Západočeská univerzita v Plzni
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Pavla Bláhová
Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor TV - Ma

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Honzík

Plzeň, 2012

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 22. června 2012

……………………………….

vlastnoruční podpis

Touto cestou bych chtěla poděkovat vedoucímu práce Mgr. Lukášovi Honzíkovi za vstřícný přístup, pomoc a věcné připomínky při realizaci práce.

OBSAH

1 ÚVOD

Ve své bakalářské práci jsem se věnovala třem typům slovních úloh, a to slovním úlohám o pohybu, o směsích a o společné práci. Tvořila jsem sbírku příkladů s doprovodným textem.

Důvodem výběru tématu diplomové práce bylo absolvování povinné školní praxe, při které jsem prakticky využila matematické příklady ze své bakalářské práce. Žákům jsem mohla prezentovat vícero řešení, o kterém jsem s nimi aktivně diskutovala a vedla tak žáky k samostatnému myšlení. Na základě této, pro mě velice pozitivní praktické zkušenosti, jsem se rozhodla navázat na svoji bakalářskou práci a rozšířit ji o optimalizační úlohy.

Tématem mé diplomové práce jsou tedy optimalizační úlohy. V práci bych se chtěla věnovat především příkladům s doplňujícím textem.

V průběhu vypracovávání práce jsem se potýkala s malým množstvím literatury a elektronických zdrojů na dané téma. Dle mého názoru je to zapříčiněno především tím, že není na základních školách ani středních školách určeno těmto úlohám tolik času jako ostatním slovním úlohám. Sekundárním cílem mojí práce je tedy stát se praktickým pomocníkem vysokoškolských studentů, kteří se hodlají oborově ubírat podobným směrem jako já.

2 SLOVNÍ ÚLOHY

V této kapitole si připomeneme, co to slovní úloha je, jak ji budeme řešit, a podíváme se na vybrané typy slovních úloh.

Slovní úloha je úloha z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace obsahující matematický problém, který budeme matematicky řešit. V každé slovní úloze nacházíme stejný postup řešení a to:

1. vypsat údaje ze zadání,
2. sestrojení rovnice,
3. vyřešení rovnice,
4. zkouška,
5. odpověď.

Dále slovní úlohy můžeme rozdělit dle typu na:

a) slovní úlohy o pohybu,
b) slovní úlohy o společné práci,
c) slovní úlohy o směsích,
d) optimalizační úlohy.

ad a) Slovní úlohy o pohybu

Tyto příklady řešíme pomocí fyzikálního vzorečku $s = v \cdot t$. Nejčastěji se zadávají dva typy těchto příkladů a to:

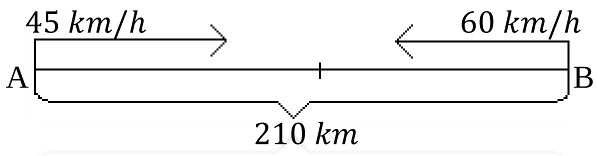
- dopravní prostředky, lidi či objekty ve stejný čas směřují proti sobě a naším úkolem je zjistit, kolik kilometrů ujedou, než se setkají, a za jak dlouho to bude
- dopravní prostředky, lidi či objekty vyjíždějí (oddalují) ze stejného místa ale v jiný čas, tedy druhý dohání prvního, naším úkolem je zjistit, na kolikátém kilometru se setkají a v kolik hodin to bude.

Příklad slovní úlohy o pohybu:

Ze stanice A a B, vzdálených od sebe $210\ km$, jedou proti sobě dva vlaky. Oba vlaky vyjely ve stejný čas. Ze stanice A vyjel osobní vlak rychlostí $45\ km/h$ a ze stanice B vyjel rychlých rychlostí $60\ km/h$. Za jak dlouho se tyto dva vlaky setkají a jak daleko to bude od stanice A?

Řešení:

Obr. č. 1: Znázornění vzdáleností měst



Oba dva vlaky vyjíždějí ze stanic ve stejný čas, proto jej zvolíme jako neznámou x. Pak už jsme doplňovali tabulku dle vzorečku.

	$s\ (km)$	$v\ (km/h)$	$t\ (h)$
vlak ze stanice A	$45x$	45	x
vlak ze stanice B	$60x$	60	x

Teď sestrojíme rovnici. V zadání máme uvedeno, jak je dlouhá celková dráha. Z tabulky víme, jakou vzdálenost ujel vlak osobní a jakou rychlík. Tyto vzdálenosti se musí rovnat celkové vzdálenosti stanic A a B, tedy:

$$45x + 60x = 210$$
$$105x = 210$$
$$x = 2$$

Nyní jsme zjistili čas, po který oba vlaky jely. Teď musíme zjistit v jaké vzdálenosti od stanice A, se setkaly.

$$s = 45x$$
$$s = 90\ km$$

Odpověď:

Vlaky se setkají $2h$ po vyjetí ve vzdálenosti $90\ km$ od stanice A.

ad b) Slovní úlohy o společné práci

Slovní úlohy o společné práci patří k těm složitějším příkladům. Žáci se musí důkladně zamyslet nad zadáním a uvědomit si, co nám zadání říká a k jakému závěru chceme dojít. Nejčastěji se zadávají následující typy příkladů:

- jeden dělník, stroj, potrubí vykoná takovou a takovou práci, případně jím poteče takové a takové množství tekutiny za určitý čas, jinému dělníkovi, stroji, potrubí to trvá jiný čas, přičemž se v těchto úlohách mohou vyskytnout i v jistém smyslu záporné veličiny, konkrétně třeba odtok, kterým z nádrže voda zároveň odtéká… naším úkolem je zjistit čas, po který budou společně dělníci, stroje či potrubí pracovat.

Příklad slovní úlohy o společné práci:

První pumpou se naplní nádrž za 8 min, druhou pumpou za $32\ min$. Za jak dlouho bude nádrž naplněna, jestliže druhá pumpa pracovala sama prvních $7\ min$?

Řešení:

první pumpa … $8\ min$ … $\frac{1}{8}$ (první pumpa naplní nádrž za jednu minutu z $\frac{1}{8}$)

druhá pumpa … $32\ min$ … $\frac{1}{32}$ (první pumpa naplní nádrž za jednu minutu z $\frac{1}{32}$)

počet minut … x (neznámou x volíme jako čas, kdy nádrž napouštěli obě pumpy dohromady)

Nyní můžeme sestrojit rovnici. Rovnici pokládáme rovnu jedné, protože se musí rovnat celkové práci. Také do ní nesmíme zapomenout zahrnout, že druhá pumpa pracovala sama prvních $7\ min$ - tedy naplnila nádrž už ze $\frac{7}{32}$.

$$\frac{7}{32}+\frac{x}{8}+\frac{x}{32}=1/\ \cdot 32$$
$$7+4x+x=32$$
$$5x=25$$
$$x=5$$

Zkouška:

Z rovnice nám vyšel celkový čas, po který pracovaly obě pumpy současně. Nyní si můžeme ověřit výsledek tím, že sečteme čas, který pracovala druhá pumpa sama a čas, kdy pracovaly obě pumpy dohromady.

$$\frac{7}{32}+\frac{5}{8}+\frac{5}{32}=1/\ \cdot 32$$
$$7+20+5=32$$
$$32=32$$

Čísla se shodují a to nám signalizuje, že výsledek je správný.

Odpověď:

Nádrž se naplní za 12min.

ad c) Slovní úlohy o směsích

Při řešení těchto úloh si žáci musí uvědomit, kolik čisté látky je v procentní směsi. Další důležitou věcí je, že existuje zákon o množství čisté látky ve výsledné směsi, která se rovná součtu množství čisté látky v jednotlivých složkách.

Příklad slovní úlohy o směsích

Kolikaprocentní líh dostaneme, jestliže smísíme $2\ l\ 70\%$ se $3\ l\ 30\%$?

Řešení:

ve $2\ l\ 70\%$ lihu je $2 \cdot \frac{70}{100}\ l$ čistého lihu

ve $3\ l\ 30\%$ lihu je $3 \cdot \frac{30}{100}\ l$ čistého lihu

v $5\ l\ x\%$ lihu je $5 \cdot \frac{x}{100}\ l$ čistého lihu (jako neznámou x označíme, kolikaprocentní je líh)

Nyní sestrojíme rovnici. A to tak, že na jednu stranu dáme součet směsí, které mícháme a na druhou celkovou směs.

$$\left(2 \cdot \frac{70}{100}\right) + \left(3 \cdot \frac{30}{100}\right) = 5 \cdot \frac{x}{100}$$

$$\frac{140}{100} + \frac{90}{100} = \frac{5x}{100} / \cdot 100$$

$$140 + 90 = 5x$$

$$5x = 230$$

$$x = 46$$

Z výpočtu jsme zjistili, kolikaprocentní je líh, po smíchání dvou směsích.

Zkouška:

první směs: $2 \cdot \frac{70}{100} = \frac{140}{100} = 1{,}4\ l$ čistého lihu

druhá směs: $3 \cdot \frac{30}{100} = \frac{90}{100} = 0{,}9\ l$ čistého lihu

nová směs: $5 \cdot \frac{46}{100} = \frac{230}{100} = 2{,}3l$ čistého lihu

první směs + druhá směs = nová směs => $1{,}4 + 0{,}9 = 2{,}3$

Odpověď:

Nová směs je 46%.

3 OPTIMALIZAČNÍ ÚLOHY

Řešení optimalizačních úloh je matematická disciplína, která se věnuje určování minima a maxima funkcí za určitých omezujících podmínek.

Z hlediska charakteru optimalizačních úloh lze provést rozdělení úloh optimalizace na:

1. „Úlohy statické optimalizace, pokud kritérium optimality, tj. cílová funkce je funkcí reálných proměnných. Tyto úlohy lze dále rozdělit na:
   - statickou optimalizaci funkce jedné proměnné,
   - statická optimalizace funkcí více proměnných.
2. Úlohy dynamické optimalizace, pokud účelová funkce má tvar reálného funkcionálu, u kterého nezávislé proměnné jsou reálné funkce, reálné proměnné, nejčastěji funkcí času.“ (xi.)

Pro řešení optimalizačních úloh máme několik metod.

1. analytické metody
2. numerické metody
3. grafické metody
4. experimentální metody.

ad 1.) Analytické metody

- v těchto metodách se využívají výsledky klasických i neklasických metod variačního a diferenciálního počtu, tedy z optimalizované funkce se díky jim vypočítají přímo extrémy

ad 2.) Numerické metody

- v těchto metodách se používá ke zlepšení řešení každá předcházející informace jako iterační proces
- pracuje se s konkrétními čísly
- dle konkrétních výstupních dat se určí, které vstupní informace je třeba pozměnit či zcela změnit, aby bylo dosaženo lepších výsledků

ad 3.) Grafické metody

- dané optimalizační úlohy se podle zadaných hodnot (podmínek) graficky znázorní, dle toho se pak vyvodí umístění extrémů
- nejčastější používaná metoda v následujících příkladech

ad 4.) Experimentální metody

- jsou založeny na tom, že se provádějí pokusy s reálnými objekty, přičemž se využívají data z předchozích pokusů, tím je umožněno dosáhnout lepšího výsledku

„Úlohou lineárního programování nazveme optimalizační úlohu, kterou lze napsat ve tvaru maximalizovat nebo minimalizovat lineární funkci

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

při čemž při volbě $x_j, 1 \leq j \leq n$, jsme omezeni m podmínkami ve tvaru lineárních rovnic nebo nerovností

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij} \quad x_j \geq b_i, \qquad\qquad i \in I_1 \subset \{1, \dots, m\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad x_j = b_i, \qquad\qquad i \in \{1, \dots, m\} - I_1$$

a podmínkami nezápornosti některých proměnných

$$x_j \geq 0, \qquad\qquad j \in J_1 \subset \{1, \dots, n\}.$$“ (iv.)

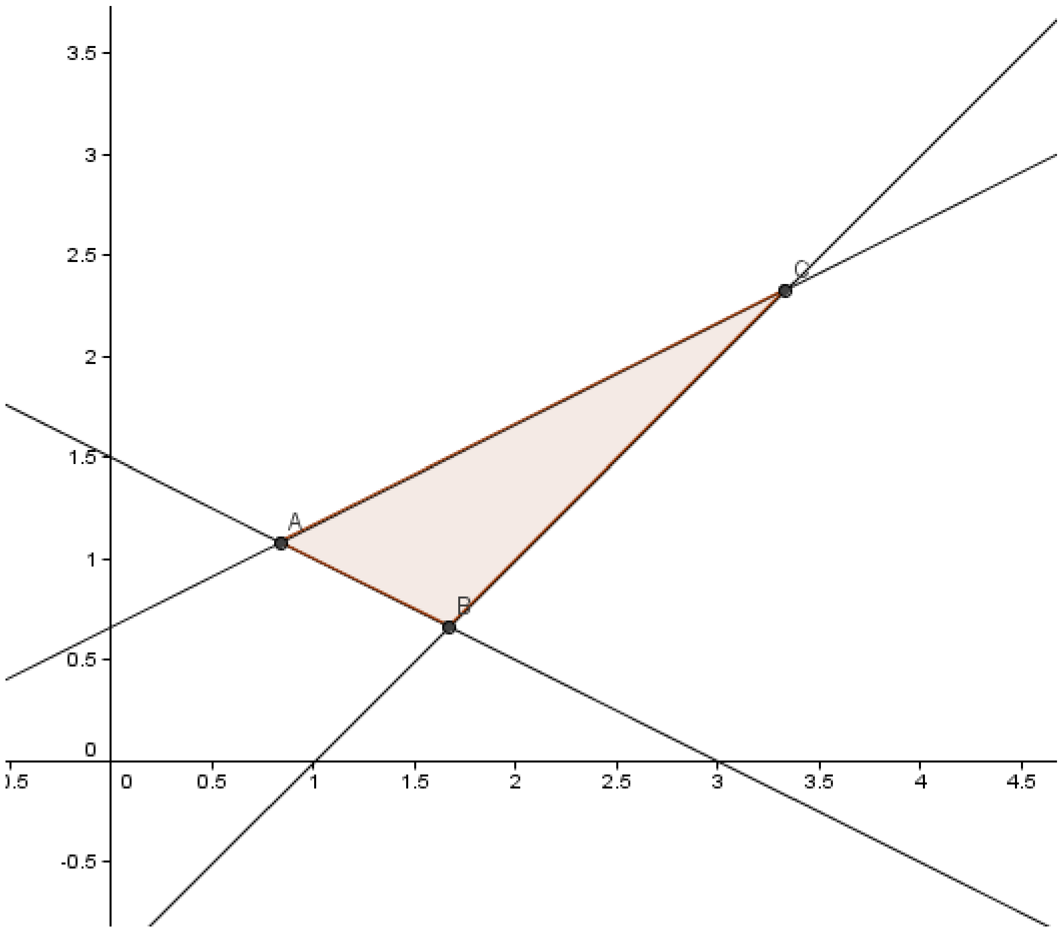
Při řešení optimalizačních úloh jde především o existenci řešení a nalezení postupu, jak určit optimální řešení pro dané zadání. Na lehčích příkladech lze ukázat, že jedním z řešení je n-úhelních, jehož jeden z vrcholů je hledané maximum nebo minimum funkce. Můžeme mít však zadanou takovou lineární soustavu nerovností, že hledaná množina je prázdná jako u příkladu č. 2. Posledním typem řešení, které nám může vyjít je pak množina, která je neohraničená, a tedy výsledkem je nekonečně mnoho optimálních řešení jako u příkladu č. 3.

Příklad č. 1:

Najděte minimum funkce $f(x, y) = x + y$ na množině nezáporných čísel za omezujících podmínek:

1. $x + 2y \geq 3$
2. $-3x + 6y \leq 4$
3. $x - y \geq 1.$

Obr. č. 2: Grafické řešení k příkladu č. 1 v programu GeoGebra



Díky programu GeoGebra víme souřadnice vrcholů A, B a C. Teď musíme spočítat jejich funkční hodnotu. Tu zjistíme tak, že souřadnice vrcholů vložíme do zadaného funkčního předpisu $f(x, y) = x + y$.

$$A = [0{,}83; 1{,}08] -> f_1(x, y) = 0{,}83 + 1{,}08 = 1{,}91$$

$$B = [1{,}67; 0{,}67] -> f_1(x, y) = 1{,}67 + 0{,}67 = 2{,}34$$

$$C = [3{,}33; 2{,}33] -> f_1(x, y) = 3{,}33 + 2{,}33 = 5{,}66$$

Odpověď:

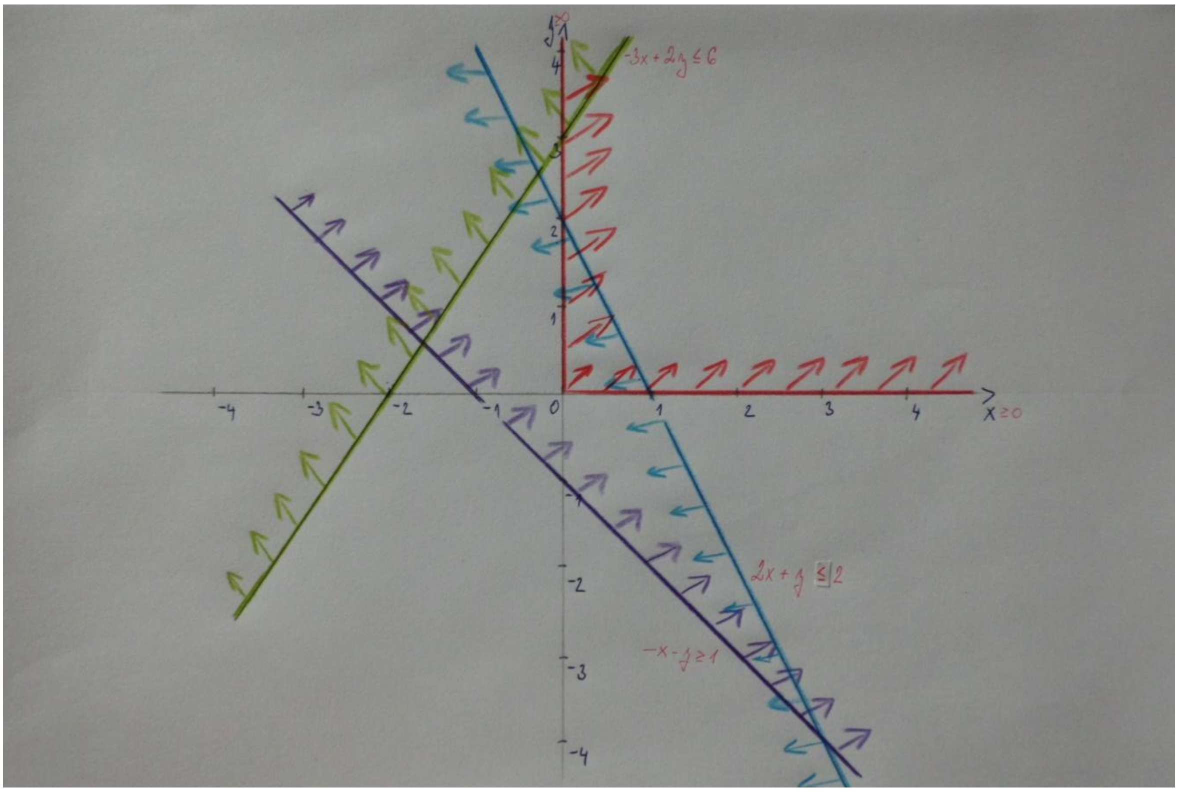
Minimum zadané funkce nastane, když $x = 0{,}83$ a $y = 1{,}08$.

Příklad č. 2:

Najděte maximum funkce $f(x, y) = 2x - y$ za omezujících podmínek:

1. $2x + y \leq 2$
2. $-3x + 2y \leq 6$
3. $-x - y \geq 1$
4. $x \geq 0$
5. $y \geq 0$

Obr. č. 3: Ruční grafické řešení k příkladu č. 2



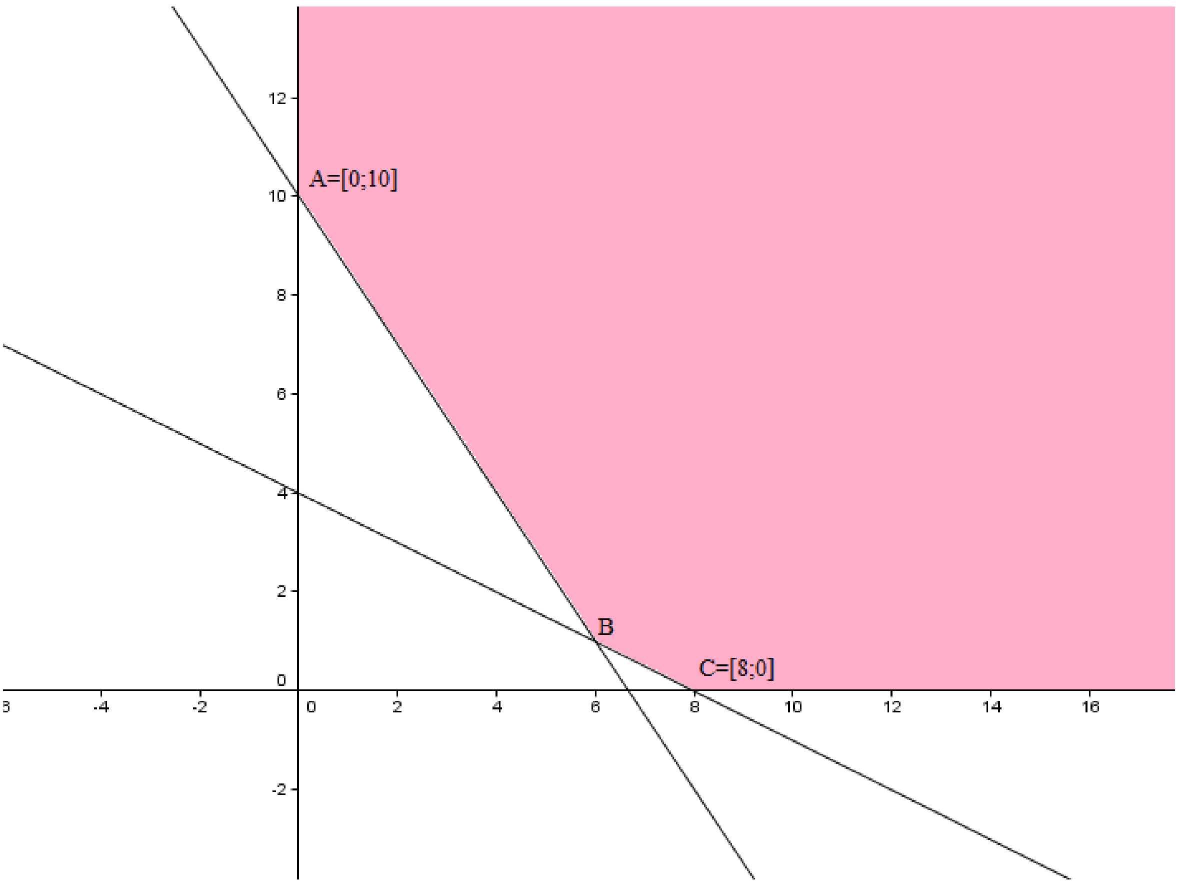
Na obrázku můžeme vidět, že řešením je prázdná množina a tedy funkce nenabývá svého minima ani maxima.

Příklad č. 3:

Najděte maximum a minimum funkce $f(x,y) = x - 2y$ za omezujících podmínek:

1. $x + 2y \geq 8$
2. $3x + 2y \geq 20$
3. $x \geq 0$
4. $y \geq 0.$

Obr. č. 4: Grafické řešení k příkladu č. 3 v programu GeoGebra



Z grafu můžeme rovnou vyčíst souřadnice bodů A a C. Souřadnice bodu B musíme dopočítat. Bod B dopočteme jako průsečík dvou přímek o dvou neznámých a to přímek:

$$x + 2y = 8$$
$$\underline{3x + 2y = 20}$$

Pro výpočet použijeme dosazovací sčítací a to tak, že k druhému řádku přičteme mínus trojnásobek řádku prvního:

$$x + 2y = 8 \,/\cdot(-3)$$
$$\underline{3x + 2y = 20}$$
$$-3x - 6y = -24$$
$$\underline{3x + 2y = 20}$$
$$-4y = -4$$
$$y = 1$$

X-vou souřadnici dopočítáme tak, že dosadíme do jedné rovnice ze zadání y-vou hodnotu, kterou jsme právě vypočetli:

$$x + 2y = 8$$
$$x + 2 \cdot 1 = 8$$
$$x = 6$$

Souřadnice bodu B jsou $[6; 1]$. Nyní vypočteme funkční hodnotu v těchto bodech. A to tak, že souřadnice bodů postupně dosadíme do funkčního předpisu $f(x,y) = x - 2y$:

$$A = [0; 10] \;\; -> \;\; f_1(x,y) = \; 0 - 2 \cdot 10 = -20$$
$$B = [6; 1] \;\; -> \;\; f_2(x,y) = \; 6 - 2 \cdot 1 = 4$$
$$C = [8; 0] \;\; -> \;\; f_3(x,y) = \; 8 - 2 \cdot 0 = 8$$

Nyní jsme dopočetli funkční hodnoty v bodech, ale nemůžeme o nich říct, zda jsou minimem nebo maximum. Řešením soustavy je totiž množina, která není ohraničená a linerání fce $f(x,y) = x - 2y$ na ní nenabývá konečného maxima ani minima.

Příklad č. 4:

Rozdělte číslo 16 na dva sčítance tak, aby jejich součin byl maximální.

Řešení:

Nejdříve si vytvoříme dvě rovnice, které utvoříme přesně tak, jak nám říká zadání:

$$x + y = 16 -> y = 16 - x$$
$$\underline{x \cdot y = max}$$
$$x \cdot (16 - x) = max$$

Nyní musíme najít extrém funkce. Ten najdeme tak, že určíme všechna x pro která je první derivace rovna nule:

$$f(x) = 16x - x^2$$
$$f'(x) = 16 - 2x$$
$$0 = 16 - 2x$$
$$2x = 16$$
$$x = 8$$

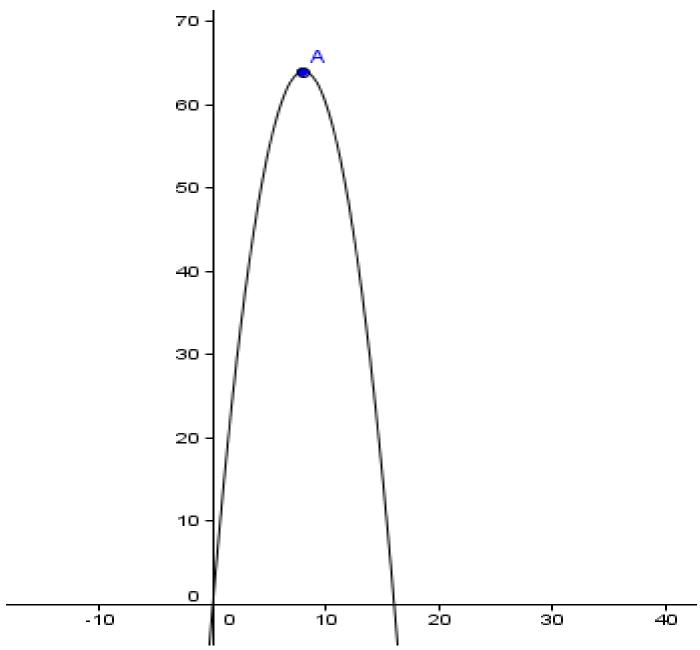
Tento postup řešení můžeme využít, protože se jedná o parabolu, která má pouze jeden extrém. Kdyby se nejednalo o parabolu, tak bychom museli vyšetřit chování funkce jak v pravém, tak i levém okolí bodu, abychom zjistili, zda se jedná o extrém nebo ne.

Grafické řešení nalezení extrému:

Nyní známe hodnoty x ve funkci, a tak můžeme dopočítat hodnotu y'. To uděláme tak, že dosadíme hodnoty x do funkce $y = 16x - x^2$:

$$f(x) = 16x - x^2$$
$$f(x) = 16 \cdot 8 - 8^2$$
$$f(x) = 64$$

Obr. č. 5: Extrém funkce



Teď dopočteme hodnotu y pro náš příklad (tedy druhé číslo sčítance):

$$y = 16 - x$$
$$y = 16 - 8$$
$$y = 8$$

Odpověď:

Dvě hledaná čísla, jejich součet má být roven 16 a součin má být maximální, jsou obě rovna 8.

Příklad č. 5:

Určete rozměry obdélníka, jehož obvod je $26\,cm$ tak, aby jeho obsah byl maximální.

Řešení:

pro obdélník platí: $o = 2(a + b)$

$$S = a \cdot b$$

tyto vzorce nyní aplikujeme na náš příklad:

$$26 = 2(a + b)$$
$$13 = a + b$$
$$b = 13 - a$$

stejným způsobem upravíme vzorec pro obsah – o tom víme, že má být maximální:

$$max = a \cdot b$$

$$f(a, b) = a \cdot b$$
$$f(a, b) = a \cdot (13 - a)$$
$$f(a, b) = 13a - a^2$$

Nyní musíme najít extrém funkce. Ten najdeme tak, že určíme všechna x pro která je první derivace rovna nule:

$$f'(a,b) = 13 - 2a$$
$$0 = 13 - 2a$$
$$2a = 13$$
$$a = 6{,}5\ cm$$

Tento postup řešení můžeme využít, protože se jedná o parabolu, která má pouze jeden extrém. Kdyby se nejednalo o parabolu, tak bychom museli vyšetřit i okolí bodu, abychom zjistili, zda se jedná o extrém nebo ne.

Teď zbývá dopočítat pouze velikost strany b. Tu vypočítáme tak, že dosadíme do vzorce, který jsme si vypočetli o pár řádků výše.

$$b = 13 - a$$
$$b = 13 - 6{,}5$$
$$b = 6{,}5\ cm$$

Odpověď:

Obdélník bude mít rozměry $a = 6{,}5\ cm$ a $b = 6{,}5\ cm$.

Příklad č. 6:

Sprite z firem umístěných v Plzni, Klatovech a Sušici se vozí do Příbrami a Písku. Denně se z Plzně může dodat 23 palet se Spritem, z Klatov 37 palet a ze Sušice 27 palet. Denně je potřeba dodat 38 palet do Příbrami a 49 palet do Písku. Náklady na dopravu jedné přepravy (v eurech) z firem do místa prodeje jsou v tabulce. Sestavte takový plán rozvozu Sprite, aby přepravní náklady byly co nejnižší.

firma / města	Příbram	Písek
Plzeň	5	3
Klatovy	3	7
Sušice	4	1

Řešení:

Musíme najít minimum funkce, která popisuje náklady na rozvoz palet. Nejprve znázorníme tabulku s údaji o paletách dovezených z jednotlivých podniků do jednotlivých cílových měst. Přepravky převezené z Plzně do Příbrami označíme neznámou x, přepravky z Klatov také do Příbrami neznámou y, ostatní hodnoty dopočítáme podle údajů ze zadání:

firma / města	Příbram	Písek
Plzeň	x	$23 - x$
Klatovy	y	$37 - y$
Sušice	$38 - x - y$	$49 - (23 - x) - (37 - y) = x + y - 11$

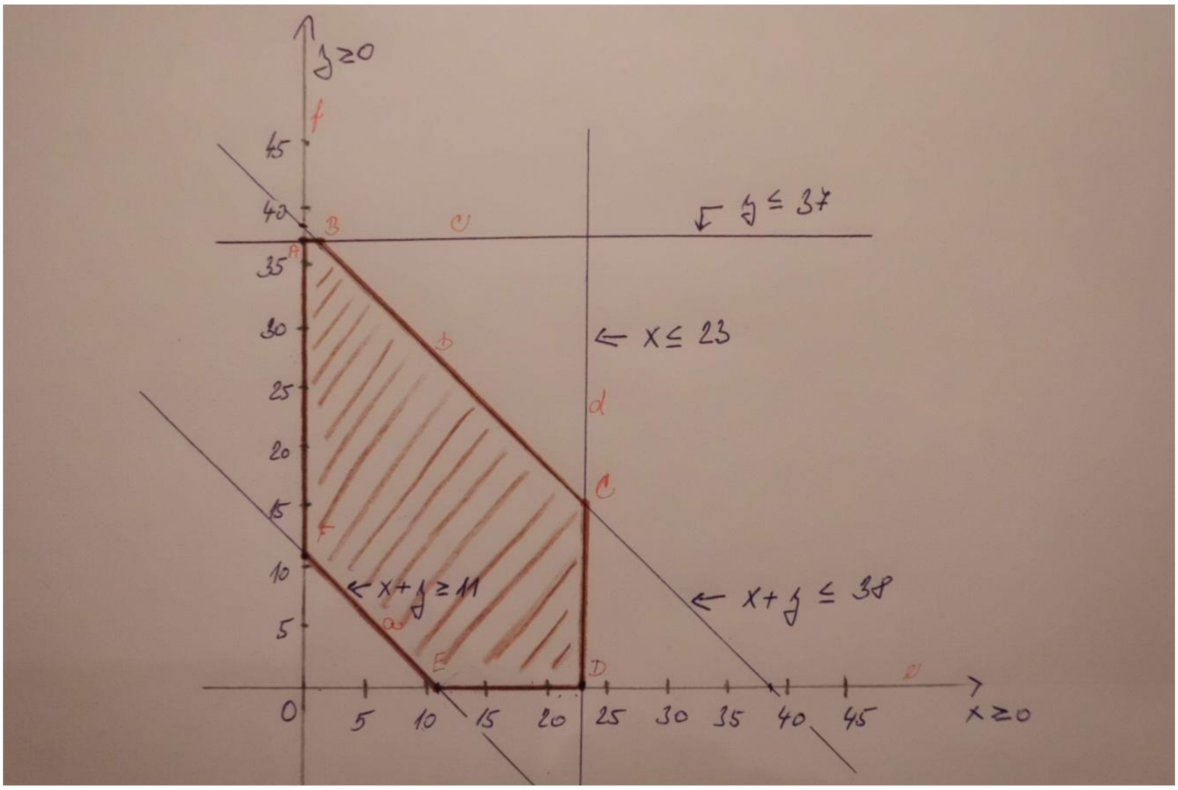
Z tabulek dopočítáme funkci, jejíž minimum hledáme: $f(x, y) = 5x + 3 \cdot (23 - x) + 3y + 7 \cdot (37 - y) + 4 \cdot (38 - x - y) + 1 \cdot (x + y - 11) = 5x + 69 - 3x + 3y + 295 - 7y + 152 - 4x - 4y + x + y - 11$

$$f(x, y) = -x - 7y + 505.$$

Dále si určíme podmínky, které nám plynou z druhé tabulky:

1. $x \geq 0$
2. $y \geq 0$
3. $x \leq 23$
4. $y \leq 37$
5. $x + y \geq 11$
6. $x + y \leq 38$

Obr. č. 6: Ruční řešení k příkladu č. 6



Nyní vypočítáme hodnoty vrcholů bodů A, B, C, D, E a F, abychom dále mohli zjistit funkční hodnotu v daných vrcholech. Hodnoty vrcholů vypočítáme jako průsečík dvou přímek. Nejprve začneme lehčími body, které vidíme ihned z grafu. V našem případě jsou to body:

$$A = [0; 37] \; -> f_1(x, y) = -0 - 7 \cdot 37 + 505 = 246$$

$$D = [23; 0] \; -> f_2(x, y) = -23 - 7 \cdot 0 + 505 = 482$$

$$E = [11; 0] \; -> f_3(x, y) = -11 - 7 \cdot 0 + 505 = 494$$

$$F = [0; 11] \; -> f_4(x, y) = -0 - 7 \cdot 11 + 505 = 428$$

Zbylé dva body musíme dopočítat. Bod B dopočítáme jako průsečík dvou přímek o dvou neznámých a to přímek b a c:

$$b: \; x + y = 38$$
$$\underline{c: \qquad y = 37}$$

Vzhledem k tomu, že už známe hodnotu y-ové souřadnice, použijeme k řešení této soustavy metodu dosazovací:

$$b:\ \ x + y = 38$$
$$\underline{c:\qquad\ y = 37}$$
$$x + 37 = 38$$
$$x = 1$$

Funkční hodnota pak bodu B je:

$$B = [1; 37]\ \ -> f_5(x, y) = -1 - 7 \cdot 37 + 505 = 245.$$

Nyní nám zbývá dopočítat souřadnice posledního vrcholu a to vrcholu C. Bod C dopočítáme taktéž jako průsečík dvou přímek o dvou neznámých a to přímek b a d:

$$b:\ \ x + y = 38$$
$$\underline{c:\qquad\ x = 23}$$

Vzhledem k tomu, že už známe hodnotu x-ové souřadnice, použijeme k řešení této soustavy metodu dosazovací:

$$b:\ \ x + y = 38$$
$$\underline{c:\qquad\ x = 23}$$
$$23 + y = 38$$
$$y = 15$$

Funkční hodnota pak bodu C je:

$$C = [23; 15]\ \ -> f_6(x, y) = -23 - 7 \cdot 15 + 505 = 377.$$

V dané úloze hledáme minimum funkce, proto řešení této slovní úlohy je to bod B, který má nejmenší funkční hodnotu.

Abychom dostali konečné řešení, dopočteme tabulku s neznámými:

firma / města	Příbram	Písek
Plzeň	1	22
Klatovy	37	0
Sušice	0	27

Výsledkem tedy je, že z firmy z Plzně se do Příbrami přepraví 1 paleta, do Písku 22 palet. Z firmy z Klatov bude do Příbrami přepraveno 37 palet a do Písku nebude přepravena žádná paleta. Z poslední firmy v Sušicích nebude přepravena žádná paleta do Příbrami, ale do Písku doveze 27 palet.

Příklad č. 7:

Pole A a B je třeba osít určitým množství krmné směsi tak, aby byly splněny tři živinové požadavky R, S a T a aby směs byla co nejlevnější. Údaje potřebné k výpočtu jsou v tabulce.

	obsah živin v 1 kg surovin			
	R	S	T	cena za 1 kg
A	$75\ g$	$80\ g$	$400\ g$	20 €
B	$40\ g$	$300\ g$	$150\ g$	12 €
požadavek na obsah živin	$1050\ g$	$1400\ g$	$1900g$	

Řešení:

Naším úkolem je zjistit minimum dané funkce, která tentokráte popisuje náklady na směs za určitých živinových požadavků. Nejdříve si zavedeme tabulku s neznámými x a y, kde x je množství krmné směsi A a y je množství krmné směsi B.

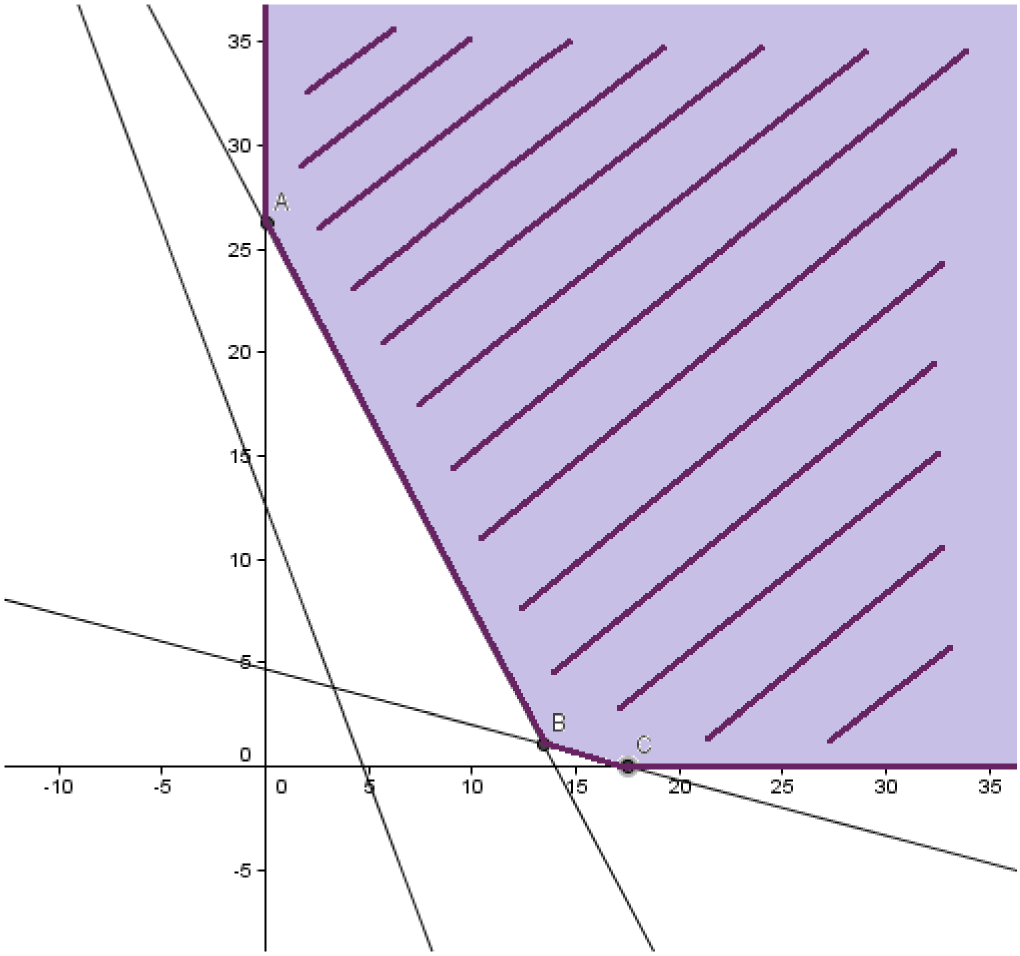
	R	S	T	
A	$75\ x$	$80\ x$	$400\ x$	20 €
B	$40\ y$	$300\ y$	$150\ y$	12 €
	$1050\ g$	$1400\ g$	$1900\ g$	

Nyní už z tabulky můžeme vyčíst podmínky:

1. $x \geq 0$
2. $y \geq 0$
3. $75x + 40y \geq 1050$
4. $80x + 300y \geq 1400$
5. $400x + 150y \geq 1900$

Funkce, jejichž minimum hledáme, utvoříme tak, že náklady za první směs vynásobíme s množstvím této směsi a přičteme k tomu násobek nákladů za druhou směs s počtem množství této směsi a odečteme od toho náklady za brambory a náklady za olej. Funkční předpis tedy je: $f(x, y) = 20x + 12y$.

Obr. č. 7: Řešení úlohy č. 7 v programu GeoGebra



Bod A dopočteme jako průsečík dvou přímek o dvou neznámých a to přímek:

$$x = 0$$
$$\underline{75x + 40y = 1050}$$

K řešení této soustavy použijeme dosazovací metodu. Vzhledem k tomu, že už máme v první rovnici rovnou vyjádřenou hodnotu x-ové souřadnice, tak ji dosadíme za x do druhé rovnice:

$$x = 0$$
$$\underline{75x + 40y = 1050}$$
$$75 \cdot 0 + 40y = 1050$$
$$y \doteq 26{,}25$$

Nyní, když už známe souřadnice bodu A, můžeme vypočítat funkční hodnotu tohoto bodu:

$$A = [0; 26{,}25] \; {->} \; f_1(x,y) = 20 \cdot 0 + 12 \cdot 26{,}25 = 315 \text{ €}.$$

Bod B dopočteme jako průsečík dvou přímek též o dvou neznámých a to přímek:

$$75x + 40y = 1050$$
$$\underline{80x + 300y = 1400}$$

Nejprve si rovnice převedeme na základní tvar:

$$15x + 8y = 210$$
$$\underline{4x + 15y = 70}$$

Danou lineární soustavu o dvou neznámých budeme řešit dosazovací metodou. Z první rovnice si vyjádříme hodnotu x-ové souřadnice a dosadíme ji to druhé rovnice:

$$15x + 8y = 210 \; {->} \; x = \frac{210 - 8y}{15}$$
$$\underline{4x + 15y = 70}$$
$$4 \cdot \frac{210 - 8y}{15} + 15y = 70$$
$$\frac{4 \cdot (210 - 8y)}{15} + 15y = 70 \; / \cdot 15$$
$$840 - 32y + 225 = 1050$$
$$193y = 210$$
$$y \doteq 1{,}09$$

Teď, když známe y-ovou souřadnici, můžeme dopočítat hodnot x. To provedeme tak, že vypočtenou hodnotu y-ové souřadnice dosadíme do připravené rovnice:

$$x = \frac{210 - 8y}{15}$$

$$x = \frac{210 - 8 \cdot 1{,}09}{15}$$

$$x \doteq 13{,}42$$

Nyní, když už známe souřadnice bodu B, můžeme vypočítat funkční hodnotu tohoto bodu:

$$B = [13{,}42; 1{,}09] \; -> \; f_2(x, y) = 20 \cdot 13{,}42 + 12 \cdot 1{,}09 = 281{,}48\text{ €}.$$

Bod C dopočteme jako průsečík dvou přímek o dvou neznámých a to přímek:

$$y = 0$$

$$\underline{80x + 300y = 1400}$$

K řešení této soustavy použijeme dosazovací metodu. Vzhledem k tomu, že už máme v první rovnici rovnou vyjádřenou hodnotu y-ové souřadnice, tak ji dosadíme za y do druhé rovnice:

$$y = 0$$

$$\underline{80x + 300y = 1400}$$

$$80x + 40 \cdot 0 = 1400$$

$$x = 17{,}5$$

Nyní, když už známe souřadnice bodu C, můžeme vypočítat funkční hodnotu tohoto bodu:

$$C = [17{,}5; 0] \; -> f_1(x, y) = 20 \cdot 17{,}5 + 12 \cdot 0 = 350\text{ €}.$$

Díky těmto výpočtům jsme zjistili, že hledaným výsledkem je hodnota bodu B, protože jsme hledali minimum funkce.

Odpověď:

Nejlevnější směs bude, když se namíchá $13{,}42\ kg$ ze suroviny A a $1{,}09\ kg$ ze suroviny B.

Příklad č. 8:

Z barytu a cementu chceme vyrábět barytové desky a tvárnice. Na $1\,000$ desek spotřebujeme $5\ t$ cementu a $1\ t$ barytu, na $1\,000$ tvárnic $2\ t$ cementu a $2\ t$ barytu. Nákupní cena cementu je $1\,000\ Kč$ za $1\ t$, nákupní cena barytu je $6\,000\ Kč$ za $1\ t$. Pro výrobu máme k dispozici $45\ t$ cementu a $20\ t$ barytu. Barytové desky budeme prodávat po $16\ Kč$ za kus a tvárnice po $17\ Kč$ za kus. Odběr na trhu je omezený – prodáváme nejvíc $8\,000\ ks$ desek a $9\,000\ ks$ tvárnic. Kapacita výroby je také omezená, můžeme vyrobit nejvíce $12\,000$ desek a tvárnic dohromady. Za těchto podmínek máme navrhnout plán tak, aby zisk byl co největší.

Řešení:

Naším úkolem je zjistit maximum dané funkce, která popisuje zisk za barytové desky a tvárnice.

Nejprve si vypíšeme ze zadání, co víme. Jako neznámou x si označíme barytové desky, protože chceme zjistit, kolik jich budeme vyrábět. Stejně tak budeme pokračovat s tvárnicemi s rozdílem toho, že je označíme jako neznámou y.

desky … $x\ ks$
tvárnice … $y\ ks$

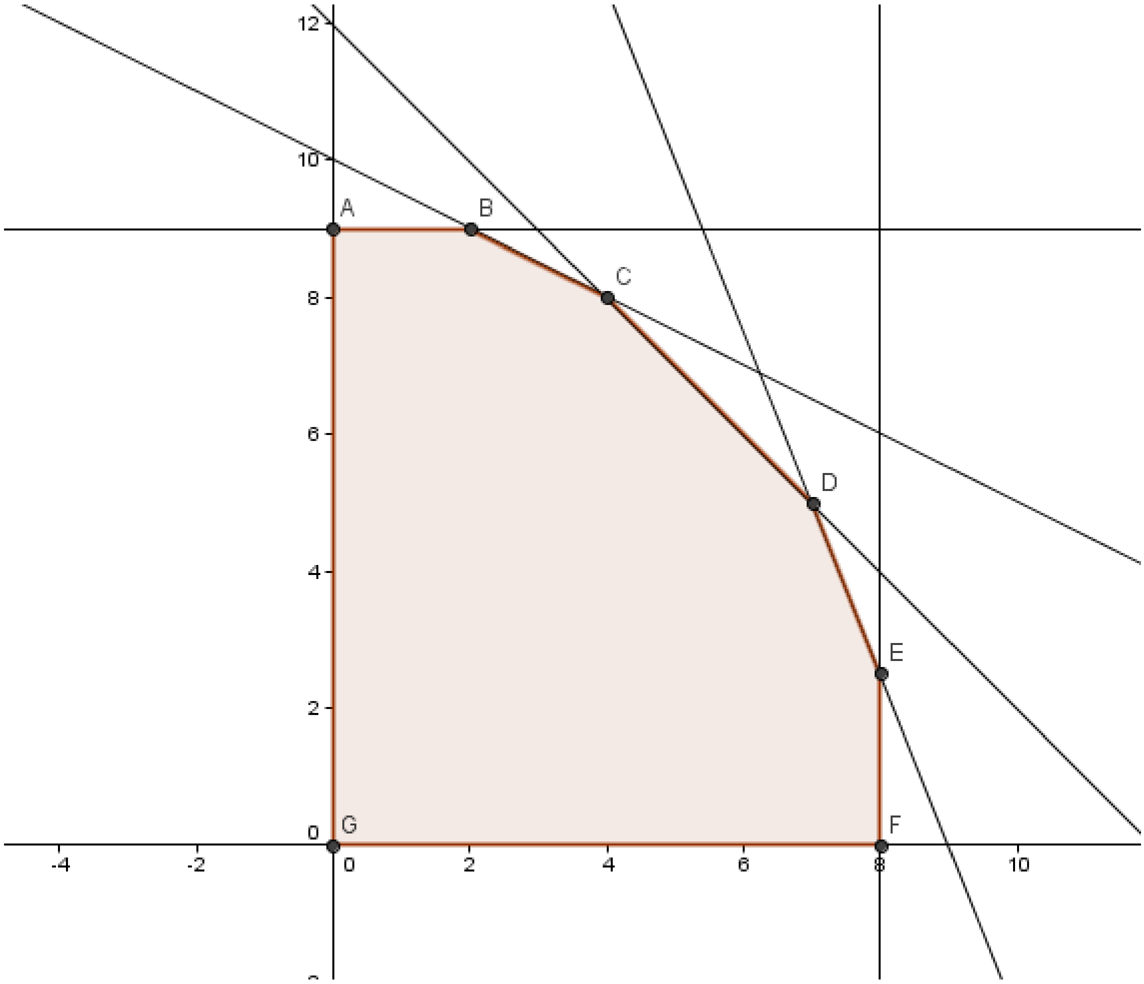
<u>Podmínky:</u>

1. $x \geq 0$
2. $y \geq 0$
3. $x \leq 8$
4. $y \leq 9$
5. $x + y \leq 12$
6. $5x + 2y \leq 45$
7. $x + 2y \leq 20$

Nyní utvoříme funkční předpis. Začneme tím, že si zjistíme čistý zisk za desky a tvárnice. Na $1\,000\ ks$ desek spotřebujeme $5\ t$ cementu $(=\ 5\,000\ Kč)$ a barytu $1\ t\ (=\ 6\,000\ Kč)$. Celková výroba desek stojí $11\,000\ Kč$. Desky prodáváme za $16\,000\ Kč$. Zisk za desky je $5\,000\ Kč$. Stejným způsobem dopočteme zisk za tvárnice. Na $1\,000\ ks$ tvárnic spotřebujeme $2\ t$ cementu ($= 2\ 000\ Kč$) a $2\ t$ barytu ($= 12\ 000\ Kč$). Celková výroba tvárnic stojí $12\ 000\ Kč$. Tvárnice prodáváme $17\ 000\ Kč$. Zisk za desky je $3\ 000\ Kč$. Funkční předpis tedy je:

$$f(x, y) = 5\ 000x + 3\ 000y$$

Obr. č. 8: Řešení úlohy č. 8 v programu GeoGebra



Díky programu GeoGebra, kam jsme zadali naše podmínky, ihned víme souřadnice bodů, které jsou:

$$A = [0; 9]$$
$$B = [2; 9]$$
$$C = [4; 8]$$
$$D = [7; 5]$$
$$E = [8; 2{,}9]$$

$$D = [8; 0]$$
$$E = [0; 0].$$

Nyní dopočteme funkční hodnotu těchto bodů, abychom zjistili maximální zisk:

$$A = [0; 9] -> f_1(x, y) = 5\,000 \cdot 0 + 3\,000 \cdot 9 = 27\,000\ Kč$$

$$B = [2; 9] -> f_2(x, y) = 5\,000 \cdot 2 + 3\,000 \cdot 9 = 37\,000\ Kč$$

$$C = [4; 8] -> f_3(x, y) = 5\,000 \cdot 4 + 3\,000 \cdot 8 = 44\,000\ Kč$$

$$D = [7; 5] -> f_4(x, y) = 5\,000 \cdot 7 + 3\,000 \cdot 5 = 50\,000\ Kč$$

$$E = [8; 2{,}5] -> f_5(x, y) = 5\,000 \cdot 8 + 3\,000 \cdot 2{,}5 = 47\,500\ Kč$$

$$F = [8; 0] \rightarrow f_4(x, y) = 5\,000 \cdot 8 + 3\,000 \cdot 0 = 40\,000\ Kč$$

$$G = [0; 0] -> f_4(x, y) = 5\,000 \cdot 0 + 3\,000 \cdot 0 = 0\ Kč.$$

Odpověď:

Maximálních zisků lze dosáhnout při výrobě.

Příklad č. 9:

Jedna družstevní provozovna dodává na trh dva typy výrobků, které označíme A, B. Společné opracování polotovarů pro A i B se provádí v dílně, která má kapacitu 60 ks/h. V další dílně je výrobek A dvakrát déle zpracováván než výrobek B přitom opracuje za hodinu nejvýše 90 ks výrobků B. Každou hodinu lze expedovat nejvýše 50 ks výrobků A a nejvýše 40 ks výrobků B. Při kterém rozdělení výroby mezi produkty A, B (v ks/h) se dosáhne maximálního zisku, je-li na každém kusu A zisk 100 €, na každém kusu B zisk 120 €?

Řešení:

Naším úkolem je zjistit maximum dané funkce, která popisuje zisk za výrobky vyrábějící se v dílnách A, B.

Nejprve si vypíšeme ze zadání, co víme. Jako neznámou x si označíme výrobky z dílny A, protože chceme zjistit, kolik kusů se tam bude vyrábět. Jako neznámou y si označíme počet výrobků vyrobených v dílně B.

dílna A … $x\ ks$

dílna B … $y\ ks$

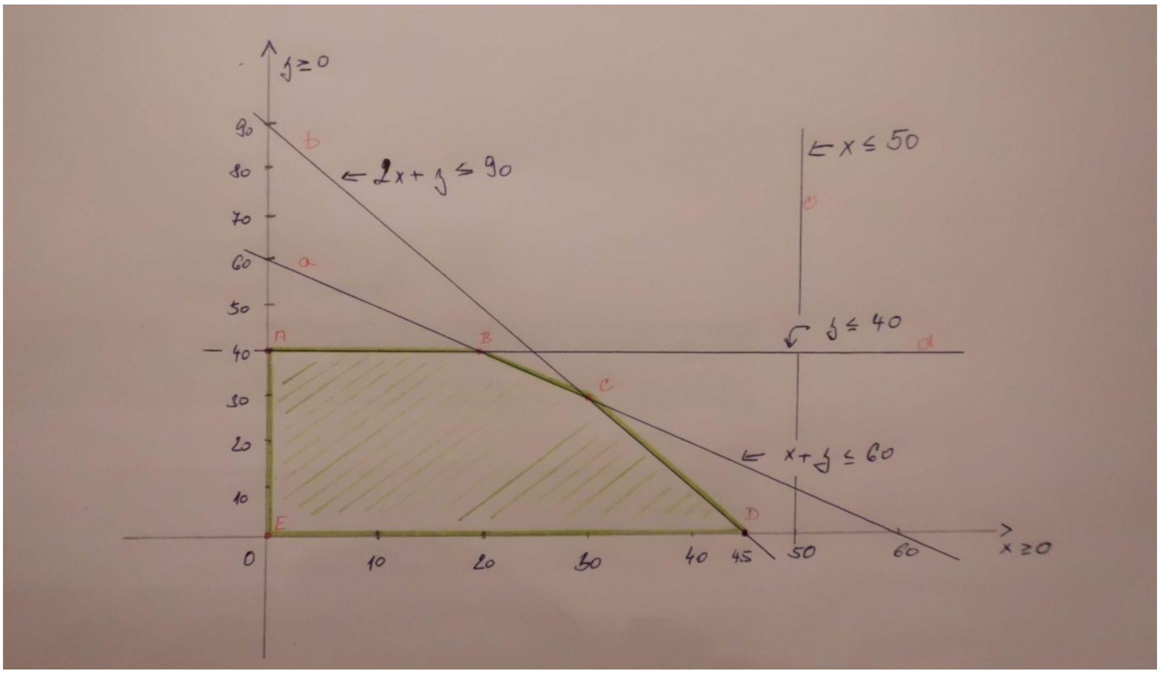
<u>Podmínky:</u>

1. $x \geq 0$
2. $y \geq 0$
3. $x \leq 50$
4. $y \leq 40$
5. $x + y \leq 60$
6. $2x + y \leq 90$

Nyní utvoříme funkční předpis. Funkce, jejichž maximum hledáme, utvoříme tak, že zisk za výrobek vyrobený v dílně A vynásobíme počtem vyrobených kusů v této dílně a přičteme k tomu zisk za výrobek vyrobený v dílně B vynásobený počtem vyrobených kusů v této dílně. Funkční předpis tedy je:

$$f(x, y) = 100x + 120y$$

Obr. č. 9: Ruční řešení příkladu č. 9



Nyní vypočteme funkční hodnotu těchto bodů. Nejprve začneme lehčími body, které vidíme ihned z grafu. V našem případě:

$$A = [0; 40] -> f_1(x, y) = 100 \cdot 0 + 120 \cdot 40 = 4\,800\ €$$

$$D = [45; 0] -> f_2(x, y) = 100 \cdot 45 + 120 \cdot 0 = 4\,500\ €$$

$$E = [0; 0] -> f_3(x, y) = 100 \cdot 0 + 120 \cdot 0 = 0\ €.$$

Zbylé dva body musíme dopočítat. Bod B dopočítáme jako průsečík dvou přímek o dvou neznámých a to přímek a a d:

$$\begin{array}{rl} a: & x + y = 60 \\ \underline{d:} & \underline{\quad\;\; y = 40} \end{array}$$

Vzhledem k tomu, že už máme zadanou hodnotu y-vou, tak použijeme pro výpočet dosazovací metodu:

$$\begin{array}{rl} a: & x + y = 60 \\ \underline{d:} & \underline{\quad\;\; y = 40} \\ & x + 40 = 60 \\ & \quad\;\; x = 20 \end{array}$$

Funkční hodnota pak bodu B je:

$$B = [20; 40] \rightarrow f_4(x, y) = 100 \cdot 20 + 120 \cdot 40 = 6\,800\ €.$$

Nyní dopočteme poslední bod - bod C. Dopočteme ho jako průsečík dvou přímek o dvou neznámých a to přímek a a b:

$$\begin{array}{rl} a: & x + y = 60 \\ \underline{b:} & \underline{2x + y = 90} \end{array}$$

Pro výpočet použijeme dosazovací metodu a to tak, že z první rovnice si vyjádříme například hodnotu x-ové souřadnice a dosadíme za ni do druhé rovnice:

$$a: \;\; x + y = 60 \;\; -> x = 60 - y$$

$$\begin{aligned} b: \quad 2 \cdot (60 - y) + y &= 90 \\ 120 - 2y + y &= 90 \\ -y &= -30 \\ y &= 30 \end{aligned}$$

X-ovou souřadnici dopočítáme tak, že dosadíme do rovnice a y-ovou hodnotu, kterou jsme právě vypočetli:

$$\begin{aligned} x + 30 &= 60 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Funkční hodnota pak bodu C je:

$$C = [30; 30] -> f_5(x, y) = 100 \cdot 30 + 120 \cdot 30 = 6\,600\text{ €}.$$

Odpověď:

Maximální zisk nastane, když se vyrobí v dílně A 20 výrobků a v dílně B 40 výrobků.

Příklad č. 10:

Firma chce prodávat brambůrky za 60 $kč/k$g a hranolky za 30 $kč/kg$. Na výrobu 1 kg brambůrků je třeba 2 kg brambor a 0,4 l oleje. Na výrobu 1 kg hranolků se spotřebuje 1,5 kg brambor a 0,2 l oleje. Firma má nakoupeno 100 kg brambor, jejichž cena je 10,40 $kč/kg$ a 16 l oleje za 40 $kč/l$. Navrhněte plán, aby zisk byl maximální, přičemž berte v úvahu pouze hodnoty odpovídající celým kilogramům bramůrků a hranolek.

Řešení:

brambůrky … x kg

hranolky … y kg

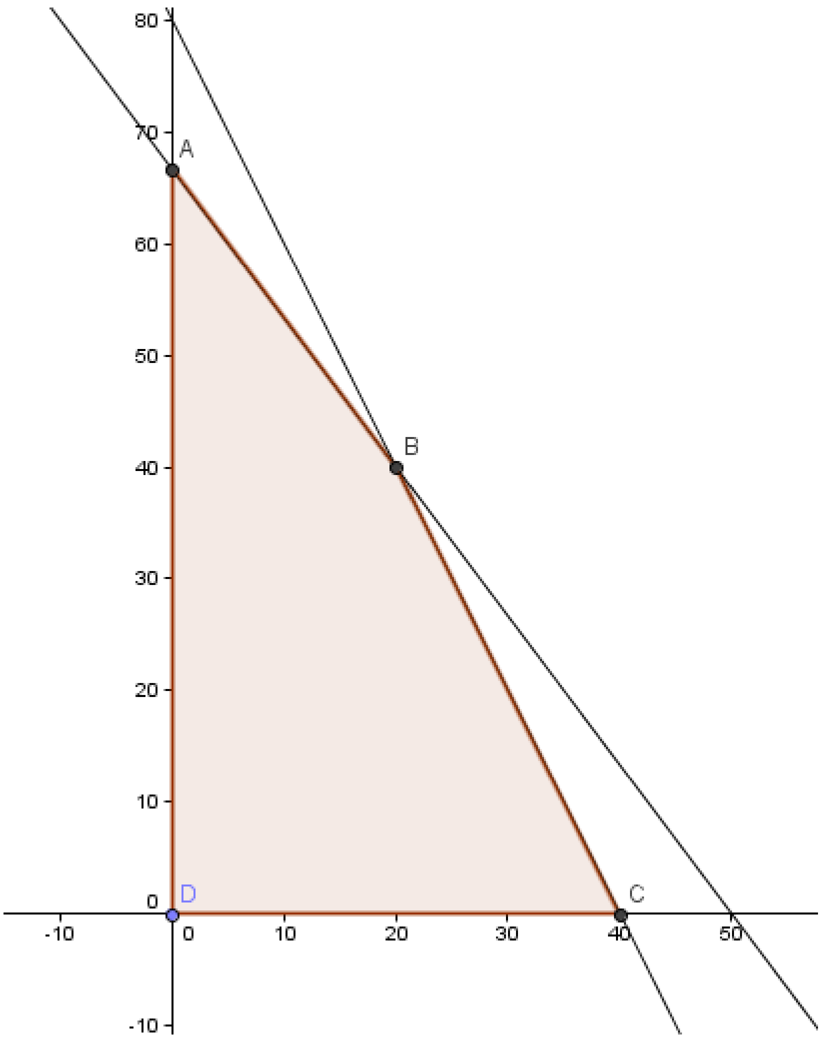
podmínky:

1. $x \geq 0$
2. $y \geq 0$
3. $2x + 1{,}5y \leq 100$
4. $0{,}4x + 0{,}2y \leq 16$

Funkce, jejíž maximum hledáme, utvoříme od součtu zisku za brambůrky $60x$ a hranolky $40y$ odečteme náklady na pořízení brambor a oleje. Funkční předpis tedy je:

$$f(x, y) = 60x + 30y - 100 \cdot 10{,}4 - 16 \cdot 40 = 60x + 30y - 1\,680.$$

Obr. č. 10: Řešení příkladu č. 10 v programu GeoGebra



Kdybychom graf rýsovali v ruce, tak hodnoty A, B, C, D bychom museli sami dopočítat. Díky programu GeoGebra souřadnice už víme a zbývá nám dopočítat funkční hodnotu těchto bodů:

$A = [0; 66{,}67]\ \ -> \ f_1(x, y) = \ 60 \cdot 0 + 30 \cdot 66{,}67 - 1\,680 = 320{,}10\ kč$

$B = [20; 40]\ \ -> \ f_2(x, y) = 60 \cdot 20 + 30 \cdot 40 - 1\,680 = 720\ kč$

$C = [40; 0] -> \ f_3(x, y) = \ 60 \cdot 40 + 30 \cdot 0 - 1\,680 = 720\ kč$

$D = [0; 0]\ \ -> \ f_4(x, y) = \ 60 \cdot 0 + 30 \cdot 0 - 1\,680 = 0\ kč$.

Vzhledem k tomu, že nám vyšly dva vrcholy se stejnou funkční hodnotou, můžeme předpokládat, že řešením bude hraniční přímka, na které leží právě body A a B. Pro ověření si vezmeme libovolný bod z této hrany a vypočítáme jeho funkční hodnotu:

$E = [28; 24]\ \ -> \ f_5(x, y) = \ 60 \cdot 28 + 30 \cdot 24 - 1\,680 = 720\ kč$.

Jak můžeme vidět, funkční hodnota nám opět vyšla stejně. Náš předpoklad se potvrdil. Maximální hodotu tedy dávají všechny body jedné celé hrany mnohoúhelníku při dosazení do předpisu $f(x, y)$.

Odpověď:

Řešením je tato množina bodů $\{[40; 0], [39; 2], [38; 4], \dots, [21; 38], [20; 40]\}$.

Příklad č. 11:

Martin, Jakub a Lukáš si koupili kolo 30 km vzdáleném městě. Kluci žijí v kraji, kde se vůbec nekrade, a tedy se nemusí bát, kolo odložit a odejít. Proto vymysleli, že vždycky na kole pojede jeden, po nějakém úseku z kola sleze, nechá ho tam a vyrazí sám pěšky. Zbylí dva kluci, až k němu dorazí, tak jeden sedne na kolo, popojede zas kousek, sleze z něho a opět kolo nechá na cestě a dál se vydá pěšky, tímto způsobem se chystají dojet až domů. S využitím tabulky rychlosti navrhněte co nejrychlejší organizaci cesty.

Rychlost pohybu	Pěšky	Na kole
Martin	$10\ km/h$	$40\ km/h$
Jakub	$6\ km/h$	$12\ km/h$
Lukáš	$4\ km/h$	$28\ km/h$

Řešení:

V této úloze není důležité pořadí, kdo kdy pojede na kole ani na počet úseků, na které se rozdělí trasa. Základním činitelem je délka dráhy projeté na kole a pěšky. Dále ze zadání víme, že všichni chlapci musí přejít či přejet $30\ km$. Také kolo musí urazit danou vzdálenost, ať už na něm jede kdokoliv. Při nejoptimálnější přepravě musí přijít všichni kluci do cíle na jednou.

Zápis ze zadání:

Tabulku, kdo kdy šel pěšky a kdo jel na kole, si zvolíme sami, např.:

	$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{30-x-y}$
Martin	pěšky	pěšky	kolo
Jakub	pěšky	kolo	pěšky
Lukáš	kolo	pěšky	pěšky

- první úsek si označíme jako x
- druhý úsek si označíme jako y
- třetí úsek je celková dráha mínus první dva úseky tedy $30 - x - y$
- časy, co všichni tři chlapci strávili na cestě, se musí rovnat, tedy:
  $t_M = t_j = t_L$

Čas Martina strávený na cestě vyjádříme pomocí upraveného fyzikálního vzorečku pro rychlost. Martin šel první dva úseky pěšky, proto první část rovnice bude součet těchto dvou úseků vydělený rychlostí jeho chůze. Druhá část rovnice se týká Martinovo jízdy na kole. Martin jel na kole třetí úsek. Jeho dráhu jsme si označili jako $30 - x - y$ a tu musíme vydělit rychlostí, kterou Martin na kole jel. Rovnice tedy bude vypadat následovně:

$$t_M \dots \frac{x+y}{10} + \frac{30-x-y}{40}$$

Stejně budeme pokračovat u Jakuba a Lukáše. Jakub šel první a třetí úsek pěšky, proto první část rovnice bude součet těchto dvou úseků vydělený rychlostí jeho chůze.

Druhá část rovnice se týká Jakubovo jízdy na kole. Jakub jel na kole druhý úsek. Jeho dráhu jsme si označili jako y a tu musíme vydělit rychlostí, kterou Jakub na kole jel. Rovnice tedy bude vypadat následovně:

$$t_J \dots \frac{x+30-x-y}{6}+\frac{y}{12}=\frac{30-y}{6}+\frac{y}{12}$$

Poslední rovnici skýtá Lukáš. Lukáš šel druhý a třetí úsek pěšky, proto první část rovnice bude součet těchto dvou úseků vydělený rychlostí jeho chůze. Druhá část rovnice se týká Lukášovo jízdy na kole. Lukáš jel na kole první úsek. Jeho dráhu jsme si označili jako x a tu musíme vydělit rychlostí, kterou Lukáš na kole jel. Rovnice tedy bude vypadat následovně:

$$t_L \dots \frac{y+30-x-y}{4}+\frac{x}{28}=\frac{30-x}{4}+\frac{x}{28.}$$

Jak už jsme se o pár řádků výš zmínili, tak časy chlapců se rovnají. Dle upraveného fyzikálního vzorečku pro rychlost se dá čas vyjádřit jako dráhu vydělenou rychlostí na dané dráze. Proto platí:

$$t_M = t_j = t_L$$

$$\frac{x+y}{10}+\frac{30-x-y}{40}=\frac{30-y}{6}+\frac{y}{12}=\frac{30-x}{4}+\frac{x}{28}$$

Nyní se pustíme do výpočtu první rovnice o dvou neznámých:

$$\frac{x+y}{10}+\frac{30-x-y}{40}=\frac{30-y}{6}+\frac{y}{12} \;/\cdot 240$$

$$24\cdot(x+y)+6\cdot(30-x-y)=40\cdot(30-y)+20y$$

$$24x+24y+180-6x-6y=1200-40y+20y$$

$$18x+38y-1020=0 \;/:2$$

$$9x+19y-510=0$$

Výpočet druhé rovnice o dvou neznámých:

$$\frac{30-y}{6}+\frac{y}{12}=\frac{30-x}{4}+\frac{x}{28} \;/\cdot 84$$

$$14\cdot(30-y)+7y=3x+21\cdot(30-x)$$

$$420-14y+7y=3x+630-21x$$

$$18x-7y-210=0$$

Nyní, když máme obě rovnice, můžeme vypočítat soustavu rovnic o dvou neznámých:

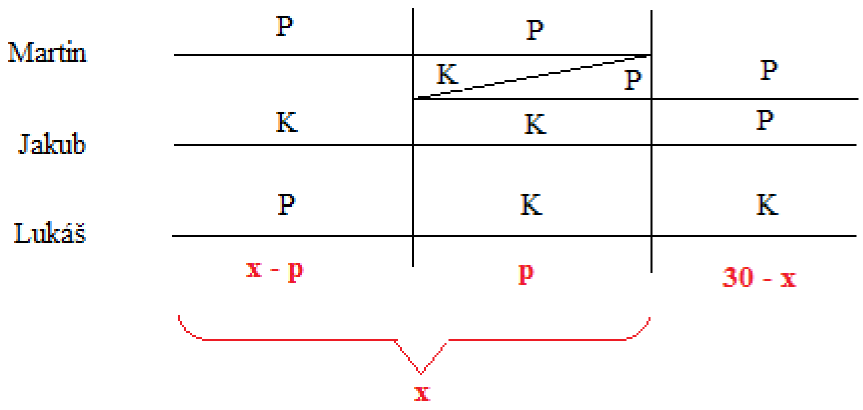
$$9x + 19y - 510 = 0 \ /\cdot(-2)$$
$$\underline{18x - 7y - 210 = 0}$$
$$-18x - 38y - 1020 = 0$$
$$\underline{18x - 7y - 210 = 0}$$
$$-45y = -810$$
$$y = 18$$

$$9x + 19 \cdot 18 - 510 = 0$$

$$9x = 168$$
$$x = \frac{168}{9} = 18\frac{2}{3}$$

Když teď provedeme součet úseků x a y, zjistíme, že dráha je delší než celková dráha, kterou jsme měli zadanou. To ale není možné. Toto je další možné řešení: Martin jede část úseku na kole zpátky a tento úsek bude muset jít pak pěšky. Nechť jede zpět o $p\ km$.

Obr. č. 11: Navržení nejoptimálnějšího řešení



Nyní provedeme stejnou interpretaci tabulky do rovnic jako u minulé tabulky.

Martin: $\frac{x-p}{10} + \frac{2p}{10} + \frac{30-x}{10} + \frac{p}{40} = \frac{30+p}{10} + \frac{P}{40}$

Jakub: $\frac{x-p}{12} + \frac{p}{12} + \frac{300-x}{6} = \frac{x}{12} + \frac{30-x}{6}$

Lukáš: $\frac{x-p}{4}+\frac{p}{28}+\frac{30-x}{28}=\frac{x-p}{4}+\frac{30-x+p}{28}$

Časy chlapců se stále musí rovnat. A tedy platí:

$$t_M = t_j = t_L$$

$$\frac{30+p}{10}+\frac{p}{40}=\frac{x}{12}+\frac{30-y}{6}=\frac{x-p}{4}+\frac{30-x+p}{28}$$

Nyní se pustíme do výpočtu první rovnice o dvou neznámých:

$$\frac{x}{12}+\frac{30-y}{6}=\frac{x-p}{4}+\frac{30-x+p}{28}\ /\cdot 84$$

$$7x+14\cdot(30-x)=21\cdot(x-p)+3\cdot(30-x-p)$$

$$7x+420-14x=21x-21p+90-3x+3p$$

$$25x-18p-330=0$$

Výpočet druhé rovnice o dvou neznámých:

$$\frac{x-p}{4}+\frac{30-x+p}{28}=\frac{30+p}{10}+\frac{p}{40}\ /\cdot 1120$$

$$280\cdot(x-p)+40\cdot(30-x+p)=112\cdot(30+p)+28p$$

$$280x-280p+1200-40x+40p=3360+112p+28p$$

$$240x-380p-2160=0$$

$$12x-19p-108=0$$

Nyní, když máme obě rovnice, můžeme vypočítat soustavu rovnic o dvou neznámých:

$$25x-18p-330=0$$

$$\underline{12x-19p-108=0} \quad -> x=\frac{19p+108}{12}$$

$$25\cdot\frac{19p+108}{12}-18p-330=0\ /\cdot 12$$

$$25\cdot(19p+108)-2216p-3960=0$$

$$475p+2700-216p-3960=0$$

$$259p-1260=0$$

$$p \doteq 4{,}86\ km$$

$$x = \frac{19p + 108}{12}$$

$$x = \frac{19 \cdot 4{,}86 + 108}{12}$$

$$x \doteq 16{,}7\ km$$

Nyní už víme vzdálenosti všech tří úseků. První úsek je dlouhý $11{,}84\ km$, druhý úsek $4{,}86\ km$ a třetí úsek je dlouhý $13{,}3\ km$. Poslední věcí, kterou musíme dopočítat je čas, který kluci strávili na cestě. Pro výpočet si můžeme zvolit čas kteréhokoliv chlapce, protože jejich výsledné časy jsou totožné.

$$t = \frac{x}{12} + \frac{30 - x}{6} = \frac{16{,}7}{12} + \frac{30 - 16{,}7}{6} = \frac{43{,}3}{12} \doteq 3{,}61h$$

Odpověď:

Nejkratší čas, který kluci stráví cestou je 3,61h. Nejoptimálnější řešení je navrženo v tabulce výše (Obr. č. 13).

Příklad č. 12:

Uvažujeme hypotetický příklad na výrobu alkoholického nápoje ze tří výchozích surovin A, B, C. Nápoj musí vyhovovat normativním podmínkám na obsah alkoholu, aromatických látek a cukru a použití látek A, B, C je vázáno dalšími podmínkami viz tabulka:

Obsah/látka	A	B	C	Min	Max
Alkohol	9%	14%	0%	7%	1 %
Aromat. látky	1 g/l	8 g/l	0 g/l	3 g/l	-
Cukr	3 g/l	7 g/l	20 g/l	3 g/l	6 g/l
A	1	0	0	40%	-
B	0	1	0	-	50%
C	0	0	1	-	3 %
Cena (€)	5	2	0,25		

Připravte 2l nápoje tak, aby byl co nejlevnější a uveďte recept (množství látek A, B, C), který použijete k přípravě.

Řešení:

látka A ... x

látka B ... y

látka C ... $2 - x - y$

Podmínky:

1. $x \geq 0$
2. $y \geq 0$
3. $x + y \leq 2$

Nyní utvoříme funkční předpis. Funkci, jejíž minimum hledáme, utvoříme tak, že náklady za danou látku vynásobíme s množstvím této látky:

$$f(x, y) = 5x + 2y + \frac{1}{4} \cdot (2 - x - y)$$

Cena za 2 l nápoje je:

$$\frac{1}{2} + \frac{19}{4}x + \frac{7}{4}y = 0$$

Alkohol:

1) $0{,}09x + 0{,}14y\ l$ ve 2 l nápoje

   percentuální zastoupení alkoholu je … $\frac{0{,}09x+0{,}14y}{2} \cdot 100\%$

2) min 7% => ve 2 l je alkoholu $0{,}07 \cdot 2 = 0{,}14\ l$

   max 12% => ve 2 l je alkoholu $0{,}12 \cdot 2 = 0{,}24\ l$

   podmínky alkoholu:

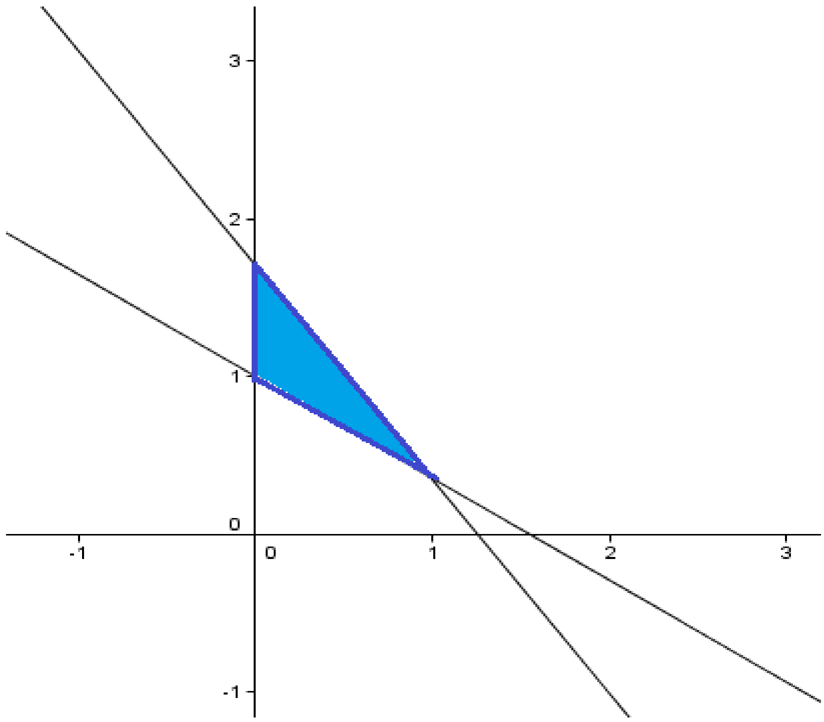
   $0{,}14 \leq 0{,}09 + 0{,}14y \leq 0{,}24\ l$

   $14 \leq 9 + 14y \leq 24$

   a) $y \geq 1 - \frac{9}{14}x$

   b) $y \leq \frac{12}{7} - \frac{9}{14}x$

Obr. č. 12: Zobrazení podmínek alkoholu



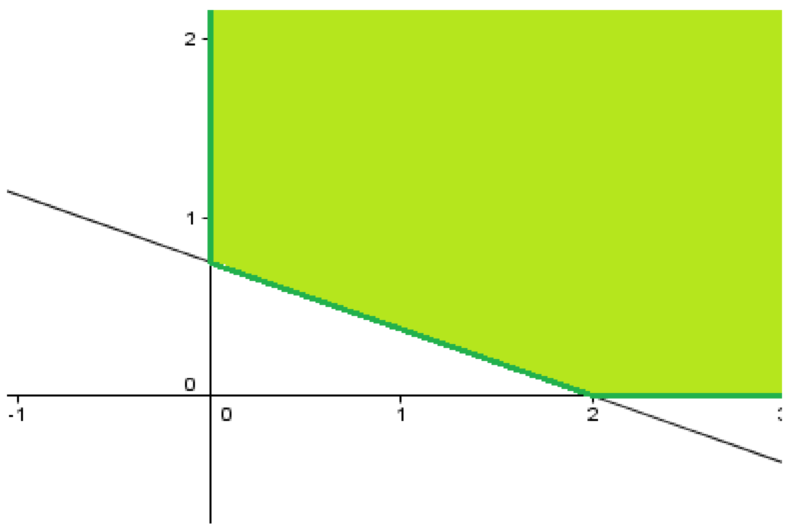
Arom. látky:

1) $3x + 8y\ g$ ve 2 l nápoje => $\frac{3x+8y}{2}\ g$ v 1 l nápoje

2) 3 g v 1 l => min 6 g ve 2 l

podmínka arom. látek: $3x + 8y \geq 6$

Obr. č. 13: Zobrazení podmínek arom. látek



Cukr:

1) $3x + 7y + 20 \cdot (2 - x - y)\ g$ cukru ve 2 l

$\frac{3x+7y+20\cdot(2-x-y)}{2}\ g$ cukru v 1 l

2) min 3 g v 1 l => min 6 g ve 2 l

max 6 g v 1 l => max 12 g ve 2l

podmínky cukru:

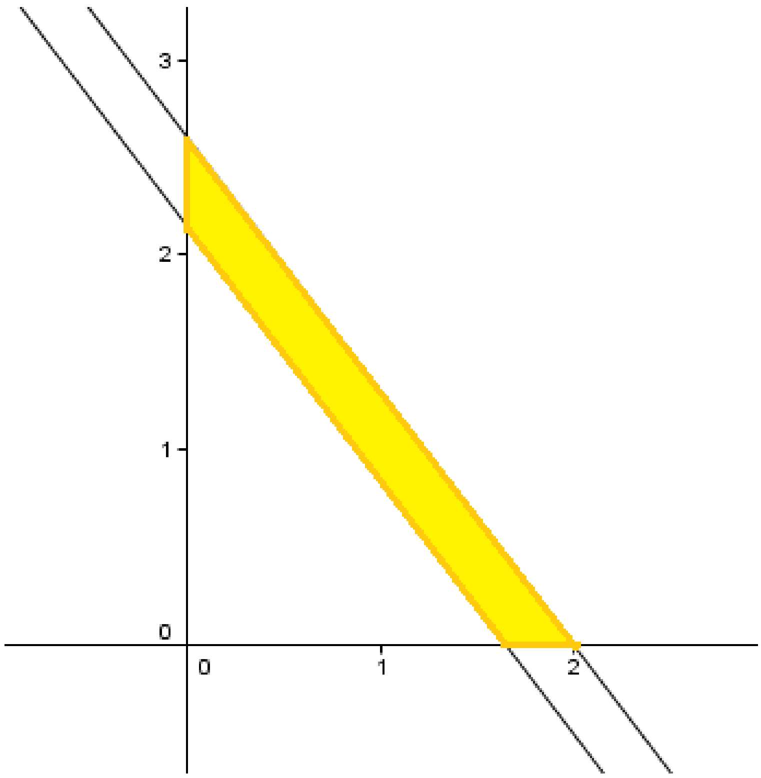
$$6 \leq 3x + 7y + 20 \cdot (2 - x - y) \leq 12$$

$$6 \leq 40 - 17x - 13y + 20 \cdot (2 - x - y) \leq 12$$

a) $17x + 13y \leq 34$

b) $17x + 13y \geq 28$

Obr. č. 14: Zobrazení podmínek cukru



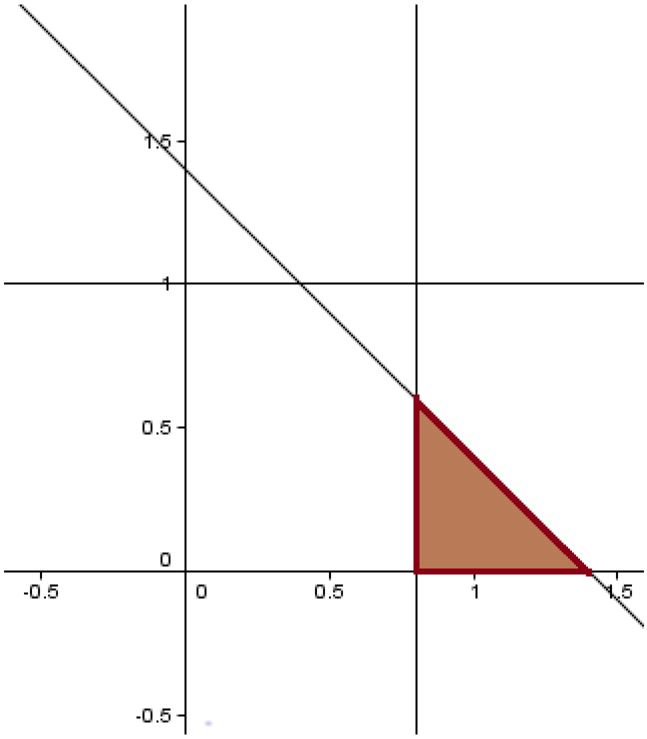
<u>Zastoupení surovin:</u>

A mim 40% => ve 2 l je A … $0{,}42 \cdot 2 = 0{,}8\ l$ => $x \geq 0{,}8$

B max 50% => ve 2 l je B … $0{,}5 \cdot 2 = 1\ l$ => $y \leq 1$

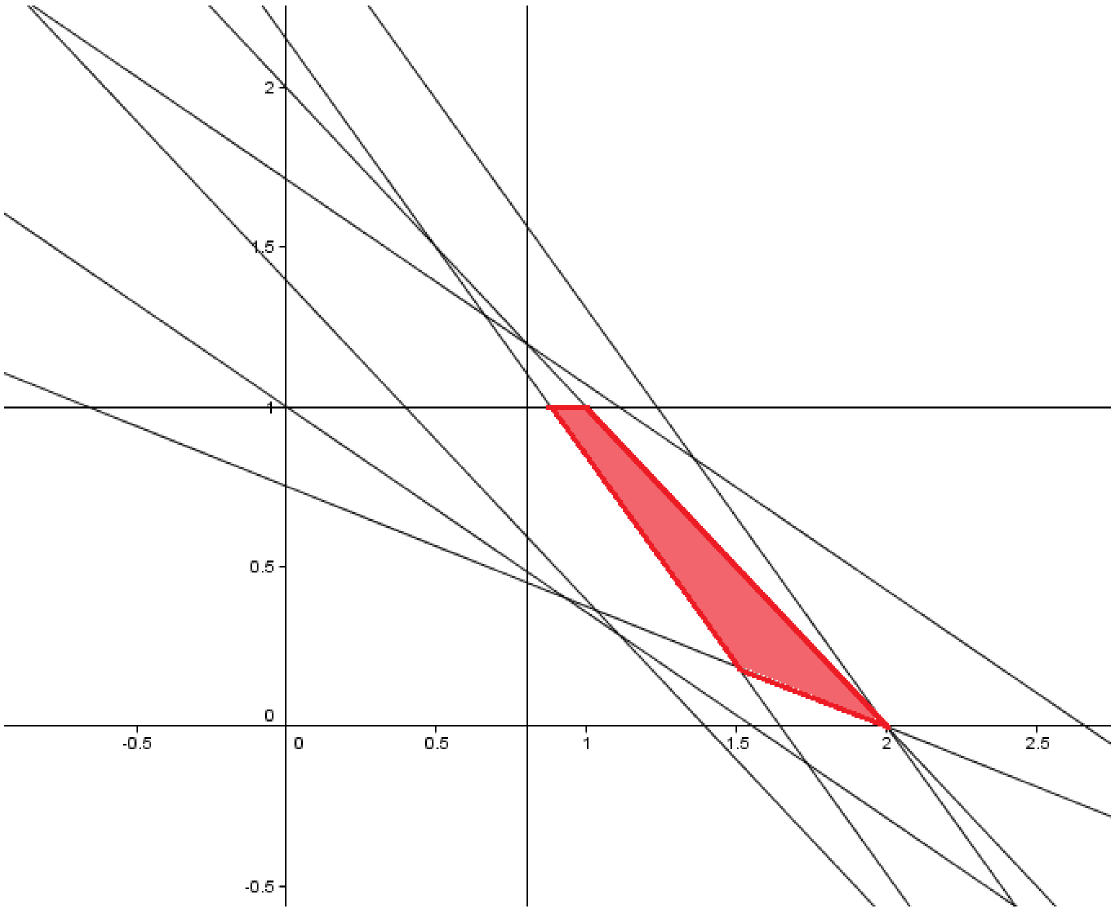
C max 30% => ve 2 l je C … $0{,}3 \cdot 2 = 0{,}6\ l$ => $2 - x - y \leq 0{,}6$

Obr. č. 15: Zobrazení podmínek zastoupení surovin



Nyní je na řadě celkové grafické řešení. Protože zadaných podmínek je hodně, budeme grafické řešení provádět v programu GeoGebra. Díky ní budeme znát ihned hodnoty vrcholů.

Obr. č. 16: Celkové zobrazení všech podmínek



$A = [0{,}8; 1] \text{–>} \ f_1(x, y) = 5 \cdot 0{,}8 + 2 \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (2 - 0{,}8 - 1) \doteq 6{,}1$

$B = [1; 1] \rightarrow \ f_2(x, y) = 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (2 - 1 - 1) = 7$

$C = [2; 0] \text{–>} \ f_3(x, y) = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (2 — 2 - 0) = 10$

$D = [1{,}51; 19] \text{–>} \ f_4(x, y) = 5 \cdot 1{,}51 + 2 \cdot 19 + \frac{1}{4} \cdot (2 - 1{,}51 - 19) \doteq 40{,}9$

Vzhledem k tomu, že hledáme minimum funkce, tak řešením této slovní úlohy je bod A, který má nejmenší funkční hodnotu.

Teď musíme ještě dopočítat přesný recept našeho nápoje a jeho cenu:

látka A … $x = 0{,}8$

látka B … $y = 1$

látka C … $2 - x - y = 0{,}2$

Cena za 2 l nápoje je:

$$\frac{1}{2} + \frac{19}{4}x + \frac{7}{4}y = \frac{1}{2} + \frac{19}{4} \cdot 0{,}8 + \frac{7}{4} \cdot 1 = 6{,}05$$

Odpověď:

Nás nápoj bude nejlevnější, pokud bude z receptu, kde je $0{,}8\ l$ látky A, $1\ l$ látky B, $0{,}2\ l$ látky C a bude stát $6{,}05\ K$č.

4 ZÁVĚR

Ve své diplomové práci jsem se zabývala slovními úlohami, které jsou neodmyslitelnou součástí každodenního života. V popředí mého zájmu ležel specifické typ úloh, a to optimalizační úlohy, tvořící jakousi složitější nadstavbu matematiky základních a středních škol. Jelikož při řešení těchto druhů úloh nelze jednoduše uplatnit konkrétní a vždy fungující řešitelský přístup, snažila jsem se danou látku zpracovat tou nejvhodnější formou, jakou může být čtenáři podána.

Pokud se podíváme na styl řešení příkladů, tak si můžeme všimnout jistých společných znaků. Prvotním znakem je rozbor (zápis) zadání, respektive přepsání reálného problému do matematického prostředí. V rozboru se utřídí zadané informace. Někdy má tento rozbor formu písemného projevu, jindy grafu. To záleží na řešiteli samotném, nebo na typu matematické úlohy. Následuje sestavení matematického problému ve formě rovnice, nerovnice či soustavy rovnic a po jejím vyřešení interpretace výsledku do reálného života. Součástí každé slovní úlohy je odpověď.

I přes některé nedostatky patří řešení slovních úloh všech druhů ke stěžejním matematickým schopnostem a dovednostem, které člověk reálně uplatňuje každý den.

Myslím si, že příklady a postupy jejich řešení, které zde prezentuji, jsou dostatečně jasně a logicky vysvětlené, aby se mohly v budoucnu stát oblíbeným doprovodným materiálem každého studenta matematiky.

5 SEZNAM OBRÁZKŮ

NÁZEV OBRÁZKU ČÍSLO STRÁNKY

6 SEZNAM LITERATURY

i. BUŘIL, Z. *Slovní úlohy v matematice*. 1. vyd. Brno: rektorát UJEP, 1985. 61 s. ISBN 55-032-85. (Buřil, 1985).

ii. BĚLOUN, František, et al. *Běloun : Sbírka úloh z matematiky pro základní školu*. 8. vydání. Praha 1 : Prometheus, 1998. 254 s. ISBN 80-7196-104-3.

iii. BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 3.vydání. Praha 1 : Prometheus, 2002. 631 s. ISBN 80-7196-140-X.

iv. DUPAČOVÁ, Jitka. *Lineární Programování*. první. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1982. ISBN 17-230-82.

v. ODVÁRKO, Oldřich, et al. *Metody řešení matematických úloh*. 1. vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1990. 264 s. ISBN 80-04-20434-1.

vi. VOJÁČEK, Jakub. Využití derivace - Optimalizační úlohy. [online]. 2010 [cit. 2012-05-15]. Dostupné z: http://maths.cz/clanky/vyuziti-derivace-optimalizacni-ulohy.htm.

vii. BLÁHOVÁ, P. *Slovní úlohy o pohybu, o směsích a o společné práci. Bakalářská práce*. Plzeň: 2010.

viii. KRIŽALKOVIČ a CUNINKA. Nerovnosti: IV. POUŽITIE NEROVNÍC V LINEÁRNOM PROGRAMOVÁNÍ. 1972, s. 250-261.

ix. CECHLÁROVÁ, Katarína. Matematické obzory 41/1994: Dve úlohy o optimálnej preprave. s. 57-62.

x. *Slovní úlohy řešené pomocí rovnic* [online]. 05.12.2005 [cit. 2009-11-03]. Dostupný z WWW: <http://webvyukacontent.olportal.cz/w-slovniUlohy-060103/Default.htm>.

xi. *Tvarová a rozměrová optimalizace* [online]. [cit. 2010-02-15]. Dostupný z WWW: <http://robot.vsb.cz/skripta/cad-iii/9-tvarova-a-rozmerova-optimalizace.html>.

xii. *použité materiály z předmětu ŘUZ3*

7 RESUMÉ

The topic of this dissertation originates in a teaching internship, which enabled some mathematical exercises from my bachelor thesis to be used in practice. I was presenting the class with more different ways of solving followed by active discussions, which enhanced independent thought of the pupils. Regarding this highly positive experience, I decided to take up the bachelor thesis and extend it by optimisation tasks.

These problems represent a specific type of tasks, forming a more difficult superstructure over mathematics at both primary and secondary schools. Since any particular ever-functioning way of solving is hardly applicable in these tasks, I tried to treat the topic as clearly and suitably for the reader as possible.

Examining the style of solving tasks, some common patters are noticeable. The primary pattern is the analysis of the assignment, or the transcription of a real problem into mathematical terms respectively. The analysis is to classify given information. It may be in a form of written minutes or a graph – that depends on solvers themselves or on the type of mathematical task. The analysis is followed by transforming of the mathematical problem into an equation, an inequation or a set of equations. After their solution, the result is interpreted into a real life. An answer is always a part of each mathematical problem.

Despite some imperfections, solving problems of all kinds belongs to fundamental mathematical skills, which are used by people in their everyday life.

I believe that problems and methods of solving presented in the dissertation are clearly and logically explained and as such they could become popular additional materials of every student of mathematics.