

Bakalářská práce

Modelování kmitání rotorů s pasivními hltiči kmitů

Vedoucí: Ing. Štěpán Dyk, Ph.D.

Konzultant: Ing. Jan Rendl, Ph.D.

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2023/2024

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **František BAREŠ**
Osobní číslo: **A21B0462P**
Studijní program: **B0715A270014 Počítačové modelování v mechanice**
Téma práce: **Modelování kmitání rotorů s pasivními hltiči kmitů**
Zadávací katedra: **Katedra mechaniky**

Zásady pro vypracování

- Úvod a analýza současného stavu problematiky.
- Implementace základních úloh, dílčí modely komponent rotorové soustavy.
- Aplikace na vybraný rotordynamický systém, implementace, analýza.
- Závěr, celkové zhodnocení práce.

Rozsah bakalářské práce: **20 – 40 stran A4**
Rozsah grafických prací:
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

1. M. Byrtus, M. Hajžman, V. Zeman: Dynamika rotujících soustav. Západočeská univerzita, Plzeň, 2010.
2. J. Slavík, V. Stejskal, V. Zeman: Základy dynamiky strojů. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997.
3. V. Zeman, Z. Hlaváč: Kmitání mechanických soustav. Západočeská univerzita, Plzeň, 2004.
4. E. Krämer: Dynamics of Rotors and Foundations. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1993.
5. R. Gasch, H. Prütznert.: Dynamika rotorů. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1980.

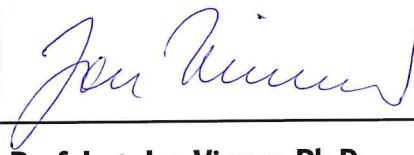
Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Štěpán Dyk, Ph.D.**
Nové technologie pro informační společnost

Konzultant bakalářské práce: **Ing. Jan Rendl, Ph.D.**
Nové technologie pro informační společnost

Datum zadání bakalářské práce: **11. října 2023**
Termín odevzdání bakalářské práce: **31. května 2024**



Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Prof. Ing. Jan Vimmr, Ph.D.
vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu, ze kterých jsem čerpal.

V Plzni dne 20.6. 2024

.....
podpis

Poděkování

Rád bych poděkoval Ing. Štěpánu Dykovi, Ph.D. za velké množství času věnované mé bakalářské práci a ochotu zodpovídat veškeré mé dotazy. Také bych chtěl poděkovat Ing. Janu Rendlovi, Ph.D. za kontrolu mé práce a časté konzultace.

Nemenší dík patří mé rodině za velkou podporu všemi možnými způsoby během mého studia.

Abstrakt

Tato bakalářská práce je zaměřena na optimalizaci parametrů pasivního hltiče kmitů, který má za úkol utlumit rezonanční oblast rotorové soustavy pro dané otáčky. Tohoto je dosaženo pomocí vytvoření výpočtového modelu uvažující nelineární hydrodynamické síly, které vznikají vlivem mazání v kluzném ložisku.

Druhá kapitola se zabývá základními principy optimalizace dynamických hltičů. Dále je zde uvedeno odvození vztahu vyjadřujícího hydrodynamické síly v kluzném ložisku. Ve třetí kapitole je ukázáno odvození pohybových rovnic pro Lavalův rotor a dalších modelů rotorové soustavy využívajících tohoto principu. Dále je zde uvedeno odvození vztahu pro výpočet amplitudové charakteristiky. Následně je uveden model rotorové soustavy se zakomponovanými nelineárními hydrodynamickými silami a nakonec je tento model linearizován. Ve čtvrté kapitole je uvedena aplikace pasivního hltiče na třech různých modelech rotorového systému, které se liší v určení dynamických koeficientů olejového filmu. V prvním případě jsou tyto koeficienty konstantní s odhadnutou hodnotou, ve druhém jsou tyto koeficienty vypočteny pomocí linearizace hydrodynamických sil. Na těchto modelech je provedena optimalizace dynamických parametrů hltiče. Poslední model uvažuje nelineární hydrodynamické síly.

Klíčová slova: Rotorová soustava, Lavalův rotor, rezonance, dynamický hltič, hydrodynamické síly, kluzné ložisko.

Abstract

This bachelor's thesis focuses on optimizing the parameters of a passive vibration damper designed to absorb the resonance area of a rotor system. This is achieved by creating a computational model that considers nonlinear hydrodynamic forces arising from lubrication in the plain journal bearing.

The second chapter deals with the basic principles of optimizing dynamic absorbers. It also derives the formula expressing hydrodynamic forces in the plain bearing. The third chapter shows the derivation of the equations of motion for the Laval rotor and other rotor system models using this principle. It also derives the formula for calculating the amplitude characteristic. Subsequently, a rotor system model incorporating nonlinear hydrodynamic forces is presented, and this model is finally linearized. The fourth chapter presents the application of the passive damper to three different rotor system models, which differ in determining the dynamic coefficients of the oil film. In the first case, these coefficients are constant with an estimated value, in the second, they are calculated by linearizing the hydrodynamic forces. The optimization of the dynamic parameters of the damper is performed on these models. The last model considers nonlinear hydrodynamic forces.

Keywords: Rotor system, Laval rotor, resonance, dynamic absorber, hydrodynamic forces, plain bearing.

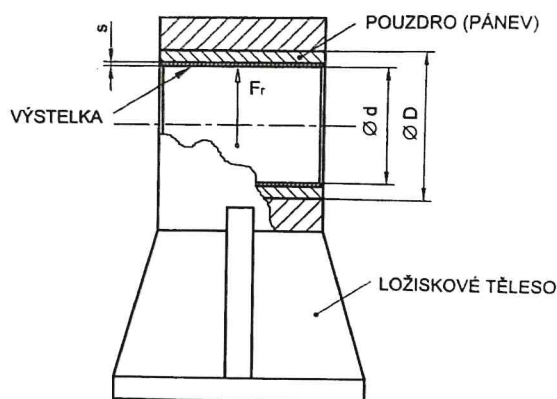
Obsah

| | |
|--|-----------|
| 1 Úvod | 6 |
| 1.1 Vliv mazání v kluzných ložiscích | 6 |
| 1.2 Definice a přehled pasivních hltičů | 8 |
| 1.3 Cíl této práce | 10 |
| 2 Základní teoretické poznatky | 11 |
| 2.1 Optimalizace parametrů pasivního hltiče | 11 |
| 2.2 Hydrodynamické síly v kluzném ložisku | 13 |
| 3 Dílčí modely rotorové soustavy | 16 |
| 3.1 Lavalův rotor | 16 |
| 3.2 Vliv ložiska s anizotropní tuhostí | 20 |
| 3.3 Amplituda ustálených kmitů | 22 |
| 3.4 Model poddajného ložiska a poddajné hřídele | 23 |
| 3.5 Působení nelineárních sil vlivem mazání | 25 |
| 3.6 Linearizace modelu s hydrodynamickými silami | 32 |
| 4 Aplikace hltiče na rotorový systém | 35 |
| 4.1 Model s konstantními tuhostmi olejového filmu | 35 |
| 4.2 Model s tuhostmi olejového filmu závislých na úhlové rychlosti | 39 |
| 4.3 Model se zakomponovanými nelineárními silami | 43 |
| 5 Závěr | 47 |
| Literatura | 48 |

1 Úvod

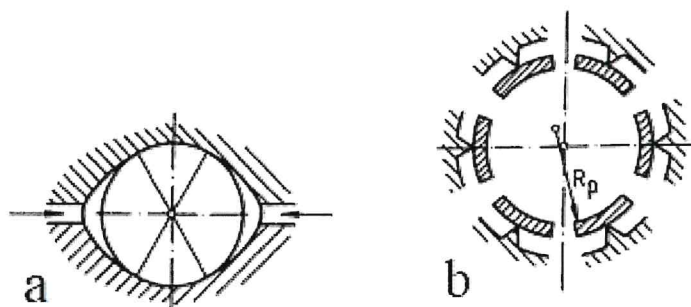
1.1 Vliv mazání v kluzných ložiscích

Kluzné ložisko lze definovat jako strojní součást, která umožňuje otočné uložení hřídelí, či čepů. Hlavním úkolem kluzných ložisek je zachytit radiální a axiální síly působících z rotační součásti [15]. Základními konstrukčními prvky ložiska jsou ložiskové pouzdro, které je v přímém styku s rotační součástí a ložiskové těleso, které zajišťuje připojení k rámu statické části zařízení [15].



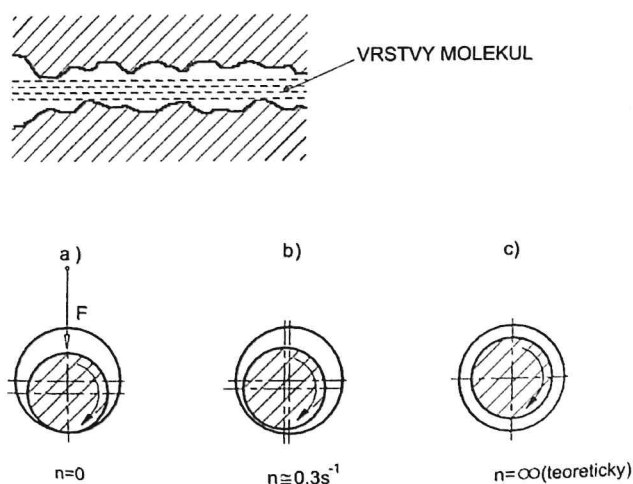
Obr. 1.1: Konstrukce kluzného ložiska [15].

Konstrukce ložiska bývá často uzpůsobena pro přívod mazného oleje. Mezera může mít zcela specifikovanou geometrii nebo může být tvořena pohyblivými segmenty [7]. Na obr. 1.2 jsou uvedeny některé příklady těchto geometrií, variant přívodu oleje je však mnohem více.



Obr. 1.2: Geometrie přívodu mazání, a) Kapsové uložení, b) Segmentové uložení [7].

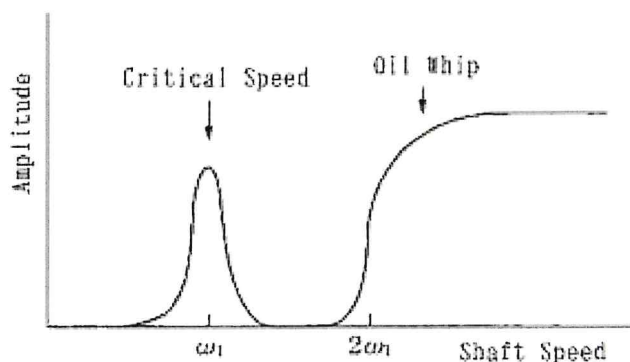
Mazání ložiska má zcela klíčový vliv pro chod zařízení. Hlavní úlohou maziva je snížení tření v ložisku a odvod přebytečného tepla. Principem je vniknutí maziva mezi ložiskové pouzdro a rotační součást, neboli čep a vytvoření tak vrstvy molekul mezi těmito povrchy. Lze rozlišit tři druhy mazání podle otáček čepu. Suché tření, kdy čep dosedá na pouzdro vlivem gravitace a povrchy klouzají bez maziva. Povrchy se přímo dotýkají a interakce mezi nimi způsobuje tření přímo mezi povrchy. Polosuché tření vzniká při nízkých otáčkách, kdy mezi povrchy vniká slabá vrstva maziva. Kapalinné tření vzniká při pohybu s vysokými otáčkami, kdy se mezi nimi vytváří tlakový film kapaliny [15]. Tyto druhy mazání jsou znázorněny na obr. 1.3.



Obr. 1.3: Schéma tření v ložiscích, a) suché, b) polosuché, c) kapalinné [15].

Ložiska s předepsanou vůlí mezi čepem a ložiskovým pouzdem mají v zásadě stejné statické a dynamické chování jako krátké válcové ložisko [7]. Důležitými kritérii, která jsou důležitá pro vlastnosti ložiska, je tloušťka olejového filmu, typ kluzného pohybu hřídelového čepu vůči ložisku a viskozita maziva. Dalšími vlivy jsou teplotní efekty a nedostatečné zásobování ložiska mazným olejem [6]. Teplotní efekty však v této práci

nebudou uvažovány. Stroje s vysokými provozními otáčkami, mezi které se řadí například generátory, parní turbíny či turbodmychadla, často trpí vibracemi hřídele. Ty bývají příčinou poruch nebo provozních komplikací [5]. Jedna z příčin vibrace rotačního stroje je kmitání v rezonanční oblasti. Další příčinou je jev označovaný anglickým výrazem *oil whip* [5], což lze volně přeložit jako tlučení oleje. Tento jev je zapříčiněn ztrátou stability rotoru vlivem chování oleje.



Obr. 1.4: Znázornění tlučení oleje pomocí amplitudy [5]

Nejdříve však nastává přechodová fáze mezi stabilním stavem rotoru a těmito olejovými rázy nazvaná *oil whirl* [5], volně přeloženo jako olejové víření. Obecně toto tlučení oleje vzniká při úhlové rychlosti odpovídající přibližně dvojnásobku rychlosti při již zmíněném rezonančním stavu [5]. Při ztrátě stability se hřídelový čep přestane přibližovat ke středu ložiska, jak je znázorněno na obr. 1.3, ale začne kroužit blízko stěn ložiska. To je velmi nepříznivé pro chod stroje, proto je žádoucí tento jev studovat.

1.2 Definice a přehled pasivních hltičů

Termín *dynamický hltič* je v této práci míněn jako strojní součást, či součást konstrukce sloužící k úpravě mechanických, konkrétně dynamických vlastností stroje, či konstrukce. Konkrétně pasivní hltič je součást, na kterou nepůsobí vnější řídicí síla. Funkce těchto hltičů spočívá v účinném tlumení vibrací [13]. Jinými slovy hltiče kmitů zabraňují nežádoucímu hluku nebo mechanickému poškození součástí způsobené vibracemi. Základním principem hltiče je připojení hmotného prvku pružně uloženého v hlceném systému [12]. Tím jsou do tohoto mechanického systému přidány stupně volnosti. Pasivní hltiče jsou často využívány na snížení odezvy systému v případě mírně nesprávného naladění [14]. Historické práce zabývající se optimálním návrhem pasivního hltiče byly prezentovány již v 20. a 30. letech 20. století pro primární konstrukce s jedním stupněm volnosti vystavené harmonickým zatížením [14]. V současnosti je pasivní hltič úspěšně instalován v mrakodrapech, věžích a mostech [14]. Příkladem je mrakodrap Taipei 101 v Tchaj-wanu. Pasivní hltič je zde použit pro potlačení vibrací vlivem větru a

zemětřesení [13]. Dalším příkladem aplikace je izolace trupů vrtulníků před vibracemi [13], hlčení vibrační odezvy kloubových komponent závěsu kola vývojem modifikovatelného dynamického hltiče v oblasti torzních kmitů jako novou metodu pro optimalizaci tlumení vibrací v off-roadových vozidlech. Hltič se v tomto případě snaží zvýšit komfort jízdy a ovladatelnost vozidla [4]. Využití pasivního hltiče, které bude ukázáno v této práci, je tlumení vibrací a kontaktu v rotačních systémech, jako jsou rotorové a ložiskové systémy. Problém spočívá především v nevyváženosti rotoru, což může vést k nežádoucím jevům [12].

Patrně největší nevýhodou dynamických hltičů obecně je fakt, že pokud je třeba razantně změnit chování systému, je třeba veliký poměr hmotnosti tohoto hltiče oproti celkové hmotnosti systému [13]. Příkladem je pasivní hltič instalovaný v jaderné elektrárně Temelín vážící dvě tuny, šířka tohoto zařízení je přibližně dva metry [11]. Tento pasivní hltič má za úkol snížit vibrace parní turbíny, konkrétně je nainstalovaný na ložiskovém stojanu nízkotlakého stupně.



Obr. 1.5: Pasivní hltič instalovaný v jaderné elektrárně Temelín [11].

Uvedený příklad také demonstruje, že složitost konstrukce pasivních hltičů je velmi nízká. Není zde důležitý tvar, nýbrž parametry hmotnosti a poddajnosti materiálu. V tomto případě je možné ladit hmotnost pomocí přidávání plechů na konstrukci hltiče [11].

Přestože je princip dynamického hltiče znám přes sto let, první patent byl podán v roce 1909 [13], dodnes je výzkum tohoto zařízení stále velmi žádaný. Hlavním důvodem je nutná znalost poměrně komplexní dynamické charakteristiky systému, které je nutno ladit. Jelikož je konstrukce dynamického hltiče je poměrně jednoduchá, je nejvíce pozornosti kladeno na optimalizaci dynamických parametrů hltiče, aby bylo dosaženo co nejlepšího účinku potlačení vibrací. Hlavním úkolem je získat optimální návrhové parametry dynamického hltiče pro zvýšení účinnosti potlačení vibrací [14].

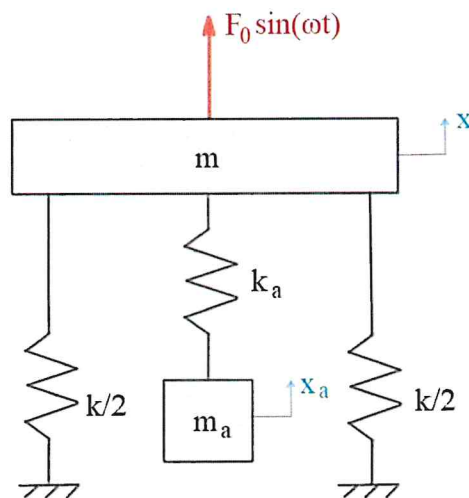
1.3 Cíl této práce

Nejdříve se tato práce bude zabývat jednoduchými modely rotorového systému, se zaměřením na popis jeho rezonančního stavu. Následně budou tyto modely rozšířeny o vliv hydrodynamických sil v kluzném ložisku. Bude zde snaha simulovat stav olejových rázů, které byly popsány v předchozím odstavci. Poté zde bude snaha aplikovat na rotorovou soustavu dynamický hltič. Cílem aplikace hltiče bude potlačit rezonanční stav rotoru ve vzbraných otáčkách. Tento rezonanční stav bude ovlivněn působením zavedených hydrodynamických sil. Aby bylo možné tohoto dosáhnou bude nutné vyjádřit amplitudu pomocí linearizace modelu rotoru a provést optimalizaci parametrů hltiče. Na závěr budou tyto parametry dosazeny do nelineárního modelu s následným porovnáním výsledků.

2 Základní teoretické poznatky

2.1 Optimalizace parametrů pasivního hltiče

Zde je uveden jednoduchý systém kmitající hmoty m , jejíž poloha je popsána pomocí souřadnice x , tedy jednoho stupně volnosti. Hmotu je pružně uložena k rámu pomocí tuhosti k a buzena harmonickou silou $F(t)$. K systému je pružně o tuhosti k_a připojen hltič o hmotnosti m_a . Pohyb je popsán nezávislou souřadnicí x_a , tedy je přidán další stupeň volnosti (obr. 2.1).



Obr. 2.1: Systém s jedním stupněm volnosti a připojeným hltičem.

S využitím D'Alembertova principu lze tento systém popsat dvěma rovnicemi [9]

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + (k + k_a)x - k_ax_a &= F_0 \sin(\omega t), \\ m_a\ddot{x}_a - k_ax + k_ax_a &= 0, \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

kde ω je úhlová frekvence buzení. Amplitudu X kmitání modelu s hltičem popsaného vztahy (2.1.1) lze vyjádřit jako [9],

$$X = \frac{(k_a - m_a\omega^2) F_0}{(k + k_a - m\omega^2)(k_a - m_a\omega^2) - k_a^2}. \quad (2.1.2)$$

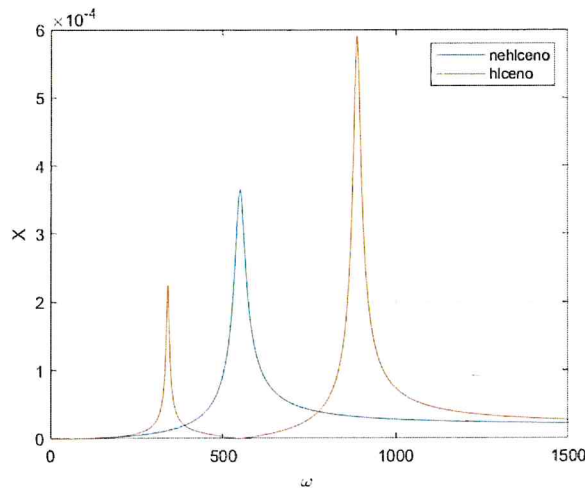
V tomto idealizovaném případě lze zvolit parametry hltiče m_a a k_a tak, aby byla amplituda X nulová, tedy lze sestavit lineární rovnici ze vztahu (2.1.2)

$$X = 0. \quad (2.1.3)$$

Analytickým řešením je získána závislost těchto parametrů pro dosazení nulové amplitudy [9]

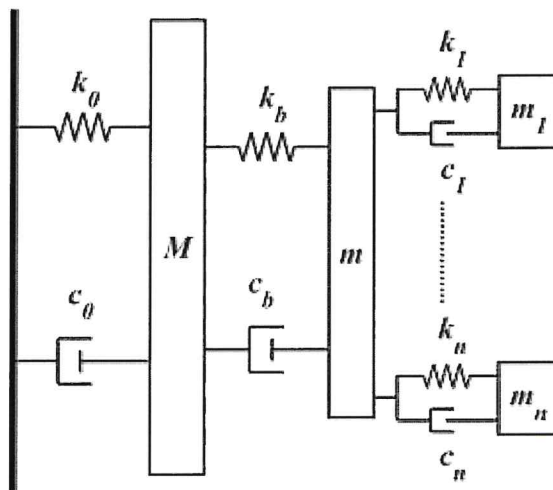
$$k_a = m_a \omega^2 \quad (2.1.4)$$

Přidáním pružně uložené hmoty hltiče m_a je do systému přiřazena nezávislá souřadnice x_a . Tím je instalací tohoto jednoduchého hltiče přidán jeden stupeň volnosti, vlastní frekvence celého systému se změní. Pokud je tedy hltič správně naladěný, v tomto případě splňuje nulovou podmínku ze vztahu (2.1.3), amplituda X je pro původní rezonanční frekvenci ω v idealizovaném případě nulová. Když je v modelu uvažováno materiálové tlumení, tato amplituda je minimální [9]. Avšak systém s hltičem má dvě jiné rezonanční oblasti pro dvě nové vlastní frekvence (obr. 2.2).



Obr. 2.2: Amplitudová charakteristika systému bez vnitřního tlumení s jedním stupněm volnosti a vliv přidání naladěného hltiče.

Dynamické hltiče jsou obvykle modelovány jako diskrétní systémy podobně jako na obr. 2.1. Složitější konstrukcí lze však dosáhnout ladění více frekvenčních oblastí, nebo zvýšení šířky pásma kolem jedné laděné frekvence [14]. Na obr. 2.3 je uveden příklad složitějšího modelu dynamického hltiče s více stupni volnosti. Zde je opět základní hmota M připojena k rámu tuhostí k_0 a tlumením c_0 . Podobně jako na obr. 2.1, toto představuje systém o jedné vlastní frekvenci. Hlavní hmota hltiče m je připojena k hmotě M tuhostí k_b a tlumením c_b . Tyto parametry jsou naladěny na potlačení rezonanční oblasti. Dále jsou zde připojeny další hmoty m_1, m_2 až m_n pružně připojeny parametry k_1, k_2 až k_n a c_1, c_2 až c_n . Tyto menší hmoty mají za úkol rozšířit laděnou frekvenční oblast pomocí přidání stupňů volnosti [14].



Obr. 2.3: Model složitějšího dynamického hltiče [14].

Aby bylo možné optimalizovat systém se zavedeným dynamickým hltičem, je nutné zavést vhodnou optimalizační funkci. Například pro náhodné typy zatížení lze tuto optimalizační funkci vybrat jako rozptyl odezvy systému, či pro náhodné zatížení lze zavést funkci spektrální hustoty strukturální odezvy [14]. A však, pokud je dostačující optimalizovat parametry hltiče v jednom bodě rezonance, nejjednodušší způsob zavedení optimalizační funkce je vyjádření amplitudy [9].

2.2 Hydrodynamické síly v kluzném ložisku

Důležitými parametry pro konstrukci radiálního kluzného ložiska je jeho délka L a průměr čepu D (obr. 2.4). Tyto parametry jsou často navrhovány podle jejich poměru [15]

$$\lambda = \frac{L}{D}. \quad (2.2.1)$$

Pokud je uvažováno jisté zjednodušení, lze modelovat chování oleje v ložisku pomocí Reynoldsovy rovnice. Zjednodušující předpoklady chování oleje jsou následující [7]:

- Je předpokládáno laminární proudění.
- Olej je považován za newtonovskou kapalinu.
- Je uvažováno nehmotné mazivo dokonale přilnuté k povrchům ložiska a kotouče.
- Tlak oleje je konstantní v radiálním směru kotouče.
- Rychlost v radiálním směru je zanedbána, uvažována je pouze tangenciální rychlost U .

- Tloušťka olejového filmu je malá ve srovnání s poloměrem hřídele.
- Povrchy ložisek jsou dokonale hladké, samotné tření mezi ložiskem a čepem je tedy zanedbáno.

Reynoldsovu rovnici lze zapsat ve tvaru [7]

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6U \frac{\partial h}{\partial \xi} + 12 \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (2.2.2)$$

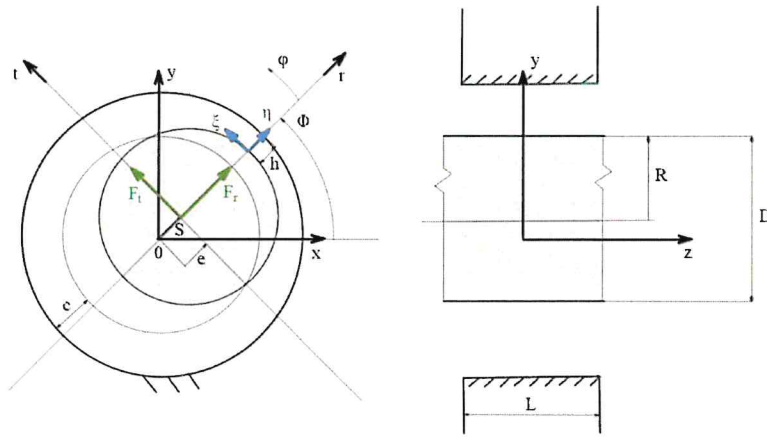
kde μ je dynamická viskozita, p funkce tlaku v mazivu, t je čas, U je relativní obvodová rychlost čepu k ložisku, h je funkce tloušťky olejového filmu, ξ je souřadnice v obvodovém směru a z je souřadnice ve směru axiálním (obr. 2.4). Obvodová rychlost lze vyjádřit jako

$$U = R\omega, \quad (2.2.3)$$

kde R je poloměr čepu ($R = D/2$) a ω je úhlová rychlost čepu. Analogicky lze také vyjádřit relativní obvodovou souřadnici

$$\xi = R\varphi, \quad (2.2.4)$$

kde φ je úhlová souřadnice.



Obr. 2.4: Zavedení parametrů v kluzném ložisku.

Vztah (2.2.2) je možné vyjádřit dosazením vztahů (2.2.4) a (2.2.3)[2]

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \varphi} + 12\mu \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (2.2.5)$$

Pro zjednodušení některých operací je možné zavést poměrnou excentricitu k vůli ložiska c [2]

$$\varepsilon = \frac{e}{c}. \quad (2.2.6)$$

Platí, že toto číslo se pohybuje v rozmezí od nuly do jedné

$$0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (2.2.7)$$

Nyní lze vyjádřit hydrodynamické síly v radiálním a tangenciálním směru F_r a F_t . Tyto síly lze získat integrací funkce tlaku $p(\Phi, z, t)$ získané vyřešením Reynoldsovy rovnice (2.2.5) přes kontaktní plochu ložiska [2]

$$\begin{aligned} F_t &= -2R \int_0^{L/2} \int_0^\pi p(\Phi, z, t) \cos \Phi \, d\Phi dz, \\ F_r &= 2R \int_0^{L/2} \int_0^\pi p(\Phi, z, t) \sin \Phi \, d\Phi dz. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Jelikož Reynoldsova rovnice popsaná vztahem (2.2.5) je nelineární, není možné získat obecný uzavřený výraz pro hydrodynamické síly F_r a F_t vyjádřené ve vztahu (2.2.8) [2]. Obvykle je problém zjednodušen snížením dimenze Reynoldsovy rovnice předpokládáním velmi velkého poměru délky a šířky ložiska ze vztahu (2.2.1) [2]

$$\lambda \gg 1,$$

tedy nekonečně dlouhého ložiska obvykle označovaného zkratkou IL (Infinitely Long), nebo předpokládáním velmi malého rozměrového poměru

$$\lambda \ll 1,$$

tedy nekonečně krátkého ložiska obvykle označovaného zkratkou IS (Infinitely Short). Tyto aproximace jsou v praxi použitelné pro nekonečně dlouhé ložisko (IL), pokud platí že [2]

$$\lambda > 2. \quad (2.2.9)$$

Pro nekonečně krátké ložisko (IS), pokud platí že

$$\lambda < 0,5. \quad (2.2.10)$$

V této práci bude použita pouze aproximace pro nekonečně krátké ložisko (IS). Analytické vyjádření hydrodynamických sil v ložisku s využitím této aproximace má tvar [3]

$$\begin{aligned} F_r^{IS}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dot{\Phi}, \omega) &= -\mu R L \left(\frac{L}{c}\right)^2 \cdot \left[|\omega - 2\dot{\Phi}| \frac{\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{\pi \dot{\varepsilon} (1+2\varepsilon^2)}{2(1-\varepsilon^2)^{5/2}} \right], \\ F_t^{IS}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dot{\Phi}, \omega) &= \mu R L \left(\frac{L}{c}\right)^2 \cdot \left[(\omega - 2\dot{\Phi}) \frac{\pi \varepsilon}{4(1-\varepsilon^2)^{3/2}} + \frac{2\varepsilon \dot{\varepsilon}}{(1-\varepsilon^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Hodnotu hydrodynamických sil lze tedy explicitně vyjádřit jako funkci čtyř proměnných, poměrné excentricity čepu ε , která je vyjádřena vztahem (2.2.6), derivace této excentricity $\dot{\varepsilon}$, derivace úhlu natočení čepu $\dot{\Phi}$ a úhlové rychlosti ω . V této práci bude vztah (2.2.11) využit jako nelineární hydrodynamické síly v modelu rotorového systému.

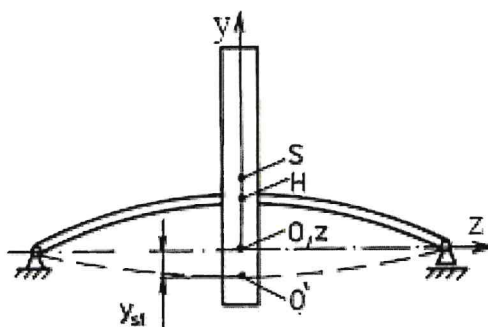
3 Dílčí modely rotorové soustavy

3.1 Lavalův rotor

Nejjednodušší fyzikálním modelem rotoru je takzvaný *Lavalův rotor* [9]. Jedná se o nehmotný hřídel o dvou podporách. Uprostřed hřídele je uložen hmotný kotouč o hmotnosti m . Kotouč vykonává pouze rovinný pohyb v osách x a y , dále je zde definována vlastní rotace kolem osy rovnoběžné s osou z . Tato osa je spojnici dvou podpor představující ložiska rotoru. Posuv v ose z je zanedbán. V tomto modelu nenastává klopný pohyb kotouče díky jeho symetrickému uložení. Úhlová rychlost ω je konstantní a úhel vlastní rotace φ je tedy dána vztahem

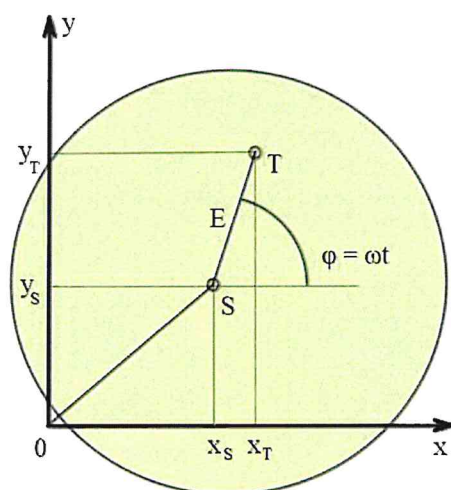
$$\varphi = \omega t, \quad (3.1.1)$$

kde t je čas běhu rotoru.



Obr. 3.1: Schéma Lavalova rotoru [9].

Souřadnice x_s a y_s jsou souřadnice středu kotouče S v rovině xy . Excentricita E je definována jako vzdálenost těžiště od středu kotouče $|ST|$ (obr. 3.2).



Obr. 3.2: Zavedené souřadnice.

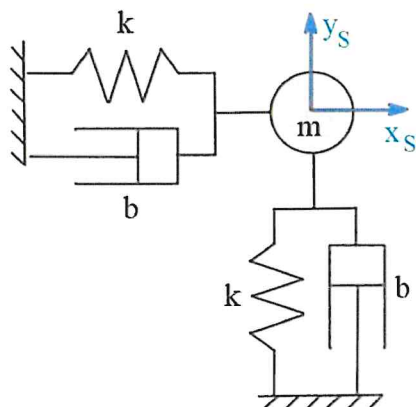
Souřadnice polohy těžiště x_T a y_T jsou definovány jako

$$\begin{aligned} x_T &= x_S + E \cos \varphi, \\ y_T &= y_S + E \sin \varphi. \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

Pomocí D'Alembertova principu lze odvodit pohybové rovnice tohoto modelu [9]

$$\begin{aligned} 0 &= m \ddot{x}_T + k x_S + b \dot{x}_S, \\ 0 &= m \ddot{y}_T + k y_S + b \dot{y}_S + m g, \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

kde m je hmotnost kotouče, k je ohybová tuhost hřídele, b je materiálové tlumení a g je gravitační zrychlení.



Obr. 3.3: Schéma modelu Lavalova rotoru.

Vztah (3.1.3) je soustavou nehomogenních diferenciálních rovnic druhého řádu, v níž figurují proměnné polohy středu kotouče x_S, y_S [9]. Pro její řešení je nutné opatřit druhou derivaci polohy těžiště

$$\begin{aligned}\ddot{x}_T &= \ddot{x}_S + E (-\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \ddot{\varphi} \sin \varphi), \\ \ddot{y}_T &= \ddot{y}_S + E (-\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \ddot{\varphi} \cos \varphi).\end{aligned}\quad (3.1.4)$$

Nyní lze dosadit do vztahu (3.1.3) vztah (3.1.4).

$$\begin{aligned}m \ddot{x}_s + b \dot{x}_s + k x_s + \Delta m E (-\dot{\varphi}^2 \cos \varphi - \ddot{\varphi} \sin \varphi) &= 0, \\ m \ddot{y}_s + b \dot{y}_s + k y_s + \Delta m E (-\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \ddot{\varphi} \cos \varphi) &= -m g,\end{aligned}\quad (3.1.5)$$

kde $\Delta m E$ je neváha rotoru zjištěna empiricky. Jelikož je v tomto případě úhlová rychlost konstantní, úhlové zrychlení je nulové

$$\ddot{\varphi} = 0. \quad (3.1.6)$$

Finální podoba pohybových rovnic pro Lavalův rotor byla získána dosazením vztahu pro konstantní úhlovou rychlost (3.1.1). Jedná se o vzájemně nezávislou soustavu dvou diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}m \ddot{x}_s + b \dot{x}_s + k x_s &= \Delta m E \omega^2 \cos(\omega t), \\ m \ddot{y}_s + b \dot{y}_s + k y_s &= \Delta m E \omega^2 \sin(\omega t) - m g.\end{aligned}\quad (3.1.7)$$

Obecně pohybové rovnice zapsat pomocí maticového vztahu [9]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{Q}, \quad (3.1.8)$$

kde \mathbf{M} je matice hmotnosti, \mathbf{B} je matice tlumení, \mathbf{K} je matice tuhosti a \mathbf{Q} je vektor zobecněných sil. Vektor $\mathbf{q}(t)$ je vektor zobecněných souřadnic. Pro tento případ lze ho zapsat jako

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ y_s(t) \end{bmatrix}. \quad (3.1.9)$$

Vektor \mathbf{Q} pro tento případ je rozložen na vektory gravitačních sil \mathbf{F}_g a sil vlivem neváhy \mathbf{F}_e ve tvaru

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e. \quad (3.1.10)$$

Nyní lze vztah (3.1.7) převést na tvar (3.1.8)

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{y}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta m E \omega^2 \cos(\omega t) \\ \Delta m E \omega^2 \sin(\omega t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m g \end{bmatrix}. \quad (3.1.11)$$

Z nezávislosti soustavy je zřejmé, že příslušné matice \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} jsou diagonální. Obecně lze úhlovou frekvenci Lavalova rotoru rozložit na imaginární a reálnou složku [7]

$$\omega_n = \delta + i\omega_d, \quad (3.1.12)$$

kde δ je reálná složka a je ω_d imaginární složka frekvence rotoru. Řešení soustavy rovnic diferenciálních (3.1.7) lze obecně zapsat tímto způsobem [7]

$$\begin{aligned} x_s(t) &= e^{\delta t} (C_{11} \cos(\omega_d t) + C_{12} \sin(\omega_d t)), \\ y_s(t) &= e^{\delta t} (C_{21} \cos(\omega_d t) + C_{22} \sin(\omega_d t)), \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

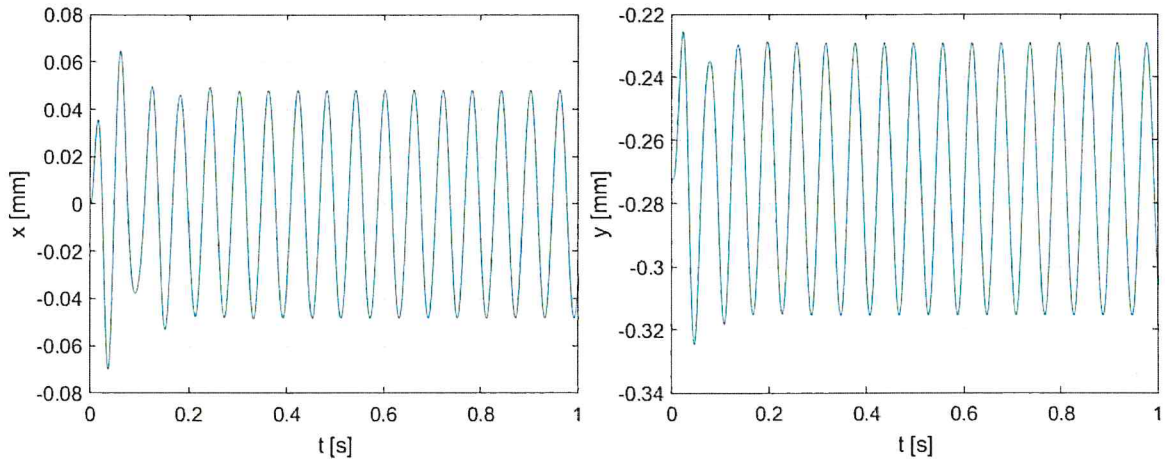
kde C_{11} , C_{12} , C_{21} a C_{22} jsou integrační konstanty, které lze dopočítat ze okrajových podmínek,

$$\mathbf{q}_0 = [x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0]^T. \quad (3.1.14)$$

V tomto případě jsou okrajové podmínky voleny,

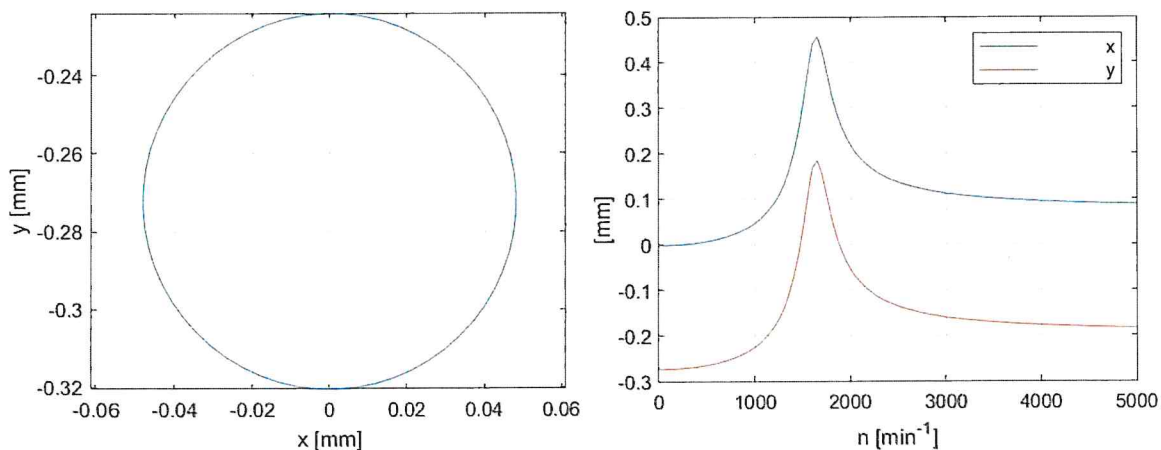
$$\mathbf{q}_0 = \left[0, \frac{mg}{k}, 0, 0 \right]^T, \quad (3.1.15)$$

tedy počáteční x_0 výchylka a počáteční \dot{x}_0 , \dot{y}_0 rychlosti jsou nulové, výchylka y_0 je daná prohnutím hřídele vlivem hmotnosti kotouče. Příklad řešení časového průběhu poloh x_s a y_s je vyobrazen na obr. 3.4.



Obr. 3.4: Závislost souřadnic x_s a y_s na čase.

Posunutí funkce souřadnice y_s do záporných hodnot vyplývá z působení gravitační síly, což vyplývá ze vztahu (3.1.11). Z obr. 3.4 lze také vidět, že řešení rotorového systému po uplynutí jistého času se ustálí na periodické funkci s konstantní amplitudou. Když jsou tedy známy funkce výchylek x_s a y_s , lze vytvořit orbitu, tedy trajektorii středu kotouče [9]. Dále je možné vytvořit diagram maximální výchylky v ustáleném stavu rotoru v závislosti na otáčkách. (obr. 3.5).



Obr. 3.5: a) Orbita, b) Závislost maximálních výchylek na otáčkách rotoru.

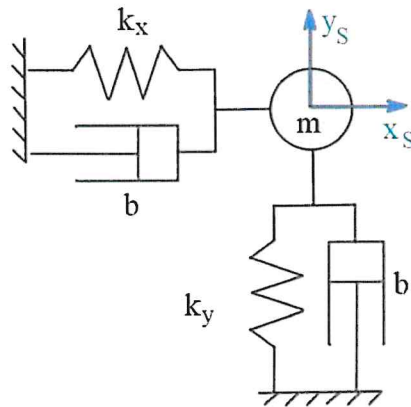
Kruhová orbita je daná harmonickým průběhem výchylek x_s a y_s (obr. 3.5). Diagram maximální výchylky ukazuje kritické otáčky n_{kr} , kde dochází k rezonanci harmonické síly vyvolané nevývahou $\Delta m E$ s frekvencí ω_n . Tyto kritické otáčky zde odpovídají vlastní frekvenci rotoru [7]

$$n_{kr} = \frac{2\pi}{60}\omega_n = \frac{2\pi}{60}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad [min^{-1}], \quad (3.1.16)$$

kde k je tuhost hřídele, m je hmotnost kotouče. Pro tento model je tedy možné určit vlastní frekvenci a kritické otáčky analyticky ze znalosti konstantních charakteristik rotoru.

3.2 Vliv ložiska s anizotropní tuhostí

Dále lze vytvořit model rotoru v poddajném ložisku, nejdříve pro zjednodušení je uvažována dokonale tuhá a nehmotná hřídel. Pokud je ložisko asymetrického tvaru, je vhodné zavést jiné hodnoty jeho tuhosti v osách. Příklad asymetrického ložiska je uveden na obr. 1.2. V tomto modelu jsou opět zavedeny dvě souřadnice polohy středu kotouče x_s a y_s . Dále k_x a k_y jsou již zmíněné tuhosti ložiska a b je materiálové tlumení (obr. 3.6).

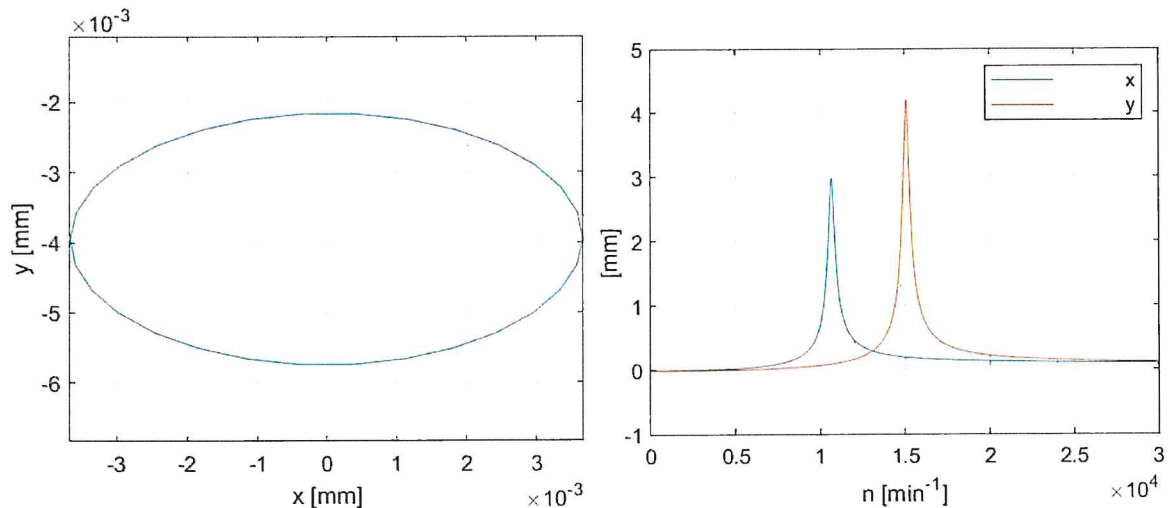


Obr. 3.6: Schéma modelu poddajného ložiska anizotropní tuhostí.

Jelikož se jedná o velmi podobný model, jako v předchozím případě, tento případ lze popsat upravením vztahu (3.1.7)

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_s + b \dot{x}_s + k_x x_s &= \Delta m E \omega^2 \cos(\omega t), \\ m \ddot{y}_s + b \dot{y}_s + k_y y_s &= \Delta m E \omega^2 \sin(\omega t) - m g. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Díky podobnosti tohoto modelu z předchozím také řešení časového průběhu poloh x_s a y_s vypadá velmi podobně, jako u Lavalova rotoru. Orbita má podobu elipsy z důvodu rozdílných tuhostí k_x a k_y [7].



Obr. 3.7: Orbita a závislost maximálních výchylek na otáčkách

Z obr. 3.7 je patrné, že tento systém má dvoje kritické otáčky, tedy dvě vlastní frekvence opět z důvodu rozdílných tuhostí k_x a k_y , což lze vyvodit ze vztahu (3.1.16).

3.3 Amplituda ustálených kmitů

V této části bude uveden vztah, který bude použit k získání amplitudové charakteristiky rotorové soustavy. Řešení pohybových rovnic harmonicky buzeného systému v ustáleném stavu lze zapsat ve tvaru [9]

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_c \cos(\omega t) + \mathbf{q}_s \sin(\omega t), \quad (3.3.1)$$

kde \mathbf{q}_s a \mathbf{q}_c jsou amplitudy sinových a kosinových složek kmitání, ω je budící frekvence rotoru. Lze využít vztah (3.1.8) popisující maticový zápis modelu. Vektor zobecněných sil \mathbf{Q} v tomto případě obsahuje pouze složky harmonického buzení, což lze obecně zapsat [9]

$$\mathbf{Q} = \mathbf{f}_c \cos(\omega t) + \mathbf{f}_s \sin(\omega t), \quad (3.3.2)$$

kde \mathbf{f}_c a \mathbf{f}_s jsou vektory složek buzení [9]. V případě Lavalova rotoru lze definovat buzení vektorem silových účinků vlivem nevývahy $\mathbf{F}_e(\omega)$ závislým na úhlové rychlosti, což je popsáno vztahy (3.1.10) a (3.1.11)

$$\mathbf{F}_e(\omega) = \begin{bmatrix} \Delta m E \omega^2 \cos(\omega t) \\ \Delta m E \omega^2 \sin(\omega t) \end{bmatrix}.$$

Vektory amplitud harmonického buzení mají tedy v případě Lavalova rotoru pouze kosinovou složku ve směru x a sinovou složku ve směru y

$$\mathbf{f}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta m E \omega^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_c = \begin{bmatrix} \Delta m E \omega^2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3.3)$$

Dále lze zavést vektory komplexních amplitud buzení a výchylek [9]

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}} &= \mathbf{f}_c - i \mathbf{f}_s, \\ \tilde{\mathbf{q}} &= \mathbf{q}_c - i \mathbf{q}_s. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Podle vztahu (3.3.3) lze vyjádřit vektor $\tilde{\mathbf{f}}$ jako

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \Delta m E \omega^2 \\ -i \Delta m E \omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

Dosazením vztahů (3.3.1) a (3.3.3) do vztahu (3.1.8) lze vyjádřit amplitudy harmonického buzení [9]

$$\underbrace{(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i \omega \mathbf{B})}_{\mathbf{Z}(\omega)} \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{f}}. \quad (3.3.6)$$

Takto lze definovat matici dynamické tuhosti $\mathbf{Z}(\omega)$ závislou na budící frekvenci jako [9]

$$\mathbf{Z}(\omega) \tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{f}}. \quad (3.3.7)$$

Pro vyjádření amplitud výchylek je nutné převést matici $\mathbf{Z}(\omega)$ na druhou stranu rovnice

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Z}^{-1}(\omega) \tilde{\mathbf{f}}. \quad (3.3.8)$$

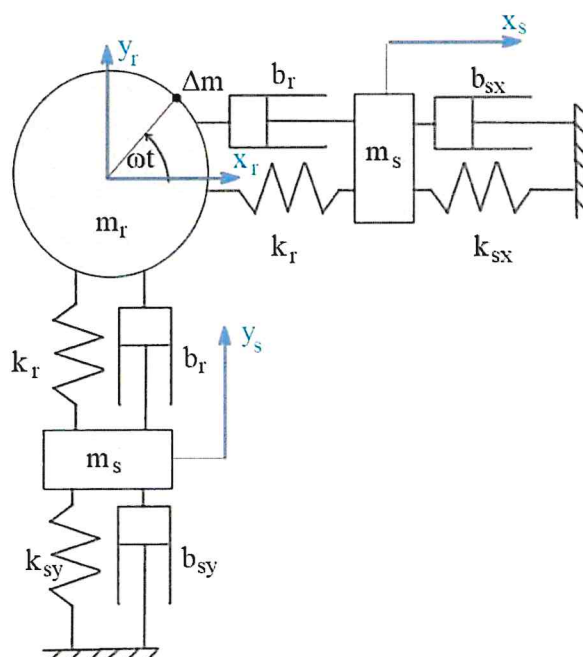
Takto lze vyjádřit komplexní amplitudu buzených kmitů pomocí soustavy algebraických rovnic. Řešení těchto rovnic je nesporně jednodušší, než řešení systému pomocí diferenciálních rovnic. Avšak takto lze vyjádřit pouze lineární systémy jejichž řešení lze vyjádřit rozložením do sinových a kosinových složek podle vztahu (3.3.1). Absolutní hodnotu amplitudy kmitů lze získat pomocí vztahu [9]

$$|q_j| = \sqrt{q_{c_j}^2 + q_{s_j}^2}, \quad (3.3.9)$$

kde j jsou jednotlivé složky vektoru amplitud v reálném tvaru \mathbf{q} . Tímto způsobem budou získávány jednotlivé amplitudové charakteristiky rotorových systémů v závislosti na budící frekvenci ω , respektive na otáčkách n .

3.4 Model poddajného ložiska a poddajné hřídele

Poněkud složitější model rotorového systému je model s uvažovanou poddajnou hřídelí a poddajným ložiskem. V tomto případě jsou zde zavedeny již čtyři na sobě nezávislé souřadnice: x_r a y_r určují polohu disku rotoru, x_s a y_s určují polohu hřídele v ložiskovém tělese, jak je uvedeno na obr. 3.8.



Obr. 3.8: Schéma modelu poddajného ložiskového stojanu a poddajného hřídele.

Pohybové rovnice tohoto modelu lze opět odvodit podle D'Alberotova principu. Jelikož jsou zde zavedeny čtyři souřadnice, jsou zde vyjádřeny čtyři rovnice vyjadřující rovnováhu silových účinků, jinak je odvození rovnic podobné, jako u Lavalova rotoru

$$\begin{aligned}
 0 &= m_r \ddot{x}_r + k_r (x_r - x_s) + b_r (\dot{x}_r - \dot{x}_s) - \Delta m E \omega^2 \cos(\omega t), \\
 0 &= m_r \ddot{y}_r + k_r (y_r - y_s) + b_r (\dot{y}_r - \dot{y}_s) - \Delta m E \omega^2 \sin(\omega t) + m_r g, \\
 0 &= m_s \ddot{x}_s + k_r (x_s - x_r) + k_{sx} x_s + b_r (\dot{x}_s - \dot{x}_r) + b_{sx} \dot{x}_s, \\
 0 &= m_s \ddot{y}_s + k_r (y_s - y_r) + k_{sy} y_s + b_r (\dot{y}_s - \dot{y}_r) + b_{sy} \dot{y}_s + m_s g,
 \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

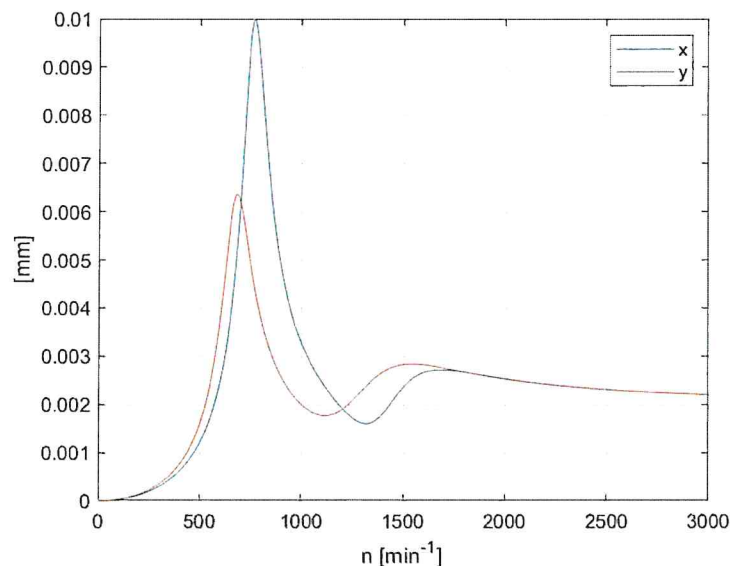
kde m_r je hmotnost disku, m_s je hmotnost hřídele. Podobně jsou označeny hodnoty tuhosti a tlumení. k_r a b_r jsou tuhost a tlumení hřídele. Uložení ložiska je uvažováno anizotropní, tuhost je označena k_{sx} , k_{sy} a tlumení b_{sx} , b_{sy} . Vztah (3.4.1) lze opět zapsat do maticového vztahu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_e, \tag{3.4.2}$$

a vyjádřit tak matice hmotnosti \mathbf{M} , tuhosti \mathbf{K} a tlumení \mathbf{B} . V tomto případě jednotlivé prvky maticového vztahu (3.4.2) vypadají

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_r & 0 & -k_r & 0 \\ 0 & k_r & 0 & -k_r \\ -k_r & 0 & k_r + k_{sx} & 0 \\ 0 & -k_r & 0 & k_r + k_{ys} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} b_r & 0 & -b_r & 0 \\ 0 & b_r & 0 & -b_r \\ -b_r & 0 & b_r + b_{sx} & 0 \\ 0 & -b_r & 0 & b_r + b_{ys} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{q} &= \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ x_h \\ y_h \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \\ -m_2 g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \Delta m E \omega^2 \cos(\omega t) \\ \Delta m E \omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Tyto matice lze dosadit do vztahu (3.3.6) a vypočítat tak amplitudovou charakteristiku postupem, který byl uveden v sekci o amplitudě ustálených kmitů.



Obr. 3.9: Amplitudová charakteristika absolutní výchylky rotoru.

Možný výsledek je ukázán na obr. 3.9. Konkrétně je zde vyobrazena amplitudová charakteristika absolutní výchylky rotoru vypočtená vztahem $\sqrt{x_r^2 + y_r^2}$. Jsou zde jasně viditelné dvě místa v každé souřadnici, kde systém dosahuje kritických otáček, tedy jsou zde rezonanční oblasti. Hodnota těchto otáček je odlišná pro každou souřadnici z důvodu odlišných tuhostí k_{sx} a k_{sy} . Také lze vypočítat, že amplitudy v první rezonanční oblasti mají vyšší hodnotu, což je zase dáno odlišným tlumením hřídele b_r a ložiska b_s .

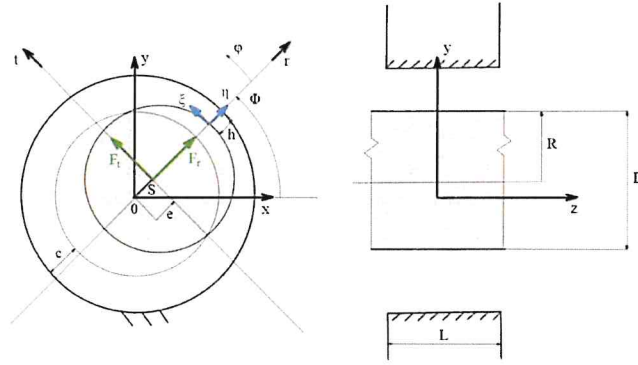
3.5 Působení nelineárních sil vlivem mazání

V této sekci bude vytvořen model rotoru popsáný hydrodynamickými silami. Hřídel a ložiskový stojan jsou prozatím dokonale tuhé. Tyto síly byly popsány vztahem (2.2.11)

$$F_r^{IS}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dot{\Phi}, \omega) = -\mu R L \left(\frac{L}{c}\right)^2 \cdot \left[|\omega - 2\dot{\Phi}| \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} + \frac{\pi \dot{\varepsilon} (1 + 2\varepsilon^2)}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \right],$$

$$F_t^{IS}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dot{\Phi}, \omega) = \mu R L \left(\frac{L}{c}\right)^2 \cdot \left[(\omega - 2\dot{\Phi}) \frac{\pi \varepsilon}{4(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} + \frac{2\varepsilon \dot{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right].$$

Jak již bylo popsáno, tento vztah vyjadřuje hydrodynamické síly v radiální a tangenciální složce za předpokladu aproximace na nekonečně krátké ložisko (IS) v závislosti na poloze, derivaci polohy a úhlové rychlosti rotoru (obr. 3.10).



Obr. 3.10: Vyobrazení hydrodynamických sil v kluzném ložisku.

Aby bylo možné tyto síly zakomponovat do modelu, který je popsán v kartézském souřadnicovém systému x, y , je nutné tyto síly také vyjádřit v těchto směrech [3]

$$\begin{aligned} F_x^{HD}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dot{\Phi}, \Phi, \omega) &= (F_r^{IS} \cos \Phi - F_t^{IS} \sin \Phi), \\ F_y^{HD}(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \dot{\Phi}, \Phi, \omega) &= (F_r^{IS} \sin \Phi + F_t^{IS} \cos \Phi). \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Poloha středu čepu S , se kterou operuje vztah (3.5.1), je vyjádřena v polárních souřadnicích s proměnnými e a Φ , což je znázorněno na obr. 3.10. Pro snadné zakomponování vztahu (3.5.1) do modelu rotoru je vhodné polohu středu čepu také vyjádřit v kartézských souřadnicích. Excentricitu čepu lze tedy vyjádřit jako [3]

$$e = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (3.5.2)$$

Poměrnou excentricitu čepu lze vyjádřit ze vztahu (2.2.6)

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{c}, \quad (3.5.3)$$

kde c je vůle ložiska. Derivaci této poměrné excentricity podle času t lze vyjádřit jako

$$\dot{\varepsilon} = \frac{2x\dot{x} + 2y\dot{y}}{2c\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{c\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3.5.4)$$

Goniometrické funkce úhlu Φ lze vyjádřit jako

$$\sin \Phi = \frac{y}{e}, \quad \cos \Phi = \frac{x}{e}. \quad (3.5.5)$$

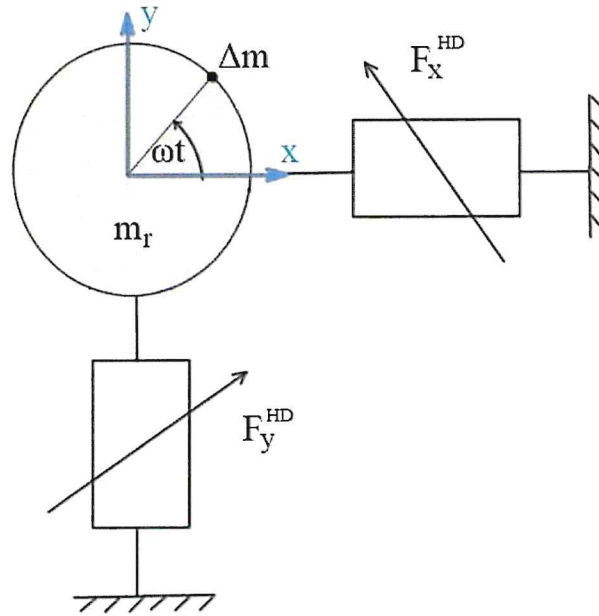
Jelikož je úhel Φ je definován na intervalu $\Phi \in \langle 0; 2\pi \rangle$, jeho explicitní vyjádření je nutné rozdělit do několika intervalů [3]

$$\Phi = \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}), & \text{pro } x > 0 \wedge y > 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi, & \text{pro } 0 < x, \\ \arctan(\frac{y}{x}) + 2\pi, & \text{pro } x > 0 \wedge y < 0. \end{cases} \quad (3.5.6)$$

Časovou derivaci úhlu Φ lze však vyjádřit jako spojitou funkci

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2 + y^2}. \quad (3.5.7)$$

Nyní lze pomocí vztahu (3.5.1) vytvořit jednoduchý model rotoru, na který působí nelineární hydrodynamické síly.



Obr. 3.11: Model rotoru s hydrodynamickými silami.

Opět zde figurují budící síly vlivem neváhy a gravitační síla, podobě jako v kapitole o Lavalovu rotoru. Pohybové rovnice mají tedy tvar

$$\begin{aligned} 0 &= m_r \ddot{x} - \Delta m E \omega^2 \cos(\omega t) - F_x^{HD}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \omega), \\ 0 &= m_r \ddot{y} - \Delta m E \omega^2 \sin(\omega t) - F_y^{HD}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \omega) + m_r g, \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

což lze zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}^{HD}, \quad (3.5.9)$$

tedy

$$\begin{bmatrix} m_r & 0 \\ 0 & m_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta m E \omega^2 \cos(\omega t) \\ \Delta m E \omega^2 \sin(\omega t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_r g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x^{HD}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \omega) \\ F_y^{HD}(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \omega) \end{bmatrix}. \quad (3.5.10)$$

Vztah (3.5.10) představuje opět soustavu diferenciálních rovnic, avšak zakomponováním hydrodynamických sil F_x^{HD} a F_y^{HD} jsou tyto rovnice provázané a nelineární. Řešení bylo provedeno numericky funkcí ode15s s proměnným krokem a proměnným řádem založeným na numerických diferenčních vzorcích [8]. Funkce pomocí které bylo provedeno řešení byla sestavena jako explicitní vyjádření derivace vektoru stavových proměnných

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{F}^{HD} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_g) \right]. \quad (3.5.11)$$

Vektor stavových proměnných \mathbf{x} a jeho derivace je v tomto případě definován jako [3]

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}. \quad (3.5.12)$$

Počáteční podmínka pro numerické řešení byla stanovena

$$\mathbf{x}_0 = [0, 5 \text{ [mm]} \quad -0, 5 \text{ [mm]} \quad 0 \text{ [mm/s]} \quad 0 \text{ [mm/s]}]^T.$$

Konstantní parametry použité v modelu jsou uvedeny v tab. 3.1.

| Parametr | Označení | Hodnota |
|---------------------|--------------|-----------------------------------|
| Průměr ložiska | D | $47,37 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$ |
| Délka ložiska | L | $D/2$ |
| Vůle ložiska | c | $0,9 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$ |
| Dynamická viskozita | μ | $0,07 \text{ [Pa s]}$ |
| Hmotnost rotoru | m | $0,805 \text{ [kg]}$ |
| Nevývaha rotoru | $\Delta m E$ | $1 \cdot 10^{-5} \text{ [kg m]}$ |

Tab. 3.1: Konkrétní parametry používané v modelu rotoru [3].

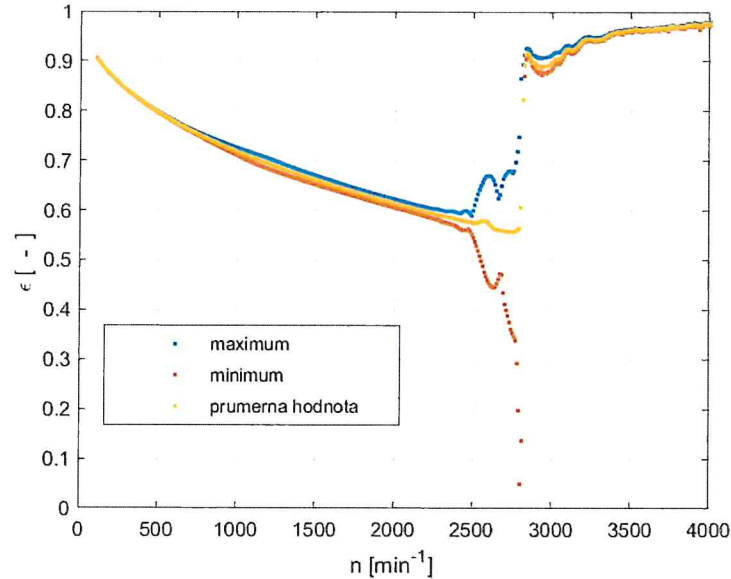
Výsledkem numerického řešení byly hodnoty polohy středu rotačního čepu od středu ložiska x a y přiřazené k časovým krokům Δt používaných v numerickém řešení. Pomocí těchto hodnot byla vypočítána excentricita e vztahem (3.5.2). Prvních 80 % hodnot bylo eliminováno, aby v následujících krocích se počítalo pouze s hodnotami v ustáleném stavu systému při konstantní úhlové rychlosti ω . Tyto závislosti byly vypočteny pro interval konstantních úhlových rychlostí s určitým krokem. Jelikož v praxi se rychlost otáčení rotoru udává v otáčkách za minutu, jsou výsledky uvedeny v této veličině dané vztahem

$$n = \frac{30 \omega}{\pi} \quad [\text{min}^{-1}]. \quad (3.5.13)$$

V každém kroku bylo vypočteno globální maximum e_{max} a globální minimum e_{min} , pro které byl ještě vypočten aritmetický průměr

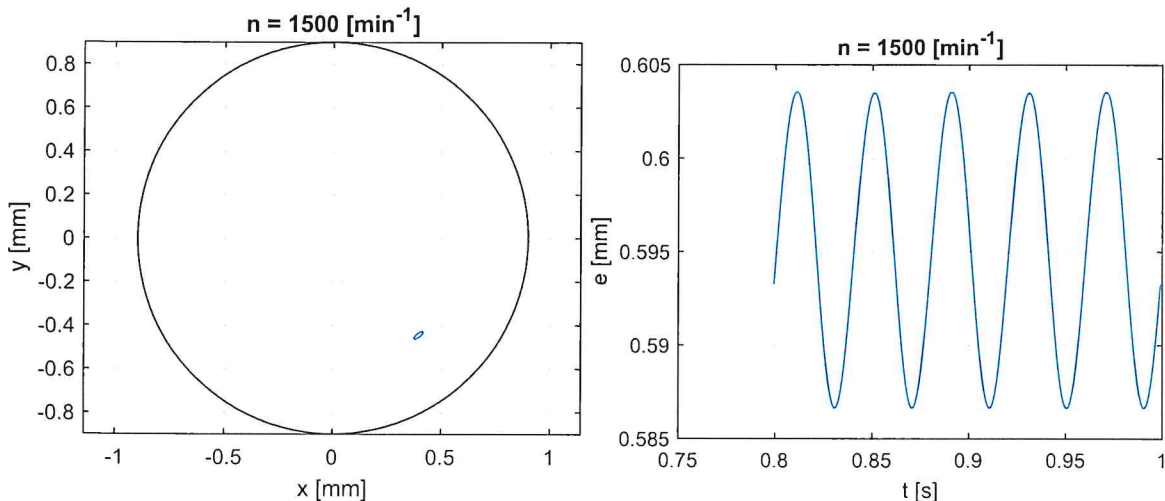
$$e_{pr} = \frac{e_{max} + e_{min}}{2}. \quad (3.5.14)$$

Vypočtená závislost minima, maxima a průměrné hodnoty poměrné excentricity (ϵ_{min} , ϵ_{max} , ϵ_{pr}) závislých na otáčkách n na obr. 3.12.



Obr. 3.12: Vypočtená závislost relativní excentricity na otáčkách.

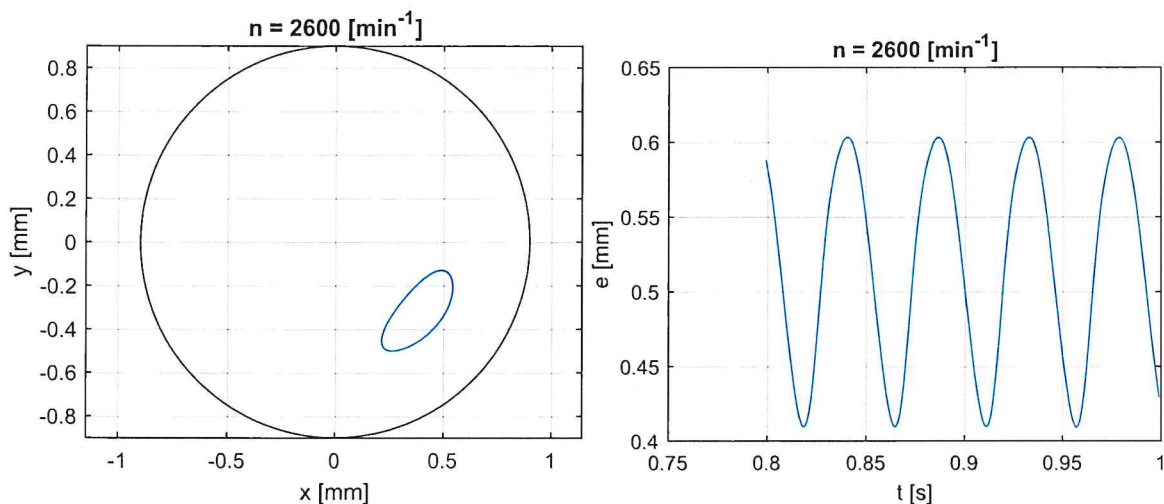
Tato závislost ukazuje, že systém je na počátku stabilní a se zvyšujícími se otáčkami se čep přibližuje ke středu ložiska. Na obr. 3.13 je vyobrazena orbita a časový průběh excentricity e . Jak již bylo zmíněno, je zde vyobrazeno posledních 20% vypočtených hodnot. Kruh černé barvy znázorňuje vymezení ložiskové vůle.



Obr. 3.13: Vypočtená orbita a průběh excentricity v čase pro $n = 1500 \text{ min}^{-1}$.

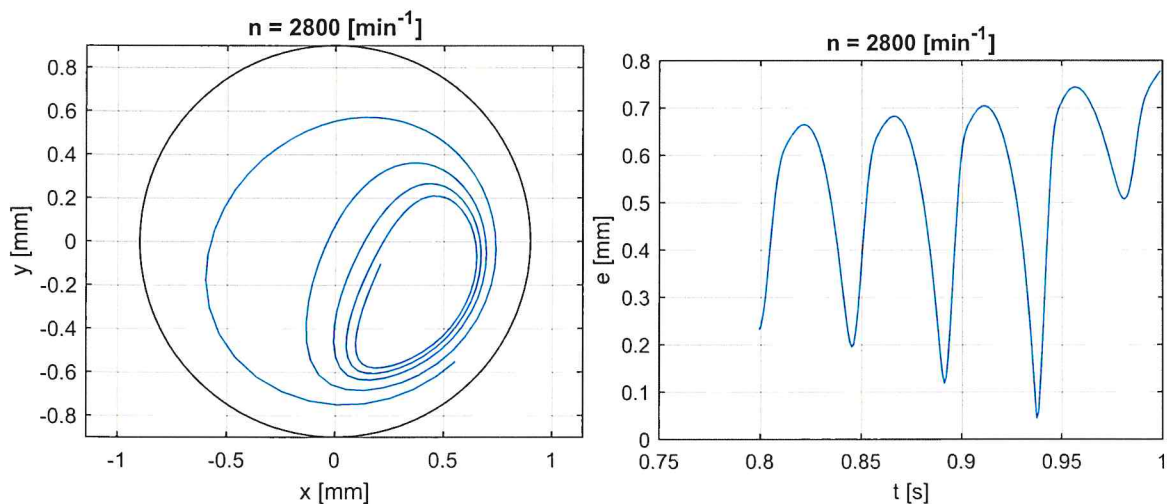
Při zvýšení otáček se oscilace excentricity zvýší, což je ukázáno na obr. 3.14. Polohu

čepu lze však stále považovat za stabilní.



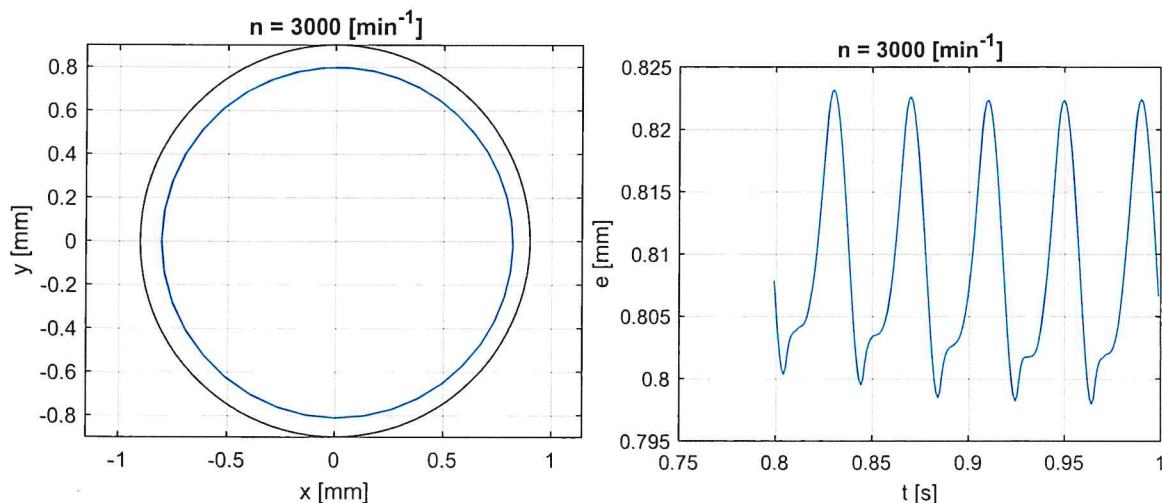
Obr. 3.14: Vypočtená orbita a průběh excentricity v čase pro $n = 2600 \text{ min}^{-1}$.

Po překročení specifických otáček však poloha čepu začne oscilovat, jak je ukázáno na obr. 3.15. V tomto případě jsou to otáčky o přibližné hodnotě $n = 2800 \text{ min}^{-1}$. Tento jev lze považovat za počátek víření oleje, jak bylo popsáno v úvodní kapitole.



Obr. 3.15: Vypočtená orbita a průběh excentricity v čase pro $n = 2800 \text{ min}^{-1}$.

Po dalším zvýšení otáček čep začne oscilovat na hranici vůle ložiska c . Tento stav zobrazuje obr. 3.16. Poměrná excentricita ϵ se blíží k jedné.

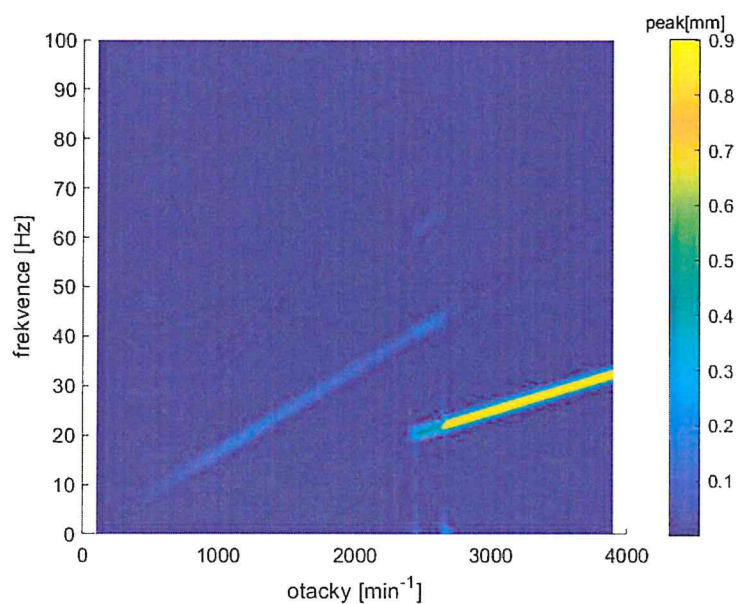


Obr. 3.16: Vypočtená orbita a průběh excentricity v čase pro $n = 3000 \text{ min}^{-1}$.

Dále byly zjištěny dominantní frekvence kmitů při konkrétních otáčkách pomocí Fourierovy analýzy. Konkrétně byl použit algoritmus rychlé Fourierovy analýzy pomocí implementované funkce `autofft` upravené pro vícenásobné vstupy [10]. Vyhodnocována byla maxima časové funkce všeobecně označována jako "peak" [10], což je v tomto případě maximální excentricita čepu e_{max} . Jako vstup do algoritmu byla použita úprava tohoto modelu pro rozběh, kde jsou otáčky lineárně zrychlovány

$$\omega = \alpha t. \quad (3.5.15)$$

Úhlové zrychlení je zde označováno jako α . Výsledky Fourierovy analýzy jsou na obr. 3.17.



Obr. 3.17: Výsledky Fourierovy analýzy.

Ze spektrogramu je patrná odezva odpovídající frekvenci buzení. Po dosažení zmíněných specifických otáček se objeví další frekvence odpovídající přibližně polovičnímu násobku frekvenci buzení. Tato frekvence následně potlačí tu budící.

3.6 Linearizace modelu s hydrodynamickými silami

Pro budoucí optimalizaci parametrů dynamického hltiče byla provedena linearizace tohoto modelu převedením na stacionární případ. Cílem tohoto zjednodušení je získání matic tuhosti $\mathbf{K}^{HD}(\omega)$ a tlumení $\mathbf{B}^{HD}(\omega)$ závislých na otáčkách rotoru. Jelikož jde o provázaný systém, tyto matice nejsou diagonální

$$\mathbf{K}^{HD}(\omega) = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^{HD}(\omega) = \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} \\ b_{yx} & b_{yy} \end{bmatrix}. \quad (3.6.1)$$

Jelikož jde o stacionární případ, rychlost $\dot{\mathbf{q}}$ a zrychlení $\ddot{\mathbf{q}}$ polohy jsou tedy zanedbány. Vztah (3.5.9) se tedy zjednoduší do podoby

$$\mathbf{F}_{HD} - \mathbf{F}_g = 0. \quad (3.6.2)$$

Figurují zde tedy pouze gravitační a hydrodynamické síly. Vyjádření hydrodynamických sil je také zjednodušeno díky zanedbání rychlostí $\dot{\epsilon}$ a $\dot{\Phi}$. Vztah vyjadřující tyto síly (2.2.11) v tomto případě vypadá

$$\begin{aligned} F_r^{IS}(\epsilon, \omega) &= -\mu R L \left(\frac{L}{c}\right)^2 \left[\omega \cdot \frac{\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^2} \right], \\ F_t^{IS}(\epsilon, \omega) &= \mu R L \left(\frac{L}{c}\right)^2 \left[\omega \cdot \frac{\pi \epsilon}{4(1-\epsilon^2)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Tyto síly lze opět dosadit do vztahu (3.5.1). Koeficienty matic \mathbf{K}^{HD} a \mathbf{B}^{HD} lze určit pomocí vztahu [1]

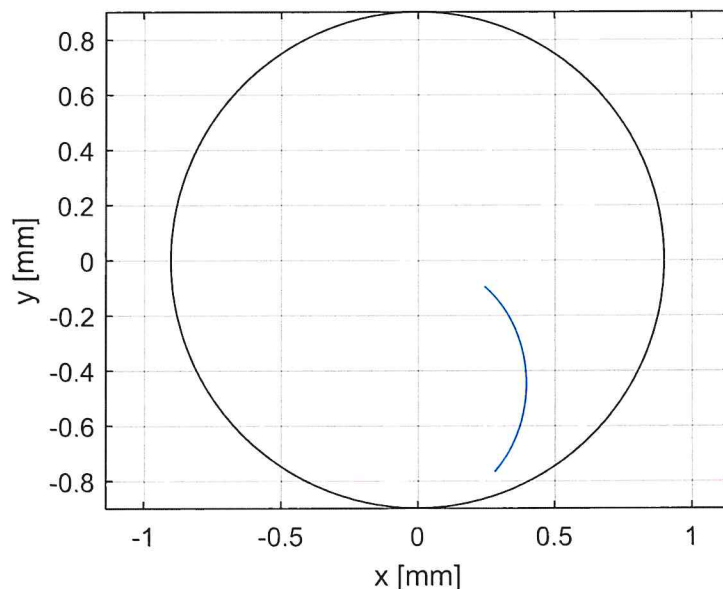
$$k_{ij} = \frac{\partial F_i^{HD}}{\partial q_j}, \quad b_{ij} = \frac{\partial F_i^{HD}}{\partial \dot{q}_j}, \quad (3.6.4)$$

kde q_j jsou složky vektoru polohy \mathbf{q} . Dosazením vztahu pro složky vektoru hydrodynamických sil (3.5.1) a aplikací transformačních vztahů, aby bylo možné vyjádřit polohu v polárním souřadnicovém systému $\mathbf{q}(\Phi, \epsilon)$ lze dosáhnout explicitního vyjádření jednot-

livých koeficientů matic **K** a **B** [1].

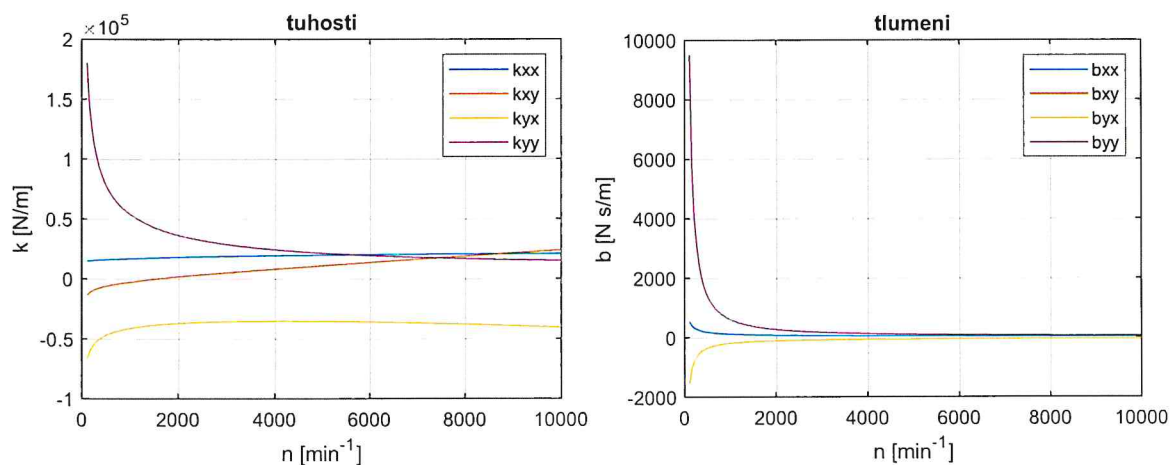
$$\begin{aligned}
 k_{xx} &= -\frac{L^3 R \mu}{c^3} \left[\varepsilon |\omega| \frac{2\varepsilon^2 + 2 - (3\varepsilon^2 + 1) \sin(\Phi)^2}{(\varepsilon^2 - 1)^3} - \frac{3\varepsilon^2 \omega \pi \sin(2\Phi)}{8(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \right], \\
 k_{xy} &= \frac{L^3 R \mu}{2c^3} \left[\pi \omega \frac{1 - \varepsilon^2 (1 - 3 \sin^2(\Phi))}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} - \frac{\varepsilon |\omega| (3\varepsilon^2 + 1) \sin(2\Phi)}{(\varepsilon^2 - 1)^3} \right], \\
 k_{yx} &= -\frac{L^3 R \mu}{2c^3} \left[\pi \omega \frac{\varepsilon^2 (2 - 3 \sin^2(\Phi)) + 1}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} + \frac{\varepsilon |\omega| (3\varepsilon^2 + 1) \sin(2\Phi)}{(\varepsilon^2 - 1)^3} \right], \\
 k_{yy} &= -\frac{L^3 R \mu}{c^3} \left[\varepsilon |\omega| \frac{1 - \varepsilon^2 + (3\varepsilon^2 + 1) \sin^2(\Phi)}{(\varepsilon^2 - 1)^3} + \frac{3\varepsilon^2 \omega \pi \sin(2\Phi)}{8(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \right], \\
 b_{xx} &= \frac{L^3 R \mu}{c^3} \left[\frac{\pi \sin^2(\Phi)}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} + \frac{\pi (2\varepsilon^2 + 1) \cos^2(\Phi)}{(\varepsilon^2 - 1)^2} \right], \\
 b_{xy} &= \frac{L^3 R \mu}{4c^3 (1 - \varepsilon^2)^{9/2}} [8(1 - \varepsilon^2)^{5/2} (\sin^2(\Phi) - \text{sign}(\omega) \cos^2(\Phi)) \\
 &\quad + 3\varepsilon \pi (\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 + 1) \sin(2\Phi)], \\
 b_{yx} &= \frac{L^3 R \mu}{4c^3 (1 - \varepsilon^2)^{9/2}} [8(1 - \varepsilon^2)^{5/2} (-\cos^2(\Phi) + \text{sign}(\omega) \sin^2(\Phi)) \\
 &\quad + 3\varepsilon \pi (\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 + 1) \sin(2\Phi)], \\
 b_{yy} &= \frac{L^3 R \mu}{c^3} \left[\frac{\pi \cos^2(\Phi)}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} - \frac{\varepsilon (1 + \text{sign}(\omega)) \sin(2\Phi)}{(\varepsilon^2 - 1)^2} \right].
 \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

Vztah (3.6.5) tedy vyjadřuje tyto koeficienty v závislosti na otáčkách a poloze čepu. Nyní je tedy potřeba určit vztah mezi těmito proměnnými veličinami. Toto lze uskutečnit vyřešením vztahu (3.6.2). Díky předchozímu zjednodušení se jedná o soustavu dvou nelineárních algebraických rovnic. Proměnné těchto rovnic pro danou úhlovou rychlost jsou parametry polohy, tedy poměrná excentricita ε a úhel natočení Φ . Řešení bylo provedeno numericky pomocí funkce `fsolve` využívající metody založené na nelineární metodě nejmenších čtverců [8]. Po provedení řešení pro jednotlivé úhlové rychlosti lze dostat soubor jednotlivých rovnovážných bodů systému [2].



Obr. 3.18: Rovnovážné body systému v závislosti na úhlové rychlosti.

Na obr. 3.18 je vyobrazeno řešení pro konstantní hodnoty uvedené v tab. 3.1 v rozmezí otáček $n \in \langle 100; 10000 \rangle$ [min^{-1}]. Černý kruh znázorňuje vymezení vřele v ložisku. Je zde vidět, jak se při zvyšující se úhlové rychlosti přibližuje hřídelový čep ke středu ložiska. Nyní lze dosadit tyto vypočtené hodnoty $\varepsilon(\omega)$ a $\Phi(\omega)$ do vztahů (3.6.5). Takto lze získat číselné vyjádření pro matice $\mathbf{K}(\omega)$ a $\mathbf{B}(\omega)$.



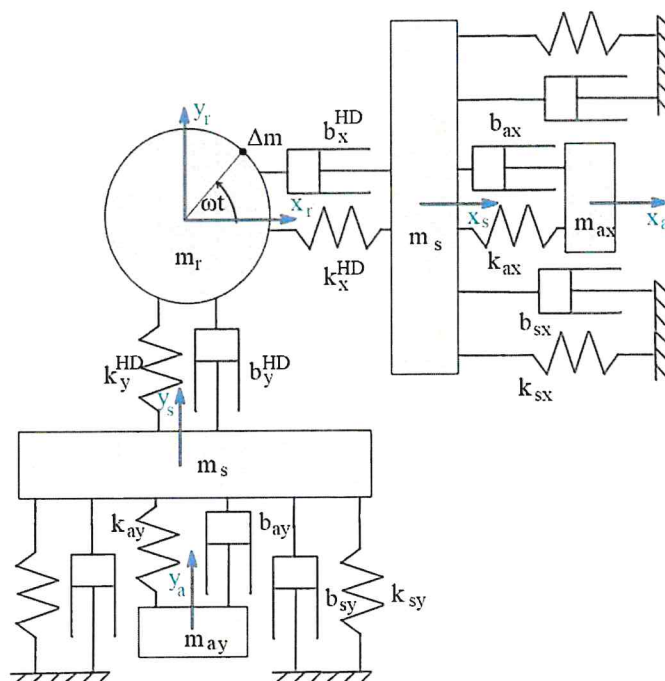
Obr. 3.19: Hodnoty koeficientů v závislosti na otáčkách.

Toto vyjádření je ukázáno na obr. 3.19. V tomto případě se hodnota tuhostí pohybuje, při otáčkách vyšších jak 1000 [min^{-1}] v řádu 10^4 [N/m]. Tlumení se s přibývajícím otáčkami zřejmě blíží k nule.

4 Aplikace hltiče na rotorový systém

4.1 Model s konstantními tuhostmi olejového filmu

Nejprve byl analyzován zjednodušený model rotoru s konstantními hodnotami tuhostí k^{HD} a tlumení b^{HD} olejového filmu a aplikovaným pasivním hltičem kmitů. Tento model je podobný modelu s poddajným ložiskovým stojanem a poddajnou hřídelí (obr. 3.8). V tomto modelu je hřídel rotoru považována za absolutně tuhou, za poddajný je považován olejový film. Aplikací hltiče model získává další dva stupně volnosti, je zde tedy šest navzájem nezávislých souřadnic: x_r, y_r, x_s, y_s jsou posuvy hřídelového čepu a ložiskového stojanu, x_a, y_a jsou posuvy hltiče.



Obr. 4.1: Schéma modelu čepu v ložisku s napojeným hltičem.

Pohybové rovnice jsou velmi podobné, jako v předchozích případech, kdy se jedná o šest vzájemně nezávislých diferenciálních rovnic. V tomto případě pohybové rovnice mají

tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_g. \quad (4.1.1)$$

Konkrétní matice a vektory jsou ve tvaru

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_a \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_x^{HD} & 0 & -k_x^{HD} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y^{HD} & 0 & -k_y^{HD} & 0 & 0 \\ -k_x^{HD} & 0 & k_x^{HD} + k_{sx} + k_{ax} & 0 & -k_{ax} & 0 \\ 0 & -k_y^{HD} & 0 & k_y^{HD} + k_{sy} + k_{ay} & 0 & -k_{ay} \\ 0 & 0 & -k_{ax} & 0 & k_{ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{ay} & 0 & k_{ay} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_x^{HD} & 0 & -b_x^{HD} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_y^{HD} & 0 & -b_y^{HD} & 0 & 0 \\ -b_x^{HD} & 0 & b_x^{HD} + b_{sx} + b_{ax} & 0 & -b_{ax} & 0 \\ 0 & -b_y^{HD} & 0 & b_y^{HD} + b_{sy} + b_{ay} & 0 & -b_{ay} \\ 0 & 0 & -b_{ax} & 0 & b_{ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_{ay} & 0 & b_{ay} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \Delta m E \omega^2 \cos(\omega t) \\ \Delta m E \omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_r g \\ 0 \\ -m_s g \\ 0 \\ -m_a g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ x_s \\ y_s \\ y_a \\ y_a \end{bmatrix}. \quad (4.1.2)$$

Cílem aplikace tohoto hltiče je co nejvíce snížit amplitudu ustálených kmitů při konstantní úhlové rychlosti odpovídající jedné z rezonančních oblastí. Toho bylo dosaženo optimalizací charakteristik hltiče. V tomto případě jsou to hmotnosti m_{ax} a m_{ay} , tuhosti k_{ax} , k_{ay} , a tlumení b_{ax} , b_{ay} . Optimalizační funkce byla definována pomocí vyjádření absolutní amplitudy čepu

$$a_r(m_{ax}, m_{ay}, k_{ax}, k_{ay}, b_{ax}, b_{ay}) = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad (4.1.3)$$

kde q_1 a q_2 jsou první dvě složky vektoru amplitud dané vztahem (3.3.9), které odpovídají souřadnicím polohy čepu x_r a y_r . Matice dynamické tuhosti je vyjádřena vztahem (3.3.6)

byla vytvořena pomocí matic dynamických koeficientů (4.1.2). Komplexní tvar amplitudy buzení figurující ve vztahu (3.3.6) byl rozšířen na tento model se šesti stupni volnosti

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \Delta m E \omega^2 \\ -i \Delta m E \omega^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1.4)$$

Optimalizace byla provedena funkcí `fmincon` využívající metodu vnitřního bodu [8]. V tab. 4.1 jsou uvedeny vstupní parametry, které byly použity pro konkrétní výpočet a v této práci jsou využity jako referenční hodnoty. Hodnoty konstantní tuhosti a tlumení oleje byly odhadnuty na základě obr. 3.19. Parametry oleje a ložiska jsou uvedeny v tab. 3.1. Kritické otáčky n_k , při kterých dochází k jednomu z rezonančních stavů byly zvoleny pomocí určení maxima amplitudové charakteristiky modelu bez implementovaného hltiče.

| Parametr | Označení | Hodnota |
|--------------------------|----------|--------------------------|
| Kritické otáčky | n_k | 823 [min ⁻¹] |
| Hmotnost kotouče | m_r | 10 [kg] |
| Hmotnost stojanu ložiska | m_s | 2 [kg] |
| Tuhost oleje | k^{HD} | $3 \cdot 10^4$ [N/m] |
| Tuhost stojanu ložiska | k_{xs} | $3 \cdot 10^5$ [N/m] |
| Tuhost stojanu ložiska | k_{ys} | $2 \cdot 10^5$ [N/m] |
| Tlumení oleje | b^{HD} | 100 [N s/m] |
| Tlumení stojanu ložiska | b_{xs} | 300 [N s/m] |
| Tlumení stojanu ložiska | b_{ys} | 600 [N s/m] |

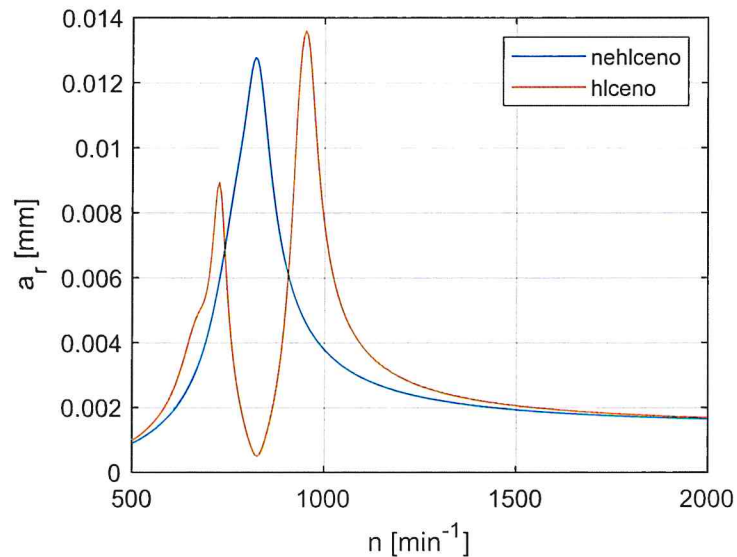
Tab. 4.1: Konkrétní parametry používané v modelu rotoru.

| Parametr | Označení | Hodnota |
|----------|----------|-------------------------|
| Hmotnost | m_{ax} | 9,97 [kg] |
| Hmotnost | m_{ay} | 9,97 [kg] |
| Tuhost | k_{ax} | $9,15 \cdot 10^4$ [N/m] |
| Tuhost | k_{ay} | $9,90 \cdot 10^4$ [N/m] |
| Tlumení | b_{ax} | 1,00 [N s/m] |
| Tlumení | b_{ay} | 1,00 [N s/m] |

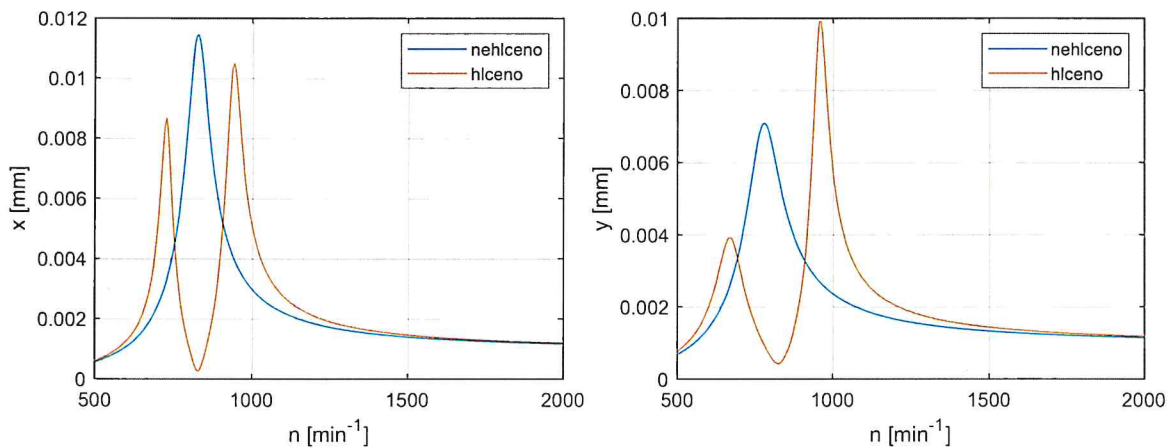
Tab. 4.2: Materiálové parametry hltiče určené optimalizací.

Výsledky optimalizace jsou uvedeny v tab. 4.2. Hodnoty ve směrech x a y jsou téměř shodné. Hmotnosti hltiče jsou podobné, jako hmotnost rotoru. Tuhosti vyšly ve stejném

řádu, jako odhadnuté tuhosti olejového filmu. Hodnoty tlumení byly učeny jako minimum zvoleného rozsahu těchto proměnných. Toto naznačuje, že idealizované hodnoty tlumení jsou nulové. Následně tyto parametry byly dosazeny do modelu s implementovaným hltičem a podle vztahů (3.3.8) a (3.3.9) byla určena amplitudová charakteristika.



Obr. 4.2: Amplitudové charakteristiky rotorových soustav daná absolutní amplitudou čepu (4.1.3) s implementovaným hltičem a bez něj.



Obr. 4.3: Amplitudové charakteristiky v jednotlivých osách polohy čepu x_r a y_r .

Na obr. 4.2 je vyobrazeno porovnání amplitudových charakteristik. Ve zvolených otáčkách se podařilo amplitudu snížit, a však snížení amplitudy bylo provedeno pouze pro tyto zvolené otáčky a jejich blízké okolí. Nakonec byla provedena modální analýza pro zjištění tvarů kmitu v jednotlivých místech rezonance. Pro jednoduchost bylo zanedbáno

tlumení. Spektrální matici a vlastní vektory \mathbf{v} lze získat vyřešením rovnice [9]

$$\det(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) = 0. \quad (4.1.5)$$

Výsledky byly získány numericky pomocí funkce `eig` [8]. Jednotlivé vlastní úhlové frekvence byly pro přehlednost přepočítány na otáčky n_i [min^{-1}]. Index i udává tvar kmitu. Těmto vlastním frekvencím přísluší složky vlastních vektorů v_{ji} ke každé nezávislé souřadnici systému [9]. Díky modální analýze lze identifikovat konkrétní rezonanční stav a podle znaménka určit tvar kmitu. Výsledky systému bez hltiče jsou uvedeny v tab. 4.3 a s hltičem v tab. 4.4.

| i | 1. | 2. | 3. | 4. |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|
| n_i [min^{-1}] | 770 | 821 | 3 741 | 4 298 |
| v_{1i} | 0 | -0,31 | 0 | -0,10 |
| v_{2i} | -0,31 | 0 | -0,08 | 0 |
| v_{3i} | 0 | -0,04 | 0 | 0,69 |
| v_{4i} | -0,10 | 0 | 0,70 | 0 |

Tab. 4.3: Výsledky modální analýzy nehlčené soustavy.

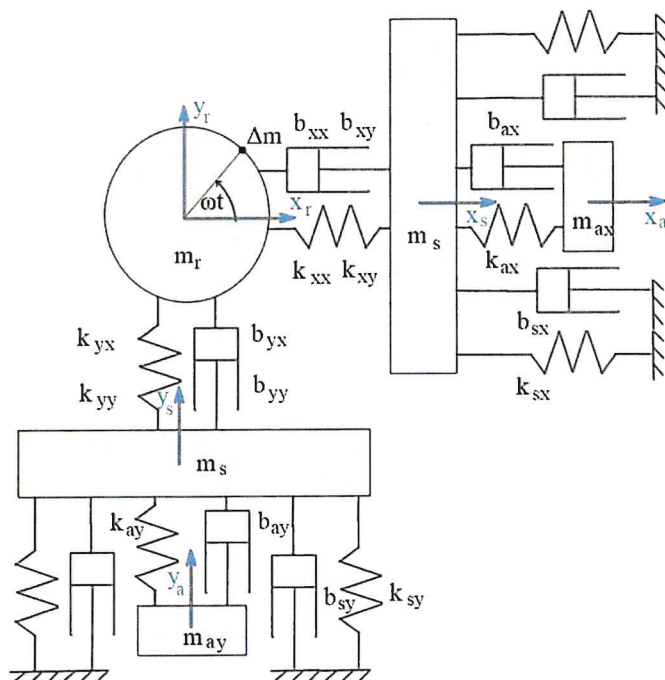
| i | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n_i [min^{-1}] | 669 | 726 | 949 | 932 | 4 286 | 4 745 |
| v_{1i} | 0 | -0,21 | 0 | 0,23 | 0 | -0,03 |
| v_{2i} | -0,22 | 0 | 0,22 | 0 | -0,04 | 0 |
| v_{3i} | 0 | -0,09 | 0 | 0,01 | 0 | 0,70 |
| v_{4i} | -0,11 | 0 | 0 | 0 | 0,70 | 0 |
| v_{5i} | 0 | -0,24 | 0 | -0,21 | 0 | -0,03 |
| v_{6i} | -0,23 | 0 | -0,23 | 0 | -0,04 | 0 |

Tab. 4.4: Výsledky modální analýzy hlcené soustavy.

Výsledky lze porovnat s amplitudovými charakteristikami na obr. 4.3, kde jsou patrné první dva tvary kmitu v nehlčené soustavě. Zde lze vyzorovat, že v těchto tvarech jednotlivé všechny hmoty kmitají ve fázi. V hlcené soustavě jsou na obr. 4.3 patrné první čtyři tvary kmitu, v prvním a druhém také všechny hmoty kmitají ve fázi.

4.2 Model s tuhostmi olejového filmu závislých na úhlové rychlosti

Dalším krokem bylo implementování dynamických koeficientů olejového filmu závislých na úhlové rychlosti ω . Tyto hodnoty jsou dány maticemi $\mathbf{K}^{HD}(\omega)$ a $\mathbf{B}^{HD}(\omega)$, definovanými vztahem (3.6.1). Koeficienty těchto matic byly určeny vztahy (3.6.5). Výsledná závislost je vyobrazena na obr. 3.19.



Obr. 4.4: Schéma modelu čepu v ložisku s napojeným hltičem.

Pohybové rovnice jsou opět vyjádřeny maticovým tvarem (4.1.1). Od minulého případu se liší tím, že konstantní koeficienty k_x^{HD} , k_y^{HD} , b_x^{HD} a b_y^{HD} jsou nahrazeny submaticemi $\mathbf{K}^{HD}(\omega)$ a $\mathbf{B}^{HD}(\omega)$ závislými na úhlové rychlosti. Konkrétně jednotlivé matice vztahu (4.1.1) vypadají následovně

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_a \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & -k_{xy} & -k_{xy} & 0 & 0 \\ k_{yx} & k_{yy} & -k_{yx} & -k_{yx} & 0 & 0 \\ -k_{xx} & -k_{xy} & k_{xx} + k_{sx} + k_{ax} & k_{xy} & -k_{ax} & 0 \\ -k_{yx} & -k_{yy} & k_{yx} & k_{yy} + k_{sy} + k_{ay} & 0 & -k_{ay} \\ 0 & 0 & -k_{ax} & 0 & k_{ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{ay} & 0 & k_{ay} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{xx} & b_{xy} & -b_{xx} & -b_{xx} & 0 & 0 \\ b_{yx} & b_{yy} & -b_{yx} & -b_{yy} & 0 & 0 \\ -b_{xx} & -b_{xy} & b_{xx} + b_{sx} + b_{ax} & b_{xy} & -b_{ax} & 0 \\ -b_{yx} & -b_{yy} & b_{yx} & b_{yy} + b_{sy} + b_{ay} & 0 & -b_{ay} \\ 0 & 0 & -b_{ax} & 0 & b_{ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_{ay} & 0 & b_{ay} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \Delta m E \omega^2 \cos(\omega t) \\ \Delta m E \omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_r g \\ 0 \\ -m_s g \\ 0 \\ -m_a g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ x_s \\ y_s \\ y_a \\ y_a \end{bmatrix}. \quad (4.2.1)$$

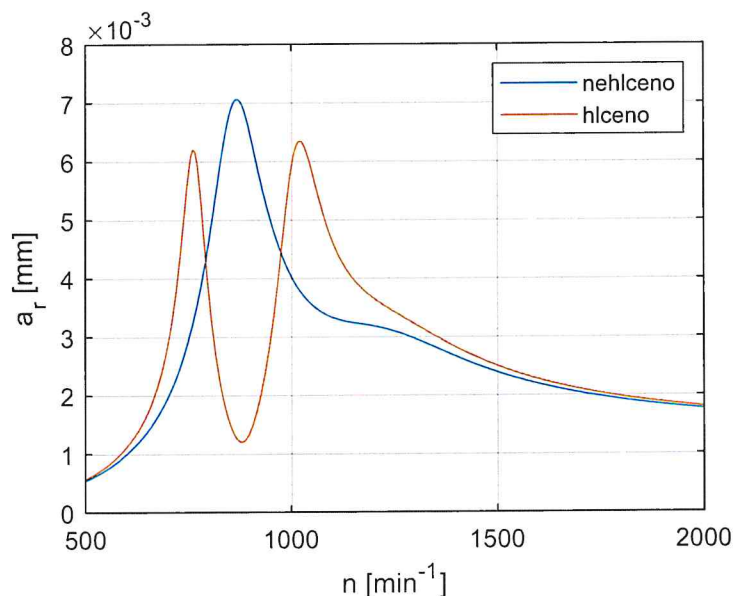
Optimalizace parametrů hltiče je provedena stejným způsobem, jako v předchozím případě. Číselné hodnoty jsou opět dosazeny z tab. 3.1 a tab. 4.1. Parametry matic $\mathbf{K}^{HD}(\omega)$ a $\mathbf{B}^{HD}(\omega)$ pro zvolený rozsah úhlových rychlostí byly vypočteny předem podle vtaů (3.6.3) a (3.6.5) postupem popsáným v předchozí kapitole. Konkrétní hodnota kritických otáček modelu bez implementovaného hltiče je velmi podobná, jako v předchozím případě

$$n_k = 855 [\text{min}^{-1}].$$

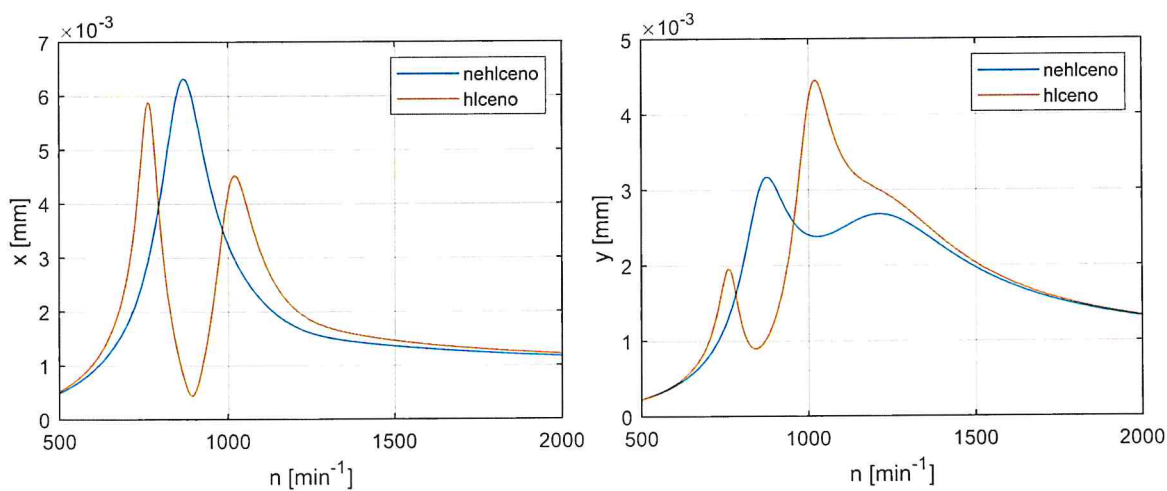
| Parametr | Označení | Hodnota |
|----------|----------|-------------------------|
| Hmotnost | m_{ax} | 9,93 [kg] |
| Hmotnost | m_{ay} | 0.01 [kg] |
| Tuhost | k_{ax} | $1,11 \cdot 10^5$ [N/m] |
| Tuhost | k_{ay} | $4,93 \cdot 10^7$ [N/m] |
| Tlumení | b_{ax} | 546 [N s/m] |
| Tlumení | b_{ay} | 1 [N s/m] |

Tab. 4.5: Materiálové parametry hltiče určené optimalizací.

V tab. 4.5 jsou uvedeny výsledky optimalizace. Při porovnání s výsledky předchozího zjednodušeného modelu v tab. 4.2 jsou hodnoty v jednotlivých osách výrazně odlišné. Parametry se liší o několik řádů. Po dosazení těchto vypočtených hodnot do vztahu (4.2.1) lze opět určit amplitudovou charakteristiku modelu s aplikovaným hltičem. Porovnání amplitudových charakteristik modelů s hltičem a bez něj je uvedeno na obr 4.5 a 4.6.



Obr. 4.5: Amplitudové charakteristiky rotorových soustav daná absolutní amplitudou čepu (4.1.3) s implementovaným hltičem a bez něj.



Obr. 4.6: Amplitudové charakteristiky v jednotlivých osách polohy čepu x_r a y_r .

Výsledky jsou tedy podobné těm předchozím na obr. 4.2 s tím rozdílem, že parametry hltiče jsou zde odlišné. Modální analýza byla pro zjednodušení provedena pro konkrétní otáčky, kterými byly kritické otáčky n_k uvedené v tab. 4.1. Výsledky pro modely s aplikovaným hltičem a bez něj jsou uvedeny v tab. 4.6 a 4.7.

| i | 1. | 2. | 3. | 4. |
|----------------------------|-------|-------|-------|--------|
| n_i [min ⁻¹] | 878 | 1 208 | 4 409 | 12 636 |
| v_{1i} | -1 | 0,1 | -0,06 | 0,01 |
| v_{2i} | -0,45 | -1 | -0,04 | -0,19 |
| v_{3i} | -0,30 | 0,06 | 0 | -0,07 |
| v_{4i} | -0,21 | -0,95 | -0,04 | 1 |

Tab. 4.6: Výsledky modální analýzy nehlčené soustavy.

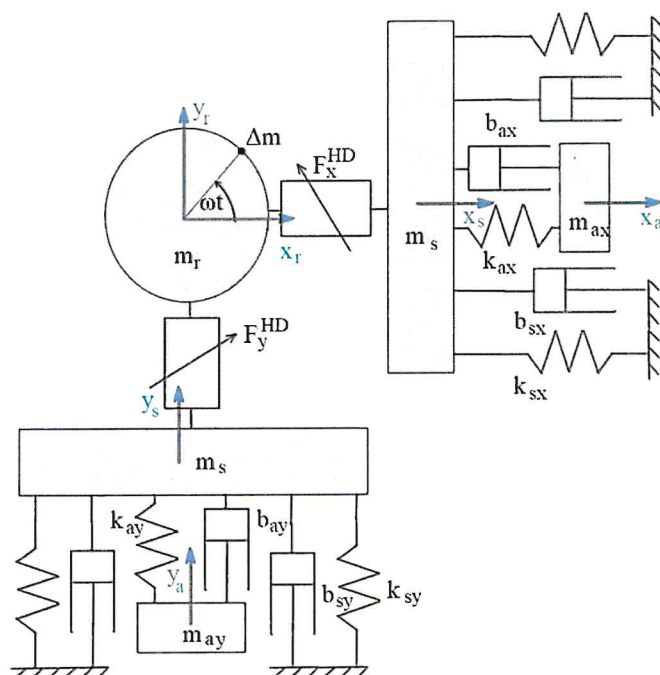
| i | 1. | 2. | 3. | 4. | 5. | 6. |
|----------------------------|-------|-------|-------|-------|--------|---------|
| n_i [min ⁻¹] | 766 | 1 020 | 1 220 | 4 952 | 12 612 | 646 620 |
| v_{1i} | -0,90 | 0,97 | 0,16 | -0,05 | 0,01 | 0 |
| v_{2i} | -0,25 | 1 | -1 | -0,04 | -0,19 | 0 |
| v_{3i} | -0,43 | 0,02 | 0,04 | 1 | -0,07 | 0 |
| v_{4i} | -0,08 | 0,64 | -0,98 | 0,34 | 1 | -0,01 |
| v_{5i} | -1,00 | -0,94 | -0,09 | -0,04 | 0 | 0 |
| v_{6i} | -0,08 | 0,64 | -0,98 | 0,34 | 1 | 1 |

Tab. 4.7: Výsledky modální analýzy hlčené soustavy.

Lze pozorovat, že díky provázanosti tohoto modelu se vlastní tvary kmitu projevují jak ve směrech x a y současně. Na obr. 4.6 jsou zřetelné první dva tvary kmitu pro nehlčený model a pouze první tři pro model hlčený, čímž se také tyto výsledky liší od výsledků modální analýzy předchozího modelu. Tam v intervalu otáček $n \in \langle 500, 2000 \rangle$ vyšly čtyři tvary kmitu.

4.3 Model se zakomponovanými nelineárními silami

Poslední model ložiska je popsán nelineárními hydrodynamickými silami F_x^{HD} a F_y^{HD} popsány vztahem (3.5.1) uvedeným v předchozí kapitole. Do tohoto modelu budou dosazeny parametry hltiče z tab. 4.5, poslouží tedy k porovnání s předchozími modely.



Obr. 4.7: Schéma modelu čepu v ložisku s napojeným hltičem.

Jelikož jsou zde hydrodynamické účinky popsány pomocí nelineárních sil, nikoliv tuhostmi a tlumeními vazební submatice vyjadřující tyto veličiny jsou nulové. Vyjádření vztahu (4.1.1) s přidáním vektoru hydrodynamických sil \mathbf{F}^{HD} vypadá následovně

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_g + \mathbf{F}^{HD}.$$

Jednotlivé prvky tohoto vztahu jsou

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_r \\ y_r \\ x_s \\ y_s \\ y_a \\ y_a \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{sx} + k_{ax} & 0 & -k_{ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{sy} + k_{ay} & 0 & -k_{ay} \\ 0 & 0 & -k_{ax} & 0 & k_{ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_{ay} & 0 & k_{ay} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{sx} + b_{ax} & 0 & -b_{ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{sy} + b_{ay} & 0 & -b_{ay} \\ 0 & 0 & -b_{ax} & 0 & b_{ax} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_{ay} & 0 & b_{ay} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} \Delta m E \omega^2 \cos(\omega t) \\ \Delta m E \omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_g = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_r g \\ 0 \\ -m_s g \\ 0 \\ -m_a g \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{HD} = \begin{bmatrix} F_x^{HD} \\ F_y^{HD} \\ -F_x^{HD} \\ -F_y^{HD} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3.1)$$

Pro vyjádření excentricity čepu e a polohového úhlu Φ se kterými operuje vyjádření hydrodynamických sil (3.5.1) je nutné dosadit relativní polohové souřadnice vůči poloze ložiskového stojanu x_s a y_s . Souřadnice popisující excentricitu jsou uvedeny ve vztahu (3.5.2)

$$e = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Vyjádření těchto souřadnic a jejich derivací, se kterými se také operuje v tomto modelu vypadá

$$x = x_r - x_s, \quad y = y_r - y_s, \quad \dot{x} = \dot{x}_r - \dot{x}_s, \quad \dot{y} = \dot{y}_r - \dot{y}_s. \quad (4.3.2)$$

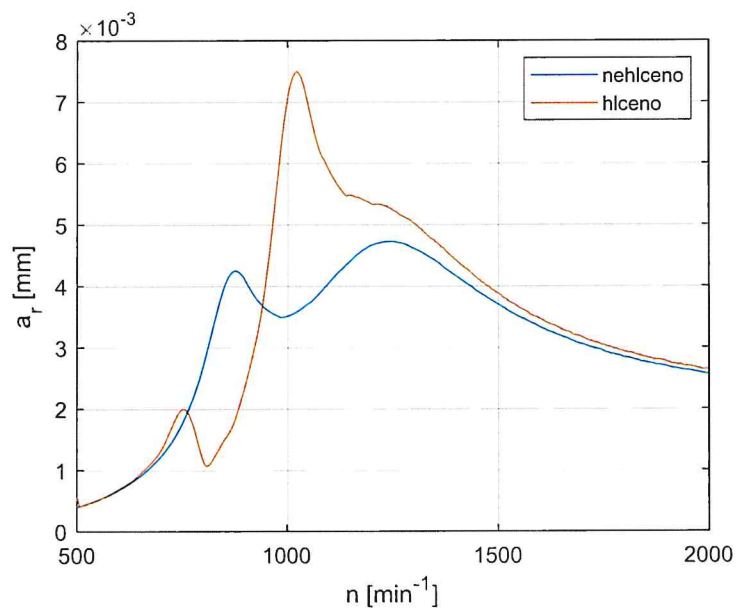
Podobně jako bylo popsáno v předchozí kapitole, amplitudová charakteristika tohoto modelu byla získána jednotlivým řešením této soustavy nelineárních diferenciálních rovnic ve zvoleném rozsahu otáček n . Řešení bylo opět provedeno pomocí funkce ode15s [8] pomocí rozšíření vztahu (3.5.11)

$$\dot{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{c} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}^{-1} (-\mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}^{HD} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_g) \end{array} \right]. \quad (4.3.3)$$

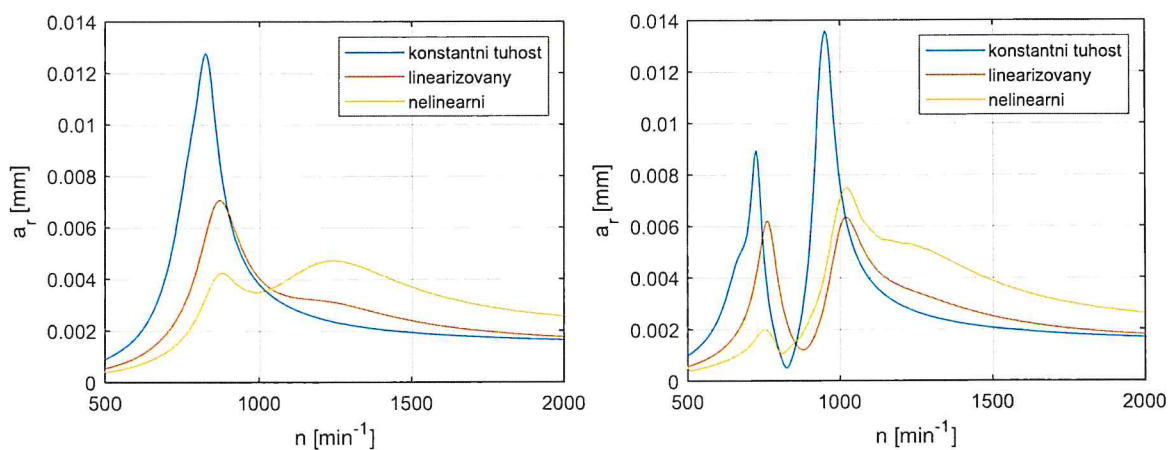
Konkrétně amplitudy polohy hřídelového čepu byly získány jako rozdíl maxim x_r^{max} , y_r^{max} a minim x_r^{min} , y_r^{min} . Celková amplituda čepu byla získána jako absolutní hodnota těchto rozdílů poloh obou souřadnic

$$a_r = \sqrt{(x_r^{max} - x_r^{min})^2 + (y_r^{max} - y_r^{min})^2} \quad (4.3.4)$$

Výsledky jsou ukázány na obr. 4.8. Rezonanční oblasti jsou zde srovnatelné, jako v předchozím případě linearizovaného modelu. Vrcholy rezonančních stavů jsou však odlišné. Ve vybraných otáčkách však byla amplituda minimalizována, lze tedy říci, že linearizovaný model pro účel optimalizace hltiče je dostatečný.



Obr. 4.8: Amplitudové charakteristiky rotorových soustav daná absolutní amplitudou čepu (4.3.4) s implementovaným hltičem a bez něj.



Obr. 4.9: Porovnání všech uvedených amplitudových charakteristik absolutní amplitudy čepu.

Na obr. 4.9 jsou zobrazeny všechny tři dosažené výsledky dohromady. Vlevo jsou modelů bez aplikovaného hltiče, vpravo s aplikovaným hltičem. Je zde vidět, že rezonanční vrcholy modelu s odhadnutými dynamickými koeficienty se příliš neliší. Dále si lze povšimnout, že lokální minimum linearizovaného modelu s aplikovaným hltičem nastává při vyšších otáčkách, než u nelineárního modelu.

5 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo zanalyzovat kmitání rotorové soustavy se zakomponovaným vlivem nelineárních hydrodynamických sil v kluzném ložisku a následně pomocí této analýzy navrhnout dynamické parametry pro pasivní hltič kmitů.

Nejprve zde byly představeny základní principy pasivního hltiče a vztahy pro silové účinky mazání odvozené z Reynoldsovy rovnice. Následně byly vytvořeny jednoduché modely rotorového systému. Základním a nejjednodušším modelem byl Lavalův rotor. Tento model byl postupně rozšiřován dalšími prvky rotorové soustavy, následně byl analyzován rezonanční stav těchto modelů. Dalším krokem bylo zakomponování nelineárních hydrodynamických sil s následnou analýzou rezonančního stavu a následné ztráty stability za doprovodu jevů nazvané jako "oil whirl" a "oil whip". Za předpokladu, že při provozních otáčkách rotorové soustavy tato nestabilita nenastává, byl tento model linearizován. Tím byly získány dynamické koeficienty olejového filmu závislé na otáčkách rotoru.

Dalším krokem bylo vytvoření modelu s aplikovaným pasivním hltičem s následnou optimalizací dynamických koeficientů tohoto prvku. Cílem optimalizace bylo maximální snížení amplitudy v rezonanční oblasti při konkrétních otáčkách. Byly zde uvažovány tři modely. Nejdříve byly dynamické koeficienty pro olejový film odhadnuty, následně byly použity výsledky získané linearizací hydrodynamických sil. Pro ověření důvěryhodnosti získaných výsledků byly získané dynamické koeficienty dosazeny do modelu uvažujícího hydrodynamické síly v původní nelineární podobě. Bylo zjištěno, že linearizovaný model je dostatečně přesný pro účel optimalizace hltičů, i když některé rezonanční vrcholy se mírně lišily od výsledků nelinearizovaného modelu.

Literatura

- [1] L. S. Andrés. Dynamics of a rigid rotor-fluid film bearing system. URL <https://rotorlab.tamu.edu/>.
- [2] Y. Bastani and M. de Queiroz. A new analytic approximation for the hydrodynamic forces in finitlength journal bearings. *Journal of Tribology*, 2010. doi: [tribology.asmedigitalcollection.asme.org](https://doi.org/10.1115/1.4000000).
- [3] Dyk, Rendl, Byrtus, and Smolík. Dynamic coefficients and stability analysis of finite-length journal bearings considering approximate analytical solutions of the reynolds equation. *Tribology International*, 2019. doi: [www.elsevier.com/locate/triboint](https://doi.org/10.1016/j.triboint.2019.04.010).
- [4] M. Hassan, A. Elsayed, B. El-Souhily, H. Elgamal, and M. M. Elshabasy. Investigating the effect of augmenting the anti-roll-bar with a torsional-dynamic-absorber on the handling-stability and the ride-comfort of the off-road-vehicles. *Alexandria Engineering Journal*, 2023. doi: [www.elsevier.com/locate/aej](https://doi.org/10.1016/j.aej.2023.04.010).
- [5] Y. Hori. *Hydrodynamic Lubrication*. Springer-Verlag Tokyo, 2002.
- [6] M. Khonsari and R. Booser. *APPLIED TRIBOLOGY BEARING DESIGN AND LUBRICATION*. John Wiley Sons Ltd, 2017.
- [7] E. Krämer. *Dynamics of Rotors and Foundations*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- [8] MathWorks. Matlab version: R2022a, 2022. URL <https://www.mathworks.com>.
- [9] Slavík, Stejskal, and Zeman. *Základy dynamiky strojů*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997.
- [10] L. Smolík. A time-frequency analyser for matlab - autofft, 2022. URL <https://github.com/LubosSmolik/autofft>.
- [11] M. Sviták. V temelíně instalovali zařízení na snížení chvění turbíny. URL <https://www.cez.cz/cs/pro-media/tiskove-zpravy>.
- [12] J. Taghipour, M. Dardel, and M. H. Pashaei. Vibration mitigation of a nonlinear rotor system with linear and nonlinear vibration absorbers. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2018. doi: [ww.elsevier.com/locate/cnsns](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.010).
- [13] J. Taghipour, M. Dardel, and M. H. Pashaei. A review of the mechanical inerter: historical context, physical realisations and nonlinear applications. *Springer*, 2021.

- [14] F. Yang, R. Sedaghati, and E. Esmailzadeh. Vibration suppression of structures using tuned mass damper technology: A state-of-the-art review. *Journal of Vibration and Control*, 2021.
- [15] J. Zelený. *Stavba strojů, strojní součásti*. Computer Press Brno, 2007.