ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

KUBICKÉ A BIKVADRATICKÉ ROVNICE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Adéla Vávrová

Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2024

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni dne …………………

....

vlastnoruční podpis

OBSAH

SEZNAM ZKRATEK

N	obor přirozených čísel
R	obor reálných čísel
C	obor komplexních čísel
Im[z]	imaginární část komplexního čísla
Re[z]	reálná část komplexního čísla
$\in$	náleží
i	imaginární jednotka
D_n	diskriminant algebraické rovnice n-tého stupně

ÚVOD

Algebraické rovnice jsou nezbytnou součástí matematiky. Slouží k řešení různých problémů jak v matematice, tak i v ostatních oblastech. Mezi tyto rovnice patří kubické a bikvadratické rovnice, které jsou také tématem této práce. Celá bakalářská práce je rozdělena do pěti samostatných kapitol.

První kapitola se bude věnovat zavedení komplexních čísel a operacím s nimi. Komplexní čísla jako taková jsou nezbytná pro obecné řešení algebraických rovnic. Dále bude v první kapitole zmíněna i základní věta algebry.

Ve druhé kapitole se zaměříme na transformace rovnic. Z větší části si ukážeme různé typy substitucí, které lze využít k úpravám algebraických rovnic na jednodušší tvar.

Třetí kapitola se zaměří na historii řešení algebraických rovnic. Stručně shrne historický vývoj řešení algebraických rovnic od starověku až po středověk.

Čtvrtá kapitola přiblíží řešení bikvadratických rovnic. Nejprve si popíšeme kvadratickou rovnici, jejíž řešení je pro bikvadratickou rovnici nezbytné. Poté se už zaměříme na bikvadratickou rovnici a to na její grafické i obecné řešení.

Poslední kapitola se bude věnovat kubickým rovnicím. Přiblíží řešení algebraické rovnice třetího stupně pomocí grafického znázornění, řešení některých speciálních tvarů a obecné řešení pomocí Cardanových vzorců.

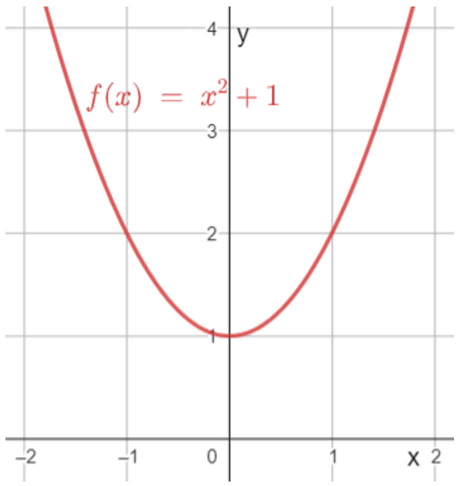
Cílem této bakalářské práce je uceleně přiblížit řešení kubických a bikvadratických rovnic od teoretického základu až po řešení konkrétních příkladů. Měla by poskytnout možnost procvičení práce s komplexními čísly, úprav rovnic a řešení vybraných algebraických rovnic druhého až čtvrtého stupně.

1 KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Při hledání kořenů algebraických rovnic pracujeme s n-tými odmocninami čísel. Ne vždy je řešením algebraické rovnice číslo z oboru reálných čísel, proto je pro jejich řešení třeba zavést další, obecnější obor čísel, který nám obor reálných čísel rozšíří a umožní nám tak najít kořeny i zdánlivě neřešitelných rovnic. Základní úloha, která nám bude v této kapitole sloužit jako motivace, je nalezení kořenů kvadratické rovnice v následujícím tvaru:

$$x^2 + 1 = 0,$$

která nemá řešení v oboru reálných čísel. To je patrné i z funkce $f(x) = x^2 + 1$, na jejímž grafu nenajdeme žádné průsečíky s osou x.



Obrázek 1 Grafické funkce $f(x) = x^2 + 1$ (obrázek: autor)

Po úpravě dostáváme rovnici:

$$x^2 = -1.$$

Tedy:

$$x = \pm\sqrt{-1}.$$

Otázka, která nás tedy bude zajímat je, čemu se rovná $\sqrt{-1}$.

1.1 HISTORIE

Už ve starověku matematici přišli na to, že některé úlohy vedoucí na algebraické rovnice, zpravidla druhého a třetího stupně, zdánlivě nemají řešení. Bohužel nebyli matematici schopni rovnice, které vedly na $\sqrt{-1}$, řešit až do novověku.

Prvně se komplexní čísla objevila v první polovině 16. století, kdy došlo k popsání řešení kubických rovnic. Tyto postupy byly zveřejněny v knihách Ars Magna od Gerolama Cardana z roku 1545 a později L'Algebra parte maggiore dell'Aritmetica od Rafaela Bombelliho vydané v roce 1572.

Do konce novověku, v průběhu 17. a 18. století, se o komplexní čísla zajímalo mnoho dalších matematiků a došlo tak k zavedení termínů a značení, které u komplexních čísel používáme i dnes. Za zmínku jistě stojí dva francouzští matematici Albert Girard, který jako jeden z prvních formuloval Základní větu algebry, o které bude řeč níže, a René Descartes, který zavedl termín imaginární číslo. V 18. století pak švýcarský matematik Leonhard Euler vyšel ze slova imaginaire a zavedl symbol i pro $\sqrt{-1}$, což velmi zjednodušilo matematický zápis komplexních čísel. Další známí matematici, kteří v této době s komplexními čísli počítali jsou Isaac Newton, Johann Bernoulli nebo Abraham de Moivre. Na konci novověku byla již imaginární čísla nedílnou součástí nejen matematiky, ale i fyziky.

Na povrch však vyvstal nový problém a to, jak si komplexní čísla představit. Jelikož číselná osa byla již zcela zaplněná oborem reálných čísel, čelili matematici problému, jak komplexní čísla intuitivně graficky interpretovat. První naznačení geometrické interpretace jako spojení bodů roviny s komplexními čísly se objevilo už na konci 17. století v díle anglického matematika Johna Wallise. Jeho nápad byl však z větší části ignorován. Znovu se propojení roviny s oborem komplexních čísel objevilo o sto let později roku 1799 v knize norského kartografa a geodeta Caspara Wessela, který ve svém díle Om Directionens analytiske Betegning, et Forsøg anvendt fornemmeling til plane og sphaeriske Polygoners Opløsningnabídl nabídl geometrické znázornění komplexních čísel jako bodů nebo vektorů roviny. I toto dílo nesklidilo velký zájem a mezi světové matematiky se dostalo až po roce 1897, kdy bylo přeloženo do francouzštiny. Švýcarského matematika Jean Roberta Arganda zaujal vztah $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$ a $\sqrt{-1}$ tak interpretoval jako rotaci roviny o 90° (CHOCHOLOVÁ, a další, 2011).

K univerzálnímu přijetí myšlenky oboru komplexních čísel a jejich geometrické interpretace došlo až v první polovině 19. století působením francouzského matematika Augustina-Louise Cauchyho a německého matematika Carla Friedricha Gausse, který komplexní čísla a jejich geometrickou interpretaci využil k důkazu základní věty algebry ve své disertační práci. Ve stejné době byly také přijaty goniometrické a algebraické tvary komplexních čísel tak, jak je známe dnes.

William Rowan Hamilton představil v první polovině 19. století komplexní čísla jako uspořádanou dvojici reálných čísel. Zároveň také podal ucelenou aritmetickou teorii komplexních čísel (BEČVÁŘ, 2007).

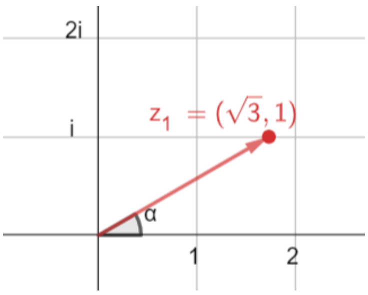
1.2 ZAVEDENÍ KOMPLEXNÍCH ČÍSEL

Definice 1.1: Komplexní číslo z je uspořádaná dvojice reálných čísel (u, v), kde $u, v \in \mathbf{R}$; u nazýváme reálnou částí a v imaginární částí komplexního čísla. Množinu všech komplexních čísel značíme $\mathbf{C}$.

Komplexní čísla ve tvaru $(0, v)$, kde $v \neq 0$, jsou čísla ryze imaginární, která leží na ose imaginární. Komplexní čísla ve tvaru $(u, 0)$ jsou čísla reálná a tvoří reálnou osu. Z toho vyplývá, že množina reálných čísel $\mathbf{R}$ je podmnožinou množiny komplexních čísel $\mathbf{C}$.

Reálnou část někdy označujeme jako Re[z]. Imaginární část má označení Im[z].

Zápis komplexních čísel jako uspořádané dvojice nám poslouží k zavedení komplexní neboli Gaussovy roviny. Komplexní rovina je geometrickou interpretací oboru komplexních čísel a zobrazuje komplexní čísla z jako vektory, popřípadě body, se souřadnicemi (u, v). Můžeme si ji přestavit jako kartézskou soustavu souřadnic, kde se vodorovná osa nazývá reálná a svislá osa imaginární. V této práci budeme používat hlavně geometrické znázornění komplexních čísel jako vektorů komplexní roviny, které může být v některých případech o něco složitější, ale lze ho velmi dobře využít pro znázornění operací sčítání a násobení. Na obrázku níže je zobrazeno komplexní číslo $z_1 = (\sqrt{3}; 1)$ jako vektor i bod.



Obrázek 2 Geometrická interpretace komplexního čísla (obrázek: autor)

S komplexními čísly se ale při řešení algebraických rovnic setkáme převážně ve tvaru algebraickém, či goniometrickém. Tyto tvary si tedy zavedeme.

Definice 1.2: Algebraický tvar komplexního čísla $z = (u, v)$ je výraz $z = u + vi$, kde $u, v \in \mathbf{R}$ a i je imaginární jednotka.

Pro imaginární jednotku i platí rovnice $i^2 + 1 = 0$. Imaginární jednotka tedy označuje $\sqrt{-1}$.

Definice 1.3: Goniometrický tvar nenulového komplexního čísla $z = (u, v)$ je výraz $z = |z|(cos\,\alpha + i \cdot sin\,\alpha)$, kde $|z|$ je velikost komplexního čísla, i je imaginární jednotka a $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$ je argument komplexního čísla z.

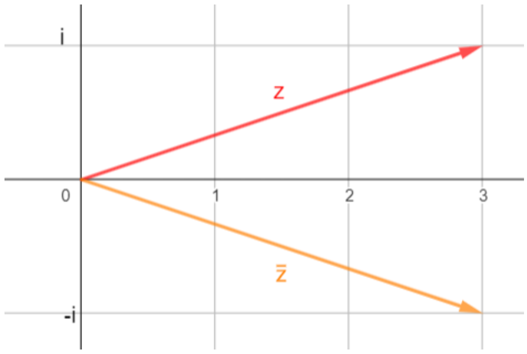
Velikost komplexního čísla si můžeme představit jako velikost vektoru $\vec{z} = (u, v)$ to znamená $|z| = \sqrt{u^2 + v^2}$. Vypočítáme tak vzdálenost komplexního čísla od počátku v komplexní rovině. Argument komplexního čísla α lze vypočítat pomocí vztahů pro pravoúhlé trojúhelníky a platí pro něj $cos\,\alpha = \frac{u}{|z|}$ a $sin\,\alpha = \frac{v}{|z|}$.

Dalším možným zápisem komplexních čísel je tvar exponenciální, který vychází z rovnosti $e^{i\alpha} = (cos\,\alpha + i \cdot sin\,\alpha)$.

Definice 1.4: Exponenciální tvar nenulového komplexního čísla $z = (u, v)$ je výraz $z = |z|e^{i\alpha}$, kde $|z|$ je velikost komplexního čísla, i je imaginární jednotka a $\alpha \in \langle 0, 2\pi)$ je argument komplexního čísla z.

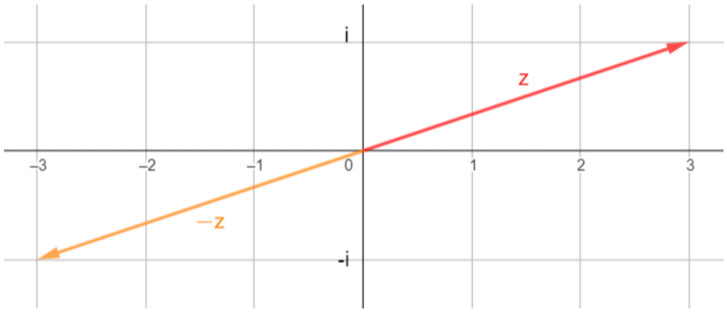
Dále si nadefinujeme komplexní čísla opačná a komplexně sdružená.

Definice 1.5: Komplexní čísla $z = (u, v)$ a $\bar{z} = (u, -v)$ nazýváme čísla komplexně sdružená.



Obrázek 3 Čísla komplexně sdružená (obrázek: autor)

Definice 1.6: Komplexní čísla $z = (u, v)$ a $-z = (-u, -v)$ nazýváme čísla opačná.



Obrázek 4 Opačná komplexní čísla (obrázek: autor)

Opačná komplexní čísla nám mohou usnadnit rozdíl komplexních čísel, kdy místo odečtení komplexního čísla můžeme přičíst číslo opačné.

1.2.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: Zapišme komplexní číslo $z_1 = (\sqrt{3}, 1)$ v algebraickém, goniometrickém tvaru a exponenciálním tvaru.

Řešení: Algebraický tvar je zřejmě:

$$z_1 = \sqrt{3} + i.$$

Nalezení goniometrického tvaru je už složitější. Nejprve si určíme velikost zadaného komplexního čísla a jeho argument:

$$|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Pomocí vypočítaných hodnot komplexní číslo přepíšeme do goniometrického tvaru:

$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right).$$

Pro zápis komplexního čísla z_1 v exponenciálním tvaru použijeme již vypočítanou velikost $|z_1|$ a argument α a zapíšeme jej jako:

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

Příklad 2: Převeďme komplexní číslo $z_2 = 4 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right)$ do algebraického tvaru.

Řešení: Vypočítáme hodnoty goniometrických funkcí a upravíme na algebraický tvar:

$$z_2 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 + 2\sqrt{3} \cdot i.$$

Příklad 3: Převeďme komplexní číslo $z_3 = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$ do algebraického tvaru.

Řešení: Z definice exponenciálního tvaru komplexního čísla víme, že:

$$|z_3| = 2\sqrt{2} \qquad \alpha = \frac{7\pi}{4}.$$

Komplexní tedy zapíšeme v goniometrickém tvaru a následně převedeme do algebraického tvaru jako v předchozím příkladu:

$$z_3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - 2i.$$

Příklad 4: Nalezněme číslo komplexně sdružené a číslo opačné ke komplexnímu číslu $z_4 = -2 + 3i$ a ukažme jejich grafickou interpretaci.

Řešení: Komplexní číslo si převedeme do tvaru uspořádané dvojice, abychom mohli použít definice čísel komplexně sdružených a opačných komplexních čísel:

$$z_4 = -3 + 2i = (-3, 2).$$

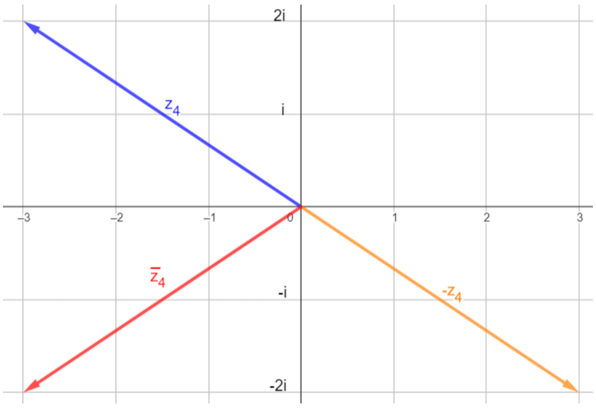
Pro nalezení komplexně sdruženého čísla využijeme danou definici:

$$\overline{z_4} = (-3, -2) = -3 - 2i.$$

Pomocí definice nalezneme opačné komplexní číslo čísla z_4:

$$-z_4 = (3, -2) = 3 - 2i.$$

Graficky tato čísla můžeme zobrazit takto:



Obrázek 5 Číslo opačné a komplexně sdružené s číslem z4 (obrázek: autor)

1.3 OPERACE S KOMPLEXNÍMI ČÍSLY

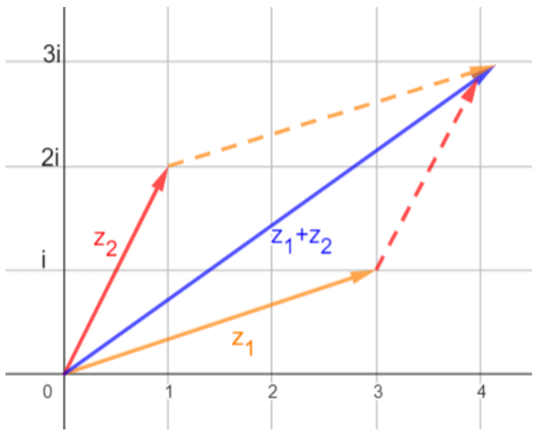
Na množině všech komplexních čísel **C** máme definovány stejné algebraické operace, které známe z množiny reálných čísel **R**. Operace sčítání, odčítání, násobení a dělení si ukážeme jak pro komplexní čísla ve tvaru uspořádané dvojice, tak ve tvaru algebraickém, se kterým se při řešení algebraických rovnic setkáme nejčastěji. Násobení a dělení si navíc ještě uvedeme pro komplexní čísla v goniometrickém tvaru pro větší názornost.

Součet dvou komplexních čísel $z_1 = (u_1, v_1) = u_1 + v_1 i$ a $z_2 = (u_2, v_2) = u_2 + v_2 i$ je roven:

$$z_1 + z_2 = (u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$$

$$z_1 + z_2 = (u_1 + v_1 i) + (u_2 + v_2 i) = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)i.$$

Můžeme si všimnout, že sčítáme-li dvě komplexní čísla ve tvaru uspořádané dvojice, chová se součet stejně jako u vektorů. Při sčítání komplexních čísel v algebraickém tvaru se komplexní čísla chovají podobně jako mnohočleny. Součet komplexních čísel lze graficky znázornit jako sčítání vektorů v komplexní rovině.



Obrázek 6 Grafický součet dvou komplexních čísel (obrázek: autor)

Odčítání komplexních čísel se chová podobně jako sčítání. Rozdíl dvou komplexních čísel $z_1 = (u_1, v_1) = u_1 + v_1 i$ a $z_2 = (u_2, v_2) = u_2 + v_2 i$ je roven:

$$z_1 + z_2 = (u_1, v_1) - (u_2, v_2) = (u_1 - u_2, v_1 - v_2)$$

$$z_1 + z_2 = (u_1 + v_1 i) - (u_2 + v_2 i) = (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)i.$$

Násobení komplexních čísel je již o něco složitější a vycházíme u něj ze vztahu $i \cdot i = -1$. Z tohoto důvodu provádíme součin komplexních čísel spíše v jejich algebraickém tvaru. Součin komplexních čísel $z_1 = (u_1, v_1) = u_1 + v_1 i$ a $z_2 = (u_2, v_2) = u_2 + v_2 i$ je roven:

$$z_1 \cdot z_2 = (u_1, v_1) \cdot (u_2, v_2) = (u_1 v_1 - u_2 v_2, u_1 v_2 + u_2 v_1)$$

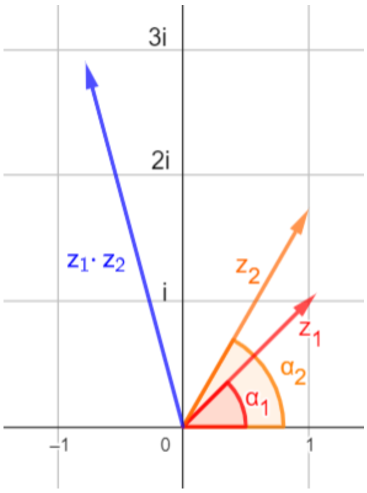
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 = (u_1 + v_1 i) \cdot (u_2 + v_2 i) &= u_1 v_1 + u_1 v_2 i + u_2 v_1 i + u_2 v_2 i^2 \\ &= (u_1 v_1 - u_2 v_2) + (u_1 v_2 + u_2 v_1) i. \end{aligned}$$

Součin v algebraickém tvaru je opět podobný, jako ten u dvojčlenů. Rozdíl je ale v tom, že využíváme vztahu $i^2 = -1$, proto je součin imaginárních částí reálný a rovný $v_1 i \cdot v_2 i = -v_1 v_2$.

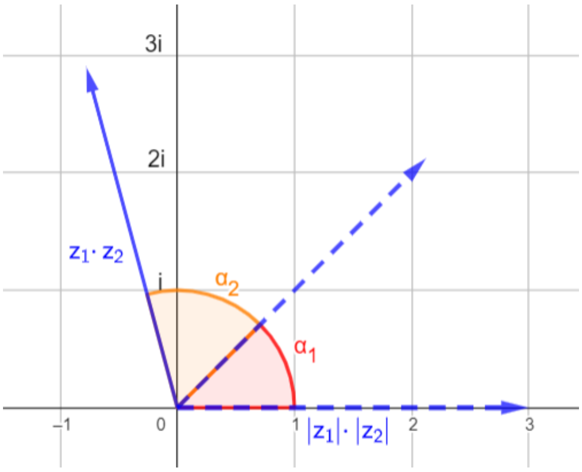
Pro grafické znázornění násobení komplexních čísel využijeme jejich goniometrický tvar, který mnohem lépe popisuje, co se v komplexní rovině při násobení děje.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(cos\,\alpha_1 + i \cdot sin\,\alpha_1) \cdot |z_2|(cos\,\alpha_2 + i \cdot sin\,\alpha_2) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|((cos\,\alpha_1\, cos\,\alpha_2 - sin\,\alpha_1\, sin\,\alpha_2) + i(cos\,\alpha_1\, sin\,\alpha_2 + sin\,\alpha_1\, cos\,\alpha_2)) \\ &= |z_1| \cdot |z_2|(cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \cdot sin(\alpha_1 + \alpha_2)) \end{aligned}$$

Z tohoto výpočtu vyplývá, že násobením komplexních čísel získáme nové komplexní číslo s velikostí $|z_1| \cdot |z_2|$, které s reálnou osou svírá úhel rovný součtu $\alpha_1 + \alpha_2$. Můžeme si ho představit jako násobení čísel $|z_1|$ a $|z_2|$ z oboru reálných čísel, jehož výsledek se bude stále nacházet na reálné ose, a následné otočení celé soustavy o úhel $\alpha_1 + \alpha_2$.



Obrázek 7 Grafické znázornění součinu dvou komplexních čísel (obrázek: autor)



Obrázek 8 Otočení soustavy pro nalezení součinu komplexních čísel (obrázek: autor)

Dělení komplexních čísel je o něco složitější než násobení. Podíl dvou komplexních čísel $z_1 = (u_1, v_1) = u_1 + v_1 i$ a $z_2 = (u_2, v_2) = u_2 + v_2 i$, kde $z_2 \neq 0$ je roven:

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{{u_2}^2 + {v_2}^2}, \frac{u_1 v_2 - u_2 v_1}{{u_2}^2 + {v_2}^2}\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{u_1 + v_1 i}{u_2 + v_2 i} = \frac{(u_1 + v_1 i\,)(u_2 - v_2 i)}{{u_2}^2 + {v_2}^2} = \frac{(u_1 u_2 + v_1 v_2) + (u_1 v_1 - u_1 v_2)i}{{u_2}^2 + {v_2}^2}$$

Pro lepší představu si ukážeme podíl v goniometrickém tvaru.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(cos\,\alpha_1 + i \cdot sin\,\alpha_1)}{|z_2|(cos\,\alpha_2 + i \cdot sin\,\alpha_2)}$$

$$= \frac{|z_1|((cos\,\alpha_1\, cos\,\alpha_2 + sin\,\alpha_1\, sin\,\alpha_2) + (cos\,\alpha_1\, sin\,\alpha_2 - sin\,\alpha_1\, cos\,\alpha_2)i)}{|z_2|(cos\,{\alpha_2}^2 + sin\,{\alpha_2}^2)}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}(cos(\alpha_1 - \alpha_2) + i \cdot sin(\alpha_1 - \alpha_2))$$

Na rozdíl od oboru reálných čísel **R**, existuje v oboru komplexních čísel **C** n-tá odmocnina každého čísla $z \in$ **C**.

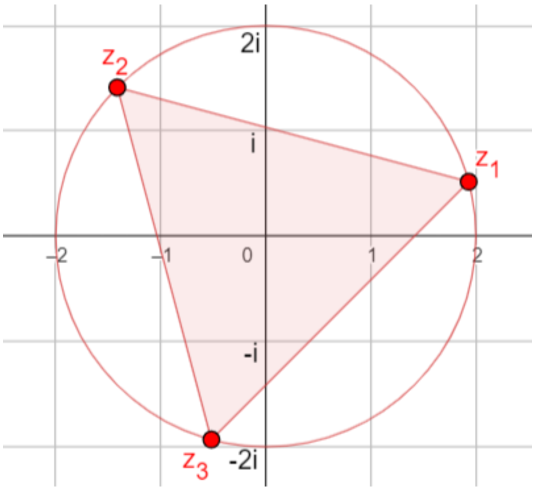
Definice 1.7: Pro $n \in$ **N** n-tá odmocnina z komplexního čísla z je každé komplexní číslo s, pro které platí rovnost $z = s^n$.

Platí, že každé komplexní číslo $z \neq 0$ má právě n různých n-tých odmocnin, které můžeme najím pomocí následujícího vzorce:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{z} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right), k = 0, 1, \dots, n-1,$$

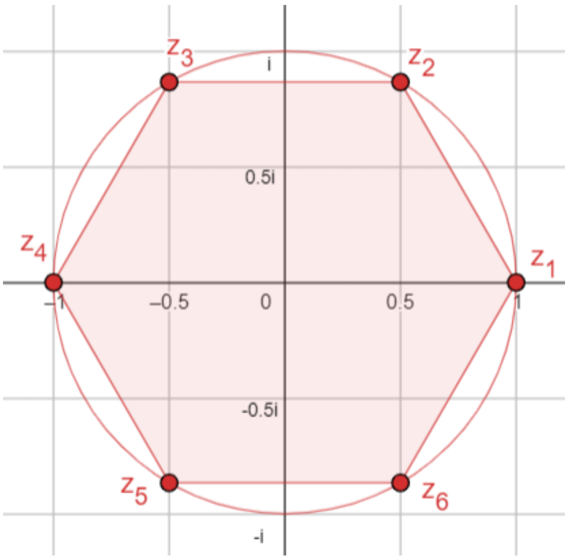
kde $n \in \mathbf{N}$, α je argument komplexního čísla z.

Pro geometrickou interpretaci odmocniny komplexního čísla použijeme znázornění pomocí bodů roviny. Hodnoty n-té odmocniny komplexního čísla leží na vrcholech pravidelného n-úhelníku se středem v počátku komplexní roviny.



Obrázek 9 Třetí odmocnina z komplexního čísla $z = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ (obrázek: autor)

Speciálním případem je n-tá odmocnina z 1, která tvoří pravidelný n-úhelník s jedním vrcholem v 1, vepsaným do jednotkové kružnice se středem v počátku. Sudé odmocniny z 1 leží na pravidelném n-úhelníku, jehož dva vrcholy leží na reálné ose v bodech 1 a -1.



Obrázek 10 Šestá odmocnina z jedné v oboru komplexních čísel (obrázek: autor)

1.3.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

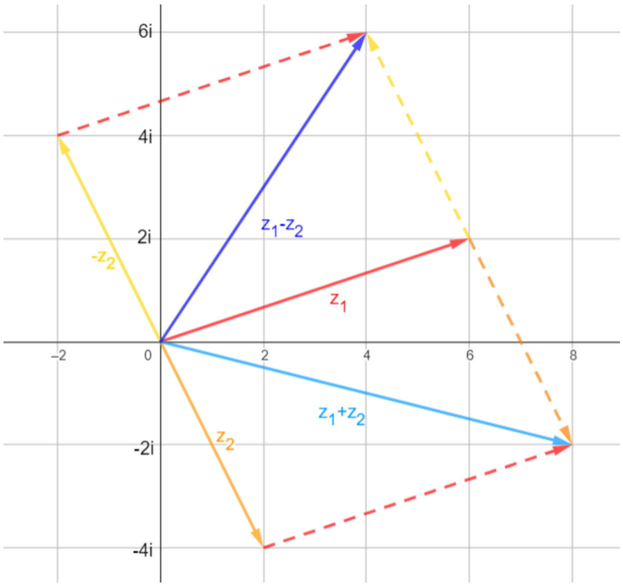
Příklad 1: Vypočítejme součet $z_1 + z_2$ a rozdíl $z_1 - z_2$ komplexních čísel $z_1 = 6 + 2i$ a $z_2 = 2 - 4i$ zadaných v algebraickém tvaru a ukažme grafickou interpretaci obou operací.

Řešení: S komplexními čísly budeme počítat jako s mnohočleny.

$$z_1 + z_2 = (6 + 2i) + (2 - 4i) = (6 + 2) + (2 - 4)i = 8 - 2i$$

$$z_1 - z_2 = (6 + 2i) - (2 - 4i) = (6 + 2i) + (-2 + 4i) = (6 - 2) + (2 + 4)i = 4 + 6i$$

Pro grafickou interpretaci provedeme součet vektorů $z_1 + z_2$ a $z_1 + (-z_2)$.



Obrázek 11 Příklad - součet a rozdíl komplexních čísel (obrázek: autor)

Příklad 2: Vypočítejme součin komplexních čísel $z_1 = \sqrt{3} + i$ a $z_2 = -2 + 2\sqrt{3}i$ v algebraickém i goniometrickém tvaru.

Řešení: V algebraickém tvaru budeme s komplexními čísly počítat jako s mnohočleny a zohledníme vztah $i^2 = -1$.

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\sqrt{3} + i\right) \cdot \left(-2 + 2\sqrt{3}i\right) = -2\sqrt{3} + 6i - 2i + 2\sqrt{3}i^2$$
$$= \left(-2\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\right) + (6 - 2)i = -4\sqrt{3} + 4i$$

Dále algebraický tvar převedeme do goniometrického:

$$|z_1| = 2 \qquad \alpha_1 = \frac{\pi}{6} \qquad \Rightarrow \qquad z_1 = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$|z_2| = 4 \qquad \alpha_2 = \frac{2\pi}{3} \qquad \Rightarrow \qquad z_2 = 4 \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Nakonec provedeme součin, u kterého použijeme geometrickou interpretaci tedy:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|(cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \cdot sin(\alpha_1 + \alpha_2))$$

$$|z_1| \cdot |z_2| = 8 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{5\pi}{6}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 8\left(cos\frac{5\pi}{6} + i \cdot sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Příklad 3: Nalezněme čtvrtou odmocninu s čísla $z = -8 + 8\sqrt{3}i$ v oboru komplexních čísel.

Řešení: Vypočítáme velikost komplexního čísla a jeho argument

$$|z| = \sqrt{64 + 192} = \sqrt{256} = 16$$

$$\cos\alpha = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

Do vzorce pro výpočet n-té odmocniny komplexního čísla v goniometrickém tvaru dosadíme $n = 4$ a $k = 0, 1, 2, 3$:

$$s_1 = \sqrt[4]{16} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$s_2 = \sqrt[4]{16} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$s_3 = \sqrt[4]{16} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$s_4 = \sqrt[4]{16} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Tedy v algebraickém tvaru dostáváme výsledky:

$$s_1 = \sqrt{3} + i \qquad s_2 = -1 + \sqrt{3}i \qquad s_1 = -\sqrt{3} - i \qquad s_2 = 1 - \sqrt{3}i.$$

1.4 ZÁKLADNÍ VĚTA ALGEBRY

Základní věta algebry úzce souvisí z komplexními čísly, která jsou pro její důkaz nepostradatelná. Jedna z jejích možných formulací je tato:

Věta: Každá algebraická rovnice s komplexními koeficienty má v oboru komplexních čísel **C** alespoň jeden komplexní kořen.

1.4.1 DALŠÍ ZNĚNÍ ZÁKLADNÍ VĚTY ALGEBRY

Tuto větu můžeme formulovat i jinak. Ekvivalentním vyjádřením této věty je například, že pokud jsou čísla $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ kořeny algebraické rovnice $f(x) = 0$, můžeme ji ekvivalentně zapsat ve tvaru:

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0.$$

Ze začátku byla pozornost věnována převážně rovnicím s reálnými koeficienty. Jean le Rond d'Alembert přišel v 18. století na to, že jestliže je kořenem algebraické rovnice s reálnými koeficienty komplexní číslo ve tvaru $z_k = u + vi$, pak jejím dalším kořenem musí nutně být i číslo $\overline{z_k} = u - vi$, tedy čísla komplexně sdružená. Taková čísla mají tu vlastnost, že rovnice ve tvaru $\big(z - (u + vi)\big) \cdot \big(z - (u - vi)\big) = 0$ má reálné koeficienty, protože pokud tyto závorky vynásobíme, člen s imaginární jednotkou vymizí:

$$(z - u - vi)(z - u + vi) = z^2 - 2uz + (u^2 + v^2).$$

Z toho nám vyplývá další možná formulace základní věty algebry: každá algebraická rovnice s reálnými koeficienty může být vyjádřena pomocí součinu lineárních a kvadratických rovnic s reálnými koeficienty. Toto znění bylo v průběhu 18. století velmi oblíbené (STILLWELL, 2010).

1.4.2 GAUSSŮV DŮKAZ

Jako jeden z prvních se základní větu algebry pokusil dokázat už René Descartes, který se velmi podílel na rozvoji matematiky. Kromě čísel kladných používal i čísla záporná a komplexní, jejichž existence je pro důkaz základní věty algebry nutná. Ač se o důkaz této věty pokusilo krom Descarta velké množství matematiků, první exaktní důkazy prezentoval až Carl Friedrich Gauss ve své disertační práci na konci 18. století (BEČVÁŘ, a další, 1999).

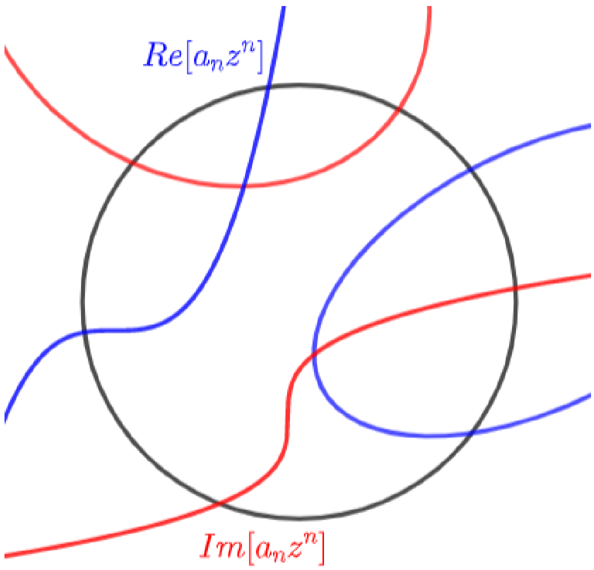
K důkazu Gauss využil tvrzení, že polynom ve tvaru $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$ se pro dostatečně velkou hodnotu $|z|$ chová stejně, jako jeho první člen $a_n z^n$ s největší mocninou n. Dále předpokládal, že $p(z) = 0$ uvnitř kruhu s poloměrem $R = |z|$.

Gauss původní polynom rozdělil na reálnou $Re[p(z)]$ a imaginární $Im[p(z)]$ část a oba výsledné polynomy postavil rovné nule. To provedl pomocí rozepsání $z = u + vi$ a hledání komplexních a reálných členů. Jeho cílem bylo najít průsečík obou křivek, protože v tomto bodě musí platit:

$$0 = Re[p(z)] = Im[p(z)] = p(z).$$

Pro velkou hodnotu $|z|$ budou tyto křivky velmi podobné křivkám $Re[a_n z^n]$ a $Im[a_n z^n]$. Jedná se o křivky procházející středem, jejichž ramena pravidelně alternují mezi $Re[a_n z^n]$ a $Im[a_n z^n]$.

Pro dokončení Gaussova důkazu bylo nutné ukázat, že se tyto křivky protnou někde uvnitř dostatečně velkého kruhu kolem počátku s poloměrem $R = |z|$. To Gauss považoval za nevyvratitelný fakt, který nemůže nikdo napadnout. Předpokládal, že rozdělené části křivek $Re[a_n z^n]$ a $Im[a_n z^n]$, které střídavě vychází z vnitřku kruhu se musí někde uvnitř tohoto kruhu spojit. Vzhledem k tomu, že vně kruhu alternují, bylo by prakticky nemožné, aby neexistoval alespoň jeden jejich průsečík.



Obrázek 12 Znázornění křivek $Re[a_n z^n]$ a $Im[a_n z^n]$ Gaussova důkazu (obrázek: autor)

Důkaz existence průsečíku těchto křivek není triviální a poprvé ho představil až roku 1920 Ostrowski (STILLWELL, 2010).

Tento důkaz z roku 1799 je všeobecně uznávaný jako první platný důkaz základní věty algebry i přes svou nedokonalost. Gauss základní větu považoval za velmi důležitou a během svého života vypracoval několik dalších důkazů základní věty algebry.

1.5 NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1. Zapište komplexní číslo $z_1 = (-3, -3\sqrt{3})$ v algebraickém, goniometrickém tvaru a exponenciálním tvaru.

$$\left[-3 - 3\sqrt{3}\, i; 6\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{4\pi}{3}\right); 6e^{i\frac{4\pi}{3}}\right]$$

2. Převeďte komplexní číslo $z_2 = 8 \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{7\pi}{4}\right)$ do tvaru uspořádané dvojice, algebraického a exponenciálního tvaru.

$$\left[\left(4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}\right);\ 4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\, i; 8e^{i\frac{7\pi}{4}}\right]$$

3. Převeďte komplexní číslo $z_3 = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{11\pi}{6}}$ do tvaru uspořádané dvojice, algebraického a goniometrického tvaru.

$$\left[\left(3, -\sqrt{3}\right); 3 - \sqrt{3}\, i; 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{3}\right)\right]$$

4. Nalezněte číslo komplexně sdružené a číslo opačné ke komplexnímu číslu $z_4 = 5 + 2i$ a ukažte jejich grafickou interpretaci.

$$[5 - 2i;\ -5 - 2i\ ]$$

5. Vypočítejte součet $z_5 + z_6$ a rozdíl $z_5 - z_6$ komplexních čísel $z_5 = \frac{3}{2} + 2i$ a $z_6 = \frac{1}{2} - i$ zadaných v algebraickém tvaru a ukažme grafickou interpretaci obou operací.

$$[2 + i; 1 + 3i]$$

6. Vypočítejte součin komplexních čísel $z_7 = 3\sqrt{3} + 3i$ a $z_8 = 1 - \sqrt{3}\, i$ v algebraickém i goniometrickém tvaru.

$$\left[6\sqrt{3} - 6i; 12\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right]$$

7. Nalezněte třetí odmocninu s čísla $z_9 = 2 + 2i$ v oboru komplexních čísel.

$$\left[\begin{array}{c} s_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ s_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\ s_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right) \end{array}\right]$$

2 TRANSFORMACE ROVNIC

Definice 2.1: Rovnici s neznámou $x \in \mathbf{C}$ ve tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

kde $n \in \mathbf{N}, \mathrm{n} \geq 1$, $a_n \neq 0$ a $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{C}$, nazýváme algebraická rovnice n-tého stupně. Čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou komplexní koeficienty algebraické rovnice.

Pokud je $a_n = 1$, jedná se o normovaný tvar algebraické rovnice.

Algebraickou rovnici, kde $n = 1$, nazýváme lineární rovnice. Pro $n = 2$ mluvíme o kvadratické rovnici, pro $n = 3$ o kubické rovnici a pro $n = 4$ o rovnici kvartické.

Při řešení algebraických rovnic je příhodné provést transformace, které nám nalezení výsledku zjednoduší, například tím, že některé členy z rovnice vymizí. Pro naši potřebu zmíníme některé vhodné úpravy a zavedeme několik možných substitucí za x.

2.1 EKVIVALENTNÍ ÚPRAVY

Definice 2.2: Dvě algebraické rovnice ve tvaru $g(x) = 0$ a $h(x) = 0$ jsou ekvivalentní právě tehdy, když mají stejné kořeny.

Mezi ekvivalentní úpravy rovnic řadíme takové úpravy, které nezmění kořeny dané rovnice. Patří mezi ně přičtení, popřípadě odečtení, stejného výrazu na levé i pravé straně rovnice a vynásobení, popřípadě vydělení, obou stran rovnice stejným nenulovým výrazem.

Platí tedy, že rovnice ve tvaru

$$g(x) = h(x)$$

je ekvivalentní s následujícími dvěma rovnicemi:

$$g(x) + a = h(x) + a, \qquad ag(x) = ah(x), a \neq 0.$$

Odečtením celé jedné strany rovnice lze jakoukoli rovnici převést na námi požadovaný tvar:

$$f(x) = g(x) - h(x) = 0.$$

2.2 BINOMICKÁ ROVNICE

Definice 2.3: Algebraická rovnice ve tvaru

$$a_n x^n - a_0 = 0,$$

kde $a_n, a_0 \in \mathbf{C}$, $a_n, a_0 \neq 0$ a $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1 = 0$ se nazývá binomická rovnice.

Mezi ekvivalentní úpravy rovnice nemůžeme řadit umocňování a odmocňování. Máme-li binomickou rovnici, kde $a_n = 1$, $a_0 \neq 0$ a ostatní koeficienty jsou rovné nule, hovoříme o takzvaném normovaném tvaru binomické rovnice:

$$x^n - a_0 = 0,$$

který má právě n různých kořenů $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ z oboru komplexních čísel. Tyto kořeny můžeme nalézt pomocí vztahu pro n-tou odmocninu komplexního čísla:

$$x_k = \sqrt[n]{|a_0|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right), k = 0, 1, \dots, n-1,$$

kde $a_0 \in \mathbf{C}$; $a_0 = u + iv = |a_0| \cdot (\cos(\alpha) + \sin(\alpha))$, $\alpha = arcsin\left(\frac{v}{|a_0|}\right) = arccos\left(\frac{u}{|a_0|}\right)$.

Pro $a_0 \in \mathbf{R}$ platí $v = 0 \wedge u = a_0 \Rightarrow \alpha = 0$. Výše uvedený vzorec tedy můžeme zjednodušit na tvar:

$$x_k = \sqrt[n]{|a_0|} \cdot \left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right), k = 0, 1, \dots, n-1$$

2.2.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: Řešme kvadratickou rovnici

$$-5x^2 + 20 = 0.$$

Řešení: Rovnici nejprve vydělíme číslem -5 a převedeme ji tak na normovaný stav binomické rovnice:

$$x^2 - 4 = 0.$$

K oběma stranám rovnice přičteme číslo 4, čímž dostaneme rovnici ve tvaru:

$$x^2 = 4.$$

Hledáme tedy druhou odmocninu čísla 4. Dosazením do vzorce najdeme dva různé reálné kořeny dané rovnice

$$x_1 = \sqrt[2]{|4|} \cdot (\cos(0) + i \cdot \sin(0)) \qquad x_2 = \sqrt[2]{|4|} \cdot (\cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi)),$$

tedy

$$x_1 = 2 \qquad\qquad x_2 = -2.$$

Dále budeme podobné výsledky zapisovat jako:

$$x_{1,2} = \pm 2.$$

Příklad 2: Řešme kubickou rovnici

$$\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3} = 0.$$

Řešení: Vynásobením rovnice číslem $\frac{3}{2}$ převedeme rovnici na normovaný stav binomické rovnice:

$$x^3 - 1 = 0.$$

K oběma stranám rovnice přičteme číslo 1 a změníme ji tak na rovnici:

$$x^3 = 1,$$

která má právě tři různé kořeny $x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{C}$, které nalezneme dosazením do vzorce:

$$x_1 = \sqrt[3]{|1|} \cdot (\cos(0) + i \cdot \sin(0))$$

$$x_2 = \sqrt[3]{|1|} \cdot \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$x_3 = \sqrt[3]{|1|} \cdot \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).$$

Po úpravě jsou hodnoty kořenů následující:

$$x_1 = 1 \qquad x_{2,3} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2} i\,.$$

2.3 VIÈTOVY VZORCE

Pro kořeny $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ rovnice n-tého stupně z oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$ platí:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0$$

Viètovy vzorce můžeme použít k jednoduššímu nalezení kořenů algebraických rovnic převedením rovnice n-tého stupně na součinový tvar a následně na n lineárních rovnic ve tvaru:

$$x - x_1 = 0$$

$$x - x_2 = 0$$

…

$$x - x_n = 0.$$

Viètovy vzorce jsou velmi často používané při řešení kvadratických rovnic s reálnými celočíselnými kořeny. Pro naše potřeby uvedeme vztahy, jak pomocí Viètových vzorců nalezneme kořeny algebraické rovnice druhého stupně s koeficientem $a_2 = 1$ ve tvaru:

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0.$$

Pro kořeny x_1, x_2 této rovnice platí následující vztahy:

$$x_1 \cdot x_2 = a_0 \quad x_1 + x_2 = -a_1.$$

Podobné vztahy existují i pro algebraické rovnice vyšších řádů, o těch se ale budeme více bavit v kapitolách věnujících se přímo řešení kubických a bikvadratických rovnic.

2.3.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: S využitím Viètových vzorců řešme kvadratickou rovnici

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Řešení: Víme, že pro kořeny zadané rovnice musí platit:

$$x_1 \cdot x_2 = -3$$

$$x_1 + x_2 = -2.$$

Můžeme hledané hodnoty hádat z uvedených vztahů nebo se k požadovanému součinovému tvaru dostaneme algebraickými úpravami zadané rovnice.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x^2 + 3x - x - 3 = 0$$

$$x(x + 3) - (x + 3) = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

Po upravení rovnice do součinového tvaru, ji můžeme přepsat jako dvě lineární rovnice:

$$x + 3 = 0 \qquad x - 1 = 0.$$

Následně už se dostáváme ke kořenům zadané kvadratické rovnice:

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 1.$$

Příklad 2: S využitím Viètových vzorců řešme kvadratickou rovnici

$$x^2 + 5x = 0.$$

Řešení: Zadanou rovnici upravíme algebraickými úpravami na součinový tvar:

$$x(x + 5) = 0.$$

Protože platí, že $x = x - 0$, můžeme rovnici upravit do tvaru:

$$(x - 0)(x + 5) = 0.$$

Z toho vyplývá, že kořeny rovnice jsou následující:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = -5.$$

2.4 SUBSTITUCE $x = y + k$

Jako první si zavedeme substituci $x = y + k$, kde y je proměnná a k je konstanta. Pomocí této substituce převedeme původní rovnici $f(x) = 0$ do tvaru $f(y + k) = 0$, který lze zapsat takto:

$$f(y + k) = a_n(y + k)^n + a_{n-1}(y + k)^{n-1} + \cdots = 0,$$

$$f(y + k) = a_n y^n + (na_n k + a_{n-1})y^{n-1} + \cdots = 0.$$

Zvolíme-li hodnotu k tak, aby platilo

$$na_n k + a_{n-1} = 0$$

$$k = -\frac{a_{n-1}}{na_n}$$

je koeficient u y^{n-1} roven nule, což může být při řešení některých rovnic výhodné.

Pomocí této substituce lze odstranit i jiný koeficient , například koeficient a_{n-2}, nebo i více koeficientů zároveň. Nalezení potřebné konstanty je ale o mnoho složitější a vyžaduje řešení dalších algebraických rovnic.

Pokud jsou $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ kořeny původní rovnice, pak jsou kořeny upravené rovnice rovny $x_1 - k, x_2 - k, x_3 - k, \dots, x_n - k$.

2.4.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: Pomocí substituce $x = y + k$ řešme kvadratickou rovnici

$$x^2 + 6x + 5 = 0.$$

Řešení: Určíme hodnotu k z výše uvedeného vztahu:

$$k = -\frac{a_1}{2a_2} = -\frac{6}{2} = -3.$$

Pomocí substituce $x = y - 3$ převedeme rovnici do tvaru:

$$y^2 - 6y + 9 + 6y - 9 + 5 = 0$$

$$y^2 - 4 = 0.$$

Z toho vyplývá:

$$y_{1,2} = \pm 2.$$

Použitím substituce se vrátíme k hodnotám pro x:

$$x_1 = 2 - 3 = -1 \qquad x_2 = -2 - 3 = -5.$$

Příklad 2: Pomocí substituce $x = y + k$ řešme kubickou rovnici

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 7 = 0.$$

Řešení: Určíme hodnotu k z výše uvedeného vztahu:

$$k = -\frac{a_2}{3a_3} = -\frac{6}{3} = -2.$$

Pomocí substituce $x = y - 2$ převedeme rovnici do tvaru:

$$y^3 - 6y^2 + 12y - 8 + 6y^2 - 24y + 24 + 12y - 24 + 7 = 0$$

$$y^3 - 1 = 0$$

$$y^3 = 1.$$

Upravená rovnice má tedy tři kořeny, z nichž je jeden reálný a dva náleží oboru komplexních čísel:

$$y_1 = 1 \qquad y_{2,3} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Pomocí substituce se vrátíme ke kořenům původní rovnice:

$$x_1 = -1 \qquad x_{2,3} = -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2} i.$$

2.5 SUBSTITUCE $x = -y$

Substitucí $x = -y$ převedeme původní rovnici n-tého stupně na rovnici tvaru:

$$f(-z) = a_n(-y)^n + a_{n-1}(-y)^{n-1} + a_{n-2}(-y)^{n-2} + \cdots + a_1(-y) + a_0 = 0$$

$$(-1)^n a_n y^n + (-1)^{n-1} a_{n-1} y^{n-1} + (-1)^{n-2} a_{n-2} y^{n-2} + \cdots - a_1 y + a_0 = 0.$$

Změníme tedy znaménka u členů s lichou mocninou. Pokud jsou $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ kořeny původní rovnice, pak jsou kořeny po substituci rovny $-x_1, -x_2, -x_3, \dots, -x_n$.

2.6 SUBSTITUCE $x = \frac{y}{k}$

Rovnice upravená substitucí $x = \frac{y}{k}$, kde y je proměnná a k je konstanta, pro kterou platí $k \neq 0$ má tvar:

$$f\left(\frac{y}{k}\right) = a_n \left(\frac{y}{k}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{y}{k}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{y}{k}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n y^n + a_{n-1} k y^{n-1} + \cdots + a_1 k^{n-1} y + a_0 k^n = 0$$

Tuto substituci používáme, chceme-li odstranit koeficient a_n a nahradit ho číslem 1, volíme pak $k = a_n$. Jsou-li $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ kořeny původní rovnice, pak jsou nové kořeny rovny $kx_1, kx_2, kx_3, \dots, kx_n$.

2.6.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: Pomocí substituce $x = \frac{y}{k}$ řešme kvadratickou rovnici

$$3x^2 + 2x - 1 = 0\ .$$

Řešení: Nejprve si zvolíme $k = a_2 = 3$ a poté pomocí substituce $x = \frac{y}{3}$ převedeme rovnici do tvaru:

$$\frac{y^2}{3} + \frac{2y}{3} - 1 = 0$$

$$y^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(y-1)(y+3) = 0.$$

Z toho vyplývá:

$$y_1 = 1 \qquad\qquad y_2 = -3.$$

Kořeny původní rovnice jsou tedy:

$$x_1 = \frac{1}{3} \qquad x_2 = -1$$

Příklad 2: Pomocí substituce $x = \frac{y}{k}$ řešme bikvadratickou rovnici

$$4x^4 - 13x^2 + 9 = 0\ .$$

Řešení: Zvolíme si $k = a_4 = 4$ a následně substitucí $x = \frac{y}{4}$ převedeme rovnici do tvaru:

$$\frac{y^4}{64} + \frac{13y^2}{16} + 9 = 0$$

$$y^4 - 52y^2 + 576 = 0$$

$$(y^2 - 16)(y^2 - 36) = 0$$

Z toho vyplývá:

$$y_{1,2} = \pm 4 \qquad y_{3,4} = \pm 6.$$

Kořeny původní rovnice jsou:

$$x_{1,2} = \pm 1 \qquad x_{3,4} = \pm \frac{3}{2}.$$

2.7 SUBSTITUCE $x = \frac{1}{y}$

Při výpočtu algebraických rovnic, které mají reálné kořeny velmi malé, z pravidla s hodnotou mezi 0 a 1, můžeme využít substituci $x = \frac{1}{y}$. Abychom novou rovnici převedli do tvaru algebraické rovnice n-tého stupně, musíme ji vynásobit hodnotou y^n, vznikne nám tedy nová rovnice ve tvaru:

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = a_n\left(\frac{1}{y}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{1}{y}\right) + a_0 = 0,$$

$$y^n \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = a_n + a_{n-1}y + \cdots + a_1 y^{n-1} + a_0 y^n = 0.$$

Pokud jsou $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ kořeny původní rovnice, kořeny nové rovnice jsou jejich převrácené hodnoty, tedy $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \dots, \frac{1}{x_n}$. Z těchto hodnot lze vyvodit, že substituci $x = \frac{1}{y}$ není možné použít pro $x_k = 0$.

2.7.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: Pomocí substituce $x = \frac{1}{y}$ řešme kvadratickou rovnici

$$x^2 + \frac{11}{30}x + \frac{1}{30} = 0.$$

Řešení: Rovnici pomocí substituce $x = \frac{1}{y}$ upravíme do tvaru:

$$\left(\frac{1}{y}\right)^2 + \frac{11}{30} - \frac{1}{y} + \frac{1}{30} = 0$$

$$\frac{1}{y^2} + \frac{11}{30} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{30} = 0.$$

Rovnici vynásobíme výrazem y^2, abychom ji převedli na algebraickou rovnici, a poté číslem 30 pro jednodušší použití Vietových vzorců:

$$1 + \frac{11}{30}y + \frac{1}{30}y^2 = 0$$

$$y^2 + 11y + 30 = 0$$

$$(y + 6)(x + 5) = 0.$$

Z toho vyplývá:

$$y_1 = -6 \qquad y_2 = -5.$$

Kořeny původní rovnice jsou tedy:

$$x_1 = -\frac{1}{6} \qquad x_2 = -\frac{1}{5}.$$

Příklad 2: Pomocí substituce $x = \frac{1}{y}$ řešme kubickou rovnici

$$x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{12} = 0.$$

Řešení: Rovnici substitucí $x = \frac{1}{y}$ převedeme do tvaru:

$$\left(\frac{1}{y}\right)^3 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{12} = 0$$

$$\frac{1}{y^3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{12} = 0.$$

Poté celou rovnici vynásobíme nejprve výrazem y^3 a následně číslem 12:

$$\frac{1}{12}y^3 - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{3}y + 1 = 0$$

$$y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = 0$$

$$(y-3)(y-2)(y+2) = 0.$$

Z toho vyplývá:

$$y_1 = 3 \qquad y_2 = 2 \qquad y_3 = -2.$$

Kořeny původní rovnice jsou tedy převrácené hodnoty:

$$x_1 = \tfrac{1}{3} \qquad x_2 = \tfrac{1}{2} \qquad x_3 = -\tfrac{1}{2}.$$

2.8 NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

1. Řešte kvadratickou rovnici

$$5x^2 + 125 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 5i \\ x_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = -5i \end{bmatrix}$$

2. Řešte algebraickou rovnici 6-tého stupně

$$7x^6 - 7 = 0.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 \\ x_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_3 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_4 = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \\ x_5 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_6 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{bmatrix}$$

3. Řešte kvartickou rovnici

$$2x^4 + 32 = 0.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i \\ x_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i \\ x_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i \\ x_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i \end{bmatrix}$$

4. S využitím Vietových vzorců řešte kvadratickou rovnici

$$x^2 + 6x - 16 = 0.$$

$[-8; 2]$

5. S využitím Vietových vzorců řešte kvadratickou rovnici

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

$[-3; 5]$

6. S využitím Vietových vzorců řešte kvadratickou rovnici

$$x^2 + 16x + 48 = 0.$$

$[-12;\ -4]$

7. Pomocí substituce $x = y + k$ řešte kvadratickou rovnici

$$7x^2 + 28x - 35 = 0.$$

$[-5; 1]$

8. Pomocí substituce $x = y + k$ řešte kubickou rovnici

$$x^3 + 9x^2 + 27x + 19 = 0.$$

$\left[-1;\ -4 + \sqrt{3}\,i;\ -4 - \sqrt{3}\,i\right]$

9. Pomocí substituce $x = \frac{y}{k}$ řešte kvadratickou rovnici

$$5x^2 + 13x + 6 = 0.$$

$\left[-2;\ -\frac{3}{5}\right]$

10. Pomocí substituce $x = \frac{y}{k}$ řešte kvadratickou rovnici

$$18x^2 - 15x + 2 = 0.$$

$$\left[\frac{1}{6}; \frac{2}{3}\right]$$

11. Pomocí substituce $x = \frac{1}{y}$ řešte kvadratickou rovnici

$$x^2 - \frac{4}{21}x - \frac{1}{21} = 0.$$

$$\left[-\frac{1}{7}; \frac{1}{3}\right]$$

12. Pomocí substituce $x = \frac{1}{y}$ řešte kvadratickou rovnici

$$x^2 + \frac{14}{33}x + \frac{1}{33} = 0.$$

$$\left[-\frac{1}{3}; -\frac{1}{11}\right]$$

3 HISTORIE ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

V této kapitole si přiblížíme, jak se vyvíjelo řešení algebraických rovnic v historii. Doplníme si tak kapitolu 1.1, ve které jsme se seznámili s historií komplexních čísel.

Už ve starověku lidé řešili úlohy, které vedly na algebraické rovnice. Většina větších starověkých civilizací po sobě zanechala matematické artefakty, které svědčí o jejich porozumění matematiky. Například ze starověké Číny se dochovalo řešení n lineárních rovnic o n neznámých pomocí metody, které dnes říkáme Gaussova eliminační metoda. Používali také kladná i záporná čísla.(STILLWELL, 2010).

Z dochovaných pramenů můžeme usoudit, že ve starověkém Egyptě byla matematika velmi pokročilá a to z velké části v oblasti geometrie o čemž svědčí i dochovaná svědectví ze starověkého Řecka. Starověcí Egypťané používali desítkovou soustavu a znaky pro jednotlivá čísla jsou dochovány už z doby přibližně 3000 let př. n. l., později pak přibyly znaky i pro některé zlomky. V Rhindově a Moskevském papyru můžeme nalézt slovní úlohy vedoucí na lineární rovnice a to hlavně jako hledání neznámého množství za dané podmínky. Jedním typem takových slovních úloh je hledání neznámého množství, které je zvětšené o určitou část. Tyto úlohy vedou na rovnice ve tvaru:

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)x = b\,,$$

kde $\frac{1}{k}$ je kmenný zlomek. Při jejich řešení byla užívána například metoda chybného předpokladu, při které je použit předpoklad, že neznámá je rovna číslu k. Takové řešení by mohlo vypadat následovně:

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)x = 15$$

$$x_0 = 4 \to \left(1+\frac{1}{4}\right)4 = 5$$

$$15 : 5 = 3 \to x = 3x_0$$

$$x = 12\,.$$

Dochovaly se i úlohy, které vedou na některé neúplné kvadratické rovnice. Tyto úlohy jsou však poměrně poškozené. Nejsou dochovány žádné úlohy, které by vedly na úplnou kvadratickou rovnici (BEČVÁŘ, a další, 2003).

I z Mezopotámie máme mnoho matematických artefaktů, tentokrát v podobě hliněných tabulek. Matematické výpočty můžeme najít nejen v čistě matematických textech, ale i v hospodářství a v dalších oblastech běžného života. Velmi rozvinutý byl i úrokový počet. Ke zjednodušení zápisu čísel došlo ve 3. tisíciletí př. n. l., kdy došlo k rozvoji klínového písma. Do té doby byla představa čísel velmi úzce spojena s fyzickými objekty. V Mezopotámii byla využívána kombinace desítkové a šedesátkové soustavy.

Ve starověké Mezopotámii zcela chyběla matematická symbolika. Pro neznámé proto byly využívány geometrické pojmy. Pro lineární členy délka, šířka nebo hloubka, pro kvadratické obsah, čtverec, délka-šířka a pro kubické například objem.

Příklady vedoucí na lineární rovnice, případně soustavy lineárních rovnic, se dochovaly většinou jen částečně. Můžeme předpokládat, že k jejich řešení docházelo eliminací neznámých či metodou chybného předpokladu. O vysoké úrovni matematiky v Mezopotámii svědčí úlohy vedoucí na kvadratické rovnice. Byly vytvořeny vzorové příklady, které sloužily jako návody pro následující typy kvadratických rovnic:

$$x^2 = q$$

$$x^2 + q = px$$

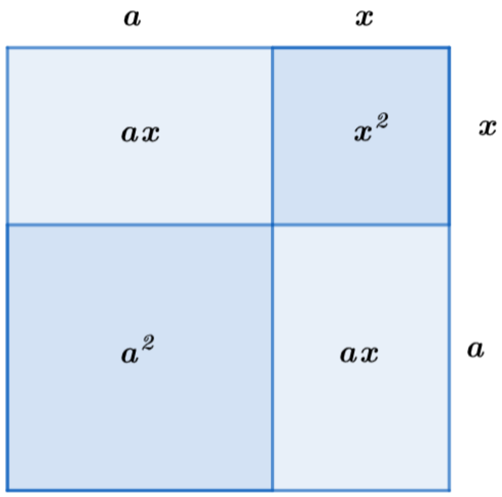
$$x^2 = px + q$$

$$x^2 + px = q$$

$$ax^2 + bx = c.$$

Mezopotámští matematici nikdy nedospěli k obecnému řešení kvadratické rovnice a to hlavně kvůli tomu, že za kořen brali pouze kladná čísla. Kromě toho byly v Mezopotámii řešeny i úlohy vedoucí na bikvadratické rovnice, jejichž znění bylo velmi podobné úlohám vedoucím na kvadratické rovnice. Na dochovaných tabulkách najdeme i úlohy na kubické rovnice, u kterých byl však vždy uveden jediný výsledek i v případě, že jich existovalo více. Tyto úlohy byly řešeny většinou pomocí tabulek a následných odhadů, řešení složitějších rovnic se nedochovalo (BEČVÁŘ, a další, 2003).

Matematici antického Řecka navazovali na matematiku Egypta a velký důraz tak kladli na geometrii. Jejich matematika posloužila jako základ pro vývoj matematiky v okolí středozemního moře. Jedním z největších přínosů pro matematiku jsou Euklidovy Základy. V knize VI Euklidových Základů můžeme najít geometrické řešení kvadratické rovnice $x^2 + 2ax = b$, které je vyobrazené na obrázku níže:



Obrázek 13 Geometrické řešení rovnice $x^2 + 2ax = b$ (obrázek: autor)

Jedná se o doplnění na čtverec. Velký čtverec má obsah rovný $a^2 + b$ (STILLWELL, 2010).

Indická matematika byla velmi dobře rozvinuta. Indové uměli počítat se zápornými čísly, mocninami i odmocninami. Uměli vypočítat přibližné hodnoty kvadratických iracionalit, například $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$, a to pomocí vzorce

$$\sqrt{Q} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a},$$

kde a^2 byl největší čtverec menší než Q. Tento vzorec byl používán až do středověku. Zachovala se také pravidla pro počítání s mnohočleny (SÝKOROVÁ, 2016).

Přechod od geometrie do algebry je patrný ke konci starověku až v raném středověku. Arabové shromažďovali poznatky z okupovaných a okolních národů. Navazovali na starořeckou, kterou převedli do algebraického zápisu, a indickou matematiku, začali využívat slovní značení pro x, x^2 a x^3 a formulovali řešení množství algebraických rovnic. Arabské překlady matematických děl byly hlavním zdrojem matematiky pro středověkou Evropu. Arabům vděčíme za základy algebry tak, jak jí známe dnes (BEČVÁŘ, 2001).

Matematici ve starověku a středověku uměli řešit jen některé typy kvadratických a kubických rovnic. K formulaci obecných řešení algebraických rovnic vyšších řádů došlo až v novověku a s objevem komplexních čísel (BEČVÁŘ, a další, 1999). Tato řešení si rozvedeme v následujících kapitolách.

4 ŘEŠENÍ BIKVADRATICKÝCH ROVNIC

V této kapitole se zaměříme na řešení bikvadratických rovnic. Bikvadratické rovnice jsou speciálním případem algebraických rovnic čtvrtého stupně, které jinak nazýváme kvartické. Než se začneme zabývat řešením těchto rovnic, přesněji si definujeme některé důležité matematické pojmy. Samotný pojem algebraické rovnice už jsme si definovali v kapitole 2 (viz Definice 2.1), teď se tedy zaměříme na konkrétní typy algebraických rovnic, které se přímo vztahují k této kapitole.

Definice 4.1: Rovnici s neznámou $x \in \mathbf{C}$ ve tvaru

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

kde $a_4 \neq 0$ a $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{C}$, nazýváme algebraická rovnice čtvrtého stupně nebo kvartická rovnice. Čísla a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 jsou komplexní koeficienty algebraické rovnice.

Definice 4.2: Algebraickou rovnici čtvrtého stupně s neznámou $x \in \mathbf{C}$ ve tvaru

$$f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0,$$

kde $a_4 \neq 0$ a $a_0, a_2, a_4 \in \mathbf{C}$, nazýváme bikvadratická rovnice. Čísla $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou komplexní koeficienty algebraické rovnice.

Pro nás to tedy znamená, že bikvadratická rovnice je taková kvartická rovnice, ve které se nachází pouze sudé mocniny neznámé x zatímco liché koeficienty a_1 a a_3 jsou nulové. Díky tomu se v rovnici nenacházejí liché mocniny neznámé x.

Když se blíže podíváme na tvar bikvadratické rovnice, a případně i na její název, můžeme si všimnout nápadné podoby s kvadratickou rovnicí. Právě z toho důvodu se nejprve zaměříme na řešení kvadratické rovnice a až poté na samotnou bikvadratickou rovnici.

4.1 ŘEŠENÍ KVADRATICKÉ ROVNICE

Definice 4.3: Rovnici s neznámou $x \in \mathbf{C}$ ve tvaru

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

kde $a_2 \neq 0$ a $a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{C}$, nazýváme algebraická rovnice druhého stupně nebo kvadratická rovnice. Čísla a_0, a_1, a_2 jsou komplexní koeficienty algebraické rovnice.

My budeme pro všechny algebraické rovnice používat zápis koeficientů $a_0, a_1, \dots, a_n$, kde $n \in \mathbf{N}, \mathrm{n} \geq 1$. V literatuře se ale můžeme setkat i s tímto zápisem pro kvadratickou rovnici:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

kde $a \neq 0$ a $a, b, c \in \mathbf{C}$.

Algebraická rovnice druhého stupně má v oboru komplexních čísel $\mathbf{C}$ vždy dva kořeny. Speciálně pro kvadratickou rovnici ještě platí, že její řešení buď celé náleží množině reálných čísel $\mathbf{R}$, nebo žádné řešení v reálných číslech nemá. Kořeny kvadratické rovnice můžeme nalézt mnoha různými způsoby, například pomocí Viètových vzorců, které jsou popsané ve druhé kapitole. Teď si ukážeme některé další z možností, jak kvadratickou rovnici řešit.

4.1.1 GRAFICKÉ ŘEŠENÍ KVADRATICKÉ ROVNICE

Pokud má kvadratická rovnice reálné koeficienty, můžeme ji jednoduše řešit pomocí grafu kvadratické funkce a jeho průsečíky s reálnou osou. Tímto řešením však najdeme pouze její reálné kořeny.

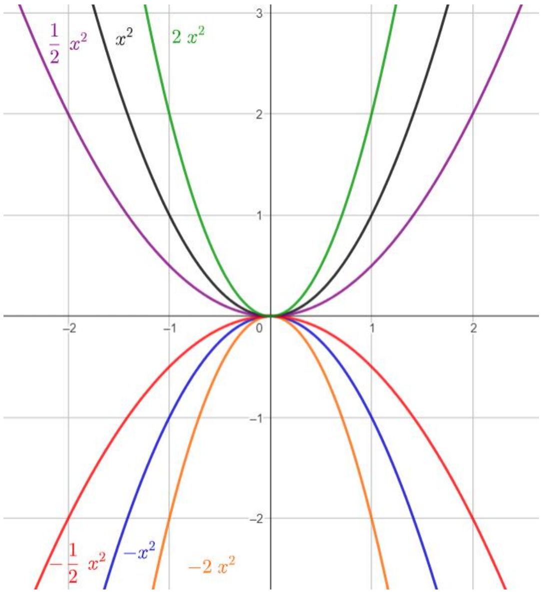
Při hledání průsečíků kvadratické funkce s reálnou osou máme tři možnosti toho, co může nastat. Kvadratická rovnice může mít 2 reálné kořeny, 1 dvojnásobný reálný kořen anebo žádný reálný kořen. Počet reálných kořenů odpovídá počtu průsečíků grafu s reálnou osou. Ukážeme si, jak tento graf ovlivňují jednotlivé koeficienty a_2, a_1 a a_0.

Úplně nejjednodušší případ kvadratické funkce je

$$f(x) = x^2.$$

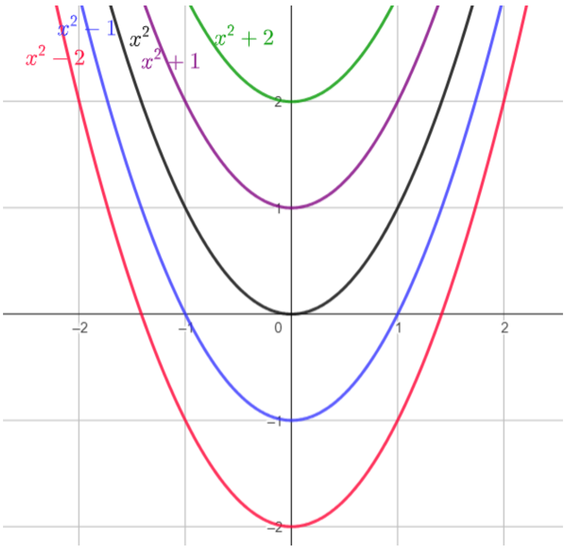
Tedy pro koeficienty platí, že $a_2 = 1, a_1 = 0$ a $a_0 = 0$. Tato funkce bude naše výchozí a v obrázcích bude vyznačena černě.

Jako první budeme měnit koeficient a_2, ostatní koeficienty zůstanou nulové. Absolutní hodnota tohoto koeficientu ovlivňuje, jak rychle graf stoupá nebo klesá. Pro kořeny rovnice to znamená, že ovlivňuje jejich vzdálenost od sebe. Pokud jsou reálné kořeny dva, klesá jejich vzdálenost se zvětšující se hodnotou $|a_2|$. Jeho znaménko nám zase říká, jestli je funkce ryze konvexní nebo ryze konkávní.



Obrázek 14 Graf kvadratické funkce pro $a_2 = -2, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 2$; $a_1, a_0 = 0$ (obrázek: autor)

Pokud měníme absolutní člen a_0, posouváme graf po svislé ose o jeho hodnotu. Koeficient a_0 nám tedy určuje průsečík se svislou osou. V našem případě, kdy je $a_2 = 1$ a $a_1 = 0$ bude platit, že pokud je $a_0 > 0$, pak graf nemá žádný průsečík s reálnou osou a rovnice tak nemá žádné reálné kořeny. Pokud $a_0 = 0$, pak se graf reálné osy dotýká ve svém vrcholu a rovnice má proto jediný dvojnásobný kořen. Pokud $a_0 < 0$, pak má graf dva průsečíky s vodorovnou osou a rovnice má dva reálné kořeny.



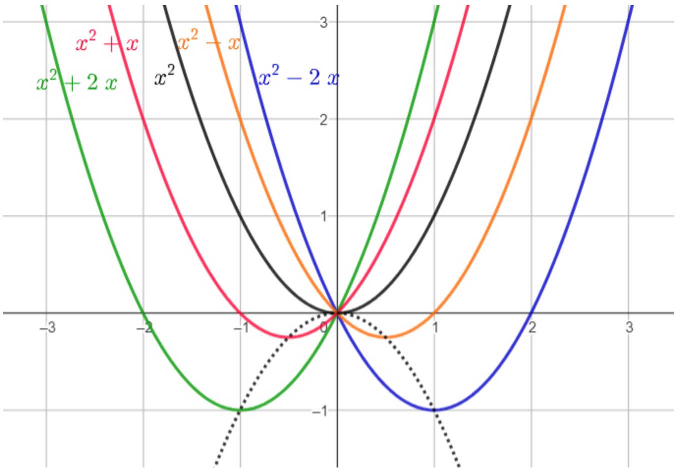
Obrázek 15 Graf kvadratické funkce pro $a_0 = -2, -1, 0, 1, 2$, pokud $a_2 = 1$ a $a_1 = 0$ (obrázek: autor)

Nakonec se podíváme na koeficient a_1. Pokud měníme koeficient a_1, posouváme vrchol z počátku do roviny. Pokud $a_1 \neq 0$, a $a_0 = 0$, pak má kvadratická rovnice dva kořeny, z toho jeden je vždy nula. To se dá odvodit i pomocí vytknutí neznámé x v předpisu funkce

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x = x(a_2x + a_1),$$

z čehož můžeme vyvodit kořeny

$$x_1 = 0 \qquad \text{a} \qquad x_2 = -\frac{a_1}{a_2}.$$



Obrázek 16 Graf kvadratické funkce pro $a_1 = -2, -1, 0, 1, 2$, pokud $a_2 = 1$ a $a_0 = 0$ (obrázek: autor)

Pokud k vykreslení grafu nepoužíváme počítač, je jeho nakreslení složité bez znalosti polohy vrcholu dané paraboly. Bylo by proto vhodné zápis upravit na tvar

$$f(x) = a_2(x - x_0)^2 + y_0\,,$$

kde můžeme lehce vyčíst souřadnice vrcholu $V = [x_0; y_0]$. Hodnota x_0 určuje posunutí grafu na vodorovné ose a hodnota y_0 posunutí ve svislém směru. Jedná se o tzv. doplnění na čtverec, které si podrobněji dále. S využitím algebraické identity $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ můžeme předpis přepsat do podoby

$$f(x) = a_2\left(x - \left(-\frac{a_1}{2a_2}\right)\right)^2 + \left(a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}\right),$$

ze kterého už můžeme lehce vyjádřit souřadnice vrcholu pomocí koeficientů a_0, a_1 a a_2, tedy $V = \left[-\frac{a_1}{2a_2};\ a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}\right]$. S využitím tohoto zápisu můžeme graf libovolné paraboly alespoň přibližně nakreslit mnohem přesněji. Provedeme tak, že nejprve nakrelíme graf

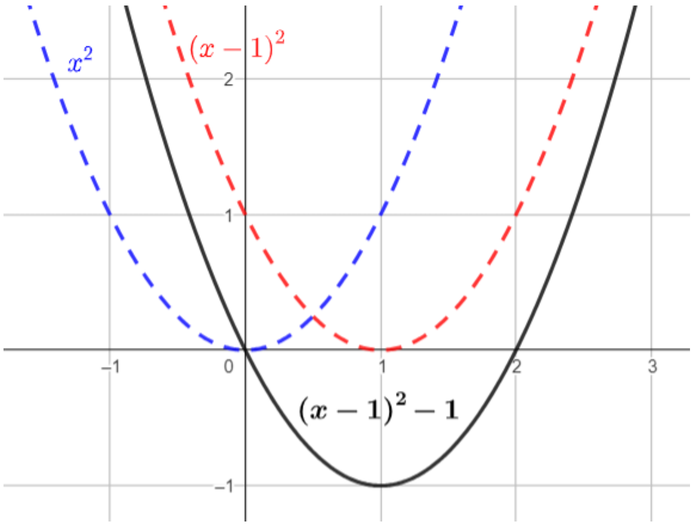
a_2x^2, poté jej posuneme ve vodorovném směru o hodnotu $-\frac{a_1}{2a_2}$ a nakonec ho posuneme ve svyslém směru o $a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2}$. Vezmeme-li například funkci

$$f(x) = x^2 + 2x,$$

jejíž graf je na obrázku výše vyobrazen modře, můžeme její předpis přepsat do tvaru

$$f(x) = (x-1)^2 - 1.$$

Z tohoto tvaru již jednoduše odvodíme posunutí 1 na ose x a 1 na ose y.



Obrázek 17 Posun paraboly podle předpisu $f(x) = x^2 + 2x = (x-1)^2 - 1$ (obrázek: autor)

Grafické řešení kvadratických rovnic je výhodné z mnoha důvodů. Na první pohled vidíme přibližné řešení, pokud graf umíme nakreslit alespoň od ruky můžeme tak bez výpočtů uvést počet reálných řešení a pokud existují, určit jejich přibližnou hodnotu. Pro žáky, kteří se s kvadratickou rovnicí setkávají poprvé, je grafické řešení poměrně intuitivní a propojuje různé oblasti matematiky.

Mezi nevýhody takového řešení patří možná nepřesnost. Pokud graf kreslíme ručně, není vždy možné kořen z obrázku určit. Stejný problém můžeme mít i počítačem vykreslených grafů, pokud jeho průsečíky s reálnou osou nejsou jednoduchá desetinná nebo celá čísla a i v takovém případě je možné udělat chybu. V případě, že jsou kořeny iracionální, nemáme žádnou šanci je správně určit. Posledním a asi největším nedostatkem je fakt, že jsme hledali pouze reálné kořeny a větší část kvadratických rovnic takto vyřešit vůbec nemůžeme.

4.1.2 RYZE KVADRATICKÁ ROVNICE

Definice 4.4: Algebraickou rovnici druhého stupně ve tvaru

$$f(x) = a_2 x^2 - a_0 = 0$$

kde $a_2 \neq 0$ a $a_0, a_2 \in \mathbf{C}$, nazýváme ryze kvadratická rovnice. Čísla a_0, a_2 jsou komplexní koeficienty algebraické rovnice.

Ryze algebraická rovnice je binomickou rovnicí druhého stupně, jejíž obecné řešení jsme si ukazovali ve druhé kapitole této práce. Teď si toto řešení zkonkretizujeme pro kvadratickou rovnici. Úpravou obecného zápisu ryze kvadratické rovnice

$$x^2 = \frac{a_0}{a_2}$$

na tvar

$$x = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

můžeme vidět, že jejím řešením je druhá odmocnina komplexního čísla $\frac{a_0}{a_2}$.

Nejjednodušším případem je řešení, kdy je koeficient $a_0 = 0$. V tomto případě má rovnice jediný dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 0$.

Pokud jsou oba koeficienty a_2 a a_0 z oboru reálných čísel $\mathbf{R}$ a jejich podíl je kladné reálné číslo, tedy platí

$$a_0, a_2 \in \mathbf{R};\ (a_0 > 0 \wedge a_2 > 0) \vee (a_0 < 0 \wedge a_2 < 0)\,,$$

pak jsou kořeny dvě reálná čísla se stejnou absolutní hodnotou ve tvaru

$$x_1 = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{a_0}{a_2}}.$$

Pokud je podíl koeficientů záporné reálné číslo, tedy pokud pro koeficienty platí

$$a_0, a_2 \in \mathbf{R};\ (a_0 > 0 \wedge a_2 < 0) \vee (a_0 < 0 \wedge a_2 > 0),$$

pak jsou oba kořeny ryze imaginární čísla ve tvaru

$$x_1 = \sqrt{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|} \cdot i$$

$$x_2 = -\sqrt{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|} \cdot i.$$

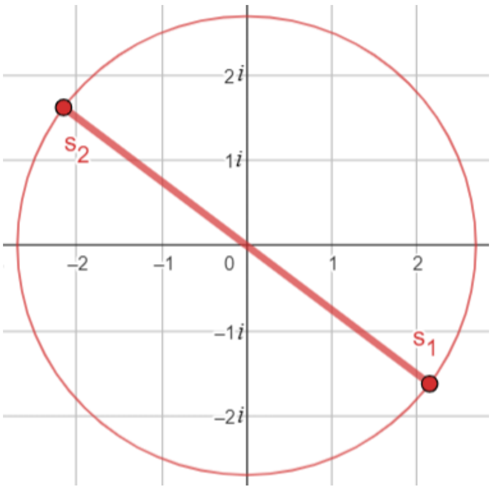
Obecně, pro komplexní koeficienty a_0 a a_2, lze ryze kvadratickou rovnici řešit podle vzorce

$$x_1 = \sqrt{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

$$x_2 = \sqrt{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha + 2\pi}{2}\right)\right),$$

kde $a_0, a_2 \in \mathbf{C}$; $\frac{a_0}{a_2} = u + iv = \left|\frac{a_0}{a_2}\right| (\cos(\alpha) + \sin(\alpha)), \alpha = arcsin\left(\frac{v}{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|}\right) = arccos\left(\frac{u}{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|}\right)$.

Z první kapitoly víme, že n-té odmocniny komplexního čísla z leží na pravidelném n-úhelníku v komplexní rovině, vepsaném do kružnice s poloměrem $\sqrt[n]{|z|}$. Druhé odmocniny komplexního čísla z tedy nalezneme v koncových bodech úsečky s délkou $2\sqrt{|z|}$ a středem v počátku komplexní roviny.



Obrázek 18 Druhá odmocnina z komplexního čísla $z = 2 - 7i$ (obrázek: autor)

Díky této vlastnosti druhé odmocniny můžeme obecné řešení ryze kvadratické rovnice ještě o něco zjednodušit, protože z obrázku plyne, že oba kořeny jsou opačná komplexní čísla, neboli platí rovnost $x_2 = -x_1$. Kořeny ryze kvadratické rovnice tedy nalezneme pomocí vzorce

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$$

kde $a_0, a_2 \in \mathbf{C}$; $\frac{a_0}{a_2} = u + iv = \left|\frac{a_0}{a_2}\right| (\cos(\alpha) + \sin(\alpha)), \alpha = arcsin\left(\frac{v}{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|}\right) = arccos\left(\frac{u}{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|}\right)$.

4.1.3 OBECNÉ ŘEŠENÍ KVADRATICKÉ ROVNICE

Až do teď jsme se bavili o konkrétních speciálních případech kvadratické rovnice. Jak bychom postupovali v obecném případě pro algebraickou rovnici s koeficienty a_2, a_1 a a_0 z oboru komplexních čísel **C**, si ukážeme teď pomocí algebraických úprav.

Začneme tím, že obecný tvar algebraické rovnice druhého stupně doplníme na úplný čtverec. Doplnění rovnice na čtverec vychází z algebraické identity

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Abychom této identity mohli využít, převedeme kvadratickou rovnici nejprve na její normovaný tvar, tedy danou rovnici vydělíme koeficientem a_2, a poté její absolutní člen převedeme na pravou stranu.

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} = 0$$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x = -\frac{a_0}{a_2}$$

Po provedení těchto úprav máme na levé straně rovnice členy s neznámou x a na pravé straně libovolné komplexní číslo. Nyní se vrátíme k již zmíněné algebraické identitě ve které si za a určíme neznámou x. Abychom na levé straně rovnice mohli vytvořit druhou mocninu lineárního výrazu $(a + b)^2$, je třeba, abychom zajistili, že se nejprve rovná pravé straně algebraické identity. Díky našim úpravám máme už z větší části hotovo, na levé straně máme už členy $a^2 = x^2$ a $2ab = \frac{a_1}{a_2}x$. Z toho nám vyplývá, že

$$2b = \frac{a_1}{a_2},$$

z čehož už můžeme vyvodit, že za b lze dosadit

$$b = \frac{a_1}{2a_2},$$

a tedy

$$b^2 = \frac{a_1^2}{4a_2^2}.$$

Tento výraz tedy přičteme na obě strany rovnice.

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_1^2}{4a_2^2} = -\frac{a_0}{a_2} + \frac{a_1^2}{4a_2^2}$$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_1^2}{4a_2^2} = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}$$

V tuto chvíli už levá strana rovnice odpovídá lineární identitě a rovnici proto můžeme přepsat do tvaru

$$\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2},$$

který má na pravé straně komplexní číslo $\frac{a_1^2-4a_0a_2}{4a_2^2}$, jehož jednu odmocninu označme jako

$$\sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}}.$$

Pro výraz $x + \frac{a_1}{2a_2}$ tedy platí

$$x + \frac{a_1}{2a_2} = \pm\sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}},$$

tedy

$$x = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}}$$

$$x = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

Kořeny x_1 a x_2 kvadratické rovnice musí být nutně jedno, nebo obě, z komplexních čísel ve tvaru

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \quad \text{nebo} \quad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

Nakonec si ještě uvedeme důkaz toho, že tato rovnost opravdu platí a obě tato komplexní čísla odpovídají kořenům obecného tvaru kvadratické rovnice. Existuje více důkazů, my si však ukážeme důkaz, který uvádí Schwarz (1958), pouze s upraveným značením tak, aby odpovídalo tomu, jaké je používané v této práci.

Z druhé kapitoly již víme, že pro kořeny normované rovnice platí:

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} = (x - x_1)(x - x_2) = 0,$$

což je rovnost, kterou je nutné dokázat, že platí pro daná čísla x_1 a x_2, která jsme si před chvílí odvodili. Z tohoto vztahu vyplívají i rovnosti:

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2} x_1x_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Tyto rovnosti lze lehce dokázat dosazením

$$x_1 + x_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} + \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} = \frac{-2a_1}{2a_2} = -\frac{a_1}{a_2}$$

$$x_1x_2 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \cdot \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} = \frac{a_1^2 - (a_1^2 - 4a_0a_2)}{4a_2^2} = \frac{4a_0a_2}{4a_2^2} = \frac{a_0}{a_2}.$$

Dokázali jsme si, že tento tvar kořenů platí pro každou kvadratickou rovnici s komplexními koeficienty. Teď se ještě zaměříme na výraz $a_1^2 - 4a_0a_2$, který se v námi vypočítaných kořenech nachází pod odmocninou. Tento výraz nazveme diskriminant algebraické rovnice druhého stupně D_2. S tímto novým značením můžeme kořeny rovnice zapsat takto:

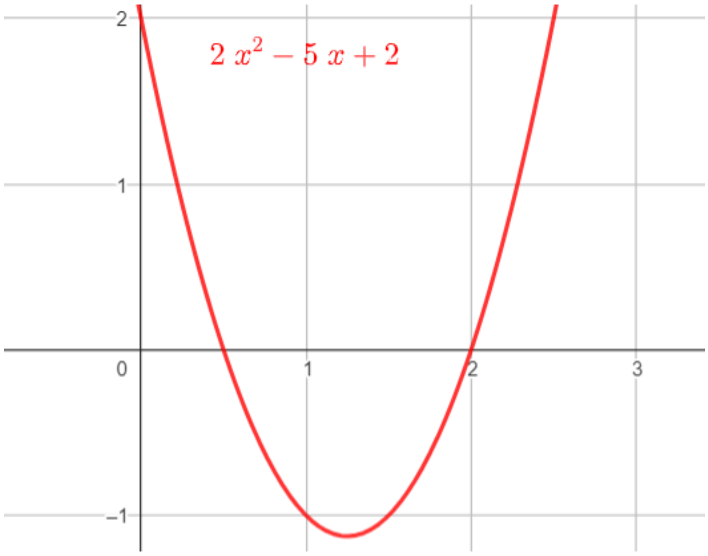
$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{D_2}}{2a_2}.$$

Už z tohoto zápisu je zřejmé, že hodnota diskriminantu ovlivňuje vlastnosti kořenů. Proto si popíšeme, jak vypadají kořeny kvadratické rovnice s reálnými koeficienty v závislosti na hodnotě D_2.

Pokud je $D_2 > 0$ má rovnice dva různé reálné kořeny. Jedním z takových případů je například rovnice

$$2x^2 - 5x + 2 = 0\,,$$

která má kořeny $x_1 = -\frac{1}{2}$ a $x_2 = 2$. Pokud bychom tuto rovnici řešili graficky, našli bychom na vodorovné ose dva průsečíky.

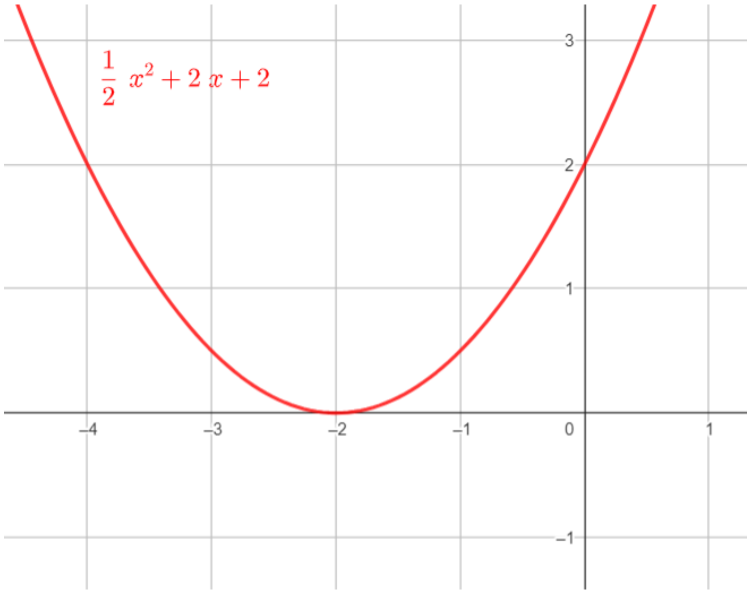


Obrázek 19 Graf funkce $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$ (obrázek: autor)

Rovnice má jediný dvojnásobný kořen jen pokud je $D_2 = 0$. To platí pro algebraické rovnice druhého stupně obecně. Pro kvadratické rovnice s reálnými koeficienty je tento kořen navíc i reálné číslo. Příkladem takové rovnice je

$$\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$$

s dvojnásobným kořenem $x_{1,2} = -2$. Grafické řešení rovnice s $D_2 = 0$ se vyznačuje tím, že se vrchol paraboly dotýká vodorovné osy.



Obrázek 20 Graf funkce $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$ (obrázek: autor)

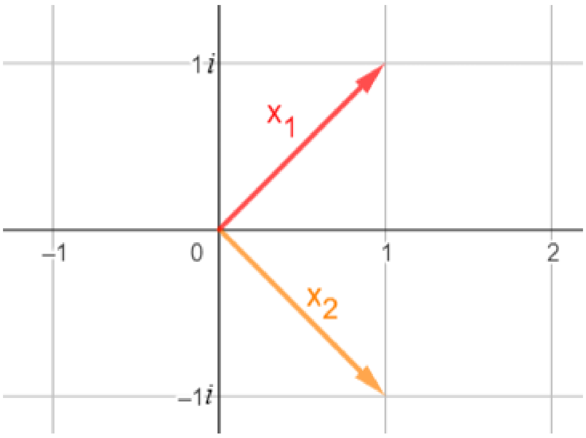
V případě, že nastane $D < 0$, má rovnice dva komplexní kořeny. Tyto kořeny jsou dvě komplexně sdružená čísla

$$x_1 = \frac{-a_1 + i\sqrt{|D_2|}}{2a_2}\; x_2 = \frac{-a_1 - i\sqrt{|D_2|}}{2a_2}.$$

Takovou rovnicí je například

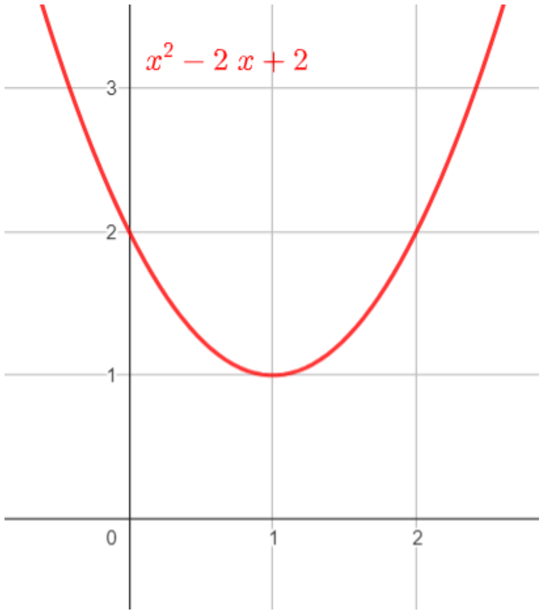
$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

s kořeny $x_1 = 1 + i$ a $x_2 = 1 - i$.



Obrázek 21 Komplexně sdružené kořeny kvadratické rovnice $x^2 - 2x + 2 = 0$ (obrázek: autor)

Pokud bychom se tuto kvadratickou rovnici pokoušeli řešit graficky, nedokázali bychom najít žádný průsečík s reálnou osou a tedy ani žádné reálné kořeny odpovídající rovnice.



Obrázek 22 Graf funkce $f(x) \; = \; x^2 - 2x + 2$ (obrázek: autor)

Hodnota odmocniny z diskriminantu $\sqrt{D_2}$ je pevně daná hodnota. Pro kladná reálná čísla je tato hodnota také kladné reálné číslo, pro záporná reálná čísla jsou to kladné násobky imaginární jednotky i. Pro obecné komplexní číslo $D_2 = u + vi; v \neq 0$ je hodnotou jeho druhé odmocniny $\sqrt{D_2}$ pro kladné hodnoty v

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(u + \sqrt{u^2 + v^2}\right)} \; + \; i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-u + \sqrt{u^2 + v^2}\right)}$$

a pro záporné hodnoty v

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left(u + \sqrt{u^2 + v^2}\right)} \; - \; i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-u + \sqrt{u^2 + v^2}\right)} \; .$$

U jednotlivých odmocnin bereme vždy kladnou hodnotu (SCHWARZ, 1958).

Pokud používáme pro nalezení druhé odmocniny z komplexního čísla, kde $v \neq 0$, vzorec využívající goniometrický tvar komplexních čísel, je pevně danou hodnotou takové komplexní číslo, jehož reálná část je kladná. Druhé odmocniny komplexního čísla jsou vždy čísla opačná a druhá hodnota odmocniny je ve vzorci pro $x_{1,2}$ zastoupena opačným znaménkem.

4.1.4 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: Pomocí grafu najděme počet řešení v oboru reálných čísel kvadratické rovnice

$$\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0$$

a pokud reálná řešení existují, určeme alespoň jejich přibližnou hodnotu.

Řešení: Danou rovnici si přepíšeme jako odpovídající funkci a zjistíme hodnoty x_0 a y_0

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$$

$$x_0 = -\frac{a_1}{2a_2} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$$

$$y_0 = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} = 1 - \frac{1^2}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 1 - 1 = 0\,.$$

Nyní si přepíšeme tvar předpisu funkce pomocí hodnot x_0 a y_0

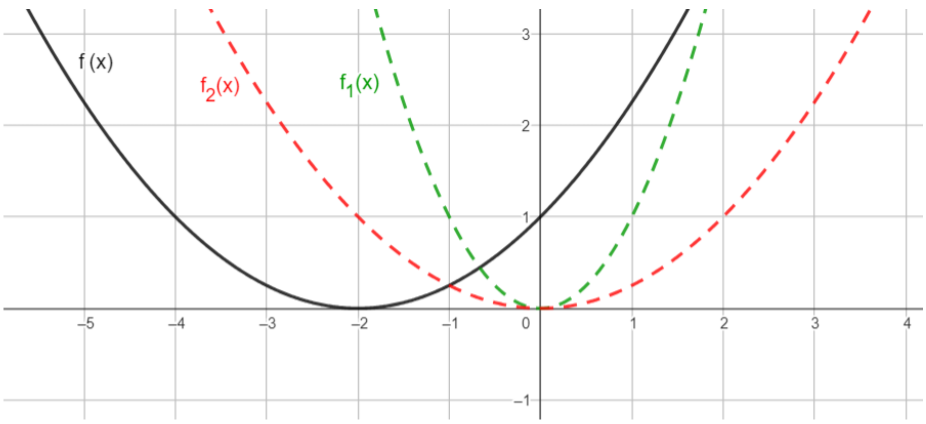
$$f(x) = \frac{1}{4}\big(x - (-2)\big)^2 + 0 = \frac{1}{4}(x + 2)^2\,.$$

S využitím pomocných funkcí $f_1(x)$ a $f_2(x)$ si nakreslíme graf funkce $f(x)$.

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = \frac{1}{4}x^2$$

Graf funkce $f_2(x)$ nakonec posuneme vodorovně o -2. Z konečného grafu vidíme, že tato rovnice má jeden dvojnásobný reálný kořen $x_{1,2} = -2$.



Obrázek 23 Příklad – grafické řešení rovnice $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0$ (obrázek: autor)

Příklad 2: Pomocí grafu najděme počet řešení v oboru reálných čísel kvadratické rovnice

$$-2x^2 + 4x - 3 = 0$$

a pokud reálná řešení existují, určeme alespoň jejich přibližnou hodnotu.

Řešení: Napíšeme si předpis odpovídající funkce a vypočítáme souřadnice vrcholu x_0 a y_0

$$f(x) = -2x^2 + 4x - 3$$

$$x_0 = -\frac{a_1}{2a_2} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

$$y_0 = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} = -3 - \frac{4^2}{4 \cdot (-2)} = -3 + 2 = -1\,.$$

Vrchol paraboly tedy najdeme v bodě $V = [1;\ -1]$ a předpis funkce lze přepsat do tvaru

$$f(x) = -2(x-1)^2 - 1.$$

Graf této funkce budeme vytvářet postupně a to pomocí pomocných funkcí $f_1(x), f_2(x)\ a\ f_3(x)$. Nejprve nakreslíme první dvě pomocné funkce

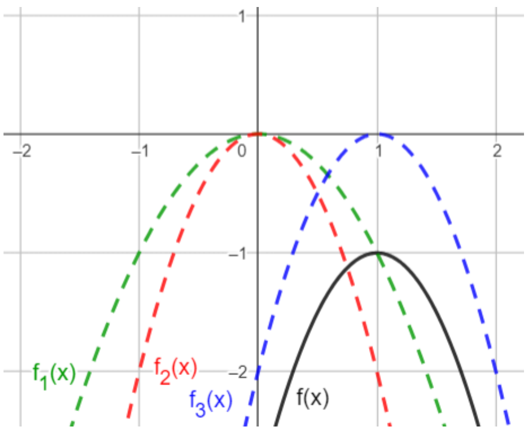
$$f_1(x) = -x^2$$

$$f_2(x) = -2x^2$$

poté graf funkce $f_2(x)$ posuneme doprava o 1 na graf funkce $f_3(x)$

$$f_3(x) = -2(x-1)^2$$

a nakonec už jen tento graf posuneme svisle o -1. Z grafu $f(x)$ vidíme, že rovnice nemá žádná reálná řešení. Kořeny x_1 a x_2 se tedy nacházejí mimo reálnou osu.



Obrázek 24 Příklad – grafické řešení rovnice $-2x^2 + 3x + 2 = 0$ (obrázek: autor)

Příklad 3: Pomocí grafu najděme počet řešení v oboru reálných čísel kvadratické rovnice

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 = 0$$

a pokud reálná řešení existují, určeme alespoň jejich přibližnou hodnotu.

Řešení: Napíšeme si předpis odpovídající funkce a určíme si hodnoty x_0 a y_0

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2$$

$$x_0 = -\frac{a_1}{2a_2} = -\frac{3}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -3$$

$$y_0 = a_0 - \frac{a_1^2}{4a_2} = 2 - \frac{3^2}{4 \cdot \frac{1}{2}} = 2 - \frac{9}{2} = -\frac{5}{2}.$$

Teď už můžeme bez problému určit, že vrchol paraboly najdeme v bodě $V = \left[-3;\ -\frac{5}{2}\right]$. Předpis funkce můžeme tedy přepsat do tvaru

$$f(x) = \frac{1}{2}\big(x - (-3)\big)^2 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{5}{2}$$

a namalovat graf dané funkce. My jej budeme malovat postupně, pomocí následujících pomocných funkcí

$$f_1(x) = x^2$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x^2$$

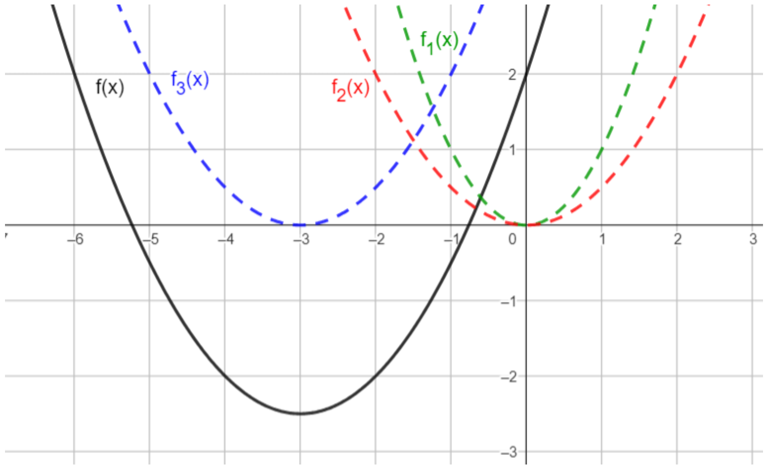
následně graf funkce $f_2(x)$ posuneme vodorovně o -3 na graf $f_3(x)$

$$f_3(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$$

a nakonec graf $f_3(x)$ posuneme svisle o $-\frac{5}{2}$, abychom dostali graf funkce $f(x)$.

Z posledního grafu můžeme lehce usoudit, že má rovnice dvě reálná řešení. Jejich přesnou hodnotu z grafu určit nedokážeme, můžeme ale určit jejich přibližnou hodnotu:

$$x_1 \approx -5 \qquad \text{a} \qquad x_2 \approx -1\,.$$



Obrázek 25 Příklad – grafické řešení rovnice $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 = 0$ (obrázek: autor)

Příklad 4: Řešme ryze kvadratickou rovnici

$$(4 - 8i)x^2 = 0\,.$$

Řešení: Ze zápisu rovnice vidíme, že neobsahuje absolutní člen. Už z toho můžeme usoudit, že má daná rovnice jen jediný dvojnásobný kořen rovný nule. Ukážeme si, jak k takovému výsledku dojít i pomocí ekvivalentních úprav.

$$(4 - 8i)x^2 = 0$$

$$x^2 = \frac{0}{4 - 8i}$$

$$x^2 = 0$$

$$x_1 = \sqrt{0} \qquad x_2 = -\sqrt{0}$$

$$x_{1,2} = 0$$

Příklad 5: Řešme ryze kvadratickou rovnici

$$3x^2 + 12 = 0$$

Řešení: Nejprve odečteme absolutní člen a poté celou rovnici vydělíme číslem 3.

$$3x^2 + 12 = 0$$

$$3x^2 = -12$$

$$x^2 = -\frac{12}{3}$$

$$x^2 = -4$$

Nyní najdeme druhou odmocninu z čísla -4. Protože se jedná o záporné číslo, najdeme odmocninu i jeho absolutní hodnoty a tu pak vynásobíme imaginární jednotkou i.

$$x = \sqrt{-4}$$

$$x_1 = \sqrt{-4} \qquad x_2 = -\sqrt{-4}$$

$$x_1 = i\sqrt{|-4|} \qquad x_2 = -i\sqrt{|-4|}$$

$$x_1 = 2i \qquad x_2 = -2i$$

Rovnice má tedy dva komplexní kořeny $2i$ a $-2i$.

Příklad 6: Řešme ryze kvadratickou rovnici

$$\left(1 + \sqrt{3}\,i\right)x^2 + 4\sqrt{3} - 4i = 0.$$

Řešení: Nejprve odečteme komplexní číslo $4\sqrt{3} - 4i$ a poté celou rovnici vydělíme číslem $1 + \sqrt{3}\,i$.

$$2ix^2 = -4\sqrt{3} + 4i$$

$$x^2 = \frac{-4\sqrt{3} + 4i}{1 + \sqrt{3}\,i}$$

Nyní musíme vypočítat podíl komplexních čísel. Z kapitoly 1 víme, že pro podíl dvou komplexních čísel v algebraickém tvaru platí:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{u_1 + v_1 i}{u_2 + v_2 i} = \frac{(u_1 + v_1 i\,)(u_2 - v_2 i)}{{u_2}^2 + {v_2}^2} = \frac{(u_1 u_2 + v_1 v_2) + (u_2 v_1 - u_1 v_2)i}{{u_2}^2 + {v_2}^2}.$$

Tento vzorec tedy použijeme.

$$x^2 = \frac{\left(-4\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\right) + (4 + 12)i}{1 + 3}$$

$$x^2 = \frac{16i}{4}$$

$$x^2 = 4i$$

Číslo $4i$ si převedeme na goniometrický tvar, abychom mohli lehce najít jeho odmocninu. Jelikož se jedná o číslo ryze imaginární, našli bychom ho v komplexní rovině na imaginární ose. Z toho můžeme vyvodit $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a $|z| = 4$. Tedy

$$x^2 = 4i$$

$$x^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Teď už pomocí druhé odmocniny z komplexního čísla nalezneme kořeny x_1 a x_2. Protože víme, že výsledkem druhé odmocniny jsou dvě opačná komplexní čísla, stačí, abychom našli pouze první kořen, druhý se bude lišit pouze znaménky.

$$x^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \pm\sqrt{4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$x_1 = \sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{2\cdot 2} + i\sin\frac{\pi}{2\cdot 2}\right) \quad x_2 = -\sqrt{4}\left(\cos\frac{\pi}{2\cdot 2} + i\sin\frac{\pi}{2\cdot 2}\right)$$

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2\cdot 2} + i\sin\frac{\pi}{2\cdot 2}\right) \quad x_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{2\cdot 2} + i\sin\frac{\pi}{2\cdot 2}\right)$$

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \quad x_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i \quad x_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou tedy čísla $\sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ a $-\sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$.

Příklad 7: Řešme kvadratickou rovnici z příkladu 1 v oboru komplexních čísel **C** s využitím diskriminantu D_2

$$\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0.$$

Řešení: Nejprve si vypočítáme hodnotu samotného diskriminantu. Jeho hodnota nám řekne hodně o vlastnostech kořenů této rovnice

$$D_2 = a_1^2 - 4a_0a_2$$

$$D_2 = 1^2 - 4\cdot 1\cdot\frac{1}{4} = 1 - 1 = 0.$$

Z vypočítané hodnoty diskriminantu $D_2 = 0$ a faktu, že se jedná o rovnici s reálnými koeficienty, vidíme, že tato rovnice má jediný dvojnásobný kořen v oboru reálných čísel **R**. Teď hodnotu diskriminantu dosadíme do vzorce pro x_1 a x_2

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D_2}}{2a_2} \qquad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D_2}}{2a_2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{0}}{2 \cdot \frac{1}{4}} \qquad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{0}}{2 \cdot \frac{1}{4}}$$

$$x_1 = x_2 = -2.$$

Příklad 8: Řešme kvadratickou rovnici z příkladu 2 v oboru komplexních čísel **C** s využitím diskriminantu D_2

$$-2x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Řešení: Stejně jako v předchozím příkladu si vypočítáme hodnotu D_2

$$D_2 = a_1^2 - 4a_0a_2$$

$$D_2 = 4^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2) = 16 - 24 = -8\,.$$

Diskriminant této rovnice je záporné reálné číslo a koeficienty jsou také z oboru reálných čísel. To znamená, že rovnice má dva různé komplexní kořeny

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D_2}}{2a_2} \qquad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D_2}}{2a_2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{-8}}{2 \cdot (-2)} \qquad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{-8}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2\sqrt{2}\,i}{-4} \qquad x_2 = \frac{-4 - 2\sqrt{2}\,i}{-4}$$

$$x_1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\,i \qquad x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i.$$

Příklad 9: Řešme kvadratickou rovnici z příkladu 3 v oboru komplexních čísel **C** s využitím diskriminantu D_2

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 = 0.$$

Řešení: Stejně jako v předchozích příkladech si vypočítáme hodnotu D_2

$$D_2 = a_1^2 - 4a_0a_2$$

$$D_2 = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 9 - 4 = 5\,.$$

Protože platí $D_2 = 5$ a $a_2, a_1, a_0 \in \mathbf{R}$, bude mít rovnice dva různé kořeny z oboru reálných čísel. Teď už si diskriminant dosadíme do vzorce pro kořeny

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D_2}}{2a_2} \qquad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D_2}}{2a_2}$$

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2 \cdot \frac{1}{2}} \qquad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2 \cdot \frac{1}{2}}$$

$$x_1 = -3 + \sqrt{5} \qquad x_2 = -3 - \sqrt{5}\,.$$

Příklad 10: Řešme ryze kvadratickou rovnici z příkladu 6 s využitím diskriminantu D_2

$$\left(1 + \sqrt{3}\,i\right)x^2 + 4\sqrt{3} - 4i = 0\,.$$

Řešení: Vypočítáme si hodnotu diskriminantu

$$D_2 = a_1^2 - 4a_0a_2$$

$$D_2 = 0^2 - 4 \cdot \left(4\sqrt{3} - 4i\right) \cdot \left(1 + \sqrt{3}\,i\right) = -32\sqrt{3} - 32i\,.$$

Na rozdíl od předchozích příkladů, není hodnota D_2 z oboru reálných čísel. Pro větší přehlednost si odmocninu z D_2 vypočítáme zvlášť a to pomocí převedení na goniometrický tvar

$$\sqrt{D_2} = \sqrt{-32\sqrt{3} - 32i} = \sqrt{64\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}\,.$$

Abychom dostali hodnotu $\sqrt{D_2}$, na které jsme se domluvili, tedy komplexní číslo s kladnou reálnou částí (pokud reálnou část má) použijeme ve vzorci pro odmocninu $k = 1$, abychom měli kladnou hodnotu $\cos\frac{\frac{7\pi}{6}+2k\pi}{2}$. Tedy

$$\sqrt{D_2} = \sqrt{64\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)} = 8\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$

Abychom měli jednoduší počítání ve vzorci pro x_1 a x_2, převedeme si do goniometrického tvaru i koeficient a_2

$$a_2 = 1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Koeficient a_1 v tomto případě nutně převádět nemusíme, protože je nulový, jeho hodnota nám tedy nijak neovlivní hodnotu součtu. Teď už si dosadíme si všechny hodnoty do vzorce pro x_1 a x_2

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{D_2}}{2a_2} \qquad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{D_2}}{2a_2}$$

$$x_1 = \frac{0 + 8\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)}{2\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} \qquad x_2 = \frac{0 - 8\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)}{2\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$x_1 = \frac{8\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)} \qquad x_2 = \frac{-8\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)}{4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$x_1 = 2\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$x_2 = -2\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$x_1 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \qquad x_2 = -2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$$x_1 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i \qquad x_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,i\,.$$

4.2 Řešení bikvadratické rovnice

V podkapitole 4.1 jsme se věnovali řešení algebraické rovnice druhého stupně. Naše poznatky teď zužitkujeme při řešení samotné bikvadratické rovnice, kterou jsme si definovali v úvodu čtvrté kapitoly.

Bikvadratická rovnice, tedy algebraická rovnice ve tvaru

$$f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0,$$

je speciálním případem algebraické rovnice čtvrtého stupně. V tomto speciálním typu kvartické rovnice chybí kubický a lineární člen a její tvar je tak velmi podobný rovnici kvadratické. Tato podobnost nám umožní bikvadratické rovnice celkem lehce řešit. Pojďme si tedy odvodit jejich řešení pomocí jednoduchých algebraických úprav.

Neznámou x si nejprve napíšeme pomocí zápisu se stejným mocnitelem. Toho dosáhneme rozložením čísla 4 na součin $4 = 2 \cdot 2$ čísla 2 na součin $2 = 2 \cdot 1$

$$f(x) = a_4 x^{2\cdot 2} + a_2 x^{2\cdot 1} + a_0 = 0.$$

Nyní využijeme exponenciální identity $a^{pq} = (a^p)^q$ a rovnici přepíšeme do tvaru

$$f(x) = a_4 (x^2)^2 + a_2 (x^2)^1 + a_0 = 0.$$

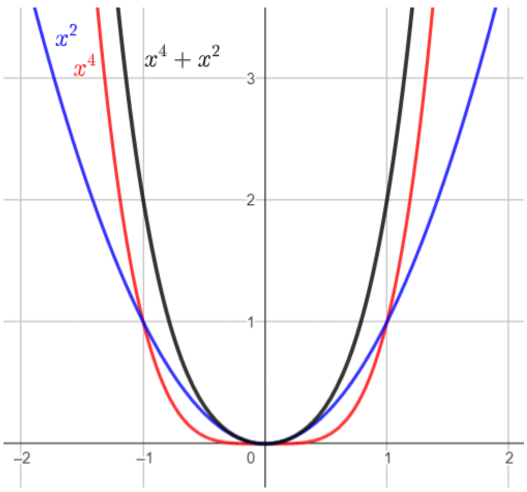
Tímto zápisem jsme se ještě o něco více přiblížili tvaru kvadratické rovnice. Nyní se pokusíme nějak zbavit výrazu v závorce a to pomocí jeho substituce za y. Přepišme tedy tuto rovnici pomocí substituce $y = x^2$ na tvar

$$f(y) = a_4 y^2 + a_2 y + a_0 = 0\,.$$

Jak můžeme dobře vidět, bikvadratickou rovnici jsme si snadno převedli na kvadratickou rovnici pomocí jednoduché substituce. Tento typ rovnice už řešit umíme z předešlé podkapitoly. Teď, když jsme si řešení bikvadratické rovnice nastínili, pojďme se podívat na několik možných řešení konkrétních případů a nakonec i obecné řešení bikvadratické rovnice.

4.2.1 GRAFICKÉ ŘEŠENÍ BIKVADRATICKÉ ROVNICE

Bikvadratickou rovnici s koeficienty z oboru reálných čísel můžeme podobně jako kvadratickou rovnici řešit graficky a to alespoň pro $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{R}$. Obdobně jako u kvadratické rovnice nám graf může pomoci určit počet reálných řešení a jejich přibližnou hodnotu. Na rozdíl od grafu kvadratické funkce se graf funkce odpovídající bikvadratické rovnici nikdy neposouvá ve vodorovném směru a je vždy souměrný podle svislé osy, jedná se tedy o sudou funkci, protože grafy x^4 a x^2 jsou také sudé.

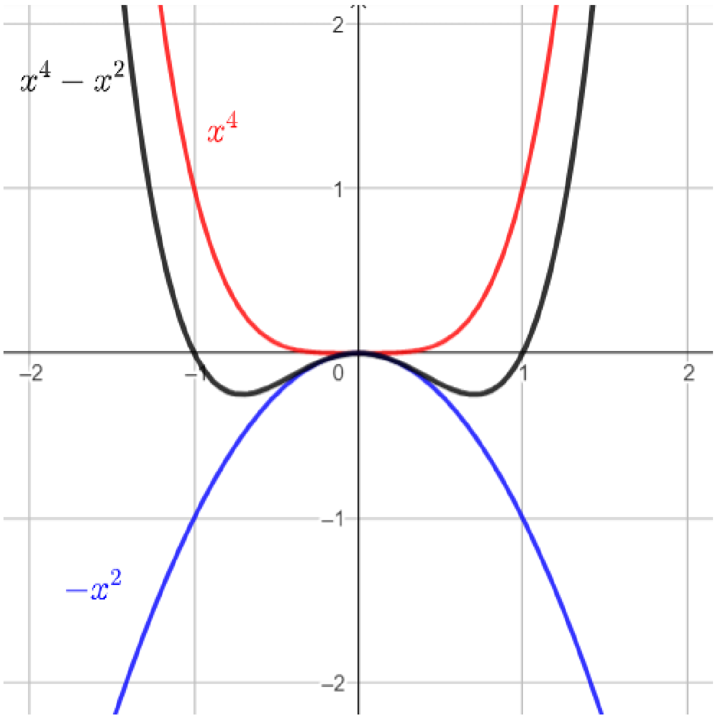


Obrázek 26 Grafy funkcí x^4, x^2 a $x^4 + x^2$ (obrázek: autor)

Z obrázku je vidět, že graf funkce

$$f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0\,,$$

kde $a_4, a_2, a_0 \in \mathbf{R}$ a koeficienty a_4 a a_2 mají stejné znaménko, se podobá grafu x^2. O parabolu se ale nejedná. Také si můžeme všimnout, že graf x^4 roste v okolí pomaleji než graf x^2. Právě tato zvláštnost má za následek vzhled grafu funkce $f(x)$, pokud mají koeficienty a_4 a a_2 opačná znaménka.

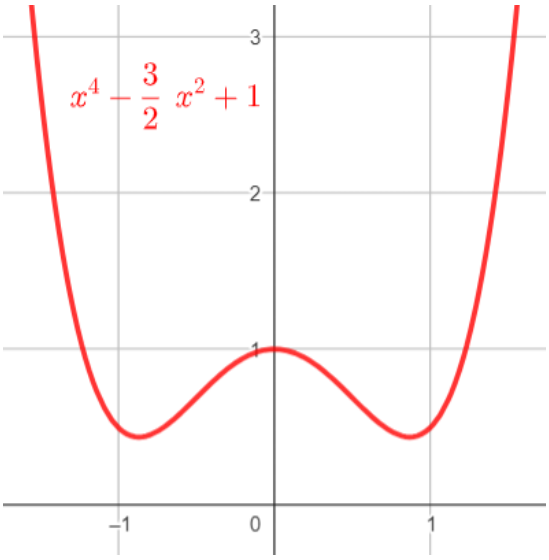


Obrázek 27 Grafy funkcí x^4, x^2 a $x^4 - x^2$ (obrázek: autor)

Zaměříme se teď na počet reálných řešení dané rovnice s reálnými koeficienty podle toho, jak vypadá její graf. Jelikož je jedná o algebraickou rovnici čtvrtého stupně, daná rovnice může mít v oboru reálných čísel maximálně 4 řešení.

Podobně jako u kvadratické rovnice, může i u bikvadratické rovnice nastat situace, že neexistuje žádné reálné řešení. V takovém případě je graf buď celý pod a nebo nad vodorovnou osou. Příkladem bikvadratické rovnice s reálnými koeficienty bez reálného řešení je

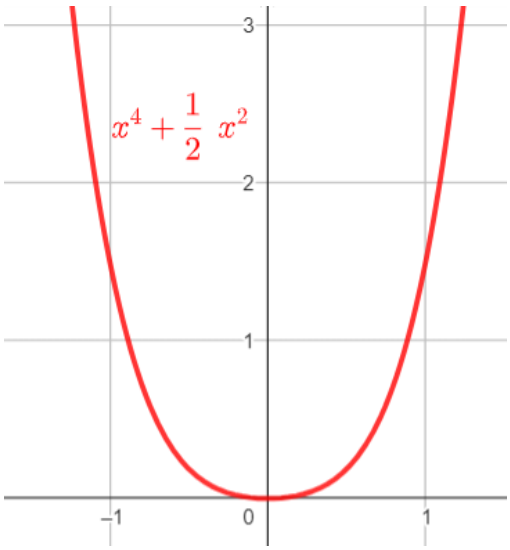
$$x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1 = 0.$$



Obrázek 28 Graf funkce $f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ (obrázek: autor)

Protože je graf odpovídající bikvadratické rovnici souměrný podle osy y, může mít taková rovnice jedno řešení jen v případě, že její koeficienty a_4 a a_2 mají shodné znaménko a koeficient a_0 je nulový. Pokud jsou splněny tyto podmínky, dotýká se graf vodorovné osy právě v jednom bodě, kterým je nula. Nula je v tomto případě také dvojnásobným kořenem dané rovnice, další dva kořeny jsou již komplexní. Příkladem rovnice s jedním dvojnásobným reálným kořenem je

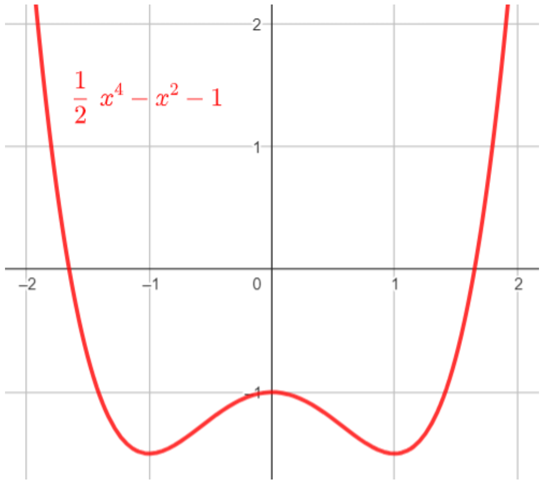
$$x^4 + \frac{1}{2}x^2 = 0.$$



Obrázek 29 Graf funkce $f(x) = x^4 + \frac{1}{2}x^2$ (obrázek: autor)

Dva jednoduché reálné kořeny dostaneme v případě, že dvě vnější ramena funkce protínají vodorovnou osu. Příkladem takové rovnice je

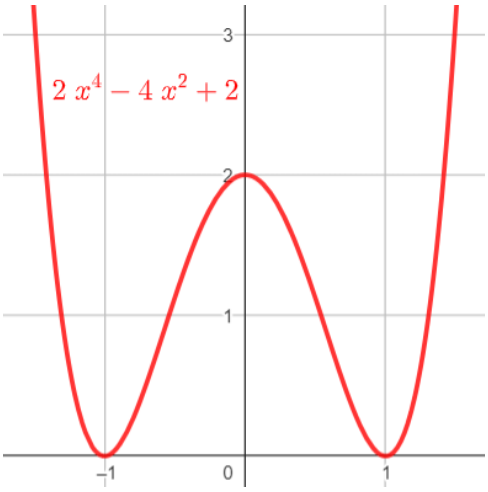
$$\frac{1}{2}x^4 - x^2 - 1 = 0.$$



Obrázek 30 Graf funkce $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 1$ (obrázek: autor)

Naopak dva dvojnásobné kořeny má bikvadratická rovnice v případě, že koeficienty a_4 a a_2 mají rozdílná znaménka a graf se osy x dotýká v obou minimech, pro $a_4 > 0$, nebo maximech, pro $a_4 < 0$. Jako příklad takové rovnice si uvedeme

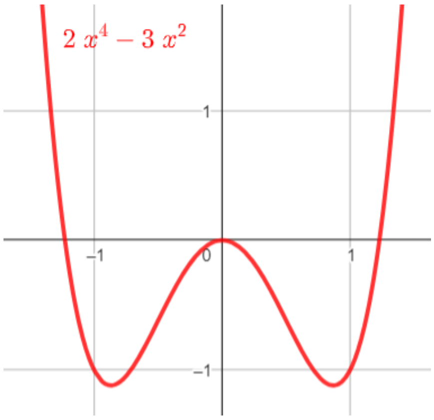
$$2x^4 - 4x^2 + 2 = 0.$$



Obrázek 31 Graf funkce $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$ (obrázek: autor)

Bikvadratická rovnice má tři různé reálné kořeny, z toho jeden dvojnásobný, právě tehdy, když se osy x dotýká v nule a zároveň se s osou protíná v jejích krajních ramenech. Koeficienty a_4 a a_2 musí mít tedy opačná znaménka a absolutní člen musí být nutně roven nule. Nula je v těchto rovnicích dvojnásobným kořenem. Rovnice s tímto řešením, kterou si uvedeme je rovnice

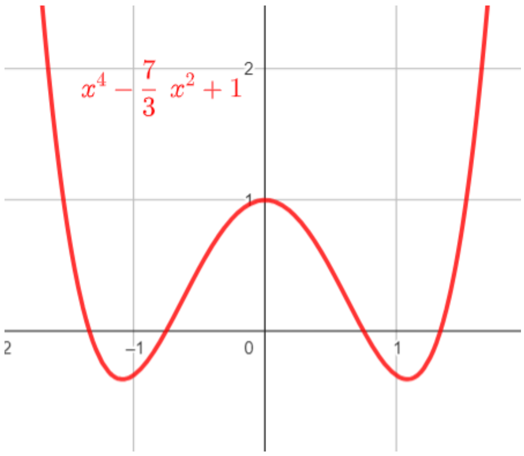
$$2x^4 - 3x^2 = 0.$$



Obrázek 32 Graf funkce $f(x) = 2x^4 - 3x^2$ (obrázek: autor)

Poslední případ bikvadratické rovnice, pro který si uvedeme grafické řešení je taková rovnice, které má 4 reálné kořeny. Příkladem takové rovnice je například

$$x^4 - \frac{7}{3}x^2 + 1 = 0\,.$$



Obrázek 33 Graf funkce $f(x) = x^4 - \frac{7}{3}x^2 + 1$ (obrázek: autor)

Stejně jako u kvadratické rovnice je grafické řešení bikvadratické rovnice výhodné tím, že k číselnému zápisu dodává vizualizaci, která je vhodná pro představu jeho zápisu. Velkou nevýhodou ale tentokrát je, že pokud není absolutní člen nulový, může být složité načrtnout graf i jen přibližně dobře, proto je pro jeho vykreslení vhodné využít počítač.

4.2.2 BINOMICKÁ ROVNICE ČTVRTÉHO STUPNĚ

Definice 4.5 : Algebraickou rovnici čtvrtého stupně ve tvaru

$$f(x) = a_4x^4 - a_0 = 0$$

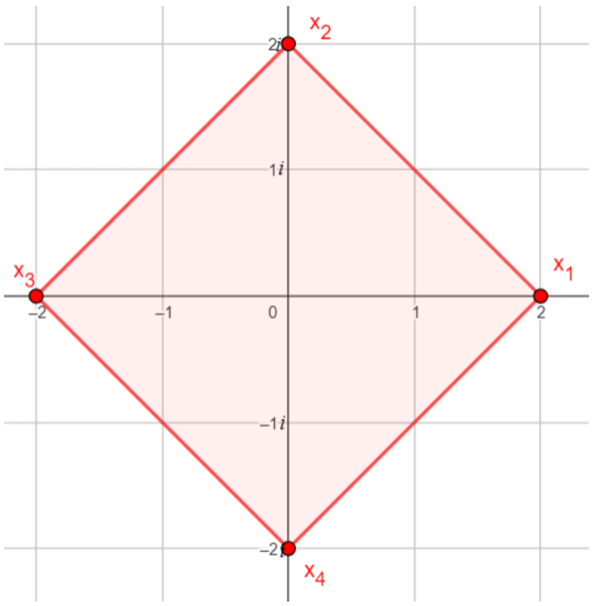
kde $a_4 \neq 0$ a $a_0, a_4 \in \mathbf{C}$, nazýváme binomická rovnice čtvrtého stupně. Čísla a_0, a_4 jsou komplexní koeficienty algebraické rovnice.

Binomická rovnice je speciálním případem bikvadratické rovnice, ve které se nenachází kvadratický člen. Najdeme v ní pouze člen kvartický a absolutní. Její řešení je o to jednodušší

$$x_{1,2,3,4} = \sqrt[4]{\frac{a_0}{a_4}}.$$

Zajímavým případem je pokud $a_0, a_4 \in \mathbf{R}$, a zároveň je jejich podíl pod odmocninou větší než nula. Pak najdeme kořeny této rovnice v komplexní rovině ve vrcholech čtverce se středem v počátku, z nichž dva se nachází na reálné a dva na imaginární ose. Kořeny takové rovnice můžeme najít takto

$$x_1 = \sqrt[4]{\frac{a_0}{a_4}} \quad x_2 = i \cdot \sqrt[4]{\frac{a_0}{a_4}} \quad x_3 = -\sqrt[4]{\frac{a_0}{a_4}} \quad x_4 = -i \cdot \sqrt[4]{\frac{a_0}{a_4}}\ .$$



Obrázek 34 Kořeny rovnice $x^4 - 16 = 0$ v komplexní rovině (obrázek: autor)

4.2.3 OBECNÉ ŘEŠENÍ BIKVADRATICKÉ ROVNICE

Obecně řešíme bikvadratickou rovnici pomocí substituce $y = x^2$, o které už jsme se bavili. Díky této substituci převedeme bikvadratickou rovnici

$$f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0 = 0$$

na kvadratickou rovnici s neznámou y

$$f(y) = a_4y^2 + a_2y + a_0 = 0.$$

Z podkapitoly o obecném řešení kvadratické rovnice víme, že pro kořeny této rovnice platí

$$y_1 = \frac{-a_2 + \sqrt{a_2^2 - 4a_0a_4}}{2a_4} y_2 = \frac{-a_2 - \sqrt{a_2^2 - 4a_0a_4}}{2a_4}.$$

Po zavedení diskriminantu

$$D_2 = a_2^2 - 4a_0a_4$$

můžeme použít zjednodušený zápis

$$y_{1,2} = \frac{-a_2 \pm \sqrt{D_2}}{2a_4}.$$

Pokud se teď zbavíme substituce $y = x^2$, neboli $x = \sqrt{y}$, dostaneme vzorec, podle kterého můžeme najít všechny kořeny bikvadratické rovnice

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-a_2 + \sqrt{D_2}}{2a_4}}\ x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-a_2 - \sqrt{D_2}}{2a_4}}.$$

Teď se ještě zaměříme na to, jak hodnota diskriminantu D_2 bikvadratické rovnice ovlivní vlastnosti jejích kořenů. Pokud je $D_2 = 0$, dostáváme pouze jeden dvojnásobný kořen kvadratické rovnice $y_{1,2}$. Pro kořeny bikvadratické rovnice to znamená, že

$$x_1 = x_3 = \sqrt{\frac{-a_2}{2a_4}} x_2 = x_4 = -\sqrt{\frac{-a_2}{2a_4}}.$$

Rovnice má v takovém případě tedy dva dvojnásobné kořeny.

Pokud platí, že $-a_2 + \sqrt{D_2} = 0$, případně $-a_2 - \sqrt{D_2} = 0$, pak má kvadratická rovnice dva různé kořeny, z nichž jeden je nulový $y_1 = 0$ a druhý je z oboru komplexních čísel. Pro kořeny bikvadratické rovnice pak platí

$$x_1 = x_2 = 0 \qquad\qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}\ .$$

Rovnice má v tomto případě dva různé kořeny a jeden dvojnásobný kořen rovný nule.

V případě, že $D_2 = a_2 = 0$, pak má kvadratická rovnice jediný dvojnásobný kořen y rovný nule. Taková bikvadratická rovnice má jediný čtyřnásobný kořen rovný nule

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0\ .$$

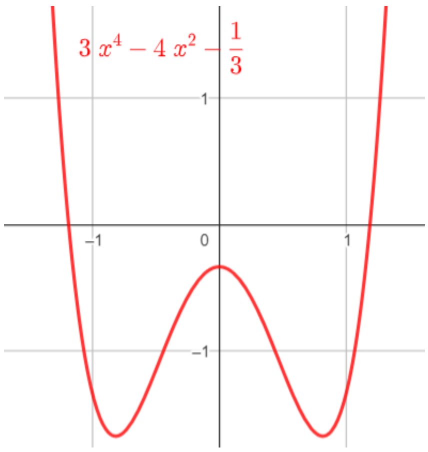
4.2.4 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: S využitím grafů odpovídající funkce určeme počet a přibližnou hodnotu reálných kořenů rovnice

$$3x^4 - 5x^2 + a_0 = 0$$

pro hodnoty absolutního členu $a_0 = -\frac{1}{3}; 0; \frac{4}{3}$.

Řešení: Nejprve vytvoříme graf pro $a_0 = -\frac{1}{3}$.



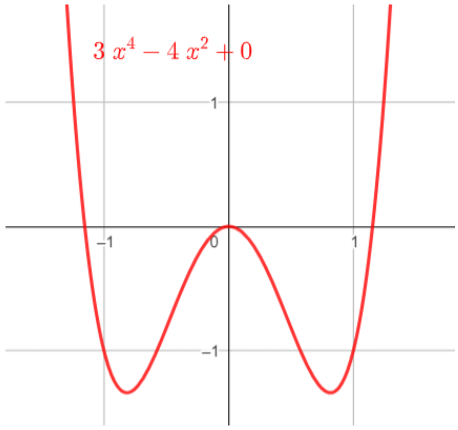
Obrázek 35 Příklad – graf funkce $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - \frac{1}{3}$ (obrázek: autor)

Na grafu vidíme, že vodorovnou osu protínají jen vnější ramena. Tato rovnice má tedy dva různé reálné kořeny. O jejich hodnotě můžeme říct

$$|x_1| = |x_2|$$

$$-2 < x_1 < -1 \quad \text{a} \quad 1 < x_2 < 2\ .$$

Nyní vykreslíme graf pro $a_0 = 0$.



Obrázek 36 Příklad – graf funkce $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - \frac{1}{3}$ (obrázek: autor)

Protože je koeficient a_0 roven nule, dotýká se oproti předchozí hodnotě graf vodorovné osy i v nule. Tato rovnice má tedy celkem tři různé kořeny, dva jednoduché a jeden dvojnásobný. O hodnotě jednoduchých kořenů v tomto případě může říct

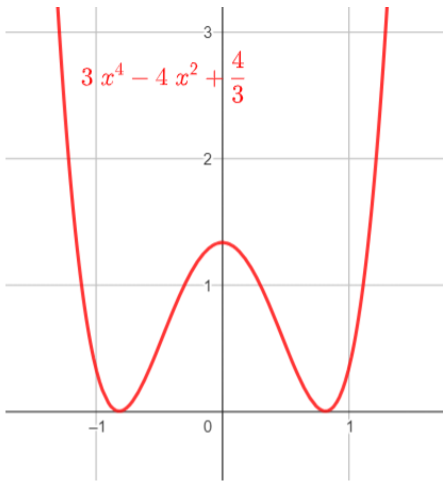
$$|x_1| = |x_3|$$

$$-2 < x_1 < -1 \quad \text{a} \quad 1 < x_3 < 2$$

a o dvojnásobném kořenu

$$x_2 = 2.$$

Nakonec vykreslíme i graf pro $a_0 = \frac{4}{3}$.



Obrázek 37 Příklad – graf funkce $f(x) = 3x^4 - 5x^2 - \frac{1}{3}$ (obrázek: autor)

Graf se v tomto případě dotýká vodorovné osy v obou lokálních minimech. Z toho můžeme odvodit, že tato rovnice má dva různé dvojnásobné kořeny, o jejichž hodnotě můžeme říct

$$|x_1| = |x_2|$$

$$-1 < x_1 < 0 \quad \text{a} \quad 0 < x_2 < 1.$$

Příklad 2: Řešme binomickou rovnici čtvrtého stupně

$$3x^4 - 768 = 0\,.$$

Řešení: Nejprve přičteme k celé rovnici číslo 768 a poté celou rovnici vydělíme číslem 3

$$3x^4 = 768$$

$$x^4 = 256.$$

Teď už jen celou rovnici odmocníme a najdeme všechny čtvrté odmocniny čísla 5 v oboru komplexních čísel

$$x = \sqrt[4]{256}\,.$$

Jelikož je pod čtvrtou odmocninou kladné reálné číslo, najdeme dva kořeny na reálné a dva na imaginární ose v komplexní rovině. Jejich hodnota je rovna

$$x_1 = \sqrt[4]{256} \qquad x_2 = i \cdot \sqrt[4]{256} \qquad x_3 = -\sqrt[4]{256} \qquad x_4 = -i \cdot \sqrt[4]{256}$$

$$x_1 = 4 \qquad x_2 = 4i \qquad x_3 = -4 \qquad x_4 = -4i.$$

Příklad 3: Řešme binomickou rovnici čtvrtého stupně

$$\left(3 - \sqrt{3}\ i\right)x^4 - 12 - 4\sqrt{3}\,i = 0.$$

Řešení: Nejprve odečteme komplexní číslo $-12 - 4\sqrt{3}\,i$ a následně celou rovnici vydělíme $3 - \sqrt{3}\ i$

$$\left(3 - \sqrt{3}\ i\right)x^4 = 12 + 4\sqrt{3}\,i$$

$$x^4 = \frac{12 + 4\sqrt{3}\ i}{3 - \sqrt{3}\ i}\,.$$

S využitím vzorce

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(u_1u_2 + v_1v_2) + (u_2v_1 - u_1v_2)i}{{u_2}^2 + {v_2}^2}$$

z kapitoly 1 vypočítáme podíl komplexních čísel

$$x^4 = 2 + 2\sqrt{3}\, i\,.$$

Pro kořeny rovnice tedy platí

$$x = \sqrt[4]{2 + 2\sqrt{3}\, i}$$

neboli

$$x = \sqrt[4]{4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)}\,.$$

Nyní už jen nalezneme všechny čtvrté odmocniny tohoto komplexního čísla. Kořeny této rovnice jsou komplexní čísla

$$x_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}\, i$$

$$x_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\, i$$

$$x_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\, i$$

$$x_4 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\, i\,.$$

Příklad 4: Řešme bikvadratickou rovnici

$$2x^4 - 72x^2 = 0.$$

Řešení 1: Tuto rovnici můžeme řešit dvěma způsoby. Ukážeme si oba dva. Mnohem jednodušší způsob, než obecné řešení s využitím D_2 je vytknout na levé straně rovnice výraz $2x^2$, čímž rovnici převedeme do součinového tvaru

$$2x^2(x^2 - 36) = 0.$$

Takto zapsanou rovnici můžeme převést na dvě kvadratické rovnice ve tvaru

$$2x^2 = 0 \qquad x^2 - 36 = 0.$$

Obě tyto rovnice teď můžeme řešit využitím jednoduchých algebraických úprav. První rovnici vydělíme číslem 2 a ke druhé rovnici přičteme číslo 36

$$x^2 = 0 \qquad x^2 = 36.$$

Nyní už jen najdeme druhou odmocninu z nuly a druhou odmocninu z čísla 36. kořeny této rovnice jsou tedy čísla

$$x_1 = x_2 = 0 \qquad x_3 = 6 \qquad x_4 = -6.$$

Řešení 2: Druhou možností, jak tuto bikvadratickou rovnici řešit je využít její obecné řešení a s pomocí substituce $y = x^2$ jí převést na kvadratickou rovnici

$$2x^4 - 72x^2 = 0$$

$$2y^2 - 72y = 0.$$

Tuto kvadratickou rovnici teď můžeme řešit pomocí diskriminantu

$$D_2 = a_2^2 - 4a_0a_4$$

$$D_2 = (-72)^2$$

Kořeny kvadratické rovnice jsou tedy

$$y_1 = \frac{-a_2 + \sqrt{D_2}}{2a_4} \qquad y_2 = \frac{-a_2 - \sqrt{D_2}}{2a_4}$$

$$y_1 = \frac{72 + 72}{2 \cdot 2} \qquad y_2 = \frac{72 - 72}{2 \cdot 2}$$

$$y_1 = 36 \qquad y_2 = 0.$$

Nakonec se zbavíme substituce a vypočítáme kořeny původní bikvadratické rovnice

$$x = \sqrt{y}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{36} \qquad x_{3,4} = \pm\sqrt{0}$$

$$x_1 = 36 \quad x_2 = -36 \qquad x_3 = 0 \quad x_4 = 0.$$

Příklad 5: Řešme bikvadratickou rovnici

$$4x^4 - x^2 - 18 = 0.$$

Řešení: S využitím substituce $y = x^2$ převedeme danou rovnici na kvadratickou

$$4y^2 - y - 18 = 0.$$

Teď najdeme kořeny kvadratické rovnice s využitím diskriminantu

$$D_2 = (-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-18)$$

$$D_2 = 289$$

$$y_1 = \frac{-a_2 + \sqrt{D_2}}{2a_4} \quad y_2 = \frac{-a_2 - \sqrt{D_2}}{2a_4}$$

$$y_1 = \frac{1 + 17}{2 \cdot 4} \quad y_2 = \frac{1 - 17}{2 \cdot 8}$$

$$y_1 = \frac{9}{4} \quad y_2 = -2\,.$$

Nakonec odstraníme substituci, abychom našli kořeny původní rovnice

$$x = \sqrt{y}$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{-2}$$

$$x_1 = \frac{3}{2} \quad x_2 = -\frac{3}{2} \quad x_3 = \sqrt{2}\,i \quad x_4 = -\sqrt{2}\,i.$$

4.3 NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: Pomocí grafu najděte počet řešení v oboru reálných čísel kvadratické rovnice

$$-x^2 - 2x + 1 = 0,$$

poté rovnici vyřešte obecně a určete přesnou hodnotu jejích kořenů.

$$\begin{bmatrix} \text{Dvě reálná řešení} \\ x_1 = -1 - \sqrt{2} \\ x_2 = -1 + \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Příklad 2: Pomocí grafu najděte počet řešení v oboru reálných čísel kvadratické rovnice

$$\frac{1}{2}x^2 - x + 2 = 0\,,$$

poté rovnici vyřešte obecně a určete přesnou hodnotu jejích kořenů.

$$\begin{bmatrix} x \notin \mathbf{R} \\ x_1 = 1 + \sqrt{3}\,i \\ x_2 = 1 - \sqrt{3}\,i \end{bmatrix}$$

Příklad 3: Řešte ryze kvadratickou rovnici

$$\left(-5-\sqrt{3}\ i\right)x^2+8-4\sqrt{3}\,i=0\,.$$

$$\begin{bmatrix} x_1=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ x_2=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix}$$

Příklad 4: Pomocí vytýkání řešte bikvadratickou rovnici

$$\left(-\sqrt{3}-5\,i\right)x^4+\left(-8\sqrt{3}+16i\right)x^2=0\,.$$

$$\begin{bmatrix} x_1=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ x_2=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \\ x_3=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ x_4=-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Příklad 5: Řešte bikvadratickou rovnici

$$4x^4+45x^2+81=0\,.$$

$$\begin{bmatrix} x_1=3i & x_2=-3i \\ x_3=\dfrac{3}{2}i & x_4=-\dfrac{3}{2}i \end{bmatrix}$$

Příklad 6: Řešte bikvadratickou rovnici

$$25x^4+64x^2-144=0\,.$$

$$\begin{bmatrix} x_1=2i & x_2=-2i \\ x_3=\dfrac{6}{5} & x_4=-\dfrac{6}{5} \end{bmatrix}$$

5 ŘEŠENÍ KUBICKÝCH ROVNIC

V předchozí kapitole jsme se věnovali speciálnímu případu algebraické rovnice čtvrtého stupně. V páté a poslední kapitole této práce si přiblížíme možné postupy při řešení kubických rovnic.

Definice 5.1 : Rovnici s neznámou $x \in \mathbf{C}$ ve tvaru

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

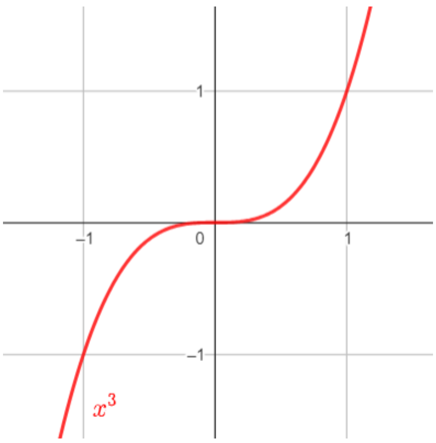
kde $a_3 \neq 0$ a $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbf{C}$, nazýváme algebraická rovnice třetího stupně nebo kubická rovnice. Čísla a_0, a_1, a_2, a_3 jsou komplexní koeficienty algebraické rovnice.

5.1 GRAFICKÉ ŘEŠENÍ KUBICKÉ ROVNICE

Podobně jako u bikvadratické rovnice je i graf funkce $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ složitější vykreslit, než graf kvadratické funkce. I kubické rovnice můžeme řešit v oboru reálných čísel pomocí jejich grafů a průsečíků s reálnou osou.

Oborem hodnot kubické funkce je celý obor reálných čísel a tedy musí nutně protnout vodorovnou osu. Díky tomu můžeme říct, že má-li kubická rovnice reálné koeficienty, musí nutně mít alespoň jedno reálné řešení. Samotná funkce $f(x) = a_3x^3 + a_0$ je na celém svém definičním oboru monotónní, kvadratický a lineární člen mohou tuto monotónnost narušit. Toto narušení monotónnosti funkce nám umožní mít až tři různé reálné kořeny. Nyní se blíže podíváme na jednotlivé případy, které mohou nastat.

Speciálním případem je funkce $f(x) = a_3x^3$. Všechny tři její kořeny si rovné a tak má tato rovnice jediný trojnásobný kořen rovný nule.



Obrázek 38 Graf funkce $f(x) = x^3$ (obrázek: autor)

Mimo tuto rovnici má kubická rovnice s reálnými koeficienty jediný jednoduchý reálný kořen pokud se její graf protíná s vodorovnou osou právě jednou. Příkladem takové rovnice je například

$$x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

Obrázek 39 Graf funkce $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ (obrázek: autor)

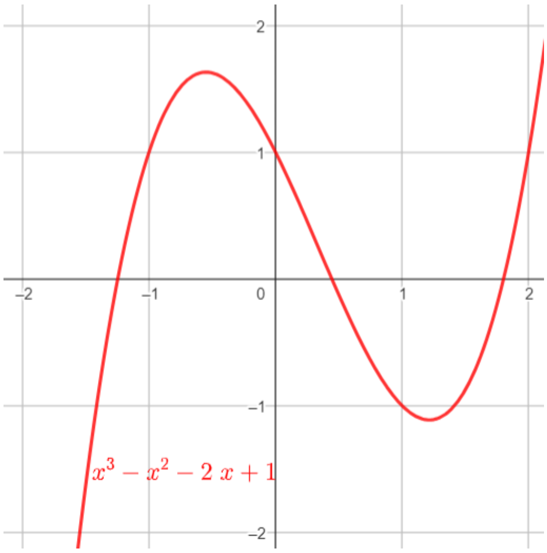
Dva různé reálné kořeny, z nichž právě jeden je dvojnásobný a jeden jednoduchý, má kubická rovnice právě tehdy, když se její graf dotýká vodorovné ose v jednom svém lokálním minimu nebo maximu a protíná ji svým jedním ramenem. Příkladem takové rovnice je například

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0\,.$$

Obrázek 40 Graf funkce $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ (obrázek: autor)

Posledním možným případem je, že funkce protíná vodorovnou osu právě ve třech bodech. Pokud toto nastane, má kubická rovnice právě tři reálná řešení. Tři reálná řešení má například rovnice

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0\,.$$



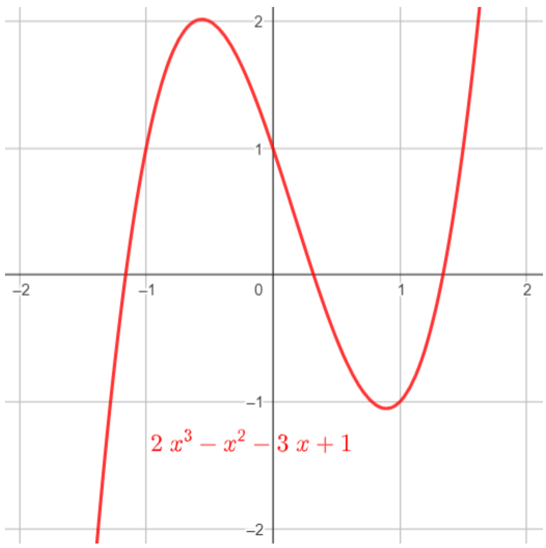
Obrázek 41 Graf funkce $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ (obrázek: autor)

5.1.1 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: Graficky určeme počet a přibližnou hodnotu reálných kořenů rovnice

$$2x^3 - x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Řešení: Jako první si vytvoříme graf odpovídající funkce.



Obrázek 42 Příklad – graf funkce $f(x) = 2x^3 - x^2 - 3x + 1$ (obrázek: autor)

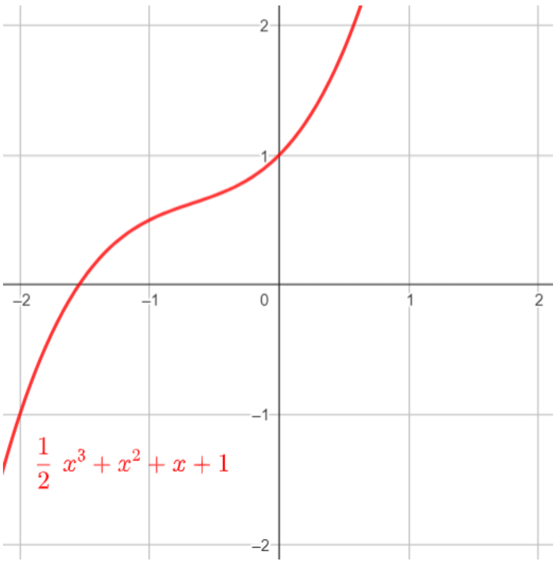
Z grafu můžeme vyčíst, že daná rovnice má tři reálné kořeny, o jejichž hodnotě můžeme říci

$$-2 < x_1 < -1 \quad 0 < x_2 < 1 \quad 1 < x_3 < 1\,.$$

Příklad 1: Graficky určeme počet a přibližnou hodnotu reálných kořenů rovnice

$$\frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Řešení: Jako první si vytvoříme graf odpovídající funkce.



Obrázek 43 Příklad – graf funkce $f(x) = \frac{1}{2}x^3 + x^2 + x + 1$ (obrázek: autor)

Z tohoto grafu vidíme, že vodorovnou osu protíná v jediném bodě. Rovnice má tedy jediný reálný kořen

$$-2 < x_1 < -1\,.$$

5.2 SPECIÁLNÍ TVARY KUBICKÉ ROVNICE

Ještě než se budeme věnovat obecnému řešení kubické rovnice, podíváme se na některé její speciální tvary. Tyto rovnice mají specifické vlastnosti, které nám umožňují jejich řešení jednoduššími metodami.

5.2.1 BINOMICKÁ ROVNICE TŘETÍHO STUPNĚ

Definice 5.2 : Algebraickou rovnici třetího stupně ve tvaru

$$f(x) = a_3x^3 - a_0 = 0$$

kde $a_3 \neq 0$ a $a_0, a_3 \in \mathbf{C}$, nazýváme binomická rovnice čtvrtého stupně. Čísla a_0, a_3 jsou komplexní koeficienty algebraické rovnice.

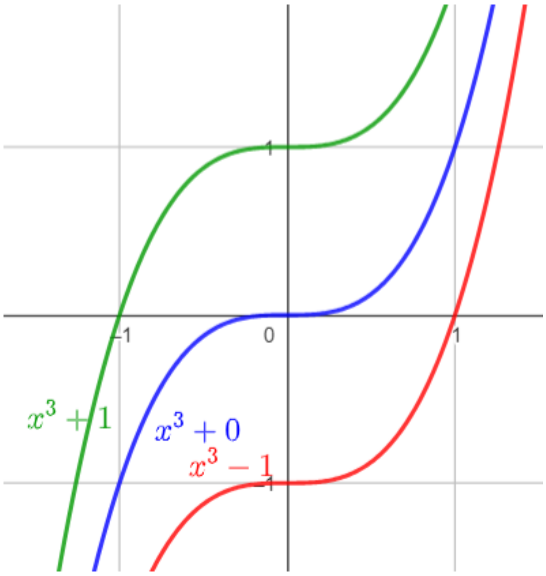
Řešení binomické rovnice třetího stupně je obdobné, jako řešení jakékoliv jiné binomické rovnice. Jak již víme, binomická rovnice obsahuje pouze absolutní a n-tý člen, v tom to případě se jedná o člen kubický a_3x^3. Obecně pro binomickou rovnici třetího stupně platí, že její kořeny jsou všechny třetí odmocniny z čísla $\frac{a_0}{a_3}$. Tedy

$$x_{1,2,3} = \sqrt[3]{\frac{a_0}{a_3}}.$$

Pro kořeny binomické rovnice třetího stupně s reálnými koeficienty platí, že právě jeden je reálný. Tato vlastnost vychází z grafu funkce $f(x) = x^3 + k$, kde $k = -\frac{a_0}{a_3}$, který je rostoucí na celém definičním oboru. To lze lehce vyčíst z první derivace funkce $f(x)$

$$f'(x) = 3x^2\,,$$

která je na celém svém definičním oboru kromě $x = 0$ kladná. Pro koeficienty a $a_0 \neq 0$ je graf pouze posunutý nahoru nebo dolů.



Obrázek 44 Graf funkce $f(x) = x^3 + k$ pro $k = 1, 0, -1$ (obrázek: autor)

Z geometrického vyjádření n-té odmocniny víme, že v komplexní rovině najdeme třetí odmocniny ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku. Díky tomu lze říci, že komplexní kořeny binomické rovnice třetího stupně, kde $a_0, a_3 \in \mathbf{R}$, mají pro záporný reálný kořen x_1 tvar

$$x_{2,3} = |x_1|\left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

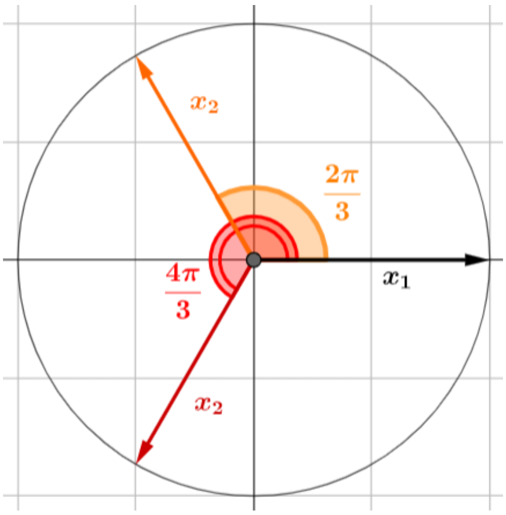
a pro kladný reálný kořen x_1 tvar

$$x_{2,3} = |x_1|\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Obecně i pro kořen $x_1 \in \mathbf{C}$ platí vztahy

$$x_2 = x_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \quad \text{a} \quad x_3 = x_1\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Tento vztah se dá intuitivně vysvětlit opět na třetí odmocnině z komplexního čísla. Vrátíme-li se opět k jejímu geometrickému vyjádření, můžeme si všimnout, že x_2 a x_3 jsou pouze hodnoty čísla x_1 otočené o úhel $\frac{2\pi}{3}$ a $\frac{4\pi}{3}$ v komplexní rovině.



Obrázek 45 Znázornění otočení kořenů binomické rovnice třetího stupně, kde $x_1 \in \mathbf{R}$ (obrázek: autor)

Komplexní čísla otáčíme tak, že je mezi sebou vynásobíme, abychom se vyvarovali změně velikosti daného čísla, budeme x_1 násobit komplexními čísly s velikostí jedna a s odpovídajícími úhly. Zjednodušit tyto vztahy můžeme ještě tak, že si otočení o $\frac{4\pi}{3}$ představíme jako dvě otočení o $\frac{2\pi}{3}$. Každé otočení odpovídá jednomu násobení odpovídajícím komplexním číslem, díky této vlastnosti můžeme dvojnásobné otočení napsat jen pomocí mocniny prvního komplexního čísla. Tedy platí

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\,.$$

Pokud si první komplexní číslo označíme jako ε, můžeme kořeny x_1, x_2 a x_3 zapsat zjednodušeně takto

$$x_1 \qquad x_2=\varepsilon x_1 \qquad x_3=\varepsilon^2 x_1\,.$$

Tuto vlastnost třetí odmocniny využijeme dále i v obecném řešení kubické rovnice.

5.2.2 KUBICKÁ ROVNICE BEZ ABSOLUTNÍHO ČLENU

Kubická rovnice bez absolutního členu má tvar

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x=0\,,$$

ze kterého můžeme vytknutím x tuto rovnici přepsat do tvaru součinu

$$x(a_3x^2+a_2x+a_1)=0\,.$$

Z tohoto zápisu již vidíme, že jeden z kořenů je vždy roven nule a další dva kořeny jsou kořeny kvadratické rovnice

$$a_3x^2+a_2x+a_1=0\,,$$

kterou již umíme řešit. Kořeny kubické rovnice bez absolutního členu tedy mají tvar

$$x_1=0 \qquad x_2=\frac{-a_2+\sqrt{a_2^2-4a_1a_3}}{2a_3} \qquad x_3=\frac{-a_2+\sqrt{a_2^2-4a_1a_3}}{2a_3}$$

5.2.3 RECIPROKÁ ROVNICE

Definice 5.3 : Algebraickou rovnici s neznámou $x \in \mathbf{C}$ ve tvaru

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0=0,$$

nazýváme reciproká rovnice 1. druhu právě tehdy, když $a_k=a_{n-k}$ a reciproká rovnice 2. druhu právě tehdy, když $a_k=-a_{n-k}$, kde $k=1,2,\dots,n-1,n$.

Reciproké rovnice jsou samy o sobě velmi zajímavé tím, že mají pevně daný jeden z kořenů. My si jeho odvození pro reciprokou rovnici 1. druhu ukážeme na obecném tvaru kubické rovnice

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0\,.$$

Z definice můžeme říct, že $a_3 = a_0$ a $a_2 = a_1$

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

$$a_3(x^3 + 1) + a_2x(x + 1) = 0$$

$$a_3(x + 1)(x^2 - x + 1) + a_2x(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(a_3(x^2 - x + 1) + a_2x) = 0$$

$$(x + 1)(a_3x^2 + (a_2 - a_3)x + a_3) = 0\,.$$

Reciproká rovnice 1. druhu má tedy vždy kořen $x_1 = -1$. Obdobnou úpravou bychom dospěli i k jednomu z kořenů reciproké rovnice 2. druhu $x_1 = 1$. Pokud víme, že je rovnice reciproká, můžeme její řešení zjednodušit vytknutím výrazu $x - x_1$. Další dva kořeny jsou pro reciprokou rovnici 1. druhu shodné s kvadratickou rovnicí

$$a_3x^2 + (a_2 - a_3)x + a_3 = 0$$

a pro reciprokou rovnici 2. druhu s rovnicí

$$a_3x^2 + (a_2 + a_3)x + a_3 = 0\,.$$

5.2.4 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: Řešme binomickou rovnici třetího stupně

$$3x^3 - 192 = 0\,.$$

Řešení: K rovnici přičteme číslo 192 a celou rovnici vydělíme třemi

$$3x^3 = 192$$

$$x^3 = 64\,.$$

Nyní nám stačí vypočítat pouze jediný kořen pomocí odmocniny a pak ho po řadě vynásobit číslem ε a ε^2

$$x_1 = \sqrt[3]{64} = 4$$

$$x_2 = \varepsilon x_1 = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 + 2\sqrt{3}\,i$$

$$x_3 = \varepsilon^2 x_1 = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) = -2 - 2\sqrt{3}\, i\,.$$

Příklad 2: Řešme binomickou rovnici třetího stupně

$$(3 - 5i)x^3 - 16 + 4i = 0\,.$$

Řešení: Nejprve odečteme komplexní číslo $-16 + 4i$ a poté celou rovnici vydělíme $3 - 5i$

$$(3 - 5i)x^3 = 16 - 4i$$

$$x^3 = \frac{16 - 4i}{3 - 5i}\,.$$

Nyní vypočítáme podíl komplexních čísel

$$x^3 = 2 + 2i\,.$$

Tedy platí

$$x = \sqrt[3]{2 + 2i}$$

$$x = \sqrt[3]{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\,.$$

Nakonec vypočítáme všechny tři kořeny

$$x_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} + \frac{\sqrt{3} - 1}{2} i$$

$$x_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i$$

$$x_3 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3} + 1}{2} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} i\,.$$

I v tomto případě bychom mohli postupovat jako v předchozím příkladu a využít vztahy

$$x_1 \quad x_2 = \varepsilon x_1 \quad x_3 = \varepsilon^2 x_1\,.$$

Příklad 3: Řešme kubickou rovnici

$$2x^3 - 4x^2 + 2x = 0\,.$$

Řešení: Protože v kubické rovnici chybí absolutní člen, můžeme vytknout $2x$

$$2x(x^2 - 2x - 1) = 0\,.$$

Jeden z kořenů je naprosto jasný, další dva vypočítáme jako kořeny kvadratické rovnice. K tomu nemusíme nutně využít diskriminant. Stačí závorku ještě rozložit na součin pomocí algebraické identity $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$2x(x-1)(x-1) = 0.$$

Tedy kořeny této rovnice jsou

$$x_1 = 0 \quad x_2 = x_3 = 1\,.$$

Příklad 4: Řešme kubickou rovnici

$$3x^3 - 7x^2 + 7x - 3 = 0\,.$$

Řešení: Můžeme si všimnout, že se jedná o reciprokou rovnici druhého druhu, protože platí

$$a_3 = -a_0 \quad a_2 = -a_1$$

$$3 = -(-3) \quad -7 = -(7).$$

Jedním z kořenů této kubické rovnice je tedy číslo 1 celou rovnici můžeme tedy přepsat následovně

$$(x-1)\frac{3x^3 - 7x^2 + 7x - 3}{x-1} = 0$$

$$(x-1)(3x^2 - 4x + 3) = 0\,.$$

Tuto rovnici v součinovém tvaru rozložíme na dvě

$$x - 1 = 0 \quad 3x^2 - 4x + 3 = 0\,.$$

První rovnice má kořen $x_1 = 1$. Druhou rovnici vyřešíme s využitím diskriminantu

$$D_2 = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 = -20$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{-20}}{2 \cdot 3} \quad x_3 = \frac{-4 - \sqrt{-20}}{2 \cdot 3}\,.$$

Kořeny této rovnice jsou tedy

$$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i \quad x_3 = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}i\,.$$

5.3 OBECNÉ ŘEŠENÍ KUBICKÉ ROVNICE

Obecné řešení kubické rovnice je o něco složitější než jiné postupy, které jsme si dosud ukazovali. Z tohoto důvodu si její obecný tvar hned pro začátek zjednodušíme. Obecný tvar kubické rovnice

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

nejprve převedeme na její normovaný tvar

$$x^3 + \frac{a_2}{a_3}x^2 + \frac{a_1}{a_3}x + \frac{a_0}{a_3} = 0\,.$$

Pomocí substituce $x = y - \frac{a_2}{3a_3}$, se kterou jsme se seznámili v kapitole 2.4, odstraníme z normovaného tvaru kubické rovnice kvadratický člen a převedeme ji na tvar

$$y^3 + \left(\frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2^2}{3a_3^2}\right)y + \left(\frac{a_0}{a_3} + \frac{2a_2^3 - 9a_1a_2a_3}{27a_3^3}\right) = 0\,.$$

Nyní si zavedeme hodnoty

$$p = \frac{a_1}{a_3} - \frac{a_2^2}{3a_3^2} \quad \text{a} \quad q = \frac{a_0}{a_3} + \frac{2a_2^3 - 9a_1a_2a_3}{27a_3^3}\,,$$

s jejichž pomocí tuto rovnici můžeme zapsat ve tvaru

$$y^3 + py + q = 0\,,$$

který budeme pro zjednodušení uvažovat po celý zbytek této kapitoly. Také budeme předpokládat, že $p \neq 0$, protože jinak by se jednalo o binomickou rovnici třetího stupně, jejíž řešení jsme již popsali. K původní rovnici se můžeme vrátit odstraněním substituce. Možných způsobů řešení kubické rovnice v tomto tvaru je více, my si uvedeme jeden z nich.

5.3.1 CARDANOVY VZORCE

Kořen rovnice

$$y^3 + py + q = 0$$

zapíšeme jako součet dvou zatím neznámých čísel $y = u + v$. Po dosazení dostáváme rovnici

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0\,,$$

kterou lze pomocí následujících úprav

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + pu + 3uv^2 + pv + q = 0$$

$$u^3 + v^3 + u(3uv + p) + v(3uv + p) + q = 0$$

přepsat do tvaru

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0\,.$$

V tuto chvíli zavedeme novou podmínku pro čísla u a v. Budeme předpokládat, že $3uv + p = 0$, tedy $3uv = -p$. Touto podmínkou redukujeme rovnici na tvar

$$u^3 + v^3 + q = 0\,.$$

Umocníme-li podmínku uvedenou výše na třetí, dostaneme po lehké úpravě soustavu rovnic ve tvaru

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Sloučením těchto rovnic dostaneme rovnice

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \quad \text{a} \quad v^6 + qv^3 - \frac{p^3}{27} = 0\,,$$

ze kterých můžeme vyvodit, že čísla u^3 a v^3 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$\xi^2 + q\xi - \frac{p^3}{27} = 0\,.$$

Tedy

$$u^3 = \frac{-9q + \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{18} \quad \text{a} \quad v^3 = \frac{-9q - \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{18}$$

a pro hodnoty u a v proto musí nutně platit

$$u = \sqrt[3]{\frac{-9q + \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{18}} \quad \text{a} \quad v = \sqrt[3]{\frac{-9q - \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{18}}\,.$$

Bohužel pro nás to znamená, že pro obě čísla u a v máme na výběr ze tří hodnot. Nicméně z podmínek $3uv = -p$ a $p \neq 0$, které jsme si zavedli dříve je vidět, že pokud zvolíme u jako libovolnou nenulovou třetí odmocninu

$$u = \sqrt[3]{\frac{-9q + \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{18}} \ ,$$

je hodnota v pevně dána vztahem

$$v = -\frac{p}{3u}.$$

Pokud $3u_1v_1 = -p$, pak musí nutně platit

$$3u_2v_2 = -p \quad 3u_3v_3 = -p$$

$$3 \cdot \varepsilon u_1 \cdot v_2 = -p \quad 3 \cdot \varepsilon^2 u_1 \cdot v_3 = -p$$

$$v_2 = \varepsilon^2 v_1 \quad v_3 = \varepsilon v_1 \ ,$$

protože

$$\varepsilon \cdot \varepsilon^2 = \varepsilon^3 = 1 \ ,$$

kde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Vycházíme tedy ze vztahu pro třetí odmocninu, který jsme si odvodili na konci kapitoly 5.2.2. Těmito úpravami jsme došli ke třem dvojicím čísel u a v ve tvaru

$$u_1 \qquad v_1$$

$$u_2 = \varepsilon u_1 = u_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \qquad v_2 = \varepsilon^2 v_1 = v_1\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

$$u_3 = \varepsilon^2 u_1 = u_1\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \qquad v_3 = \varepsilon v_1 = v_1\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right).$$

Teď se tedy vraťme zpět k rovnici

$$y^3 + py + q = 0 \ ,$$

pro jejíž kořeny jsme si určili podmínku $y = u + v$. Tyto kořeny tedy nutně mají tvar

$$y_1 = u_1 + v_1$$

$$y_2 = u_2 + v_2 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \frac{\sqrt{3}}{2} i(u_1 - v_1)$$

$$y_3 = u_3 + v_3 = -\frac{1}{2}(u_1 + v_1) - \frac{\sqrt{3}}{2} i(u_1 - v_1)\,.$$

Pro přehlednost si naše poznatky z celé kapitoly shrneme. Komplexní číslo

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

označíme jako ε. Za u si určíme libovolnou hodnotu

$$u = \sqrt[3]{\frac{-9q + \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{18}}$$

a za v takovou hodnotu

$$v = \sqrt[3]{\frac{-9q - \sqrt{81q^2 + 12p^3}}{18}}\,,$$

která splňuje podmínku $v = -\frac{p}{3u}$. Pomocí těchto hodnot můžeme kořeny kubické rovnice

$$y^3 + py + q = 0$$

najít s využitím vzorců

$$y_1 = u + v$$

$$y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v$$

$$y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v\,.$$

Tyto vzorce nazýváme Cardanovy vzorce.

5.3.2 DŮKAZ CARDANOVÝCH VZORCŮ

Podobně, jako u kvadratické rovnice si uvedeme důkaz, že jsme opravdu našli všechna řešení dané rovnice, a také si ho vysvětlíme podrobněji než uvádí Schwarz (1958). Abychom ukázali, že jsme našli všechna požadovaná řešení dané kubické rovnice, musíme dokázat rovnost

$$(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3) = y^3 + py + q\,,$$

která vychází z Vietových vzorců. Tuto rovnost můžeme rozložit do tří rovností

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = p$$

$$y_1y_2y_3 = -q\,,$$

kterým se teď budeme jednotlivě věnovat.

Pokud přepíšeme první rovnost pomocí našich výsledků, dostaneme

$$u + v + \varepsilon u + \varepsilon^2 v + \varepsilon^2 u + \varepsilon v = u + v + \varepsilon(u+v) + \varepsilon^2(u+v) = 0\,,$$

tedy

$$(1 + \varepsilon + \varepsilon^2)(u+v) = 0\,.$$

Protože o $u + v$ nemůžeme soudit rovnost nule, zaměříme se na $1 + \varepsilon + \varepsilon^2$. Pokud si za ε dosadíme odpovídající komplexní čísla, je tato rovnost jasná.

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0\,.$$

Druhou rovnost si dokážeme podobně, nejprve si ale ukážeme některé nám známé rovnosti, které využijeme. Z důkazu první rovnosti víme, že

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$$

a tedy

$$\varepsilon + \varepsilon^2 = -1\,.$$

Dále můžeme o hodnotě ε říci

$$\varepsilon^3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 = 1$$

$$\varepsilon^4 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \varepsilon^2 + \varepsilon^4 = \varepsilon^2 + \varepsilon = -1.$$

Nakonec uvedu ještě podmínku

$$3uv = -p \rightarrow p = -3uv$$

Teď už můžeme upravovat původní rovnost.

$$\begin{aligned}
y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 &= y_1(y_2 + y_3) + y_2y_3 \\
&= (u+v)(\varepsilon u + \varepsilon^2 v + \varepsilon^2 u + \varepsilon v\,) + (\varepsilon u + \varepsilon^2 v)(\varepsilon^2 u + \varepsilon v\,) \\
&= (u+v)\big(\varepsilon(u+v) + \varepsilon^2(u+v)\big) + \varepsilon^3 u^2 + \varepsilon^2 uv + \varepsilon^4 uv + \varepsilon^3 v^2 \\
&= (u+v)^2(\varepsilon + \varepsilon^2) + \varepsilon^3(u^2+v^2) + uv(\varepsilon^2 + \varepsilon^4) \\
&= -(u+v)^2 + u^2 + v^2 - uv = -u^2 - 2uv - v^2 + u^2 + v^2 - uv \\
&= \; -3uv = p
\end{aligned}$$

Teď už nám zbývá pouze poslední rovnost. Z důkazu druhé rovnosti si vezmeme

$$y_2y_3 = \varepsilon^3(u^2+v^2) + uv(\varepsilon^2+\varepsilon^4) = u^2 + v^2 - uv$$

a uvedeme podmínku, ke které jsme došli již dříve

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Úprava tedy vypadá takto

$$y_1y_2y_3 = (u+v)(u^2+v^2-uv) = u^3 + v^3 = -q.$$

5.3.3 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: Řešme kubickou rovnici

$$2x^3 + 12x^2 + 18x + 6 = 0\,.$$

Řešení: Jako první rovnici převedeme na její normovaný tvar vydělením 2

$$x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0\,.$$

Teď pomocí substituce

$$x = y - \frac{a_2}{3a_3} = y - 2$$

odstraníme kvadratický člen

$$(y-2)^3 + 6(y-2)^2 + 9(y-2) + 4 = 0$$

$$y^3 - 3y + 2 = 0\,.$$

Nyní nalezneme hodnoty u^3 a v^3, pro které platí $y = u + v$, pomocí rovnice

$$\xi^2 + q\xi - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$\xi^2 + 2\xi + 1 = 0$$

$$\xi_1 = u^3 = v^3 = -1$$

Je třeba se zbavit třetí mocniny u u^3. Díky vzorcům, které jsme si odvodili, není nutné hledat všechny tři hodnoty odmocniny, jedna nám postačí

$$u = \sqrt[3]{-1} = -1.$$

Teď najdeme hodnotu v, která splňuje podmínku

$$v = -\frac{p}{3u}$$

$$v = -\frac{-3}{3\,(-1)} = -1.$$

Námi vypočítané hodnoty u a v dosadíme do Cardanových vzorců

$$y_1 = u + v = -1 - 1 = -2$$

$$y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v = -\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1$$

$$y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v = -\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1$$

Kořeny upravené rovnice jsou

$$y_1 = -2 \quad y_2 = y_3 = 1\,.$$

Nakonec se zbavíme substituce

$$x = y - 2$$

$$x_1 = -2 - 2 = 4$$

$$x_2 = x_3 = 1 - 2 = -1$$

Příklad 2: Řešme kubickou rovnici

$$3x^3 - 27x^2 + 81x - 105 = 0\,.$$

Řešení: Jako první rovnici převedeme na její normovaný tvar vydělením 2

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 35 = 0\,.$$

Následně pomocí substituce

$$x = y - \frac{a_2}{3a_3} = y + 3$$

odstraníme kvadratický člen

$$(y + 3)^3 - 9(y + 3)^2 + 27(y + 3) - 35 = 0\,.$$

$$y^3 - 8 = 0\,.$$

V tuto chvíli máme dvě možnosti řešení. Jedno z nich je mnohonásobně jednodušší, než použití Cardanových vzorců. Takto upravená rovnice je binomická rovnice třetího stupně. Můžeme ji tedy řešit takto

$$y^3 = 8$$

$$y = \sqrt[3]{8}$$

$$y_1 = 2 \quad y_2 = -1 + \sqrt{3}\,i \quad y_3 = y_2 = -1 - \sqrt{3}\,i\,.$$

K řešení ale Cardanovy vzorce použít můžeme. Ukážeme si tedy i tento postup. Nalezneme hodnoty u^3 a v^3, pro které platí $y = u + v$, pomocí rovnice

$$\xi^2 + q\xi - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$\xi^2 - 8\xi = 0$$

$$\xi(\xi - 8) = 0$$

$$\xi_1 = 8 \quad \xi_2 = 0$$

Určíme si jednu hodnotu u

$$u^3 = 8$$

$$u = 2$$

a odpovídající hodnotu v

$$v = -\frac{p}{3u} = -\frac{0}{6} = 0\,.$$

Nyní už můžeme dosadit do Cardanových vzorců

$$y_1 = u + v = 2 + 0 = 2$$

$$y_2 = \varepsilon u + \varepsilon^2 v = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + 0 = -1 + \sqrt{3}\, i$$

$$y_3 = \varepsilon^2 u + \varepsilon v = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) + 0 = -1 - \sqrt{3}\, i$$

Oběma způsoby nám tedy kořeny y_1, y_2, y_3 vyšly stejně, hotovo ale ještě nemáme. Nakonec se musíme zbavit substituce a vrátit se tak do původní rovnice

$$x = y + 3$$

$$x_1 = 2 + 3 = 5$$

$$x_2 = -1 + \sqrt{3}\, i + 3 = 2 + \sqrt{3}\, i$$

$$x_3 = -1 - \sqrt{3}\, i + 3 = 2 - \sqrt{3}\, i\,.$$

5.4 NEŘEŠENÉ PŘÍKLADY

Příklad 1: Graficky určete počet a přibližnou hodnotu reálných kořenů rovnice

$$\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0\,.$$

$$\begin{bmatrix} \text{Jeden reálný kořen} \\ -1 < x_1 < 0 \end{bmatrix}$$

Příklad 2: Graficky určete počet a přibližnou hodnotu reálných kořenů rovnice

$$4x^3 + 3x^2 - 4x - 2 = 0\,.$$

$$\begin{bmatrix} \text{Tři reálné kořeny} \\ -2 < x_1 < -1 \\ -1 < x_2 < 0 \\ 0 < x_3 < 1 \end{bmatrix}$$

Příklad 3: Řešte binomickou rovnici třetího stupně

$$7x^3 + 875 = 0\,.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 = -5 \\ x_2 = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} i \\ x_3 = \frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2} i \end{bmatrix}$$

Příklad 4: Řešte kubickou rovnici

$$5x^3 + 31x^2 + 31x + 5 = 0\,.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 = -1 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = -\dfrac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Příklad 5: Řešte kubickou rovnici

$$x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0\,.$$

$$\begin{bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 + \sqrt{3} \\ x_3 = 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Příklad 6: Řešte kubickou rovnici

$$2x^3 - 3x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Příklad 7: Řešte kubickou rovnici

$$4x^3 + 12x^2 + 64x + 192 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 = -3 \\ x_2 = 4i \\ x_3 = -4i \end{bmatrix}$$

ZÁVĚR

Tato bakalářská práce poskytla ucelený pohled na problematiku kubických a bikvadratických rovnic a matematického aparátu potřebného pro jejich řešení. Tyto rovnice jsou nezbytnou součástí algebry a jejich řešení představuje velkou část historie této části matematiky. Kromě teoretického základu práce obsahuje i množství řešených i neřešených příkladů a ilustračních obrázků, vytvořených mnou přímo pro tuto práci.

Na začátku jsme si zavedli obor komplexních čísel a to jakožto rozšíření reálných čísel. Komplexní čísla jsou nezbytná pro obecné řešení algebraických rovnic a tak byl i jejich vznik velmi silně spjat se snahou pro nalezení obecných řešení algebraických rovnic. V rámci historie k tomuto matematickému posunu došlo až teprve nedávno, v novověku. V návaznosti na objev komplexních čísel jsme si také objasnili jejich nezbytnost pro pravdivost základní věty algebry. Dále jsme si přiblížili, jak s různými tvary komplexních čísel provádět základní operace sčítání, odčítání, násobení a dělení a v neposlední řadě, jak komplexní čísla umocnit a odmocnit.

V následující kapitole jsme se seznámili s vybranými transformacemi rovnic. Definovali jsme si pojem algebraická rovnice a ekvivalentní úpravy rovnic a zavedli několik substitucí, které lze využít pro zjednodušení tvaru algebraických rovnic. Dané metody jsme si vyzkoušeli i na konkrétních řešených příkladech.

Třetí kapitola posloužila jako stručný přehled historie algebry a to hlavně v období starověku a středověku. Zjistili jsme, že úlohy vedoucí na algebraické rovnice i vyšších řádů byly řešeny už v období starověkých civilizací a to i přes chybějící matematickou symboliku.

Další kapitola, i když s názvem bikvadratické rovnice, se z velké části věnovala kvadratické rovnici, která je pro řešení bikvadratické rovnice nezbytná. Kvadratickou rovnici jsme si definovali a ukázali si grafické řešení. Také jsme si odvodili obecné řešení kvadratické rovnice pomocí diskriminantu. Ve druhé části této kapitoly jsme se již zaměřili na bikvadratickou rovnici a její řešení. Ukázali jsme si její grafické řešení, řešení některých speciálních tvarů a také obecné řešení bikvadratické rovnice pomocí substituce $y = x^2$, s jejíž pomocí jsme danou rovnici převedli na kvadratickou rovnici.

Nejkomplexnější částí celé práce byla kapitola poslední, která byla zaměřena na kubické rovnice. Předvedli jsme si její grafické řešení, řešení některých jejích speciálních případů a v neposlední řadě jsme si odvodili obecné řešení kubické rovnice s využitím Cardanových vzorců včetně jejich důkazu.

Svůj cíl tato práce splnila, i když obsahuje velmi stručný pohled na danou problematiku. Je vhodné podotknout, že pro kvartickou rovnici, tedy algebraickou rovnici čtvrtého stupně, existuje obecné řešení, které se v této práci neobjevuje a to hlavně kvůli jeho složitost. Obecné algebraické řešení rovnic vyšších řádů pak už ale neexistuje, umíme ale řešit určité tvary kvintické rovnice a jejich řešení, včetně obecného řešení kvartické rovnice by mohlo být zajímavým rozšířením této práce.

RESUMÉ

Tato bakalářská práce se zabývá řešením kubických a bikvadratických rovnic a matematického aparátu potřebného k jejich řešení. Práce je členěna do pěti kapitol, z nichž všechny, kromě třetí kapitoly, obsahují řešené i neřešené příklady k dané tématice. První kapitola se věnuje zavedení komplexních čísel, druhá vybraným transformacím rovnic. Třetí kapitola poskytuje stručný pohled na historii řešení algebraických rovnic ve starověku a středověku. Poslední dvě kapitoly se přímo věnují tématu práce a shrnují různá řešení kubických a bikvadratických rovnic. V závěru je uvedeno možné budoucí rozšíření tohoto tématu.

This bachelor's thesis deals with solving cubic and biquadratic equations and the mathematical apparatus necessary for their solution. The thesis is divided into five chapters, all of which, except the third chapter, include solved and unsolved examples related to the respective topics. The first chapter focuses on introducing complex numbers, while the second chapter covers selected transformations of equations. The third chapter provides a brief overview of the history of solving algebraic equations in ancient and medieval times. The last two chapters directly address the thesis topic and summarize various solutions to cubic and biquadratic equations. The conclusion outlines potential future extensions of this topic.

SEZNAM LITERATURY

BEČVÁŘ, Jindřich a FUCHS, Eduard. 1999. *Matematika v 16. a 17. století, Seminář Historie matematiky III, Jevíčko, 18.8.–21.8.1997.* Praha : Prometheus, 1999. stránky 161-235. ISBN 80-7196-150-7.

BEČVÁŘ, Jindřich. 2001. *Matematika ve středověké Evropě.* Praha : Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-232-5.

BEČVÁŘ, Jindřich. 2007. *Z historie lineární algebry.* Praha : Matfyzpress, 2007. ISBN 978-80-7378-036-4.

BEČVÁŘ, Jindřich, BEČVÁŘOVÁ, Martina a VYMAZALOVÁ, Hana. 2003. *Matematika ve starověku: Egypt a Mezopotámie.* Praha : Prometheus, 2003. Sv. 23. ISBN 80-7196-255-4.

DRÁBEK, Jaroslav a Jaroslav, HORA. 2001. *Algebra: polynomy a rovnice.* Plzeň : Západočeská univerzita, 2001. ISBN isbn80-7082-787-4.

Historie matematiky. I: sborník: seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko 19. 8. - 22. 8. 1993. **BEČVÁŘ, Jindřich a FUCHS, Eduard. 1994.** Brno : Jednota českých matematiků a fyziků, 1994. str. 241.

CHOCHOLOVÁ, Michaela a ŠTOLL, Ivan. 2011. *Wilhelm Matzka (1798–1891).* Praha : Matfyzpress, 2011. ISBN 978-80-7378-188-0.

POLÁK, Josef. 1991. *Přehled středoškolské matematiky.* 5. přepracované vydání. Praha : Státní pedagogické nakladatelství, 1991. ISBN 80-04-22885-2.

ROBOVÁ, Jarmila, HÁLA, Martin a CALDA, Emil. 2013. *Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika: matematika pro střední školy.* Praha : Prometheus, 2013. ISBN 978-80-7196-425-4.

SCHWARZ, Štefan. 1958. *Základy náuky o riešení rovníc.* 1958.

STILLWELL, John. 2010. *Mathematics and Its History.* Third Edition. New York : Springer, 2010. ISBN 978-1-4419-6052-8.

SÝKOROVÁ, Irena. 2016. *Matematika ve staré Indii.* pRAHA : Matfyzpress, Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2016. ISBN 978-80-7378-305-1.

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ