslušné prvky těchto velikostí (tedy např. má strany *a*, *b* a úhel γ zadaných velikostí);

b) každé dva sférické trojúhelníky ABC, $A_1B_1C_1$, které mají prvky zadaných velikostí, jsou shodné (přitom záleží na pořadí vrcholů).

Věta 3.1.

Sférický trojúhelník je jednoznačně určen (pomocí základních prvků, tj. stran a úhlů):

a) dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným, jestliže jsou strany a úhly duté, neboli když

vyhovují podmínkám (3.1)
$$0<\alpha<2R, \qquad 0<a<2R,$$
$$0<\beta<2R, \qquad 0<b<2R,;$$
$$0<\gamma<2R, \qquad 0<c<2R.$$

b) stranou a dvěma přilehlými úhly, pokud je opět splněna podmínka (3.1);

c) třemi stranami, platí-li (3.1) a nerovnosti $a<b+c,\ b<a+b,\ c<a+b,$ $0<a+b+c<4R.$

d) třemi úhly, pro které platí předpoklady (3.1) a nerovnosti

$$2R<\alpha+\beta+\gamma<6R,$$
$$-2R<\alpha+\beta-\gamma<2R\,.$$

e) stranami a, b a úhlem α $(a\neq b, a+b\neq 2R)$, které splňují podmínky (3.1) a podmínku

$$|R-a|<|R-b|,$$

f) úhly α,β a stranou a $(\alpha\neq\beta,\alpha+\beta\neq 2R)$, které splňují podmínky (3.1) a předpoklad

$$|R-\alpha|<|R-\beta|.$$

3.7 Polární sférický trojúhelník

Ke každému sférickému trojúhelníku existuje trojhran tzv. Polární sférický trojúhelník, který lze zavést následujícím způsobem:

Definice 3.3.

Mějme dán trojhran OABC s příslušným sférickým trojúhelníkem ABC. K vektorům $\underline{a},\underline{b},\underline{c},$ které spolu s bodem O určují trojhran OABC, sestrojíme jednotkové vektory $\underline{a}_O,\underline{b}_O,\underline{c}_O$ tak, že

$$\underline{a}_O=\frac{\underline{b}\times\underline{c}}{|\underline{b}\times\underline{c}|},\quad \underline{b}_O=\frac{\underline{c}\times\underline{a}}{|\underline{c}\times\underline{a}|},\quad \underline{c}_O=\frac{\underline{a}\times\underline{b}}{|\underline{a}\times\underline{b}|}.$$

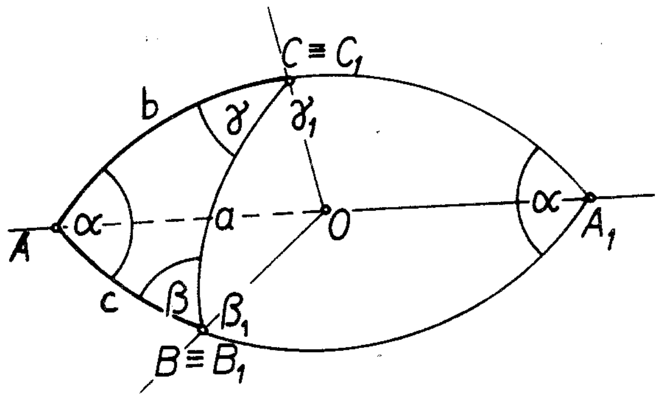
Potom body O a jednotkové vektory $\underline{a}_O,\underline{b}_O,\underline{c}_O$ určují k trojhranu OABC polární trojhran $OA_OB_OC_O$ jehož hrany jsou $OA_O, OB_O, OC_O,$ kde $A_O=O+\underline{a}_O,\ B_O=O+\underline{b}_O,\ C_O=O+\underline{c}_O.$

Tímto způsobem je také ke sférickému trojúhelníku ABC nadefinován polární sférický trojúhelník $A_O B_O C_O$.

3.8 Přilehlý sférický trojúhelník (resp. přilehlý trojhran)

Definice 3.4.

Nechť OABC je trojhran s příslušným sférickým trojúhelníkem ABC. Jestliže k polopřímce OA sestrojíme polopřímku opačnou a označíme ji OA_1 $(A_1 \in K_P)$, potom přilehlým trojhranem ke stěně COB nazveme trojhran OA_1BC. Přilehlý trojhran definuje přilehlý sférický trojúhelník $A_1B_1C_1$, pro který zřejmě platí $B = B_1$, $C = C_1$, $a = a_1$.



Obrázek 3. 5 Přilehlý sférický trojúhelník

Přilehlý sférický trojúhelník je tedy takový sférický trojúhelník, který doplňuje zadaný sférický trojúhelník na dvojúhelník s úhlem, který se rovná úhlu protilehlému ke společné straně.

Věta 3.2.

Jsou-li α, β, γ úhly a a, b, c strany daného sférického trojúhelníku, $a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ strany a úhly sférického trojúhelníku přilehlého ke straně daného sférického trojúhelníku, potom

$$a_1 = a, \quad b_1 + b = 2R, \; c_1 + c = 2R,$$

$$\alpha_1 = \alpha, \; \beta_1 + \beta = 2R, \; \gamma_1 + \gamma = 2R.$$

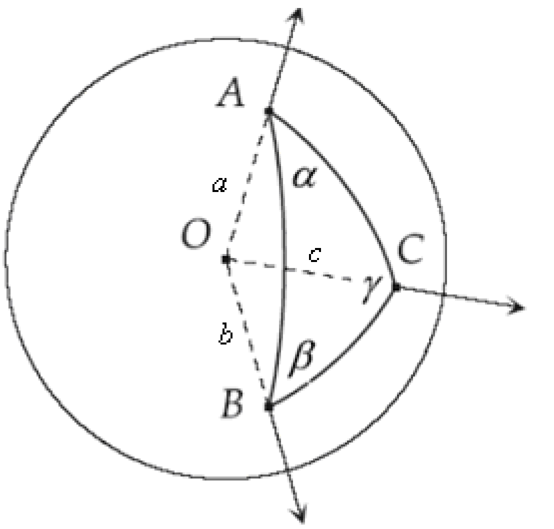
Důkaz:

Rovnost $a_1 = a$ plyne z definice 3.4., $\alpha_1 = \alpha$ je důsledek toho, že se jedná o úhel téhož klínu, který je vytvořen dvěma trojhrany OABC, OA_1BC. Z toho plyne, že také úhly β, β_1 a γ, γ_1 se vzájemně doplňují na úhel přímý a $c_1 + c$ (též $b_1 + b$) jsou velikosti stran dvojúhelníku, které jsou vždy rovny 2R. Tímto způsobem je věta dokázána.

4. Základní věty sférické trigonometrie

4.1 Sinová věta:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}.$$



Obrázek 4. 1 Odvození sinové věty

Odvození sinové věty: Označme *a,b,c* jednotkové vektory na hranách trojhranu OABC tak, že *a = A-O, b = B-O, c =C-O,* což můžeme vidět na obrázku.

Úhly i strany lze vyjádřit jako odchylky jistých vektorů. Platí následující vztahy:

$$\cos a = \frac{b.c}{|b|.|c|} = b.c,$$

$$(4.1.)\qquad \sin a = \frac{|b\times c|}{|b||c|} = |b\times c|,$$

$$\cos b = c.a, \quad \sin b = |c\times a|,$$

$$\cos c = a.b, \quad \sin c = |a\times b|.$$

Dochází zde k cyklické záměně prvků.

Úhly sférického trojúhelníku ABC můžeme opět vyjádřit za pomoci vektorů *a*, *b*, *c*, a to tedy jako odchylky jistých vektorových součinů. Můžeme vyjádřit:

α jako odchylku vektorů $a\times b, \quad a\times c,$

β jako odchylku vektorů $b\times c, \quad b\times a,$

γ jako odchylku vektorů $c \times a, \quad c \times b.$

$$\cos\alpha = \frac{(a \times c).(a \times c)}{|a \times b||a \times c|} \text{ analogicky } \cos\beta, \cos\gamma,$$

$$\sin\alpha = \frac{|(a \times b) \times (a \times c)|}{|a \times b||a \times c|} \text{ analogicky } \sin\beta, \sin\gamma.$$

Z druhých vzorců a z přecházejících vztahů plynou následující rovnosti:

$$|(a \times b) \times (a \times c)| = \sin\alpha.\sin c.\sin b,$$
$$|(b \times c) \times (b \times a)| = \sin\beta.\sin a.\sin c,$$
$$|(c \times a) \times (c \times b)| = \sin\gamma.\sin b.\sin a.$$

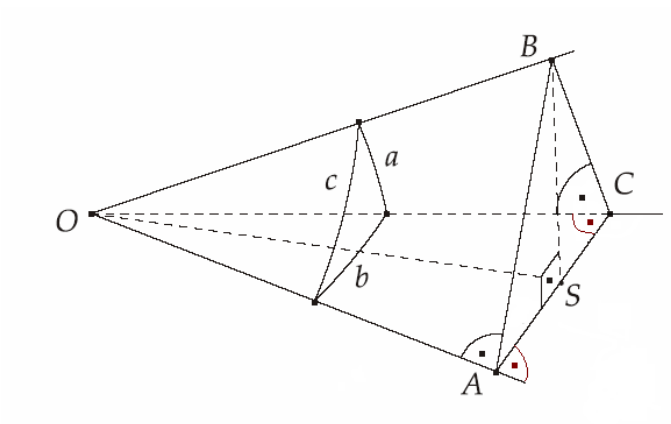
Na levých stranách vzorců dostaneme postupně $|[abc]a|, |[bca]b|, |[cab]c|,$ jelikož např.

$$(a \times b) \times (a \times c) = [abc]a - [aba]c = [abc]a - a.(b \times a).c = [abc]a.$$

Levé strany vzorců jsou stejné, a proto platí i rovnost pravých stran, čili

$$\sin\alpha.\sin c.\sin b = \sin\beta.\sin a.\sin c = \sin\gamma.\sin b.\sin a.$$

Po úpravě dostaneme požadovaný vztah, který se nazývá sférická věta sinová.



Obrázek 4. 2 Sinová věta

4.2 Kosinová věta

4.2.1 Kosinová věta pro úhly

$$\cos\alpha = -\cos\beta.\cos\gamma + \sin\beta.\sin\gamma.\cos a$$

$$\text{cyklickou záměnou: } \cos\beta = -\cos\gamma.\cos\alpha + \sin\gamma.\sin\alpha.\cos b$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos c\ .$$

4.2.2 Kosinová věta pro strany

$$\cos b = \cos a.\cos c + \sin a.\sin c.\cos\beta$$

cyklickou záměnou: $\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos\alpha$

$$\cos c = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos\gamma\ .$$

Důkaz: $\cos\alpha = \dfrac{(a\times c).(a\times c)}{|a\times b||a\times c|}$ analogicky $\cos\beta, \cos\gamma$. Z těchto vzorců můžeme odvodit tento vztah:

$$(\underline{a}\times\underline{b}).(\underline{a}\times\underline{c}) = |\underline{a}\times\underline{b}||\underline{a}\times\underline{c}|\cos\alpha\ .$$

Upravíme levou stranu, tedy

$$\underline{a}^2(b.c) - (b.a)(a.c) = |\underline{a}\times\underline{b}||\underline{a}\times\underline{c}|\cos\alpha.$$

Nyní musíme dosadit z (4.1.) vhodné výrazy a dostaneme vzorec

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos\alpha.$$

Protože tento vzorec platí pro libovolný sférický trojúhelník, jedná se tedy i o polární sférický trojúhelník se stranami a_O, b_O, c_O a úhly $\alpha_O, \beta_O, \gamma_O$, které jsou s prvky výchozího sférického trojúhelníku vázané následující větou.

Věta 4.1.

Jestliže a, b, c, α, β, γ jsou úhly a strany sférického trojúhelníku ABC a $a_O, b_O, c_O, \alpha_O, \beta_O, \gamma_O$ jsou strany a úhly jemu odpovídajícího polárního sférického trojúhelníku, potom platí

$$a_O + \alpha = b_O + \beta = c_O + \gamma = 2R,$$

$$a + \alpha_O = b + \beta_O = c + \gamma_O = 2R.$$

Potom

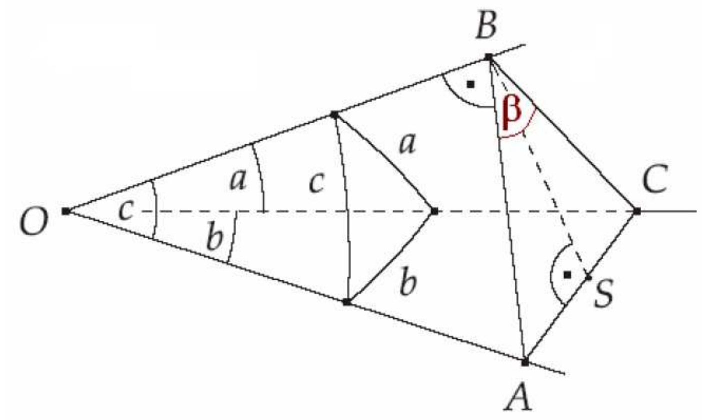
$$\cos a_O = \cos b_O.\cos c_O + \sin b_O.\sin c_O.\sin\alpha_O\ .$$

Po aplikaci věty dostaneme vztah:

$$\cos(2R-\alpha) = \cos(2R-\beta)\cos(2R-\gamma) + ...,$$

tedy

$$\cos\alpha = -\cos\beta.\cos\gamma + \sin\beta.\sin\gamma.\cos a.$$



Obrázek 4. 3 Kosinová věta

4.3 Sinuskosinové věty pro stranu a přilehlý úhel

Tyto věty určují vztah mezi pěti základními prvky (mezi stranami a úhly) sférického trojúhelníku. Tedy vztahy mezi třemi stranami a dvěma úhly nebo mezi třemi úhly a dvěma stranami.

Při jejich odvozování se vychází z kosinových vět:

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos \alpha ,$$

$$\cos b = \cos a . \cos c + \sin a . \sin c . \cos \beta .$$

Pokud dosadíme do druhého vzorce za cos a hodnotu $\cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos \alpha$ po úpravách dostaneme

$$\cos b = \cos^2 c \cdot \cos b + \cos c \cdot \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta .$$

Pokud užijeme rovnosti $\cos^2 c = 1 - \sin^2 c$ a celou rovnici vydělíme sin c ($\sin c \neq 0,$ protože $c \in (0, 2R)$), pak po úpravě dostaneme:

$$\sin a . \cos \beta = \sin c . \cos b - \cos c . \sin b . \cos \alpha .$$

Pokud bychom dosadili naopak, tedy do prvního vzorce za cos b pravou stranu z druhého vzorce, došli bychom ke vztahu:

$$\sin b . \cos \alpha = \cos a . \sin b - \sin a . \cos c . \cos \alpha .$$

K těmto vzorcům lze cyklickou záměnou prvků vytvořit dvě skupiny vzorců, kterým říkáme sinuskosinové věty pro tři strany a dva úhly;

$$\sin a . \cos \beta = \sin c . \cos b - \cos c . \sin b . \cos \alpha ,$$

$$\sin b.\cos\gamma = \sin a.\cos c - \cos a.\sin c.\cos\beta,$$

$$\sin c.\cos\alpha = \sin b.\cos a - \cos b.\sin a.\cos\gamma,$$

$$\sin a.\cos\gamma = \sin b.\cos c - \cos b.\sin c.\cos\alpha,$$

$$\sin b.\cos\alpha = \sin c.\cos a - \cos c.\sin a.\cos\beta,$$

$$\sin c.\cos\beta = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b.\cos\gamma.$$

Druhá část vzorců uvádí výpočet součinu sinu strany a kosinu úhlu přilehlého ve smyslu značení vrcholů, ale první tři vzorce berou v úvahu úhly přilehlé ke straně ve smyslu opačném.

Pokud užijeme kosinových vět pro úhly za výchozí vzorce, pak dostaneme dvě trojice sinuskosinových vět pro tři úhly a dvě strany. Jsou to vzorce:

$$\sin\alpha.\cos b = \sin\gamma.\cos\beta + \cos\gamma.\sin\beta.\cos a,$$

$$\sin\beta.\cos c = \sin\alpha.\cos\gamma + \cos\alpha.\sin\gamma.\cos b,$$

$$\sin\gamma.\cos a = \sin\beta.\cos\alpha + \cos\beta.\sin\alpha.\cos c,$$

$$\sin\alpha.\cos c = \sin\beta.\cos\gamma + \cos\beta.\sin\gamma.\cos a,$$

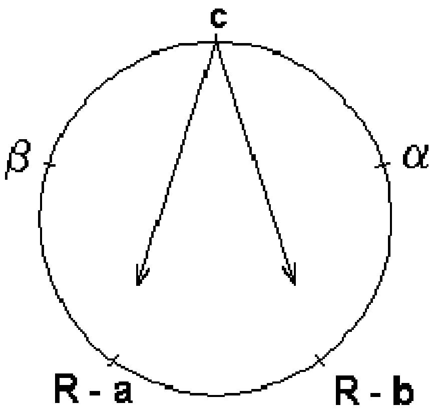
$$\sin\beta.\cos a = \sin\gamma.\cos\alpha + \cos\gamma.\sin\alpha.\cos b,$$

$$\sin\gamma.\cos b = \sin\alpha.\cos\beta + \cos\alpha.\sin\beta.\cos c.$$

Tyto vzorce udávají výpočet součinu sinu úhlu a kosinu strany ve smyslu vpřed a vzad.

4.4 Neperovo pravidlo

Toto pravidlo se může používat pouze ve sférickém pravoúhlém trojúhelníku, kde strana c leží naproti pravému úhlu.



Obrázek 4. 4 Neperovo pravidlo

Kosinus kteréhokoli prvku se rovná:

- součinu kotangent prvků přilehlých (např. α, β jsou prvky přilehlé ke straně *c*):

$$\cos c = \cot g\alpha . \cot g\beta \,;$$

- součinu sinů prvků protilehlých (např. strany *a, b* jsou prvky přilehlé ke straně *c*):

$$\cos c = \sin(R - a).\sin(R - b) \Rightarrow \cos c = \cos a . \cos b \,.$$

Neperovy vzorce:

Pro výpočet polovičního součtu či rozdílu stran:

$$\tan\frac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.\tan\frac{c}{2},$$

$$\tan\frac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.\tan\frac{c}{2}.$$

Pro výpočet polovičního součtu či rozdílu úhlů:

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}.\cot g\frac{\gamma}{2},$$

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}.\cot g\frac{\gamma}{2}.$$

Určení a řešení sférického trojúhelníku danými vzorci:

Dané prvky	Věta	Možný postup řešení	Počet řešení
Strany a,b,c	SSS	kosinova věta pro strany; kosinova věta pro strany nebo sinuskosinová věta	1
Dvě strany a úhel jimi sevřený	SUS	kosinova věta pro strany; kosinova věta pro strany nebo sinuskosinová věta	1
Strana a úhly k ní přilehlé	USU	kosinova věta pro úhly; kosinova věta pro úhly nebo sinuskosinová věta	1
α, β, γ	UUU	kosinova věta pro úhly; kosinova věta pro úhly nebo sinuskosinová věta	1
Dvě strany a úhel proti jedné z nich	SsU	sinusová věta; Neperovy vzorce	0,1 nebo 2
Dva úhly strany proti jednomu z nich	UuS	sinusová věta; Neperovy vzorce	0,1 nebo 2

5. Vztahy mezi stranami a úhly sférického trojúhelníku

Základní nerovnosti omezující velikosti stran a úhlů sférického trojúhelníku plynou z následující definice.

Definice 5.1.

Nechť v E_3 je dána uzavřená jednotková koule K se středem v bodě O a na ní tři body A, B,C tak, aby jednotkové vektory

a = A-O, b = B-O a c = C-O tvořily trojici lineárně nezávislých vektorů v E_3, neboť sférický trojúhelník, který je takto definovaný se nazývá vypuklý, tj. celý leží na jedné polokouli vzhledem ke kterékoliv hlavní kružnici určené libovolnou jeho stranou. Jeho obsah je menší než poloviční povrch koule K a platí tedy nerovnosti:

$$\begin{array}{lll} & 0 < \alpha < 2R, & 0 < a < 2R, \\ (5.1.) & 0 < \beta < 2R, & 0 < b < 2R, \\ & 0 < \gamma < 2R, & 0 < c < 2R. \end{array}$$

Věta 5.1.

Nechť ABC je sférický trojúhelník se stranami *a, b, c* a úhly $\alpha, \beta, \gamma,$ potom platí:

a) Proti větší straně leží větší úhel a naopak. Proti shodným stranám leží shodné úhly. Tedy platí, že

$$b - a > 0 \text{ právě tehdy, když } \beta - \alpha > 0,$$

$$b - a = 0 \text{ právě tehdy, když } \beta - \alpha = 0,$$

$$b - a < 0 \text{ právě tehdy, když } \beta - \alpha < 0.$$

Obdobné nerovnosti lze získat pro ostatní prvky cyklickou záměnou.

Důkaz:

Ze vzorců $\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos\alpha$ a $\cos b = \cos c.\cos a + \sin c.\sin a.\cos\beta$ sestrojíme vztah:

$$\cos a - \cos b = \cos c(\cos b - \cos a) + \sin c(\sin b.\cos\alpha - \sin a.\cos\beta).$$

Označíme-li podíly $\dfrac{\sin\alpha}{\sin a} = \dfrac{\sin\beta}{\sin b} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin c}$ písmenem *k*, a nahradíme sin *a*, sin *b* příslušnými ekvivalenty z $\dfrac{\sin\alpha}{\sin a} = \dfrac{\sin\beta}{\sin b} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin c}$, tak po úpravě dostaneme tvar

$$(\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = k \sin c \sin(\beta - \alpha),$$

ve kterém vzhledem ke vztahu (5.1.) platí $1 + \cos c > 0$ a všechny úhly jsou duté.

Pak např. a > b, je $\cos a < \cos b,$ tedy $\cos a - \cos b < 0,$ potom nutně musí platí dle

$(\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = k \sin c \sin(\beta - \alpha)$ platit $\sin(\alpha - \beta) < 0,$ tj. $\alpha > \beta$.

Všechna ostatní tvrzení lze dokázat obdobně.

b) Každá strana je menší než součet zbývajících dvou, tedy

$a < b + c,$ $\qquad b < a + b,$ $\qquad c < a + b.$

Důkaz:

Jedná se o důkaz po částech a pouze pro první nerovnost. Je-li $b + c \geq 2R,$ potom je platnost zřejmá, protože dle vztahu (5.1.) musí být zbývající strana a < 2R.

Je-li $0 < b + c < 2R,$ použijeme k důkazu kosinové věty pro stranu a, tedy

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos \alpha .$$

Protože $\cos \alpha > -1,$ potom

$$\cos a > \cos b . \cos c - \sin b . \sin c = \cos(b + c).$$

Pak z této nerovnosti, předpokládáme-li $0 < b + c < 2R$, plyne $a < b + c.$

c) Každá strana je větší než rozdíl zbývajících dvou, tedy:

$a > |b - c|,$ $\qquad b > |a - c|,$ $\qquad c > |a - b|.$

Důkaz:

Tento vztah plyne z bodu b), neboť např. z nerovností $b < a + b,$ $c < a + b$ plynou nerovnosti $a > b - c,$ $a > c - b,$ tedy potom dostaneme $a > |b - c|.$

d) Součet stran leží v intervalu (0, 4R), čili

$$0 < a + b + c < 4R.$$

Důkaz:

Vytvoříme-li ke sférickému trojúhelníku ABC přilehlý trojúhelník A_1BC ke straně a.

Podle $a < b + c,$ $b < a + b,$ $c < a + b$ již víme, že $a < b_1 + c_1$. Dále můžeme pokračovat

$$a < 2R - b + 2R - c,$$

tedy

$$0 < a + b + c < 4R.$$

e) Pro úhly platí také nerovnosti (plus obdobné cyklické nerovnosti):

$$2R < \alpha + \beta + \gamma < 6R,$$

$$-2R < \alpha + \beta - \gamma < 2R.$$

Důkaz:

Pro polární sférický trojúhelník $A_O B_O C_O$, který je vytvořen k ABC platí $a_O + b_O + c_O < 4R.$

Užijeme-li větu: Jestliže $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ jsou úhly a strany sférického trojúhelníku ABC a $a_O, b_O, c_O, \alpha_O, \beta_O, \gamma_O$ jsou strany a úhly jemu odpovídajícího polárního sférického trojúhelníku, potom platí:

$$a_O + \alpha = b_O + \beta = c_O + \gamma = 2R,$$

$$a + \alpha_O = b + \beta_O = c + \gamma_O = 2R.$$

Dostaneme

$$2R - \alpha + 2R - \beta + 2R - \gamma < 4R,$$

z toho plyne $\alpha + \beta + \gamma > 2R.$ Platnost druhé nerovnosti ve $2R < \alpha + \beta + \gamma < 6R,$ plyne přímo z (5.1.).

Nakonec zůstává důkaz nerovnosti

$$-2R < \alpha + \beta - \gamma < 2R.$$

Pro ověření této nerovnosti užijeme polární sférický trojúhelník $A_0 B_0 C_0$, pro který podle $a < b + c, \quad b < a + b, \quad c < a + b.$ platí $c_0 < a_0 + b_0$, čili $2R - \gamma < 2R - \alpha + 2R - \beta,$ tedy $\alpha + \beta - \gamma < 2R$ a podle (5.1).

Platí též druhá nerovnost

$$-2R < \alpha + \beta - \gamma < 2R.$$

6. Srovnání rovinné a sférické trigonometrie

Trigonometrie se dělí na rovinnou a sférickou. Jsou v nich aplikace znalostí o goniometrických funkcích a jejich vlastnostech na úlohy o trojúhelnících v rovině (rovinná trigonometrie) nebo na kulové ploše (sférická trigonometrie). Sférická trigonometrie nachází široké uplatnění především v geografii a astronomii.

Trigonometrie v níž se řeší trojúhelník rovinný jako takový, nebo obsažený v rovinných či prostorových útvarech, je rovinná trigonometrie.

Řešením sférického trojhranu nebo sférického trojúhelníku se zabývá trigonometrie sférická. Místo stran rovinného trojúhelníku v ní nastupují strany (jejich úhly) sférického trojúhelníku nebo hrany (úhly hran) sférického trojhranu.

V nižší geodézii, nebo-li praktické geometrii, se počítají vzdálenosti a úhly podle vět rovinné trigonometrie (neboť zakřivení zemského povrchu je vzhledem k poloměru Země zanedbatelné).

Ve vyšší geodézii a sférické astronomii (jejíž částí je i matematický zeměpis) se pracuje s trojúhelníkem sférickým.

Stejně jako v rovinné trigonometrii, tak i v trigonometrii sférické definujeme shodnost geometrických útvarů (především shodnost sférických trojúhelníků). Pro sférické trojúhelníky obdobně jako pro rovinné platí věty o shodnosti.

Nyní se zaměřím na porovnání součtů vnitřních úhlů v trojúhelníku. Jak je známo rovinné trojúhelníky mají součet vnitřních úhlů 180°. Na rozdíl od součtu vnitřních úhlů ve sférickém trojúhelníku, který oproti tomu nabývá libovolné hodnoty mezi 180° a 540°. Platí tedy vztah $180° < \alpha + \beta + \gamma < 540°.$ Pro velmi malý sférický trojúhelník je součet vnitřních úhlů jen o málo větší než 180°. U velmi velkého sférického trojúhelníku, který zabírá téměř polovinu povrchu koule je součet vnitřních úhlů téměř 540°. Součet vnitřních úhlů ve sférickém trojúhelníku není nikdy roven 180°. Je vždy větší o sférický exces, což je součet všech vnitřních úhlů sférického trojúhelníku a úhlu přímého. Česky mu říkáme nadbytek. Nadbytek je vždy kladný, značíme ho ε a platí:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180°.$$

Strany sférického trojúhelníku ABC jsou odchylky polopřímek OA, OB, OC: $a = \angle(OB, OC), b = \angle(OA, OC), c = \angle(OA, OB).$ Součet všech stran je menší než 360° tedy $a + b + c < 360^\circ$. Strany sférického trojúhelníku jsou uváděny ve stupních.

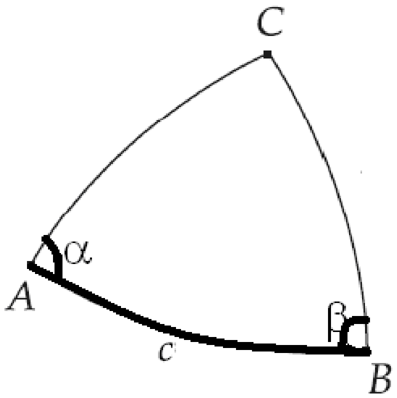
7. Ukázky úloh a jejich řešení ve sférické trigonometrii

V této kapitole ukážeme, jak se řeší obecný sférický trojúhelník při různých zadáních pomocí úhlů a stran.

7.1 Řešení obecných sférických trojúhelníků

7.1.1 První případ

Sférický trojúhelník zadaný jednou stranou a dvěma přilehlými úhly (c,α,β). Hledáme *a, b,* γ.



Obrázek 7. 1 Úloha USU

Podmínky: $0 < \alpha < 2R,\ 0 < \beta < 2R,\ 0 < \gamma < 2R.$

Pro výpočet použijeme tyto vzorce:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos c,$$

$$\sin a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.\sin c,$$

$$\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.\sin c.$$

Příklad:

Máme zadány úhly α = 57°16´01´´ , β = 75°18´30´´ a stranu *c* = 35°20´19´´. Vypočítejte úhel γ a strany *a*, *b*.

Pro výpočet úhlu γ použijeme tento vzorec:

$$\gamma:\ \cos\gamma = -\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos\ c.$$

Dosazením do vzorce získáme:

$$\cos\gamma = -\cos\ 57°16´01´´.\cos\ 75°18´30´´ + \sin\ 57°16´01´´.\sin\ 75°18´30´´.\cos\ 35°20´19´´,$$

$$\gamma = 58°13´18´´.$$

Pro výpočet strany *a* použijeme vzorec:

$$\sin a = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}.\sin c,$$

dosadíme:

$$\sin a = \frac{\sin 57°16´01´´}{\sin 58°13´18´´}.\sin 35°20´19´´,$$

$$a = 34°54´53´´.$$

Pro výpočet strany *b* použijeme tento vzorec:

$$\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}.\sin c,$$

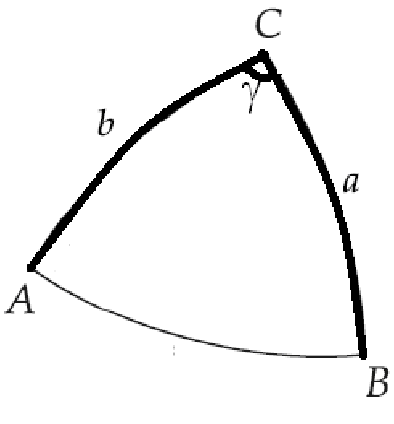
po dosazení dostaneme:

$$\sin b = \frac{\sin 75°18´30´´}{\sin 58°13´18´´}.\sin 35°20´19´´,$$

$$b = 41°09´35´´.$$

7.1.2 Druhý případ

Sférický trojúhelník zadaný dvěma stranami a úhlem jimi sevřeným (*a*, *b*, γ). Hledáme *c*, α, β.



Obrázek 7. 2 Úloha SUS

Podmínky: $0 < a < 2R,\ 0 < b < 2R,\ 0 < \gamma < 2R.$

Pro výpočet použijeme tyto vzorce:

$$\cos c = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos \gamma,$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}.\sin \gamma,$$

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}.\sin \gamma.$$

Příklad:

Jsou zadány strany a = 39°20´14´´, b = 112°16´30´´ a úhel γ = 54°39´49´´. Vypočítejte stranu c a úhly α, β.

Pro výpočet stany c použijeme tento vzorec:

$$\text{c: } \cos c = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos \gamma,$$

dosadíme do vzorce:

$$\text{c: } \cos c = \cos 39°20´14´´.\cos 112°16´30´´ + \sin 39°20´14´´.\sin 112°16´30´´.\cos 54°39´49´´$$

c = 87°21´29´´

Pro výpočet úhlu α použijeme vzorec:

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}.\sin \gamma,$$

dosadíme do vzorce:

$$\sin \alpha = \frac{\sin 39°20´14´´}{\sin 87°21´29´´}.\sin 54°39´49´´,$$

$$\alpha = 31°10´30´´.$$

Pro výpočet úhlu β použijeme vzorec:

$$\sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}.\sin \gamma,$$

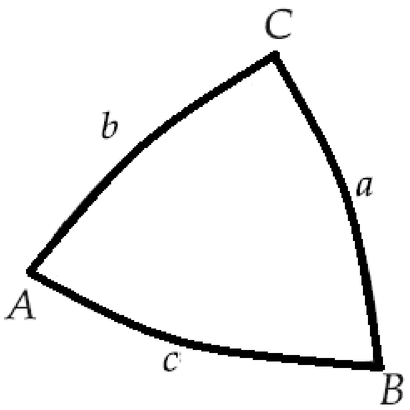
dosadíme do vzorce:

$$\sin \beta = \frac{\sin 112°16´30´´}{\sin 87°21´29´´}.\sin 54°39´49´´,$$

$$\beta = 49°05´11´´.$$

7.1.3 Třetí případ

Sférický trojúhelník zadaný třemi stranami (a, b, c). Hledáme (α, β, γ).



Obrázek 7. 3 Úloha SSS

Podmínky:

Pro jednoznačnou řešitelnou musí platit :

a) $0 < a < 2R,\ 0 < b < 2R,\ 0 < c < 2R,$

b) $0 < a + b + c < 4R,$

c) $|b - a| < c < b + a$ (a další cyklické nerovnosti).

Pro výpočet použijeme tyto vzorce:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b.\cos c}{\sin b.\sin c},$$

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a.\cos c}{\sin a.\sin c},$$

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a.\cos b}{\sin a.\sin b}.$$

Příklad:

Jsou zadány strany a = 53°15´, b = 81°11´, c = 115°29´. Určete úhly α, β, γ.

Pro výpočet úhlu α použijeme tento vzorec:

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b.\cos c}{\sin b.\sin c},$$

dosadíme:

$$\cos\alpha = \frac{\cos 53°15' - \cos 81°11'.\cos 115°29'}{\sin 81°11'.\sin 115°29},$$

$$\alpha' = 41°52'12''.$$

Pro výpočet úhlu β použijeme tento vzorec:

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a.\cos c}{\sin a.\sin c},$$

dosadíme:

$$\cos\beta = \frac{\cos 81°11' - \cos 53°15'.\cos 115°29'}{\sin 53°15'.\sin 115°29'}.$$

$$\beta = 55°24'07''.$$

Pro výpočet úhlu γ použijeme tento vzorec:

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a.\cos b}{\sin a.\sin b},$$

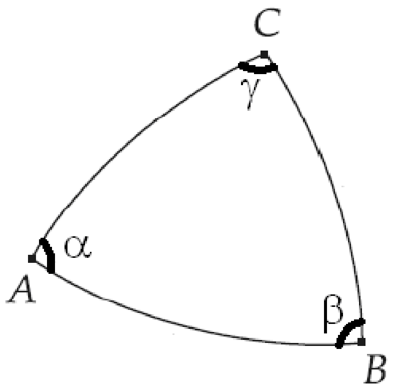
dosadíme:

$$\cos\gamma = \frac{\cos 115°29' - \cos 53°15'.\cos 81°11'}{\sin 53°15'.\sin 81°11'},$$

$$\gamma = 131°14'24''.$$

7.1.4 Čtvrtý případ

Sférický trojúhelník zadaný třemi úhly (α, β, γ). Hledáme *a*, *b*, *c*.



Obrázek 7. 4 Úloha UUU

Podmínky:

Pro jednoznačnou řešitelnou musí platit :

a) $0 < \alpha < 2R,\ 0 < \beta < 2R,\ 0 < \gamma < 2R,$

b) $2R < \alpha + \beta + \gamma < 6R,$

c) $-2R < \alpha + \beta - \gamma < 2R$ (a další cyklické nerovnosti).

Pro výpočet použijeme tyto vzorce:

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta.\cos\gamma}{\sin\beta.\sin\gamma},$$

$$\cos b = \frac{\cos\beta + \cos\alpha.\cos\gamma}{\sin\alpha.\sin\gamma},$$

$$\cos c = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha.\cos\beta}{\sin\alpha.\sin\beta}.$$

Příklad:
Máme zadány úhly $\alpha = 49°58'12''$, $\beta = 129°16'49''$ a $\gamma = 53°46'42''$, hledáme strany *a*, *b* a *c*.

Stranu *a* vyřešíme dosazením do vzorce:

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta.\cos\gamma}{\sin\beta.\sin\gamma},$$

dosadíme :

$$\cos a = \frac{\cos 49°58'12'' + \cos 129°16'49''.\cos 53°46'42''}{\sin 129°16'49''.\sin 53°46'42''},$$

$$a = 64°28'33''.$$

Stranu *b* vyřešíme dosazením do vzorce:

$$\cos b = \frac{\cos\beta + \cos\alpha.\cos\gamma}{\sin\alpha.\sin\gamma},$$

dosadíme:

$$\cos b = \frac{\cos 129°16'49'' + \cos 49°58'12''.\cos 53°46'42''}{\sin 49°58'12''.\sin 53°46'42''},$$

$$b = 114°10'57''.$$

Stranu *c* vyřešíme dosazením do vzorce:

$$\cos c = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha.\cos\beta}{\sin\alpha.\sin\beta},$$

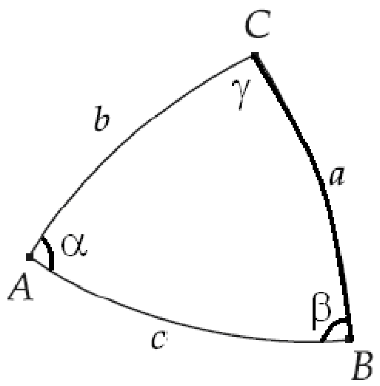
dosadíme:

$$\cos c = \frac{\cos 53°46'42'' + \cos 49°58'12''.\cos 129°16'49''}{\sin 49°58'12''.\sin 129°16'49''},$$

$$c = 71°56'41''.$$

7.1.5 Pátý případ

Sférický trojúhelník zadaný stranou, úhlem přilehlým a úhlem protilehlým (α, β, a). Hledáme b, c, γ.



Obrázek 7. 5 Úloha UuS

Podmínky:

a) $0 < \alpha < 2R,\ 0 < \beta < 2R,\ 0 < a < 2R,$

b) $|R - \alpha| < |R - \gamma|.$

Pro výpočet použijeme tyto vzorce:

$$\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.\sin a,$$

$$tg\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot tg\frac{a+b}{2},$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos c\ .$$

Příklad:

Je zadána strana a = 112°32´12´´ a úhly α = 73°35´12´´, β = 60°44´, vypočítejte strany b, c a úhel γ.

Pro výpočet strany b použijeme vzorec:

$$\sin b = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.\sin a,$$

dosadíme:

$$\sin b = \frac{\sin 60°44'}{\sin 73°35'12''}.\sin 112°32'12'',$$

$$b = 57°08'12''.$$

Pro výpočet strany *c* použijeme vzorec (Neperova analogie):

$$tg\,\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot tg\,\frac{a+b}{2},$$

dosadíme:

$$tg\,\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{73°35'12''+60°44'}{2}}{\cos\frac{73°35'12''-60°44'}{2}} \cdot tg\,\frac{112°32'12''+57°08'12''}{2},$$

tedy:

$$tg\,\frac{c}{2} = \frac{\cos 67°09'36''}{\cos 6°25'36''} \cdot tg\ \ 84°50'12'',$$

$$c = 153°56'58''.$$

Pro výpočet úhlu γ : použijeme vzorec:

$$\cos\gamma = -\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos c,$$

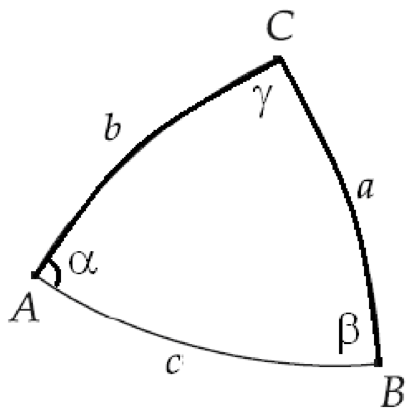
dosadíme:

$$\cos\gamma = -\cos 73°35'12''.\cos 60°44' + \sin 73°35'12''.\sin 60°44'.\cos 153°56'58'',$$

$$\gamma = 152°51'52''.$$

7.1.6 Šestý případ

Sférický trojúhelník zadaný dvěma stranami a úhlem proti jedné z nich (a, b, α). Hledáme $c, \beta, \gamma.$



Obrázek 7. 6 Úloha SsU

Podmínky:
a) $0 < a < 2R,\ 0 < b < 2R,\ 0 < \alpha < 2R,$
b) $|R - a| < |R - b|.$

Pro výpočet použijeme tyto vzorce:

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}.\sin\alpha,$$

$$tg\,\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \cdot tg\,\frac{a+b}{2},$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos c.$$

Příklad:

Jsou zadán strany a = 57°13´41´´, b = 74°16´34´´ a úhel α = 40°15´18´´. Hledáme stranu c a úhly β a γ.

Úhel α vypočítáme dosazením do vzorce:

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}.\sin\alpha,$$

dosadíme:

$$\sin\beta = \frac{\sin 74°16'34''}{\sin 57°13'41''}.\sin 40°15'18'',$$

$$\beta = 47°42'38''.$$

Pro strana c použijeme vzorec (Neperova analogie) :

$$tg\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}\cdot tg\frac{a+b}{2},$$

dosadíme:

$$tg\frac{c}{2}=\frac{\cos\frac{40°15'18''+47°42'38''}{2}}{\cos\frac{40°15'18''-47°42'38''}{2}}\cdot tg\frac{57°13'41''+74°16'34''}{2},$$

tedy :

$$tg\frac{c}{2}=\frac{\cos 43°58'58''}{\cos(-3°43'40'')}\cdot tg65°45'7.5'',$$

$$c = 116°01'03''.$$

Pro výpočet úhlu γ použijeme vzorec:

$$\cos\gamma=-\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta.\cos c,$$

dosadíme:

$$\cos\gamma=-\cos 40°15'18''.\cos 47°42'38''+\sin 40°15'18''.\sin 47°42'38''.\cos 116°01'03'',$$

$$\gamma=136°19'11''.$$

7.2 Řešení pravoúhlého sférického trojúhelníku

Jestliže některý z úhlů α,β,γ je pravý, pak hovoříme o pravoúhlém sférickém trojúhelníku. Budeme v této teorii pravoúhlých sférických trojúhelníků za pravý úhel považovat úhel γ. Protější strana c je přeponou a strany a, b odvěsnami pravoúhlého sférického trojúhelníku s protilehlými úhly α,β.

Pravoúhlý sférický trojúhelník je speciální případ obecného sférického trojúhelníku, proto jsou odvozeny vzorce ze vzorců, které jsou uvedeny pro obecný sférický trojúhelník.

Upravená sinová věta :

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha}=\frac{\sin b}{\sin\beta}=\frac{\sin c}{\sin\gamma}=\sin c.$$

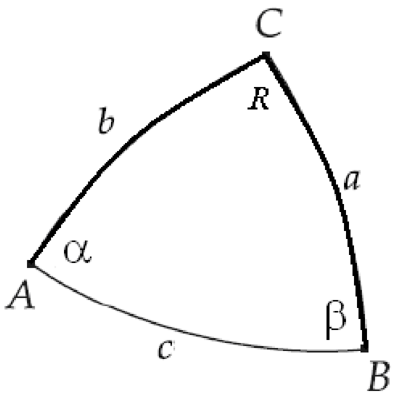
Upravená kosinová věta :

$$\cos c=\cos a\cdot\cos b,$$

která je také sférickou větou Pythagorovou. Obdobně platí i $\cos\alpha=\sin\beta\cdot\cos a$.

7.2.1 První případ

R-úhlý sférický trojúhelník, který je daný dvěma odvěsnami. Jsou dány *a*, *b* hledáme c, α, β.



Obrázek 7. 7 Úloha zadaná dvěma odvěsnami

Podmínky:

Protože $\gamma = R$, bude existovat právě jeden R-úhlý sférický trojúhelník s odvěsnami *a*, *b* jestliže a) $0 < a < 2R$,

b) $0 < b < 2R$.

Pro výpočet použijeme tyto vzorce:

$$\cos c = \cos a.\cos b,$$

$$\cot g\alpha = \cot g\ a.\sin b,$$

$$\cot g\beta = \cot g\ b.\sin a.$$

Příklad:

Máme zadáno: *a* = 28°08´19´´ a strana *b* = 67°43´02´´. Určete jeho zbývající základní prvky.

Pro výpočet strany *c* použijeme vzorec:

$$\text{c: } \cos c = \cos a.\cos b,$$

dosadíme:

$$\cos c = \cos 28°08´19´´.\cos 67°43´02´´,$$

c = 70°27´58´´.

Pro výpočet úhlu α použijeme vzorec:

$$\alpha : \cot g\ \alpha = \cot g\ a . \sin b,$$

dosadíme

$$\cot g\alpha = \cot g 28°08'19''. \sin 67°43'02'',$$

$$\alpha = 89°17'46''.$$

Pro výpočet úhlu β použijeme vzorec:

$$\beta : \cot g\beta = \cot g\ b . \sin a,$$

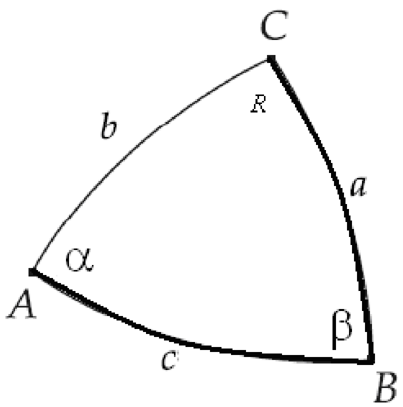
dosadíme:

$$\cot g\beta = \cot g 67°43'02''. \sin 28°08'19'',$$

$$\beta = 88°38'15''.$$

7.2.2 Druhý případ

Je zadán R-úhlý sférický trojúhelník jednou odvěsnou a přeponou. Dána odvěsna a a přepona c. Dány a, c, hledáme b, α, β.



Obrázek 7. 8 Úloha zadaná odvěsnou a přeponou

Podmínky:

a) $0 < a < 2R$,

b) $0 < c < 2R$,

c) $c \in (a, 2R - a)$, což znamená, když úhel c je ,,blíže“ pravému úhlu než a.

Pro výpočet použijeme tyto vzorce:

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a},$$
$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c},$$
$$\cos \beta = \frac{tg\ a}{tg\ c}.$$

Příklad:

Jsou dány prvky sférického trojúhelníku: a = 51°15´05´´, c = 111°20´10´´ určete zbývající prvky.

Pro výpočet strany b použijeme vzorec:

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a},$$

dosadíme:

$$\cos b = \frac{\cos 111°20´10´´}{\cos 51°15´05´´},$$
$$b = 125°32´31´´.$$

Pro úhel α použijeme tento vzorec:

$$\alpha:\ \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c},$$

dosadíme:

$$\sin \alpha = \frac{\sin 51°15´05´´}{\sin 111°20´10´´},$$
$$\alpha = 56°51´16´´.$$

Pro úhel β použijeme tento vzorec

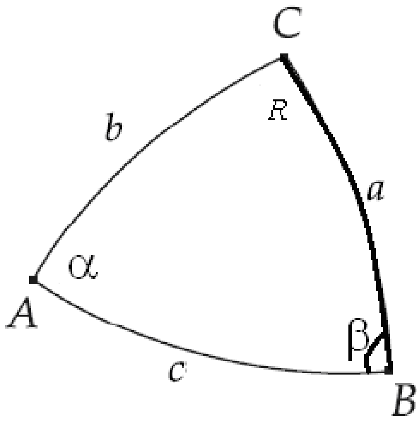
$$\beta:\ \cos \beta = \frac{tg\ a}{tg\ c},$$

dosadíme:

$$\cos \beta = \frac{tg\ 54°15´05´´}{tg\ 111°20´10´´},$$
$$\beta = 122°51´44´´.$$

7.2.3 Třetí případ

R- úhlý sférický trojúhelník zadaný odvěsnou a přilehlým úhlem. Dána strana a a úhel β, hledáme b, c, α.



Obrázek 7. 9 Úloha zadaná odvěsnou a přilehlým úhlem

Podmínky:

a) $0 < a < 2R$,

b) $0 < \beta < 2R$.

Pro výpočet použijeme tyto vzorce:

$$tg\ b = \sin a \cdot tg\ \beta,$$

$$tg\ c = \frac{tg\ a}{\cos \beta},$$

$$\cos \alpha = \cos a . \sin \beta.$$

Příklad:

Budiž a = 44°25´, $\beta = 49°50´$. Najděte jeho zbývající strany a úhel.

Pro výpočet stany b použijeme tento vzorec:

$$\text{b: } tg\ b = \sin a . tg\ \beta,$$

dosadíme:

$$tg\ b = \sin 44°25´ \cdot tg\ 49°50´,$$

b = 39°39´51´´.

Pro výpočet stany c použijeme tento vzorec:

$$c:\ tg\ c = \frac{tg\ a}{\cos\beta},$$

dosadíme:

$$tg\ c = \frac{tg\ 44°25'}{\cos 49°50'},$$

$$c = 56°38'38''.$$

Pro výpočet úhlu α použijeme vzorec:

$$\alpha:\ \cos\alpha = \cos a . \sin\beta,$$

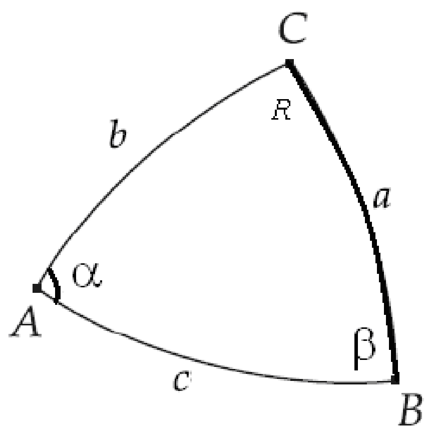
dosadíme:

$$\cos\alpha = \cos 44°25' . \sin 49°50',$$

$$\alpha = 56°55'08''.$$

7.2.4 Čtvrtý případ

R-úhlý sférický trojúhelník, který je zadaný odvěsnou a protilehlým úhlem. Máme zadáno a, α, hledáme b, c, β.



Obrázek 7. 10 Úloha zadaná odvěsnou a protilehlým úhlem

Podmínky:

a) $0 < a < 2R$,

b) $0 < \alpha < 2R$.

Pro výpočet použijeme tyto vzorce:

$$\sin b = \frac{tg\ a}{tg\ \alpha},$$

$$\sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha},$$

$$\sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a}.$$

Příklad:

Máme dáno a = 140°32´10´´, $\alpha = 120°57´20´´$. Najděte jeho zbývající strany a úhel.

Pro výpočet strany b použijeme vzorec:

$$\text{b: } \sin b = \frac{tg\ a}{tg\ \alpha},$$

dosadíme:

$$\sin b = \frac{tg\ 140°32´10´´}{tg\ 120°57´20´´},$$

$$b = 29°35´28´´.$$

Pro výpočet strany c použijeme vzorec:

$$\text{c : } \sin c = \frac{\sin a}{\sin \alpha},$$

dosadíme:

$$\sin c = \frac{\sin 140°32´10´´}{\sin 120°57´20´´},$$

$$c = 47°49´48´´.$$

Pro výpočet úhlu β použijeme vzorec:

$$\beta : \sin \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos a},$$

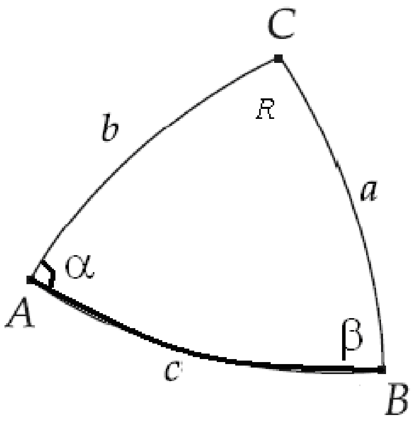
dosadíme:

$$\sin \beta = \frac{\cos 120°57´20´´}{\cos 140°32´10´´},$$

$$\beta = 41°46´46´´.$$

7.2.5 Pátý případ

R- úhlý sférický trojúhelník daný přeponou a jedním přilehlým úhlem. Jsou dány c, α, hledáme a, b, β.



Obrázek 7. 11 Úloha zadaná přeponou a přilehlým úhlem

Podmínky:

a) $0 < c < 2R$,

b) $0 < \alpha < 2R$

c) $\alpha \neq R, \ \ c \neq R.$

Pro výpočet použijeme tyto vzorce:

$$\sin a = \sin c . \sin \alpha,$$

$$tg \ \ b = tg \ \ c . \cos \alpha,$$

$$\cot g \ \ \beta = \cos c . tg \ \ \alpha.$$

Příklad:

Nechť c = 67°10´38´´ a α = 61°28′15´´. Najděte jeho zbývající základní prvky.

Pro stranu *a* použijeme tento vzorec:

$$a: \ \sin a = \sin c . \sin \alpha,$$

dosadíme:

$$\sin a = \sin 67°10′38′′ . \sin 61°28′15′′,$$

a = 54°04´31´´.

Pro výpočet strany *b* použijeme vzorec:

$$b\text{:} \ tg \ \ b = tg \ \ c . \cos \alpha,$$

dosadíme:

$$tg \ \ b = tg \ \ 67°10′38′′ . \cos 61°28′15′′,$$

b = 48°36´58´´.

Pro výpočet úhlu β použijeme tento vzorec:

$$\beta : \cot g\ \beta = \cos c . tg\ \alpha,$$

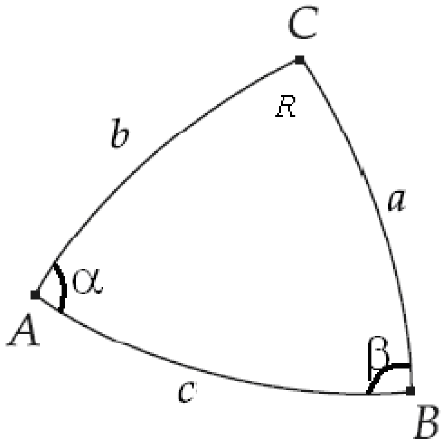
dosadíme:

$$\cot g\ \beta = \cos 67°10'38'' \cdot tg\ 61°28'15'',$$

$$\beta = 35°30'31''.$$

7.2.6 Šestý případ

R- úhlý sférický trojúhelník zadaný úhly přilehlými k přeponě. Zadáno α, β, hledáme *a, b, c*.



Obrázek 7. 12 Úloha zadaná úhly přilehlými k přeponě

Podmínky:

a) $0 < \alpha < 2R,$

b) $0 < \beta < 2R,$

c) $R < \alpha + \beta < 3R,$

d) $|\alpha - \beta| < R.$

Pro výpočet použijeme tyto vzorce:c

$$\cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta},$$

$$\cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha},$$

$$\cos c = \cot g\alpha . \cot g\beta .$$

Příklad:

Jsou dány úhly $\alpha = 51°08'50''$, $\beta = 60°41'20''$. Určete jejich zbývající základní prvky.

Pro výpočet strany *a* použijeme vzorec:

$$a\text{:}\ \cos a = \frac{\cos\alpha}{\sin\beta},$$

dosadíme:

$$\cos a = \frac{\cos 51°08'50''}{\sin 60°41'20''},$$

$$a = 43°59'34''.$$

Pro výpočet strany *b* použijeme vzorec:

$$b\text{:}\ \cos b = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha},$$

dosadíme:

$$\cos b = \frac{\cos 60°41'20''}{\sin 51°08'50''},$$

$$b = 51°03'03''.$$

Pro výpočet strany *c* použijeme vzorec:

$$c\text{:}\ \cos c = \cot g\alpha . \cot g\beta ,$$

dosadíme:

$$\cos c = \cot g\ 51°08'50'' . \cot g\ 60°41'20'',$$

$$c = 63°06'42''.$$

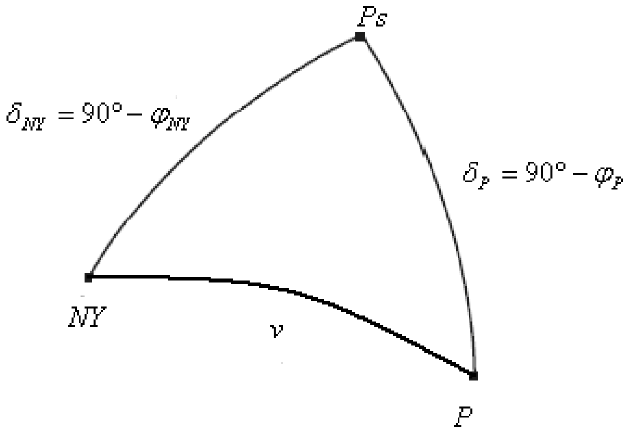
7.3 Užití sférické trigonometrie v geodezii a astronomii

7.3.1 Nejkratší vzdálenost dvou bodů zemského povrchu

Pokud jsou dány dva body na zemském povrchu sférickými zeměpisnými souřadnicemi $A \equiv (\varphi_1, \lambda_1)$, $B \equiv (\varphi_2, \lambda_2)$, máme nalézt nejkratší vzdálenost bodů A, B, čili délku ortodromy (hlavní kružnice) mezi těmito body.

Příklad:

Vypočítejte nejkratší vzdálenost Prahy $(50°05'\mathit{s.š.}, 14°25'\mathit{v.d.})$ a New Yorku $(40°43'\mathit{s.š.}, 73°54'\mathit{z.d.})$.



Použijeme vzorec:

$$\cos v = \cos \delta_P \cdot \cos \delta_{NY} + \sin \delta_P \cdot \sin \delta_{NY} \cdot \cos \Delta\lambda \quad ,$$

dosadíme:

$$\cos v = \cos(90° - 50°05') \cdot \cos(90° - 40°43') + \sin(90° - 50°05') \cdot \sin(90° - 40°43') \cdot \cos(14°25' + 73°54')$$

$$\cos v = \cos(39°55') \cdot \cos(49°17') + \sin(39°55') \cdot \sin(49°17') \cdot \cos(88°19')$$

v = 59°01´45´´

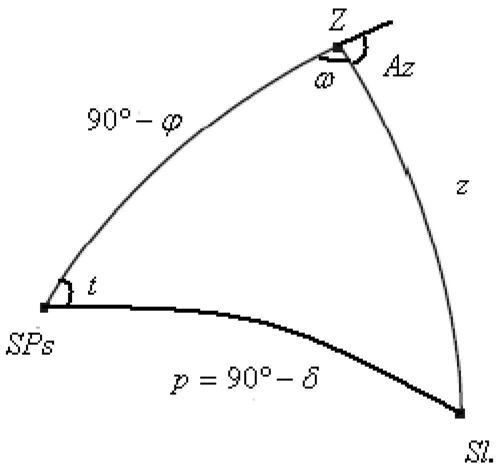
v = arc 59°01´45´´ . 6371,1

v = 6563,85 km.

7.3.2 Výpočet Azimutu v obou koncových bodech oblouku (A_V, A_Z)

Azimut A je úhel, který svírá ortodroma v jistém bodě s místním poledníkem, měřený od severního směru poledníku ve smyslu pohybu hodinových ručiček. Měří se od 0° do 360°. V navigaci se nazývá kurzem plavby nebo letu.

Př. Vypočítejte Azimut východu a západu pokud známe souřadnice místa: $\varphi = 38°40' s.š.,\ \delta = 9°10' z.d.$



z = 90°

p = $\left(90° - \left(-9°10'\right)\right) = 99°10'$

$\omega + A_Z = 180°$

$A_Z = 180° - \omega$

Postup výpočtu:

$$\cos p = \cos z \cdot \cos(90° - \varphi) + \sin z \cdot \sin(90° - \varphi) \cdot \cos \omega$$

$$\cos\ 99°10' = \cos 90° \cdot \cos(90° - 38°40') + \sin 90° \cdot \sin(90° - 38°40') \cdot \cos \omega$$

$$\cos\ 99°10' = 0 + \sin 90° \cdot \sin 51°20' \cdot \cos \omega$$

$$\cos \omega = \frac{\cos\ 99°10'}{\sin 90° \cdot \sin 51°20'}$$

$$\omega = 101°46'22''.$$

Azimut západu:

$A_Z = 180° - \omega$

$A_Z = 180° - 101°46'22''$

$A_Z = 78°13'38''.$

Azimut východu:

$A_V = 360° - \omega$

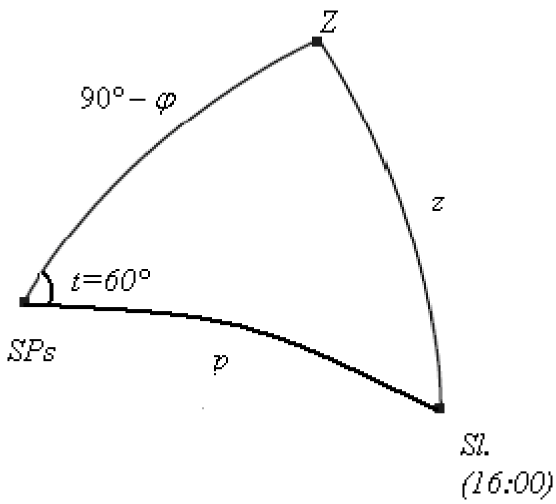
$A_V = 360° - 101°46'22''$

$A_V = 258°13'38''.$

7.3.3 Výpočet délky stínu

Příklad:

Vypočítej délku stínu 50 metrové zdi v 16:00 hod na místě o souřadnicích $\varphi = 38°40' s.š.$,
$\delta = 9°10' z.d.$



v = 50 m

16 : 00 $\Rightarrow$ t = 60°

Úhel dopadu h = ?

Výpočet pomocí vzorečku:

$$\cos z = \cos p \cdot \cos(90° - \varphi) + \sin p . \sin(90° - \varphi) \cdot \cos t,$$

dosazení:

$$\cos z = \cos 99°10´ \cdot \cos(90° - 38°40´) + \sin 99°10´ . \sin(90° - 38°40´) \cdot \cos 60°$$

$$\cos z = \cos 99°10´ \cdot \cos 51°20´ + \sin 99°10´ . \sin 51°20´ \cdot \cos 60°$$

$$z = 73°23´19´´,$$

h= 90° - z = 90° - 73°23´19´´

h= 16°36´41´´.

Vzorec pro výpočet délky stínu:

$$tg\alpha = \frac{v}{d}$$

$$d = \frac{v}{tg\alpha}$$

$$d = \frac{50}{tg16°36´41´´}$$

d = 167,6 m.

Délka stínu je tedy 167,6 m.

Závěr

Ve své diplomové práci jsem se zaměřila na vysvětlení základních pojmů sférické trigonometrie a na její základní věty včetně jejich využití pro řešení typických úloh. Demonstruji to na ilustračních příkladech.

V teoretické části jsou také uvedeny základní věty sférické trigonometrie, které jsou velice významné a bez jejich znalosti by zadané příklady nemohly být řešeny.

Má diplomové práce obsahuje postup řešení všech možných typů úloh obecného sférického trojúhelníku. Na ně navazují příklady, v nichž je řešen pravoúhlý sférický trojúhelník. Mým cílem bylo, aby dané příklady byly názorné a snadno pochopitelné.

U každého typu příkladů je vždy pro názornost použit nákres. Tato část mé diplomové práce by mohla být využita, jako efektivní pomůcka při výuce. Pokud si žáci nebudou vědět rady s řešením určitého typu příkladů, mohou si daný postup vyhledat.

Pro názornost praktického využití sférické trigonometrie jsem také uvedla některé příklady, které demonstrují využití sférické trigonometrie v geodézii a astronomii.

Za velmi přínosné považuji provedení výpočtu nejkratší vzdálenosti dvou míst na zemské ploše, kterou by mohli uplatnit i žáci zeměpisu na druhém stupni ZŠ a bylo by to, dle mého názoru, pro žáky zpestření výuky.

Práce na tomto tématu mě velice zaujala a byla pro mne velmi přínosná. Také pro mne byla zajímavá mezipředmětová vazba mezi obory matematiky a geografie.

Resumé

Diplomová práce je zaměřena na sférickou trigonometrii. V úvodu je obsažen historický vývoj sférické trigonometrie od počátku matematiky až do 20. století. Dále je zde uveden historický vývoj postavení sférické trigonometrie ve školské matematice a její význam pro geografii. V teoretické části jsou nadefinovány základní pojmy sférické trigonometrie a jejich charakteristiky, např. kulová plocha, hlavní kružnice a velmi důležitý sférický trojúhelník. Jsou zde uvedeny i základní věty sférické trigonometrie a to sinová věta, kosinová věta, sinuskosinová věta a Neperovo pravidlo. Jsou zde uvedeny vztahy mezi stranami a úhly sférického trojúhelníku a srovnání rovinné a sférické trigonometrie.

V praktické části jsou řešeny příklady na obecný sférický trojúhelník a dále na pravoúhlý sférický trojúhelník. U každého jsou uvedeny všechny typy příkladů, které mohou nastat, jsou uvedeny podmínky, vzorce podle kterých se mají příklady řešit a vždy zadaný příklad a jeho výpočet, aby bylo názorné, jak postupovat při řešení sférických trojúhelníků. V závěru jsou i řešeny příklady na využití sférické trigonometrie v zeměpise.

Klíčová slova

Historický vývoj, kulová plocha, sférický úhel, trojhran, sférický trojúhelník, polární sférický trojúhelník, sinová věta, kosinová věta, sinuskosinová věta, Neperovo pravidlo

Abstract

The topic of my thesis is spherical trigonometry. The introduction includes history of spherical trigonometry since beginning of mathematics to the 20th century. Then I describe history of spherical trigonometry in school mathematics and its mening for geography. In theoretical part are defined basic concepts and characteristics of spherical trigonometry eg. spherical surface, circle and very important idea – spherical triangle. Then I describe the fundamental theorems as sin theorem, cosin theorem, sincosin theorem and Neper law. In this part is also given the concept relations between sides and angles of spherical triangle and the comparison of plane and spherical trigonometry.

In the practical part is solution of problems of spherical triangle and right spherical triangle. For each triangle are given all types of problems, that may occur. Also are given the conditions and formulas which give you the way, you should solve the problems. Then I add a problem and ist calculation, to be clear, how to proceed, when you try to find a solution of spherical triangle problems. At the end is the solution of problems, which are focused on usage of spherical trigonometry in geography.

Key words

Historical development, spherical surface, spherical angle, triangle, spherical triangle, polar spherical triangle, sin theorem, cosin theorem, sinuscosin theorem, Neper law

Seznam použité literatury a zdrojů informací:

[1] VOSPĚL, Z. *Sférická trigonometrie*. Praha: Ediční středisko ČVUT, 1976. 90 s.

[2] BUREŠOVÁ, J.,VOSPĚL, Z. *Sférická trigonometrie – doplňkové skriptum*.1.vyd. Praha: Evidenční středisko ČVUT, 1989. 53 s.

[3] KŮST, J. *Sférická trigonometrie*.1.vyd. Praha: SPN, 1964.

[4] STRUIK, DIRK, J. *Dějiny matematiky*. 1.vyd. Praha: Orbis, 1963.

[5] VOJTĚCH, J. *Geometrie pro VI. třídu reálek*. 4.vyd. Praha: Prometheus, 1935.

[6] VINŠ, J. *Geometrie pro VI. třídu (vydání pro reálky)*. Praha: Nakladatelství Česká Grafická akciová společnost Unie, 1913.

[7] MAŠKA, O. *Matematika v úlohách*. 7.vyd. Brno: Nakladatelství Barvič a Novotný, 1948. 271 s.

[8] ČERVENÝ, M. *Diplomová práce – Vývoj vyučování goniometrických funkcí v českých matematických učebnicích*. Brno: Masarykova univerzita, Přírodovědecká fakulta, 2007.vedoucí diplomové práce RNDr. Pavel Šišma, Dr.

[9] LAKOMÁ,H.*Sférická trigonometrie*.2008. ČVUT FSv-katedra matematiky [online,cit. 20.2.2012]. Dostupné na WWW: <http://mat.fsv.cvut.cz/lakoma/KOGG/SferickaTrigonometrie2008.pdf>.

[10] LAKOMÁ,H.*Sférická trigonometrie v matematické geografii a astronomii*.2002.ČVUT FSv-katedra matematiky [online,cit. 24.2.2012].Dostupné z WWW: <http://mat.fsv.cvut.cz/lakoma/KOGG/Sferickatrigonometrie_brezen07.pdf>.

Seznam příloh: