ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

Soustavy algebraických rovnic

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Petr Marek

Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň 2024

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 16. dubna 2024

....
vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ:

Předně bych rád poděkoval doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc., za jeho cenné rady, připomínky, věnovaný čas při konzultacích a tipy na možná zlepšení obsahu mé bakalářské práce.

Dále bych rád vyjádřil svůj vděk slečně Kláře Mužíkové, která byla mou oporou, a to nejen v průběhu psaní této práce.

OBSAH

Úvod

S pojmem soustava rovnic se setkal ve svém životě asi každý člověk zpravidla již na základní škole. Co se však týče soustav rovnic polynomických, s těmi se již setkal málokdo. Ani na bakalářském studiu vysoké školy na toto téma obvykle nezbývá čas, a tak jediná skupina, která se s těmito soustavami může běžně setkat, jsou řešitelé matematické olympiády (MO).

Cílem práce bylo představit a shrnout některé metody řešení soustav polynomiálních rovnic, a to jak aplikováním „ručního“ přístupu počítání v podobě využití elementárních metod řešení, tak i s použitím moderních matematických programů *Mathematica* a *Maple*. Dalším záměrem bylo představit pojem rezultant a ukázat, jak ho lze využít k řešení soustav algebraických rovnic.

Práce je rozdělena do tří velkých celků. První z nich je věnován elementárním metodám řešení, demonstrovaných na příkladech úrovně MO. Každá z metod je představena, ukázána na několika příkladech a následně jsou metody mezi sebou komparovány a jsou zdůrazněny jejich nedostatky či přednosti.

Druhý celek této práce je věnován téměř celý pojmu rezultant. Před samotným zavedením definice rezultantu je ještě naznačena krátká motivace k uvedení tohoto pojmu. Další nedílnou součástí je pak již výpočet rezultantu, především ale představení různých algoritmů pro jeho efektivnější a rychlejší výpočet, a to opět jak pomocí počítačových programů, tak i aplikování algoritmu na „ruční“ počítání.

Poslední celek se věnuje využití rezultantu pro výpočet soustav polynomiálníc rovnic. Jsou zde na příkladech představeny různá využití rezultantu, ať už pro nalezení parametru, pro který mají polynomy společný kořen, řešení soustavy s obecným parametrem, nebo k řešení klasických soustav dvou, případně tří algebraických rovnic vhodně doplněných o vytvořené geometrické znázornění těchto konkrétních příkladů pro lepší představu toho, co vlastně počítáme.

1 ELEMENTÁRNÍ METODY ŘEŠENÍ

Úvodem této kapitoly si vymezme, jakými typy soustav algebraických rovnic se budeme v práci zabývat. Oprostíme se od řešení soustav ryze lineárních rovnic, se kterými se můžeme setkat již na 2. stupni základní školy a později i na některých středních školách, obvykle v podobě soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých, řešené například Gaussovou eliminační metodou. Tyto metody pro řešení soustav lineárních rovnic jsou velmi známé a rozšířené, a proto se jimi v práci nebudeme dále zaobírat.

Mnohem zajímavější pro nás tedy budou soustavy, v nichž alespoň jedna z rovnic bude nelineární. S těmito typy soustav se jako běžný žák na střední škole nesetkáme, a může se zdát, že pro jejich řešení nemáme dostatečné znalosti, a neobejdeme se bez použití počítačového programu nebo jiných moderních technologií. My si však v této kapitole ukážeme, že některé soustavy rovnic, obsahující i nelineární rovnice, mohou jít vyřešit i „ručně“ pouze pomocí elementárních metod řešení a zapojením kreativního myšlení. Kdo se naopak s těmito soustavami setkat může, jsou řešitelé matematické olympiády (MO), kde jsou tvůrčí nápady a myšlení nezbytný předpoklad pro úspěch. Právě na příkladech úrovně MO si proto některé elementární metody řešení soustav rovnic s nelineárními členy demonstrujeme.

Definice 1.1: Soustavou *m* polynomických rovnic o *n* neznámých v anulovaném tvaru rozumíme zápis ve tvaru:

$$
\begin{gathered}
f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,\\
f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,\\
\vdots\\
f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,
\end{gathered}
$$

kde $f_1, f_2, \dots, f_m$ jsou polynomy *n* proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ s reálnými, popř. komplexními koeficienty. [1]

V příkladech se budeme, pokud možno, snažit využívat výhradně ekvivalentní úpravy, abychom se vyhnuli nutnosti provádět zkoušku, k čemuž bychom jinak byli nuceni. V případě, že využijeme pouze ekvivalentní úpravy, bude mít upravená soustava rovnic tatáž řešení jako soustava původní.

Věta 1: Dvě soustavy polynomických rovnic s reálnými koeficienty jsou ekvivalentní, jestliže jednu z nich dostaneme z druhé některou z těchto ekvivalentních úprav:

- Zaměníme pořadí rovnic v soustavě.
- Vynásobíme některou rovnici soustavy nenulovým reálným číslem.
- K některé rovnici soustavy přičteme lineární kombinaci ostatních rovnic soustavy.
- Vynecháme rovnici soustavy, která je lineární kombinací ostatních rovnic soustavy.
- Nahradíme některou rovnici soustavy lineární kombinací všech rovnic soustavy. [2]

1.1 METODA ELIMINACE

Jako první možnost řešení se podíváme na eliminační metodu, která bude nejspíše nezkušenému řešiteli nejpřirozenější a napadne ho jako první možný způsob řešení. Jak již samotný název metody napovídá, půjde nám o postupnou eliminaci neznámých tak, aby nám na konci zbyla pouze jedna rovnice o jedné neznámé, kterou bychom již měli být schopni vyřešit. Zadání příkladů v této kapitole získáno z [3] a [4].

Příklad 1.1.1: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$

$$y^2 + 1 = 2x.$$

Poznámka: Můžeme si všimnout, že se jedná o *cyklickou* soustavu, která se vyznačuje tím, že jednotlivé rovnice se od sebe liší pouze cyklickou záměnou proměnných.

Řešení: Z druhé rovnice vyjádříme proměnnou x a dostaneme

$$x = \frac{1}{2}(1 + y^2).$$

Do první rovnice dosadíme za proměnnou x získaný výraz $\frac{1}{2}(1 + y^2)$ a získáme rovnici

$$\frac{(1 + y^2)^2}{2^2} + 1 = 2y.$$

Snadnými úpravami nakonec dospějeme k rovnici ve tvaru

$$y^4 + 2y^2 - 8y + 5 = 0.$$

Dostáváme rovnici čtvrtého stupně, kterou však neumíme obecně vyřešit. Pouhým pohledem zkušenějšího řešitele rovnic však můžeme snadno odhalit, že jejím kořenem bude $y = 1$. Vydělíme celý polynom příslušným kořenovým činitelem a získáme polynom třetího stupně ve tvaru

$$y^3 + y^2 + 3y - 5 = 0.$$

I u této rovnice lze vcelku jednoduše pouhým pohledem zjistit, že jejím kořenem bude opět $y = 1$. Uděláme analogicky úplně stejný postup jako v předchozím kroku a dostaneme již pouze kvadratickou rovnici

$$y^2 + 2y + 5 = 0.$$

Její diskriminant bude *D* = -16, tudíž tato kvadratická rovnice nebude mít v oboru reálných čísel žádné řešení. Rovnice $y^4 + 2y^2 - 8y + 5 = 0$ má tedy jeden reálný dvojnásobný kořen $y = 1$. Dosazením tohoto kořenu do rovnice $x = \frac{1}{2}(1 + y^2)$ vyjadřující proměnnou x dostaneme hodnotu $x = 1$. Soustava má tedy jediné řešení, a to $P = [1; 1]$.

Příklad 1.1.2: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 = 25,$$

$$xy = 12.$$

Řešení: Z druhé rovnice si vyjádříme neznámou x a dostaneme $x = \frac{12}{y}$. Tento výraz dosadíme za x do první rovnice a po drobné úpravě získáme rovnici

$$y^4 - 25y^2 + 144 = 0.$$

Dostáváme *bikvadratickou* rovnici, čímž rozumíme každou rovnici, která se dá pomocí ekvivalentních úprav převést na tvar $ax^4 + bx^2 + c = 0$, kde x je neznámá a $a, b, c \in R$. Tu vyřešíme tak, že použijeme substituci $y^2 = z$. Po aplikace této substituce získáme kvadratickou rovnici

$$z^2 - 25z + 144 = 0.$$

Tu již umíme snadno vyřešit a dostaneme $z_1 = 9$, $z_2 = 16$. Nyní musíme vrátit substituci, dosazením zpět do $y = \pm\sqrt{z}$ získáme $y_1 = 3$, $y_2 = -3, y_3 = 4$, $y_4 = -4$. Tyto čtyři hodnoty postupně dosadíme do již na začátku vyjádřeného vztahu $x = \frac{12}{y}$, tím dostaneme příslušné hodnoty x, tedy $x_1 = 4, x_2 = -4, x_3 = 3, x_4 = -3$. Daná soustava rovnic má čtyři řešení: $P = \{[4; 3], [-4; -3], [3; 4], [-3; -4]\}$.

Příklad 1.1.3: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y^2 + x + y = 8,$$

$$x + y + xy = 5.$$

Řešení: Z druhé rovnice soustavy vyjádříme $x = \frac{5-y}{1+y}$. Tento výraz dosadíme za x do rovnice první a dostaneme

$$\frac{(5-y)^2}{(1+y)^2} + y^2 + \frac{5-y}{1+y} + y = 8.$$

Po zbavení rovnice zlomků, umocnění závorek a sečtení příslušných stejných koeficientů nakonec dostaneme rovnici ve tvaru

$$y^4 + 3y^3 - 5y^2 - 21y + 22 = 0.$$

Dostáváme opět rovnici čtvrtého stupně. K jejímu řešení budeme potřebovat buď dobrý nápad nebo uhádnout nějaký kořen. Zkusmo rychle přijdeme na to, že jedním z kořenů bude $y = 1$. Po vydělení polynomu $(y^4 + 3y^3 - 5y^2 - 21y + 22)$ příslušným kořenovým činitelem $(y - 1)$ získáme rovnici třetího stupně

$$y^3 + 4y^2 - y - 22 = 0.$$

U této kubické rovnice by nám mohl pomoci dobrý nápad. Rovnici si můžeme ekvivalentně přepsat na tvar, ze kterého by mohl jít jeden z kořenů následně vytknout.

$$y^3 - 2y^2 + 6y^2 - 12y + 11y - 22 = 0.$$

Zde můžeme postupně vytýkat výraz $(y - 2)$, což bude náš druhý kořen, a tuto rovnici tedy můžeme po vytknutí přepsat na tvar

$$(y - 2)(y^2 + 6y + 11) = 0.$$

Rychle lze přijít na to, že zbylá kvadratická rovnice bude mít záporný diskriminant čili nebude mít v oboru reálných čísel žádné řešení. Rovnice $y^4 + 3y^3 - 5y^2 - 21y + 22 = 0$ tedy bude mít dva reálné kořeny, a to $y_1 = 1$ a $y_2 = 2$. S ohledem na použitý vztah $x = \frac{5-y}{1+y}$ dostaneme, že $x_1 = 2, x_2 = 1$. Daná soustava rovnic má dvě řešení: $P = \{[2; 1], [1; 2]\}$.

Můžeme si povšimnout, že již v případě, kdy máme v soustavě rovnice druhého stupně, musíme následně řešit rovnici stupně čtvrtého, což je obecně velmi náročné a pracné. Proto tato metoda nejspíše nenajde obecné univerzální využití pro řešení soustav polynomiálních rovnic, jelikož při dalších vyšších stupních rovnic bychom již dostávali polynomiální rovnice velmi vysokých stupňů, které bychom již nedokázali pomocí středoškolské matematiky jednoduše vyřešit. Nicméně nám může posloužit jako dobrá motivace pro pozdější zavedení dalších metod pro výpočet soustav polynomických rovnic, které již budou sofistikovanější a univerzálnější.

1.2 METODA ČTVERCŮ

Jako další možný způsob řešení soustav polynomiálních rovnice si představíme metodu čtverců, jejíž hlavní myšlenka bude po úpravách dostat jednu rovnici obsahující všechny proměnné doplněné na čtverec, z čehož pak již velmi snadno získáme všechny kořeny dané soustavy. Budeme postupovat tak, že nejdříve sečteme všechny rovnice dané soustavy a následně se pokusíme získaný výraz upravit na součet čtverců. Musíme si však dát pozor na to, že dle **věty 1** sečtení dvou nebo více rovnic soustavy nepatří mezi *ekvivalentní* úpravy, ale mezi úpravy *důsledkové*, a proto bude muset být nutnou součástí řešení i zkouška. Někdy nemusí být doplnění na čtverec na první pohled zřejmé a bude potřeba si některé členy „vyrobit“, ovšem vždy tak, abychom daný výraz nezměnili. Tato metoda se nejvíce hodí na soustavy *cyklické*, ve kterých se vyskytují sudé mocniny. Tento specifický tvar soustav je také nedílnou součástí příkladů MO. Zadní příkladů v této kapitole získána z [4] a [5].

Příklad 1.2.1: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$

$$y^2 + 1 = 2x.$$

Řešení: Využijeme znovu zadání *příkladu 1.1.1*, ovšem tentokrát ho vyřešíme pomocí metody čtverců, abychom získali porovnání mezi jednotlivými metodami.

Jako první sečteme obě rovnice a po převedení všech výrazů na levou stranu rovnice dostaneme

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 0.$$

Z tohoto tvaru již můžeme rovnou provést doplnění na čtverec a získáme

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0.$$

Z této rovnice plyne, že $x = y = 1$. Jelikož jsme na začátku využili *neekvivalentní* úpravu, nesmíme zapomenout na provedení zkoušky. Pomocí ní se však rychle přesvědčíme, že daná soustava má skutečně jedno řešení, a to $P = [1; 1]$. Což nám sedí s výsledkem, ke kterému jsme došli pomocí *metody eliminace*. Můžeme vidět, že *metodou čtverců* bylo řešení podstatně jednodušší, a hlavně jsme se vyhnuli řešení polynomiální rovnice čtvrtého stupně.

Příklad 1.2.2: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^4 + y^2 + 4 = 5yz,$$

$$y^4 + z^2 + 4 = 5zx,$$

$$z^4 + x^2 + 4 = 5xy.$$

Řešení: Než začneme se sčítáním rovnic, upravme si rovnice do tvaru

$$(x^4 - 4x^2 + 4) + 4x^2 + y^2 = 5yz,$$

$$(y^4 - 4y^2 + 4) + 4y^2 + z^2 = 5zx,$$

$$(z^4 - 4z^2 + 4) + 4z^2 + x^2 = 5xy.$$

Tato úprava rovnice nezměnila, avšak díky ní již získáváme v závorkách výrazy, které půjdou doplnit na čtverce. Nyní sečteme všechny 3 rovnice a převedeme všechny výrazy na levou stranu rovnice, abychom ji měli v anulovaném tvaru

$$(x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + (z^2 - 2)^2 + 5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 5xy - 5yz - 5zx = 0.$$

První část již doplněnou na čtverec máme a nyní musíme na tento tvar upravit i zbytek rovnice. Začneme tím, že ze všech zbývajících členů vytkneme pětku

$$5\,(x^2 - xy + y^2 - xz + z^2 - yz) = 0.$$

Výraz, který nám vznikl v závorce, nám již pomalu může začít připomínat vzorec $(a - b)^2$, chybí nám v něm však některé členy. Ty bychom ale mohli získat tak, že celou závorku vynásobíme dvěma a chytře si výrazy rozepíšeme tak, aby byly ve tvaru, který již dokážeme doplnit na čtverec

$$5\left((x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2xz + x^2)\right) = 0.$$

Nyní již máme tvar, který jsme chtěli získat, a můžeme úpravu na čtverce provést. Nesmíme ale zapomenout, že jsme celý čitatel násobili dvěma, tudíž ho musíme zároveň dvěma i vydělit, abychom daný výraz nezměnili. Po provedení těchto úprav a přičtení k již na začátku doplněným čtvercům tedy nakonec získáme rovnici ve tvaru

$$(x^2 - 2)^2 + (y^2 - 2)^2 + (z^2 - 2)^2 + \frac{5}{2}\left((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\right) = 0.$$

Z trojice čtverců $((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2)$ nutně vyplývá, že $x = y = z$. Ze zbylé trojice pak snadno dostaneme, že hodnota těchto proměnných, které jsou si všechny rovny, bude $\pm\sqrt{2}$. Zjistili jsme tedy, že daná soustava rovnic má dvě řešení, a to

$$P = \left\{\left[\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}\right], \left[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right]\right\}.$$

Provedením zkoušky, která je v tomto příkladu nutností, zjistíme, že tyto dvě trojice jsou skutečně řešením dané soustavy.

Příklad 1.2.3: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 - 3y + 3 = z,$$

$$y^2 - 3z + 3 = x,$$

$$z^2 - 3x + 3 = y.$$

Řešení: Sečtením všech tří rovnic soustavy získáme po drobné úpravě rovnici

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + z^2 - 4z + 9 = 0.$$

Dostáváme téměř tvar, který bychom uměli doplnit na čtverec. Můžeme si však ke každé proměnné přičíst a zároveň odečíst číslo čtyři, čímž dosáhneme toho, že budeme moci celou rovnici již přepsat na součet čtverců. Konstantu, která nám po sečtení čtverců zbyla, převedeme na druhou stranu rovnice a převedeme též na tvar druhé mocniny

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = (\sqrt{3})^2.$$

Pokud se na tuto rovnici podíváme z pohledu analytické geometrie, zjistíme, že se jedná o rovnici kulové plochy se středem $S = [2,2,2]$ a poloměrem $r = \sqrt{3}$. Množina řešení je tedy nekonečná (přesněji nespočetná). Jelikož jsme opět provedli na začátku *neekvivalentní* úpravu, jsem nuceni provést zkoušku. Ta je však v tomto případě prakticky neproveditelná, tudíž nejsme schopni pomocí metody čtverců určit řešení této soustavy. [4]

Z uvedených příkladu bychom mohli usuzovat, že *metoda čtverců* již vypadá sofistikovaněji než předchozí uvedená *eliminační metoda.* I při vyšších mocninách v zadaných rovnicích soustavy jsme ve výsledku museli počítat nejvýše kvadratické rovnice, což nám nečinilo, na rozdíl od polynomů čtvrtého stupně získaných za použití *eliminační metody*, žádný problém. Velký nedostatek *metody čtverců* jsme však odhalili v *příkladu 1.2.3*. A to ten, že metoda opět nemá univerzální uplatnění a její použití je omezeno zadanými číselnými parametry. Tím můžeme říct, že metoda nepůjde obecně využít, pokud nám po vytvoření čtverců nezůstane na pravé straně rovnice nula.

1.3 Metoda faktorizace

Jako poslední ze způsobů řešení polynomiálních rovnic „ručně“ se podíváme na *metodu faktorizace.* Myšlenkou této metody bude vždy ponechat jednu z rovnic soustavy beze změny a postupně k ní obvykle odečítat jisté násobky rovnic zbylých. Cílem bývá využít známých vzorců pro rozklady rozdílu čtverců, případně výrazů tvaru $u^3 - v^3$ a podobně. Tyto úpravy budou navíc vždy ekvivalentní, tudíž se již na rozdíl od *metody čtverců* nebudeme muset zabývat zkouškou. Takto vzniklé rovnice poté budeme schopni pomocí *elementárních úprav* převést na *faktorizovaný* (též součinový) tvar, ze kterého následně za pomoci vyhodnocení vzniklých podmínek pro rovnost získáme všechna řešení zadané soustavy. Zadání příkladů získána z [4] a ze stránek Matematické olympiády.

Příklad 1.3.1: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 1 = 2y,$$

$$y^2 + 1 = 2x.$$

Řešení: Jako modelový příklad opět využijeme zadání *příkladu 1.1.1* a opět ho vyřešíme jiným způsobem, tentokrát tedy *metodou faktorizace*.

Druhou rovnici soustavy vynásobíme číslem minus jedna a přičteme k rovnici první. Po převedení všech členů na levou stranu rovnice dostaneme ekvivalentní soustavu

$$x^2 + 1 = 2y,$$

$$x^2 - y^2 + 2x - 2y = 0.$$

Z druhé rovnice již získáme faktorizovaný tvar jednoduše, pouhým vytknutím

$$x^2 + 1 = 2y,$$

$$(x - y)(x + y + 2) = 0.$$

Nyní zřejmě musí platit jedna z podmínek **A** nebo **B**, kde **A:** $y - x = 0$ a **B:** $x + y + 2 = 0$.

A) $x - y = 0$

Z této podmínky rovnou vidíme $x = y$. Dosadíme tedy tuto podmínku do první rovnice soustavy, dostaneme $y^2 + 1 = 2y$, tj. $(y - 1)^2 = 0$. Tato rovnice má tedy jeden dvojnásobný kořen, a to $y = 1$. Jelikož $y = x$, z této podmínky tedy získáme jedno řešení $P = [1,1]$.

B) $x + y + 2 = 0$

Vyjádříme $x = -y - 2$ a opět dosadíme do první rovnice, po umocnění závorky a drobné úpravě získáme rovnici ve tvaru $y^2 + 2y + 5 = 0$. Ta však nemá v oboru reálných čísel žádné řešení.

Daná soustava má tedy jedno řešení, a to $P = [1,1]$. Což opět odpovídá výsledku získanému pomocí předešlých metod.

Příklad 1.3.2: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + y + z = 2,$$

$$y^2 + z + x = 2,$$

$$z^2 + x + y = 2.$$

Řešení: Druhou i třetí rovnici vynásobíme číslem minus jedna a postupně obě přičteme k rovnici první. Získáme soustavu

$$x^2 + y + z = 2,$$

$$x^2 - y^2 - x + y = 0,$$

$$x^2 - z^2 - x + z = 0.$$

Snadnými úpravami obou rovnic a následným vytknutím nakonec dospějeme k soustavě, která bude ekvivalentní se soustavou zadanou

$$x^2 + y + z = 2,$$

$$(x - y)(x - y - 1) = 0,$$

$$(x - z)(x - z - 1) = 0.$$

Z posledních dvou rovnic soustavy vidíme, že mohou nastat celkem čtyři případy **A**, **B**, **C** a **D**, kde **A:** $(x - y = 0) \wedge (x - z - 1 = 0)$, **B:** $(x - z = 0) \wedge (x - y - 1 = 0)$,

C: $(x - y = 0) \wedge (x - z = 0)$ a **D:** $(x + y - 1 = 0) \wedge (x + z - 1 = 0)$.

Rozborem a následným sjednocením výsledků těchto čtyř případů a dosazením do první nezměněné rovnice dostaneme všechna řešení dané soustavy.

A) $(x - y = 0) \wedge (x - z - 1 = 0)$

Z první podmínky $y = x$ a ze druhé $z = 1 - x$. Tyto podmínky budeme dosazovat do první nezměněné rovnice soustavy a dostaneme vždy kvadratickou rovnici o jedné neznámé, kterou již snadno vyřešíme. V tomto případě tedy dostaneme rovnici: $x^2 + x + (1 - x) - 2 = 0$, po úpravě $x^2 - 1 = 0$. Tato rovnice má dva reálné kořeny $x_1 = 1$ a $x_2 = -1$. Dosazením do výše vyjádřených podmínek získáme první dvě řešení soustavy, a to uspořádané trojice ve tvaru $(x_1, y_1, z_1) = (1,1,0)$ a $(x_2, y_2, z_2) = (-1, -1,2)$.

B) $(x - z = 0) \wedge (x - y - 1 = 0)$

Z první podmínky máme $z = x$ a ze druhé $y = 1 - x$. Dosadíme tyto podmínky do první rovnice soustavy a můžeme si všimnout, že dostaneme stejnou rovnici jako v předchozím případě, můžeme tedy rovnou psát $x_3 = 1$ a $x_4 = -1$. Jediný rozdíl oproti předchozímu případu je v tom, že jsou prohozeny podmínky pro y a z, budou tedy zaměněny i hodnoty y a z v obou řešeních. Dostáváme tedy další dvě řešení, a to uspořádané trojice $(x_3, y_3, z_3) = (1,0,1)$ a $(x_4, y_4, z_4) = (-1,2, -1)$.

C) $(x - y = 0) \wedge (x - z = 0)$

Pokud mají tyto dvě podmínky nastat současně, musí nutně platit $x = y = z$. Dosazením do první nezměněné rovnice soustavy pak dostaneme kvadratickou rovnici ve tvaru: $x^2 + 2x - 2 = 0$, která má dva reálné kořeny $x_5 = -1 + \sqrt{3}$

a $x_6 = -1 - \sqrt{3}$. Vzhledem k tomu, že platí $x = y = z$, můžeme ihned psát další dvě řešení dané soustavy rovnic: $(x_5, y_5, z_5) = (-1 + \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3})$ a $(x_5, y_5, z_5) = \left(-1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}\right)$.

D) $(x + y - 1 = 0) \wedge (x + z - 1 = 0)$

Z první podmínky dostaneme $y = 1 - x$ a ze druhé $z = 1 - x$. Opět dosadíme do první rovnice soustavy a dostaneme rovnici: $x^2 + (1 - x) + (1 - x) - 2 = 0$, po úpravě $x(x - 2) = 0$. Ta má opět dva reálné kořeny $x_7 = 0$ a $x_8 = 2$. Opětovným dosazením do vyjádřených podmínek pak získáme poslední dvě řešení soustavy, a to uspořádané trojice $(x_7, y_7, z_7) = (0,1,1)$ a $(x_8, y_8, z_8) = (2, -1, -1)$.

Zadaná soustava rovnic má tedy celkem 8 řešení, ve tvaru:

$$P = \left\{ \begin{matrix} [1,1,0], [-1,-1,2], [1,0,1], [-1,2,-1], \left[-1 + \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}\right], \\ \left[-1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}\right], [0,1,1], [2,-1,-1] \end{matrix} \right\}.$$

Ve školním kole kategorie A 53. ročníku MO, konaném 2. prosince 2003, byla zadána následující úloha.

Příklad 1.3.3: V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 + 2yz = 6(y + z - 2),$$

$$y^2 + 2zx = 6(z + x - 2),$$

$$z^2 + 2xy = 6(x + y - 2).$$

Řešení: První rovnici soustavy ponecháme beze změny a opět jí odečteme od druhé a následně třetí rovnice. Totožným postupem jako v předchozím příkladu získáme soustavu, která bude se zadanou soustavou ekvivalentní

$$x^2 + 2yz = 6(y + z - 2),$$

$$(x - y)(x + y - 2z + 6) = 0,$$

$$(x - z)(x + z - 2y + 6) = 0.$$

Nyní můžeme řešení rozdělit na čtyři případy, které mohou nastat. Označíme je **A**, **B**, **C**, **D**, kde **A:** $(x - y = 0) \wedge (x + z - 2y + 6 = 0)$, **B:** $(x - z = 0) \wedge (x + y - 2z + 6 = 0)$, **C:** $(x - y = 0) \wedge (x - z = 0)$ a **D:** $(x + y - 2z + 6 = 0) \wedge (x + z - 2y + 6 = 0)$.

Rozborem těchto případů bychom vždy po úpravách dostali kvadratickou rovnici v jedné proměnné a pak by již nebylo obtížné najít všechna čtyři řešení soustavy. Vzhledem k tomu, že tento totožný postup byl již demonstrován v předchozím řešeném příkladu, nebudeme ho znovu dlouze opakovat, ale vyřešíme si ho pro srovnání jinak, a to pomocí počítače. [3]

Jako počítačový software zde využijeme program *Mathematica*. Pro samotný výpočet použijeme příkaz s dvěma parametry *Solve*, kde prvním parametrem jsou samotné rovnice a druhým proměnné, pro které chceme soustavu řešit. Do programu tedy zadáme příkaz ve tvaru: **Solve[{x^2+2*y*z==6*(y+z-2), y^2+2*z*x==6*(z+x-2), z^2+2*x*y==6*(x+y-2)}, {x,y,z}]**

Dostáváme: {{x->-2, y->4, z->4}, {x->2, y->2, z->2}, {x->4, y->-2, z->4}, {x->4, y->4, z->-2}}.

Pomocí jednoho příkazu jsme tak zjistili, že daná soustava rovnic má v oboru reálných čísel čtyři řešení, vypsaná výše.

V porovnání s předchozími prezentovanými metodami nám *metoda faktorizace* nejspíše vyjde, hlavně pro řešení *cyklických* soustav rovnic, jako nejuniverzálnější z nich. Pokaždé můžeme postupovat v podstatě stejně, a v konečném důsledku vždy dostáváme nejvýše kvadratickou rovnici, kterou již s jistotou dokážeme vyřešit. Z uvedených příkladů se nabízí myšlenka, že by pro tento postup mohl existovat i *algoritmus* a dal by se tak velmi efektivně zautomatizovat. To je však zatím pouhý náznak této problematiky a hlubším využitím počítačových programů a algoritmů se budeme dopodrobna zaobírat v následujících kapitolách práce.

2 REZULTANTY

Ne každá soustava polynomiálních rovnic však bude tak přívětivě zadaná, aby se dala počítat pouze za pomoci elementárních metod řešení jako v první kapitole. Pokud bychom v zadání dostali polynomy vyšších stupňů a soustava by nebyla například *cyklická* nebo jinak vhodně předpřipravená, „ruční“ přístup by již zajisté selhal. Proto si v této druhé kapitole práce představíme, jak při řešení soustav algebraických rovnic využít tzv. **rezultantu**.

2.1 SPOLEČNÝ DĚLITEL DVOU POLYNOMŮ

Předtím, než se dostaneme k pojmu samotného *rezultantu*, zkusme si nejdříve jako motivaci k jeho zavedení vyřešit jeden problém, který má i samostatnou důležitost. Úkolem je nalézt nutnou a postačující podmínku pro to, aby dva polynomy byly dělitelné nekonstantním společným faktorem. Neboli se ptáme, kdy mají dva polynomy společný kořen. Samozřejmě nebudeme postupovat tak, že bychom našli všechny kořeny obou polynomů, jelikož na řešení polynomů vyšších stupňů nemáme žádnou obecnou formuli. Jak bychom tedy mohli s jistotou říct, jsou-li dva polynomy dělitelné nekonstantním společným faktorem, aniž bychom znali jejich kořeny?

Mějme dva polynomy $f(x)$ a $g(x)$. Pokud mají tato dva polynomy společný dělitel, musí nutně platit $f(x)\frac{g(x)}{x-\alpha} = \frac{f(x)}{x-\alpha}g(x)$, kde α je společný kořen obou polynomů. Označme nyní $\frac{g(x)}{x-\alpha}$ jako polynom $r(x)$, kde zřejmě stupeň polynomu $r(x) < g(x)$. Obdobně označíme $\frac{f(x)}{x-\alpha}$ jako $s(x)$, kde opět stupeň polynomu $s(x) < f(x)$. Dostaneme tedy tvar $f(x)r(x) =$ $= s(x)g(x)$, z něhož můžeme formulovat následující Lemma.

Lemma 2.1.1: Polynomy $f(x)$ a $g(x)$, kde stupeň $f(x) = n \in N$, stupeň $g(x) = m \in N$, jsou dělitelné nekonstantním společným faktorem právě tehdy, když platí rovnost

$$f(x)r(x) = s(x)g(x),$$

přičemž pro stupně polynomů $r(x)$, $g(x)$ platí st $r(x) \leq m-1$, st $s(x) \leq n-1$. [3]

Poznámka: Jedná se o nutnou a zároveň postačující podmínku.

Ačkoliv nám tato podmínka může zprvu připadat jako neužitečná, vychází z ní další teorie spojená s pojmy *Sylvesterova matice* a *rezultant*, které jsou jedním z významných příspěvků Jamese Josepha Sylvestera, kterého si nyní krátce představíme.

2.2 JAMES JOSEPH SYLVESTER

James Joseph Sylvester byl významným britským matematikem 19. století, narozeným v roce 1814 v Londýně. Pocházel z židovské rodiny a byl vychováván v židovské víře, což mu později v jeho životě přineslo problémy. Jeho studia byla také velmi komplikovaná, ať už kvůli nařčení z napadení jiného studenta nebo později kvůli zdlouhavým nemocem. Nakonec v roce 1837 složil závěrečné zkoušky na *Univerzitě svatého Jana v Cambridge*, kde v jeho ročníků působili později také velmi slavní matematici Duncan Gregory a George Green. Sylvester v závěrečné zkoušce sice uspěl, avšak z důvodu svého náboženství odmítl podepsat tzv. *třicet-devět článků*, což byl soubor doktrín a praktik anglikánské církve, a tak mu titul oficiálně udělen nebyl. I přesto se stal vysokoškolským profesorem a vysokoškolský titul mu byl udělen až v roce 1841 na *Trinity College v Dublinu*. Tato univerzita totiž mohla udělovat tituly i římským katolíkům, tedy i Židům.

Později, ve svých 27 letech, byl jmenován profesorem na *University of Virgin*ia v USA. Jeho žádost o přijetí na tuto pozici byla podpořena například i dalším známým matematikem této doby, De Morganem, který napsal: „V tomto státě není žádná osoba s větší reputací než pan Sylvester jako původní matematik, ani nenabízí vyhlídky na rozšíření přesných věd svou prací. Z vlastní zkušenosti s tím, co dokázal, mohu bezpečně říci, že je to matematik velké síly, dobře obeznámený s nejmodernějšími formami vědy a velmi horlivý ve vyšetřování svých dotazů." Avšak jeho působení na univerzitě skončilo velmi rychle a neslavně. Podrobněji jsou události jeho rezignace a odchodu popsány v článku *L. S. Feuera* dostupného z [6]. V USA se mu ani poté nedařilo a vrátil se tak zpět do Anglie. Po několika neúspěšných pokusech na jiných univerzitách se stal profesorem matematiky na *Royal Military Academy* ve Woolwichi. Později v jeho životě se opět vrátil do USA, kde již jeho působení bylo úspěšnější než to první. James Joseph Sylvester nakonec umírá 15. března 1897.

James Joseph Sylvester přispěl k mnoha oblastem matematiky a jeho objevy měly hluboký dopad na vývoj této vědy. Učinil objevy v teorii čísel, kde můžeme jmenovat například nadefinování jeho vlastní Sylvestrovy posloupnosti. Ta je definovaná tak, že každý prvek posloupnosti je součinem prvků předcházejících plus jedna. Další oblastí, které se věnoval, byla teorie invariantů. Tato teorie se zabývá studiem objektů, jenž zůstávají neměnné vůči určitým transformacím. Díky jeho výzkumům v této oblasti například víme, jak pomocí determinantu určit vlastní čísla matice. Pro tuto práci nejvýznamnější jsou pak jeho objevy v algebře. V ní zavedl pojmy jako *rezultant,* s nímž je úzce spojen i pojem *determinant,* který je klíčový nejen pro počítání rezultantu, ale také pro celou lineární algebru, které je nedílnou součástí. [7]

Sylvester se zabýval studiem polynomiálních rovnic a jejich kořenů. Jedním z klíčových problémů, které řešil, bylo zjištění podmínek, za kterých mají dva polynomy společné kořeny. Jeho motivací bylo nalézt efektivní způsob k zjištění těchto podmínek, a pokud by společný kořen měly, jak tyto kořeny najít. Byl inspirován prací jiných matematiků své doby, jako byl například Carl Friedrich Gauss, zabývající se teorií rovnic a algebrou nebo Évariste Galois. Sylvester vytvořil nový matematický nástroj nazvaný **rezultant**, který efektivní nalezení kořenů polynomiálních rovnice umožňuje. Někdy se mu také říká *eliminant*, jelikož ze soustavy algebraických rovnic o dvou neznámých vždy jednu eliminuje.

2.3 DETERMINANT

Pro výpočet samotných *rezultantů* ještě bude potřeba definovat pojem *determinant*. Determinant je předpis, který každé čtvercové matici přiřadí jisté číslo.

Výpočet determinantu provádíme podle řádu jeho matice následovně:

A) Determinant matice řádu 2. Mějme

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

pak

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

B) Determinant matice řádu 3.

Zde máme na výběr dvě možnosti. Buď můžeme využít *Sarrusovo pravidlo* nebo *Laplaceův rozvoj*.

Sarrusovo pravidlo: Můžeme využít pouze pro determinant matice řádu 3.

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Laplaceův rozvoj: Jedná se o rozvoj podle j-tého sloupce nebo i-tého řádku.

Pro čtvercovou matici A řádu n platí:

- rozvoj podle j-tého sloupce pokud $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\, a_{ij} \det A_{ij}$,
- rozvoj podle i-tého řádku pokud $\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\, a_{ij} \det A_{ij}$,

kde matice A_{ij} vznikne vynecháním j-tého sloupce a i-tého řádku. [11]

C) Matice řádu 4 a vyšší.

Pro tyto matice neexistuje pro výpočet determinantu žádné efektivní univerzální pravidlo a budeme nuceni vždy využít *Laplaceův rozvoj.* Řádek nebo sloupec podle kterého budeme rozvoj provádět vybereme příhodně podle toho, který bude mít pro počítání „nejpříhodnější“ čísla. V případě potřeby si tato čísla (obvykle nuly) můžeme uměle v matici vytvořit. Při tom však musíme myslet na to, že nemůžeme provádět veškeré úpravy, které nás napadnou. Budeme využívat pouze přičtení libovolného násobku daného řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci) matice. Jiné úpravy by nám totiž hodnotu determinantu změnili, což by bylo v případě, kdy s jeho pomocí budeme počítat soustavy polynomiálních rovnic, dosti nešťastné.

2.4 REZULTANT

Definice 2.3.1: Nechť $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a $g(x) = b_m x^m + $ $+ b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ jsou dva polynomy z $T[x]$, kde T je komutativní těleso. Sylvesterovou maticí dvou polynomů $f(x)$ a $g(x)$ pak nezveme matici

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} a_n & a_{n-1} & & \cdots & a_0 & & & \\ & a_n & a_{n-1} & & & a_0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & a_n & a_{n-1} & & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & & \cdots & b_0 & & & \\ & b_m & b_{m-1} & & & b_0 & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & b_m & b_{m-1} & & \cdots & b_0 \end{pmatrix}.$$

Jedná se o čtvercovou matici typu $m+n \times m+n$ mající v prvních m řádcích koeficienty $a_i, i = n, n-1, \cdots, 0$, v dalších n řádcích pak koeficienty $b_i, i = m, m-1, \cdots, 0$ a ve „zbývajících“ místech se píší nuly.

Příklad 2.3.2: Dle vyložené teorie sestrojte Sylvesterovu matici polynomů $f(x) = 2x^2 + + 3x + 4$ a $g(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 5$.

Řešení:

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Definice 2.3.3: Rezultantem $res(f(x), g(x))$ dvou polynomů $f(x)$ a $g(x)$ nazýváme determinant jejich Sylvesterovy matice.

Věta 2.3.4 (Sylvesterovo kritérium): Nechť $f(x)$, $g(x) \in T[x]$ jsou dva polynomy kladných stupňů. Polynomy $f(x)$, $g(x)$ jsou dělitelné nekonstantním společným dělitelem právě tehdy, když $res\big(f(x), g(x)\big) = 0$. [3]

Poznámka: Sylvesterovo kritérium bezprostředně vyplývá z úvahy provedené v **Lemmatu 2.1.1** a je s ním ekvivalentní. Jedná se v podstatě jen o přeformulované a do algoritmu převedené lemma 2.1.1, avšak již mnohem užitečnější a explicitní.

Příklad 2.3.5: Zjistěte, zdali jsou polynomy $f(x) = x^2 + x - 6$ a $g(x) = x^2 - 3x + 2$ dělitelné společným faktorem $\varphi(x)$.

Řešení: Budeme tedy počítat rezultant těchto dvou polynomů

$$res\big(f(x), g(x)\big) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -6 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4 - 54 + 12 + 6 + 2 + 36 - 18 + 12 = 0.$$

Zvolili jsme rozvoj podle prvního sloupce, jelikož se v něm nacházejí dvě nuly a zbylá čísla jsou jedničky, tudíž jsme nemuseli jednotlivé *subdeterminanty* ničím násobit. Determinant nám vyšel nulový, tudíž můžeme díky *Sylvesterovu kritériu* s jistotou říct, že dané dva polynomy jsou dělitelné společným faktorem čili mají společný kořen. U polynomu takto nízkého stupně bychom navíc velmi rychle přišli na to, že oním faktorem je $\varphi(x) = x - 2$.

Příklad 2.3.6: Zjistěte, zdali jsou polynomy $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 4$ a $g(x) = x^4 - - x^2 - 6$ dělitelné společným faktorem $\varphi(x)$.

Řešení: Jako první krok si sestrojíme Sylvesterovu matici

$$Syl\big(f(x), g(x)\big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Nyní bychom měli spočítat její determinant a zjistit, zdali je nulový nebo ne. Počítat determinant 7×7 však nebude efektivní a zabralo by to příliš mnoho času a úsilí. Můžeme se však zamyslet, zda bychom nemohli k řešení dospět i jinou, jednodušší, cestou. Naším cílem je pouze ověřit, zdali je determinant této matice nulový, v opačném případě nás jeho konkrétní hodnota však již nezajímá. Pozornější čtenář již může tušit, kam těmito úvahami mířím. Z vlastností determinantu víme, že determinant matice se rovná nule, pakliže matice obsahuje jeden nebo více lineárně závislých řádků. Tudíž by nám mohlo k řešení stačit se pouze pokusit naší *Sylvesterovu matici* odstupňovat a pokud objevíme nějaký lineárně závislý řádek, můžeme s jistotou prohlásit, že determinant této matice je roven nule.

Začneme tím, že první řádek matice vynásobíme číslem minus jedna a přičteme ho k řádku pátému, dostáváme matici ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Dále bychom pokračovali obdobným způsobem v odstupňování této matice postupným eliminováním čísel pod hlavní diagonálou. Po několika takovýchto jednoduchých úpravách bychom nakonec dostali matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Můžeme si všimnout, že pátý řádek je minus dva násobkem řádku šestého, tudíž jsou nutně lineárně závislé. Díky vlastnostem determinantu tedy můžeme s jistotou říct, že determinant naší Sylvesterovy matice je roven nule. Polynomy $f(x)$ a $g(x)$ jsou tedy dělitelné společným faktorem $\varphi(x)$. Snadno se pak zjistí, že tímto faktorem je $\varphi(x) =$

$= x^2 - 2$.

2.5 TECHNIKY PRO EFEKTIVNÍ VÝPOČET REZULTANTU

Pokud bychom si v přechozím příkladu nepomohli znalostmi lineární algebry, respektive znalostí vlastností determinantu, zabral by nám výpočet daného determinantu již více času a takovýto postup by nebyl efektivní. Navíc jsme tohoto „triku“ mohli využít pouze proto, že nám stačilo pouze ověřit, je-li hodnota determinantu nulová a v opačném případě jsme již nepotřebovali znát jeho přesnou hodnotu. Tento postup by však již nebylo možné využít později u samotného řešení soustav polynomiálních rovnic za využití rezultantu, jelikož tam přesnou hodnotu determinantu potřebovat budeme. Více o této problematice však až v následující kapitole.

Bylo by tedy pro nás výhodné znát nějaký způsob, jak si výpočet determinantu Sylvesterovy matice ulehčit. Pokud se podíváme na specifickou strukturu Sylvesterovy matice, můžeme si velmi rychle všimnout, že se v ní nachází velké množství nul. Vzhledem k tomuto zjištění se tak nabízí myšlenka, zda by výpočet determinantu stupně $m + n$ nešel převést na výpočet jiného determinantu, který by byl stupně nižšího a tím pádem podstatně jednodušší na výpočet.

2.5.1 BÉZOUTŮV DETERMINANT

Touto problematikou se zabýval již v 18. století *Étienne Bézout*. Ten ukázal, že výpočet takto „děravého“ determinantu lze převést na výpočet determinantu jisté jiné matice, dnes nazývané *Bézoutova matice*, jejíž stupeň tvoří již jen max (m, n). Nebudeme se v této práci tvorbou této matice zabývat, ale podíváme se pro zajímavost jen na názornou ukázku, jak by nám mohla usnadnit práci při „ručním" počítání rezultantů. Na pomoc si tak tentokrát vezmeme počítačový program *Maple*, jenž nám s konstrukcí *Bézoutovy matice* pomůže.

Příklad 2.5.1.7: Pomocí Bézoutova determinantu spočítejte rezultant dvou polynomů. Využijeme zadání **příkladu 2.3.6**, abychom mohli získané determinanty porovnat a názorně tak ukázat efektivitu použití *Bézoutovy matice* pro řešení rezultantů.

Řešení: V programu *Maple* existuje přímo funkce *BezoutMatrix,* kterou si uložíme například do proměnné B a kde nám bude stačit jako její dva parametry zadat naše dva polynomy $f(x)$ a $g(x)$. Zadané příkazy (černě) a následné výstupy (modře) programu pak budou vypadat následovně:

$> f := x^3 + 2x^2 - 2x - 4$

$$f := x^3 + 2x^2 - 2x - 4$$

$> g := x^4 + x^2 - 6$

$$g := x^4 + x^2 - 6$$

$> B := LinearAlgebra[BezoutMatrix]$

$$B := \begin{bmatrix} -4 & 6 & 8 & -12 \\ -3 & -6 & 6 & 12 \\ 2 & -3 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Můžeme tedy vidět, že „nová" matice je skutečně stupně pouze max (m, n) neboli v našem případě čtyři, což je v porovnání se standardní Sylvesterovou maticí těchto dvou polynomů nezanedbatelný rozdíl. Pokusme se nyní tento determinant klasickou cestou vypočítat a ověřit tak, že vyjde stejný jako determinant původní Sylvesterovy matice.

Aniž bychom však něco počítali, již z tohoto tvaru Bézoutovy matice je na první pohled patrné, že druhý řádek je minus tři násobkem řádku čtvrtého, tudíž díky vlastnostem determinantu můžeme bez jakéhokoliv počítání říct, že determinant této matice je roven nule. Což nám souhlasí s výsledkem, který jsme obdrželi výpočtem pomocí determinantu standardní Sylvesterovy matice. Je však zřejmé, že i v případě nenalezení žádných lineárně závislých řádků by nám výpočet determinantu typu 4×4 zabral podstatně méně času než determinant typu 7×7 Sylvesterovy matice.

2.5.2 DALŠÍ MOŽNÝ ALGORITMUS

Podívejme se nyní ještě na jeden algoritmus pro efektivnější výpočet rezultantu, tentokrát však již i s konstrukcí redukované matice a jeho vysvětlením, jelikož je oproti Bézoutovo matici snáze pochopitelný a názornější na ukázku. Princip algoritmu jsem získal z [8]

Algoritmus jsem si pro účel ukázky v této práci zprovoznil v programu *Maple*. Samotný kód v programu pak obecně vypadá následovně:

$res \coloneqq resultant(a, b, x)$;

[a, b jsou polynomy použité algoritmy:

$rem(b, a, x)$ – zbytek po dělení polynomů b polynomem a,

$degree(a) -$ stupeň polynomu a,

$lcoeff(a) -$ vedoucí koeficient polynomu a.]

$n \coloneqq degree(a)$;

$m \coloneqq degree(b)$;

$if\ n > m\ then\, res \coloneqq (-1)^{nm}\, resultant(a, b, x)$;

$else\ lc \coloneqq lcoeff(a)$;

$if\ n = 0\ then\, res \coloneqq lc^m$;

$else\ r \coloneqq rem(b, a, x)$;

$if\ r = 0\ then\, res \coloneqq 0$;

$else\ p = degree(r)$;

$res \coloneqq lc^{m-p}\, resultant(a, r, x)$;

fi

fi

fi.

Algoritmus funguje tak, že postupně nahrazuje v Sylvesterově matici řádky z koeficientů polynomu b řádky z koeficientů zbytku $rem(b, a, x)$, které jsou dány lineární kombinací řádků původní matice.

Po takovémto nahrazení nám vznikne matice, která má v prvních $m-p$ sloupcích pod diagonálou nuly a na diagonále lc. Blok této matice skládající se z posledních $n-p$ řádků a posledních $n-p$ sloupců je potom Sylvesterovou maticí polynomů a a r. V případě splnění podmínek v algoritmu, tj. algoritmus se „prokouše“ všemi větvemi cyklu a zastaví se až u posledního příkazu $res := lc^{m-p}\, resultant(a, r, x)$, nikoliv někde v průběhu větvených cyklů *if*, můžeme místo standardního resultantu využít vzorec

$$lc^{m-p}\, resultant(a, r, x).$$ [8]

Příklad 2.5.2.8: Pomocí výše vyloženého algoritmu spočítejte rezultant dvou polynomů. Abychom mohli algoritmy následně porovnat, opět využijeme zadání **příkladu 2.3.6.**

Řešení: Nejprve si tento příklad vypočítejme pomocí počítače, abychom viděli, že výše uvedený vzorec skutečně funguje.

Kód v programu *Maple* by mohl vypadat takto:

$> a := x^3 + 2x^2 - 2x - 4;$

$$a := x^3 + 2x^2 - 2x - 4$$

$> b := x^4 + x^2 - 6;$

$$b := x^4 + x^2 - 6$$

$> res := resultant(a, b, x);$

$$res := 0$$

$> n := degree(a);$

$$n := 3$$

$> m := degree(b);$

$$m := 4$$

$> \boldsymbol{if}\ n > m\ \boldsymbol{then}\ res := (-1)^{nm}\ resultant(a, b, x);$

$\boldsymbol{else}\ lc := lcoeff(a);$

$\boldsymbol{if}\ n = 0\ \boldsymbol{then}\ res := lc^{m};$

$\boldsymbol{else}\ r := rem(b, a, x);$

$\boldsymbol{if}\ r = 0\ \boldsymbol{then}\ res := 0;$

$\boldsymbol{else}\ p = degree(r);$

$res := lc^{m-p}\ resultant(a, r, x);$

$\boldsymbol{fi}$

$\boldsymbol{fi}$

$\boldsymbol{fi}$

$$lc := 1$$

$> rezultant\big(a(x), r(x)\big) := lc\hat{}(m-p)\ resultant(a, r, x);$

$$rezultant\big(a(x), r(x)\big) := 0$$

Vidíme tedy, že i při výpočtu tímto algoritmem se nám výsledek opět shoduje s tím, který nám vyšel z determinantu standardní Sylvesterovy matice. Tento algoritmus jsem vybral především proto, že ačkoliv existují i efektivnější algoritmy pro zjednodušení výpočtu rezultantu, je tento oproti nim trochu jednodušší na pochopení a zajisté by se dal univerzálně využít i při řešení složitějších soustav polynomiálních rovnic bez použití počítače, tedy „ručně“. Algoritmus je však psaný spíše jako ukázka a důkaz toho, že prezentovaný vzorec funguje, a proto nevypisuje všechny kroky, které ve skutečnosti provádí. Mohli bychom si ho samozřejmě upravit tak, aby všechny proměnné a funkce vypisoval, to by nám ovšem při pokusu o jeho „ruční“ aplikaci příliš nepomohlo. Co však udělat můžeme, je využít algoritmus jako návod a pomocí něho si redukovaný tvar Sylvesterovy matice sami sestrojit. Tím navíc názorně ukážeme, jak daný algoritmus přesně funguje, takže jeho princip pochopí i někdo, kdo se počítačovým programům, a programování obecně, nevěnuje.

Je zřejmé, že n neboli stupeň polynomu a bude 3 a obdobně m bude 4. Nyní již můžeme přejít k celému hlavnímu cyklu a postupně si projít jeho podmínky.

První podmínku ($\boldsymbol{if}\ n > m$) můžeme rovnou přeskočit, protože zjevně neplatí. Tím pádem se tedy do proměnné lc uloží hodnota koeficientu u vedoucího prvku polynomu a, což je v našem případě jedna. Další podmínka nastane tehdy, pokud je n nula, což opět není náš případ. V důsledku toho se nám následně do proměnné r uloží zbytek po dělení polynomu b polynomem a [($rem(b, a, x)$]. To si můžeme snadno sami vypočítat a vyšlo by nám $r = 7x^2 - 14$. Poslední podmínka ($\boldsymbol{if}\ r = 0$) také evidentně neplatí, a tak by cyklus vykonal vše co je zadáno pod ní (za $\boldsymbol{else}$). To by znamenalo, že do proměnné p dostaneme stupeň polynomu r čili dva. Jako poslední krok by nám již stačilo dosadit do výsledného prezentovaného vzorce. Pokusme se nyní o to. Pro připomenutí vzorec je ve tvaru

$$lc^{m-p}\ resultant(a, r, x).$$

Pokud dosadíme za lc, m a p, vyjde nám jedna na druhou neboli jedna. Touto částí vzorce se tedy nemusíme dále zabývat, jelikož nám výsledný rezultant neovlivní. Nyní nám tedy stačí jen spočítat rezultant polynomů a a r, kde $a = x^3 + 2x^2 - 2x - 4$ a $r = 7x^2 - 14$. Než začneme konstruovat Sylvesterovu matici, můžeme ještě předtím znovu využít znalosti vlastností determinantů. A to tak, že polynom r upravíme na tvar $r = 7(x^2 - 2)$. Vzniklou sedmičku před závorkou pak následně můžeme vytknout před celý determinant a získáme tím přívětivější čísla pro výpočet samotného determinantu. Po provedení této úpravy tedy dostaneme rezultant ve tvaru

$$res\big(a(x), r(x)\big) = 7\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Provedeme rozvoj podle prvního sloupce, jelikož se v něm nachází výhradně nuly a jedničky, což se nám přesně hodí. Následně budeme celý proces rozvoje opakovat pro vhodné řádky nebo sloupce, až se dostaneme k jednotlivým determinantům řádu 3×3, které již umíme obecně spočítat pomocí Sarrusova pravidla. Nesmíme však u všech subdeterminantů zapomenout na sedmičku, kterou máme vytknutou před celým determinantem.

$$7\begin{vmatrix}1 & 2 & -2 & -4\\0 & -2 & 0 & 0\\1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & 0 & -2\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}2 & -2 & -4 & 0\\1 & 2 & -2 & -4\\1 & 0 & -2 & 0\\0 & 1 & 0 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=-14\begin{vmatrix}1 & -2 & -4\\1 & -2 & 0\\0 & 0 & -2\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}-2 & -4 & 0\\2 & -2 & -4\\1 & 0 & -2\end{vmatrix}-14\begin{vmatrix}2 & -2 & 0\\1 & 2 & -4\\0 & 1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=0+7(-8)-14(-4)=-56+56=0$$

Jak můžeme vidět, výsledek nám opět souhlasí s tím, který jsme získali předešlými metodami výpočtu.

Pokud bychom měli prezentované algoritmy porovnat, musíme při tom zvážit více faktorů. Co můžeme vidět na první pohled je fakt, že pomocí Bézoutova determinantu jsme získali redukovanou matici typu 4×4 (oproti původní 7×7), zatímco druhým algoritmem jsme dostali matici typu 5×5. Avšak pokud se bavíme o efektivitu obou algoritmů, měli bychom brát v potaz i to, že konstrukce Bézoutovy matice je o dost komplikovanější než provedení postupu konstrukce redukované matice z algoritmu druhého. Každá má tedy svá pro a proti, a je tedy na každém, který ze dvou algoritmu se mu líbí více a který si zvolí. Jedno však mají oba algoritmy společné, oba nám výpočet rezultantu podstatně zjednodušili a vskutku se prokázali jako efektivní.

Poznámka: Abychom ještě více demonstrovali účinnost algoritmu, tak využitím druhého prezentovaného algoritmu jsme nakonec museli počítat pouze tři determinanty řádu 3×3, což nám nečinilo žádný problém. Pokud bychom však žádný algoritmus nevyužili, a navíc ani chytře nevyužili vlastností determinantu, museli bychom vypočítat determinant Sylvesterovy matice typu 7×7 a dostali bychom takovýchto determinantů řádu 3×3 třicet, což je desetkrát tolik, a to již vskutku není zanedbatelný rozdíl.

Někdo by mohl namítat, že v dnešní době, kdy už za nás většinu matematických problémů dokáže velmi rychle vyřešit počítač, není třeba tyto postupy ani algoritmy znát, protože stačí zadat počítači jeden příkaz a ihned dostaneme požadovaný výsledek. Já jsem však toho názoru, že není nikdy na škodu vědět, jak bychom postupovali bez počítače nebo jakými kroky vlastě počítač k požadovanému výsledku dojde.

3 ŘEŠENÍ SOUSTAV POLYNOMIÁLNÍCH ROVNIC S VYUŽITÍM REZULTANTU

V této kapitole si ukážeme na příkladech hlavní funkci rezultantu, kterou je řešení soustav polynomiálních rovnic. Nemusíme se však omezovat pouze na standardní soustavy, které jsme řešili v první kapitole, neboť spojením vyložené teorie můžeme například díky rezultantu najít společný kořen dvou polynomů na základě nějakého parametru nebo přímo řešit soustavy s parametrem.

3.1 SOUSTAVY S PARAMETREM

Prvním typem soustav, které můžeme s pomocí rezultantu řešit, jsou soustavy polynomiálních rovnic s parametrem. Zde můžeme rozlišovat dva případy. Prvním z nich je nalezení hodnoty parametru, pro který mají polynomy společný kořen. Druhým pak vyřešení klasické soustavy polynomiálních rovnic obohacené o parametr.

Příklad 3.1.1: Pro které hodnoty parametru p mají polynomy $f(x) = x^2 + px + 2$ a $g(x) = x^3 - px + 2$ společný kořen? [8]

Poznámka: Tento úvodní příklad se pokusíme celý vyřešit bez použití počítače, abychom názorně viděli celý postup řešení a dokázali mu dobře porozumět.

Řešení: Jako první krok sestrojíme Sylvesterovu matici těchto dvou polynomů s tím, že budeme chtít eliminovat proměnnou x.

$$Syl(f,g) = \begin{pmatrix} 1 & p & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p & 2 \\ 1 & 0 & -p & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -p & 2 \end{pmatrix}$$

Spočtením determinantu této matice následně získáme již samotný rezulant. Ještě předtím si matici ještě trochu upravíme, abychom měli s determinantem co nejméně práce, a to tak, že první řádek vynásobíme číslem minus jedna a přičteme ho k řádku čtvrtému. Rezultant tedy bude ve tvaru

$$res(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & p & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p & 2 \\ 0 & -p & -2-p & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -p & 2 \end{vmatrix}.$$

Použijeme rozvoj podle prvního sloupce a standardními postupy nově vzniklý determinant následně dopočteme.

$$res(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & p & 2 & 0 \\ 0 & 1 & p & 2 \\ -p & -2-p & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -p & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & p & 2 \\ -p & -2-p & 2 \\ 1 & 0 & -p \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & p & 2 \\ 0 & 1 & p \\ -p & -2-p & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2p + p^2 + 2p + 4 + p - p^3) + 2(2 - p^3 + 2p + 2p + p^2) =$$
$$= -4p^3 + 4p^2 + 20p + 12 = 4(-p^3 + p^2 + 5p + 3)$$

Dle **věty 2.3.4** (Sylvesterovo kritérium) nyní položíme rezultant rovný nule. Rovnice $-p^3 + + p^2 + 5p + 3 = 0$ má tři řešení, a to $p_1 = p_2 = -1$ a $p_3 = 3$. Díky Sylvesterovo kritériu již tedy víme, pro jaké hodnoty parametru p mají tyto dva polynomy společný kořen. Mohlo by nás však ještě přirozeně zajímat, o jaké konkrétní kořeny pro jednotlivé parametry se jedná. Tento problém již přenecháme počítači:

$\boldsymbol{Solve}[\{\boldsymbol{x^2 - x + 2 == 0, x^3 + x + 2 == 0}\}, \boldsymbol{x}]$

$\{\{x \to \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{7})\}, \{x \to \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{7})\}\}$

$\boldsymbol{Solve}[\{\boldsymbol{x^2 + 3x + 2 == 0, x^3 - 3x + 2 == 0}\}, \boldsymbol{x}]$

$\{\{x \to -2\}\}$

Příklad 3.1.2: Řešte soustavu

$$x + y + z = p,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = p^2,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = p^3,\ p - \text{parametr. [3]}$$

Řešení: Nebudeme se pokoušet řešit tuto soustavu pomocí elementárních metod řešení, ale pro řešení využijeme vyloženou teorii o rezultantech. Mohlo by nás na první pohled zarazit, že máme soustavu se třemi proměnnými, přičemž ale rezultant vždy eliminuje jen jednu z nich. S tím si však dokážeme poradit. Před začátkem výpočtů ještě pro přehlednost ve výpočtech označme jednotlivé polynomy: $f_1(x,y,z) = x + y + z - p$, $f_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - p^2$ a $f_3(x,y,z) = x^3 + + y^3 + z^3 - p^3$.

Začneme tím, že vypočteme rezultant prvních dvou polynomů a budeme chtít eliminovat například proměnnou z.

Poznámka: Pokud máme takto rovnice ve více proměnných, sestavujeme Sylvesterovu matici tak, že se zvolenou proměnnou (v našem případě z), kterou chceme eliminovat, pracujeme jako v přechozích příkladech a zbylé proměnné uvažujeme jako konstanty.

$$res(f1, f2, z) = \begin{vmatrix} 1 & x+y-p & 0 \\ 0 & 1 & x+y-p \\ 1 & 0 & x^2+y^2-p^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x+y-p \\ 0 & x^2+y^2-p^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x+y-p & 0 \\ 1 & x+y-p \end{vmatrix} = (x+y-p)^2 + x^2 + y^2 - p^2 =$$

$$= 2x^2 + 2y^2 + 2xy - 2px - 2py$$

Obdobně nyní spočteme rezultant polynomu $f1$ a $f3$:

$$res(f1, f3, z) = \begin{vmatrix} 1 & x+y-p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y-p & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x+y-p \\ 1 & 0 & 0 & x^3+y^3-p^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x+y-p & 0 \\ 0 & 1 & x+y-p \\ 0 & 0 & x^3+y^3-p^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x+y-p & 0 & 0 \\ 1 & x+y-p & 0 \\ 0 & 1 & x+y-p \end{vmatrix} =$$

Poznámka: Pokud ovládáme lineární algebru, můžeme si opět ušetřit čas a práci, jelikož jednou z vlastností determinantu je, že pokud máme nad nebo pod hlavní diagonálou samé nuly, celý determinant se rovná právě součinu prvků na hlavní diagonále.

$$= x^3 + y^3 - p^3 - (x+y-p)^3 =$$

$$= -3x^2y - 3xy^2 - 3p^2x - 3p^2y + 3px^2 + 6pxy + 3py^2$$

Jak jsme očekávali, jsou oba výrazy $res_z(f1, f2)$ a $res_z(f1, f3)$ polynomy již jen v neurčitých x a y. Dalším krokem nyní bude eliminace další proměnné, volme třeba y. Toho docílíme tak, že opět spočteme rezultant, tentokrát z našich dvou polynomů, které jsme získali eliminací proměnné z. Vzhledem k tomu, jak složitý polynom nám vyšel z $res(f1, f3)$, budeme dále pokračovat zcela jistě s pomocí počítače:

$\boldsymbol{res_y = Resultant[res(f1, f2), res(f1, f3), y]}$

$36p^2x^4 - 72px^5 + 36x^6$

Můžeme vidět, že nám skutečně vyšel polynom pouze v jedné proměnné x, čehož jsme chtěli docílit. Tento polynom nyní opět položíme roven nule a získáme x-ové souřadnice řešení:

$\boldsymbol{Solve}[\boldsymbol{res_y} == \mathbf{0}, \boldsymbol{x}]$

$\{\{x \to 0\},\ \{x \to 0\},\ \{x \to 0\},\ \{x \to p\},\ \{x \to p\}\}$

Program *Mathematica* nám ve velice krátké době kořeny nalezl, a to konkrétně trojnásobný kořen $x = 0$ a dvojnásobný kořen $x = p$.

Posledním krokem řešení bude „rekonstrukce“ y-ových a z-ových souřadnic. Máme tedy dva případy **A**, **B**, kde **A:** $x = p$ a **B:** $x = 0$.

A) $x = p$

Zde si musíme dát pozor na všechny tři rovnice soustavy. Pokud bychom si dosadili například pouze do první rovnice, dostali bychom: $p + y + z = p$. Z toho bychom mohli usuzovat, že řešením by mohlo být $y = -z$ nebo $z = -y$**.** To je však falešná stopa, protože tato podmínka neplatí pro všechny rovnice soustavy. Důvodem jsou „sudé“ mocniny ve druhé rovnici soustavy, díky kterým podmínka $y = -z$ nemůže nikdy nastat, jelikož druhá mocnina nám vždy „odstraní“ minus u jedné z proměnných y, z. Po této úvaze nám již zbývá jediná možnost, a to taková, že obě proměnné y, z budou nulové.

B) $x = 0$

Pokud vezmeme v potaz úvahy provedené v předchozím případě, nebude zde pro nás nalezení zbylých řešení již problém. Pokud je tedy x nulové, mohou evidentně existovat dvě řešení, a to $y = p\ \wedge z = 0$ nebo $y = 0\ \wedge z = p$.

Zjišťujeme tedy, že daná soustava rovnic může mít v závislosti na parametru p až tři řešení, kterými jsou: $P = \{[p, 0,0], [0, p, 0], [0,0, p]\}$.

Poznámka: Obdobně bychom řešili i soustavy tří rovnic o třech nelineárních neznámých bez parametru, jen s tím rozdílem, že bychom získali konkrétní řešení dané soustavy, nezávislé na parametru.

3.2 Soustavy o 2 nebo 3 neznámých

Druhým typem soustav polynomiálních rovnic, na které se podíváme, jsou soustavy o dvou nelineárních neznámých. Samozřejmě můžeme počítat i soustavy více rovnic o více neznámých, tento postup je však již naznačen v předchozí podkapitole. Ukážeme si jak řešení „ruční“, tak i řešení pomocí moderního počítačového programu, který nám umožní vytvořit i pěkné názorné obrázky.

Příklad 3.2.3: Pomocí rezultantu řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

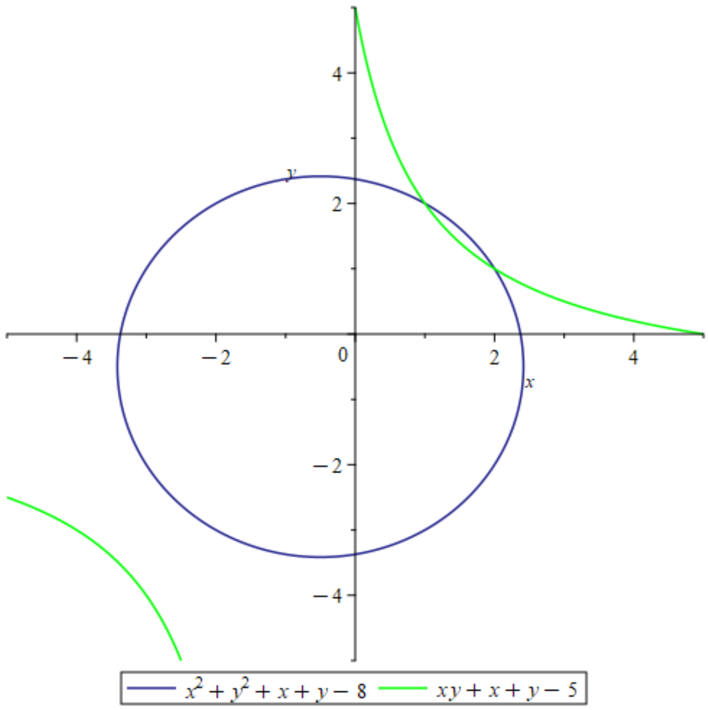
$$x^2 + y^2 + x + y = 8,$$

$$x + y + xy = 5.$$

Využijeme znovu zadání **příkladu 1.1.3**, ovšem tentokrát budeme soustavu řešit užitím rezultantu. Tento úvodní příklad se pro ukázku pokusíme vyřešit bez pomoci počítače, avšak program využijeme k názorné ilustraci příkladu, abychom si dokázali představit, co to vlastně počítáme. K tomu nám tentokrát pomůže program *Maple*:

$> plots[implicitplot]([f, g], x = -5..5, y = -5..5, color = [$navy", "green"],

$legend = [f, g]);$



Obrázek 1: ilustrace příkladu 3.2.3

Řešení: Jako první krok si sestrojíme Sylvesterovu matici těchto dvou polynomů, budeme eliminovat proměnnou x. Označme $f(x) = x^2 + y^2 + x + y - 8$, $g(x) = x + y + xy - 5$.

$$Syl(f, g, x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & y^2 + y - 8 \\ y + 1 & y - 5 & 0 \\ 0 & y + 1 & y - 5 \end{pmatrix}$$

Nyní spočteme její determinant a měli bychom obdržet polynom v již pouze jedné proměnné:

$$res(f, g) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & y^2 + y - 8 \\ y + 1 & y - 5 & 0 \\ 0 & y + 1 & y - 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y - 5 & 0 \\ y + 1 & y - 5 \end{vmatrix} - (y - 1) \begin{vmatrix} 1 & y^2 + y - 8 \\ y + 1 & y - 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (y - 5)^2 - (y + 1)(y - 5) + (y + 1)^2(y^2 + y - 8) =$$

$$= y^4 + 3y^3 - 5y^2 - 21y + 22$$

Můžeme si povšimnout, že nám vyšla totožná rovnice, jako když jsme tento příklad počítali metodou eliminace, tudíž rovnou můžeme psát řešení: $P = \{[2; 1], [1; 2]\}$, což si můžeme ověřit i na výše vykresleném obrázku.

Příklad 3.2.4: Pomocí rezultantu řešte soustavu

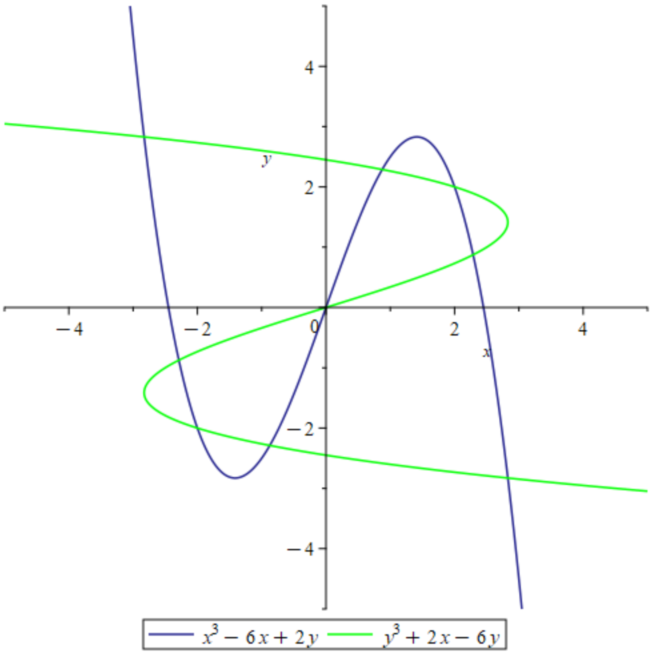
$$x^3 + 2y = 6x,$$

$$y^3 + 2x = 6y. [9]$$

Řešení: Pro ukázku si můžeme opět nechat programem *Maple* vykreslit graf:

$> plots[implicitplot]([x^3 + 2y - 6x, y^3 + 2x - 6y], x = -5..5, y = -5..5,$

$color = [\text{navy", "green"}], legend = [x^3 + 2y - 6x, y^3 + 2x - 6]);$



Obrázek 2: ilustrace příkladu 3.2.4

Jako první krok vytvoříme Sylvesterovu matici těchto dvou polynomů a budeme chtít eliminovat proměnnou x:

> $f := x^3 + 2y - 6x;$

$$f := x^3 + 2y - 6x$$

> $g := y^3 + 2x - 6y;$

$$g := y^3 + 2x - 6y$$

> $Syl := LinearAlgebra[SylvesterMatrix](f, g, y);$

$$Syl := \begin{bmatrix} 2 & x^3 - 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x^3 - 6x & 0 \\ 0 & 0 & 2 & x^3 - 6x \\ 1 & 0 & -6 & 2x \end{bmatrix}$$

Nyní spočteme její determinant, čímž získáme rezultant. V tomto případě bychom tedy měli dostat polynom jedné neznámé x. Rezultant položíme roven nule a spočítáme příslušné hodnoty x.

> $Res := LinearAlgebra[Determinant](f, g, y);$

$$Res := -x^9 + 18x^7 - 105x^5 + 240x^3 - 128x$$

> $factor(Res);$

$$-x(x-2)(x+2)(x^2-8)(x^4-6x^2+4)$$

> $Res\_koreny := solve(Res, \{x\});$

$$Res\_koreny := \{x=0\}, \{x=2\}, \{x=-2\}, \{x=2\sqrt{2}\}, \{x=-2\sqrt{2}\},$$

$$\left\{x=-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right\}, \left\{x=\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, \left\{x=-\sqrt{3+\sqrt{5}}\right\}, \left\{x=\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Jednotlivé hodnoty x budeme postupně dosazovat do původních rovnic soustavy. Tím dostaneme vždy dvě rovnice o jedné neznámé, které vyřešíme:

1) $x = 0$

> $koren1\_f := eval(f, Res\_koreny[1]); koren1\_g := eval(g, Res\_koreny[1]);$

$$koren1\_f := 2y$$

$$koren1\_g := y^3 - 6y$$

> $Reseni\_koren1 := solve(\{koren1\_f, koren1\_g\}, y);$

$$Reseni\_koren1 := \{y = 0\}$$

> $P1 := eval(eval[x, y], Reseni\_koren1), Res\_koreny[1]);$

$$P1 := [0,0]$$

2) $x = 2$

> $koren2\_f := eval(f, Res\_koreny[2]); koren2\_g := eval(g, Res\_koreny[2]);$

$$koren2\_f := 2y - 4$$

$$koren2\_g := y^3 - 6y + 4$$

> $Reseni\_koren2 := solve(\{koren2\_f, koren2\_g\}, y);$

$$Reseni\_koren2 := \{y = 2\}$$

> $P2 := eval(eval[x, y], Reseni\_koren2), Res\_koreny[2]);$

$$P2 := [2,2]$$

3) $x = -2$

> $koren3\_f := eval(f, Res\_koreny[3]);\ koren3\_g := eval(g, Res\_koreny[3]);$

$$koren3\_f := 2y + 4$$

$$koren3\_g := y^3 - 6y - 4$$

> $Reseni\_koren3 := solve(\{koren3\_f, koren3\_g\}, y);$

$$Reseni\_koren3 := \{y = -2\}$$

> $P3 := eval(eval[x, y], Reseni\_koren3), Res\_koreny[3]);$

$$P3 := [-2, -2]$$

4) $x = 2\sqrt{2}$

> $koren4\_f := eval(f, Res\_koreny[4]);\ koren4\_g := eval(g, Res\_koreny[4]);$

$$koren4\_f := 4\sqrt{2} + 2y$$

$$koren4\_g := y^3 + 4\sqrt{2} - 6y$$

> $Reseni\_koren4 := solve(\{koren4\_f, koren4\_g\}, y);$

$$Reseni\_koren4 := \{y = -2\sqrt{2}\}$$

> $P4 := eval(eval[x, y], Reseni\_koren4), Res\_koreny[4]);$

$$P4 := [2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}]$$

5) $x = -2\sqrt{2}$

> $koren5\_f := eval(f, Res\_koreny[5]);\ koren5\_g := eval(g, Res\_koreny[5]);$

$$koren5\_f := -4\sqrt{2} + 2y$$

$$koren5\_g := y^3 - 4\sqrt{2} - 6y$$

> $Reseni\_koren5 := solve(\{koren5\_f, koren5\_g\}, y);$

$$Reseni\_koren5 := \{y = 2\sqrt{2}\}$$

> $P5 := eval(eval[x, y], Reseni\_koren5), Res\_koreny[5]);$

$$P5 := [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$$

6) $x = -\sqrt{3-\sqrt{5}}$

> $koren6\_f := eval(f, Res\_koreny[6]); koren6\_g := eval(g, Res\_koreny[6]);$

$$koren6\_f := -\left(3-\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{2}} + 6\sqrt{3-\sqrt{5}} + 2y$$

$$koren6\_g := y^3 - 2\sqrt{3-\sqrt{5}} - 6y$$

> $Reseni\_koren6 := solve(\{koren6\_f, koren6\_g\}, y);$

$$Reseni\_koren6 := \{y = \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{2}}}{2} - 3\sqrt{3-\sqrt{5}}\}$$

> $P6 := eval(eval[x, y], Reseni\_koren6), Res\_koreny[6]);$

$$P6 := [-\sqrt{3-\sqrt{5}}, \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{2}}}{2} - 3\sqrt{3-\sqrt{5}}]$$

7) $x = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

> $koren7\_f := eval(f, Res\_koreny[7]); koren7\_g := eval(g, Res\_koreny[7]);$

$$koren7\_f := \left(\frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3\sqrt{10} + 3\sqrt{2} + 2y$$

$$koren7\_g := y^3 + \sqrt{10} - \sqrt{2} - 6y$$

> $Reseni\_koren7 := solve(\{koren7\_f, koren7\_g\}, y);$

$$Reseni\_koren7 := \{y = \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

> $P7 := eval(eval[x, y], Reseni\_koren7), Res\_koreny[7]);$

$$P7 := [\frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

8) $x = -\sqrt{3+\sqrt{5}}$

> $koren8\_f := eval(f, Res\_koreny[8]);\ koren8\_g := eval(g, Res\_koreny[8]);$

$$koren8\_f := -(3+\sqrt{5})^{\frac{3}{2}} + 6\sqrt{3+\sqrt{5}} + 2y$$

$$koren8\_g := y^3 - 2\sqrt{3+\sqrt{5}} - 6y$$

> $Reseni\_koren8 := solve(\{koren8\_f, koren8\_g\}, y);$

$$Reseni\_koren8 := \{y = \frac{(3+\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}}{2} - 3\sqrt{3+\sqrt{5}}\}$$

> $P8 := eval(eval[x, y], Reseni\_koren8), Res\_koreny[8]);$

$$P8 := [-\sqrt{3+\sqrt{5}}, \frac{(3+\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}}{2} - 3\sqrt{3+\sqrt{5}}]$$

9) $x = \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$

> $koren9\_f := eval(f, Res\_koreny[9]);\ koren9\_g := eval(g, Res\_koreny[9]);$

$$koren9\_f := \left(\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3\sqrt{10} - 3\sqrt{2} + 2y$$

$$koren9\_g := y^3 + \sqrt{10} + \sqrt{2} - 6y$$

> $Reseni\_koren9 := solve(\{koren9\_f, koren9\_g\}, y);$

$$Reseni\_koren9 := \{y = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\}$$

> $P9 := eval(eval[x, y], Reseni\_koren9), Res\_koreny[9]);$

$$P9 := [\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$> P := \{P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, P9\};$

$$P := \{[0,0], [2,2], [-2,-2], \left[2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right], \left[-2\sqrt{2}, +2\sqrt{2}\right],$$

$$\left[-\sqrt{3-\sqrt{5}}, \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{2}}}{2} - 3\sqrt{3-\sqrt{5}}\right], \left[\frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right],$$

$$\left[-\sqrt{3+\sqrt{5}}, \frac{\left(3+\sqrt{5}\right)^{\frac{3}{2}}}{2} - 3\sqrt{3+\sqrt{5}}\right], \left[\frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right]\}$$

Daná soustava má tedy celkem devět řešení. Její řešení bylo, i s využitím počítače, vcelku zdlouhavé a nabízí se tedy myšlenka, proč jsme příklad řešili takto složitě. Odpověď je však vcelku prostá. Zkusme tedy nyní tuto soustavu vyřešit pouze pomocí příkazu *solve:*

$> solve(\{f, g\}, \{x, y\});$

$\{x = 0, y = 0\}, \{x = 2, y = 2\}, \{x = -2, y = -2\}, \{x = -2\ RootOf(Z^2 - 2),$

$y = 2\ RootOf(\_Z^2 - 2)\},$

$\{\ x = -\dfrac{RootOf(Z^4 - 6Z^2 + 4)^3}{2} + 3\ RootOf((Z^4 - 6Z^2 + 4)^3,$

$y = RootOf(Z^4 - 6Z^2 + 4)\}$

Vidíme, že jsme narazili na problém. Nikoliv takový, že by soustava nešla vyřešit, ale jedná se o nedokonalost programu, respektive jeho algoritmu. Když jsme však případ řešili postupnými kroky sami, ke správnému výsledku jsme bez problému došli. Nyní bych odkázal na odstavec, který jsem napsal v závěru druhé kapitoly: „Někdo by mohl namítat, že v dnešní době, kdy už za nás většinu matematických problémů dokáže velmi rychle vyřešit počítač, není třeba tyto postupy ani algoritmy znát, protože stačí zadat počítači jeden příkaz a ihned dostaneme požadovaný výsledek. Já jsem však toho názoru, že není nikdy na škodu vědět, jak bychom postupovali bez počítače nebo jakými kroky vlastě počítač k požadovanému výsledku dojde.“ Tento příklad je krásnou ukázkou toho, proč jsem tuto myšlenku zmínil.

Poznámka: Pro srovnání jsem stejný problém zadal programu *Mathematica,* který ho na rozdíl od *Maplu* bez problémů vyřešil. Dá se tedy usuzovat, že oba programy používají pro výpočet odlišné algoritmy.

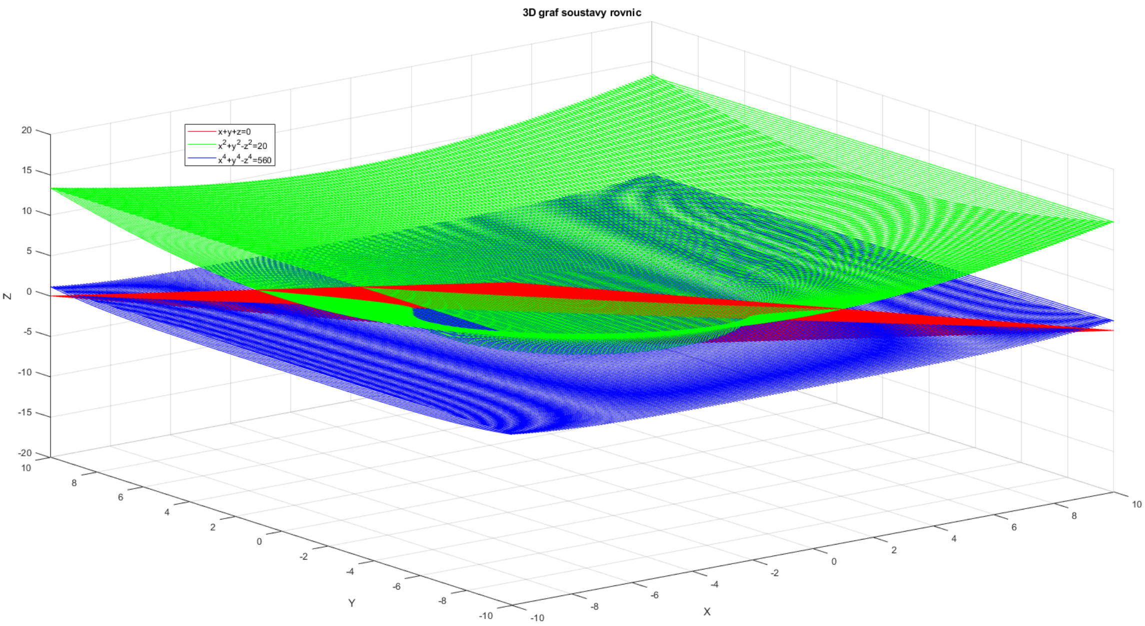
Příklad 3.2.5: Řešte soustavu

$$x + y + z = 0,$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = 20,$$

$$x^4 + y^4 - z^4 = 560. \text{[3]}$$

Řešení: Tuto soustavu již nebudeme celou postupně a zdlouhavě řešit jako v přechozím příkladě. Návod, jak na to, je naznačen na konci **kapitoly 3.1**. Tento příklad jsem vybral především proto, že si na něm můžeme dobře ilustrovat, jak by takováto soustava mohla vypadat z pohledu geometrie:



Obrázek 3: 3D ilustrace příkladu 3.2.5

Samotné řešení pak již přenecháme počítači:

$> solve(\{x + y + z, x^2 + y^2 - z^2 - 20, x^4 + y^4 - z^4 - 560\}, \{x, y, z\});$

$\{x = -5, y = 2, z = 3\}, \{x = 5, y = -2, z = -3\}, \{x = -2, y = 5, z = -3\},$

$\{x = 2, y = -5, z = 3\}$

ZÁVĚR

V práci jsme se postupně seznámili s několika metodami řešení soustav polynomiálních rovnic. Začali jsme řešením pouze s využitím elementárních metod řešení známých již ze střední školy, doplněných o tvůrčí zapojení našeho myšlení. Zjistili jsme, že *metoda eliminace* ani *metoda čtverců* nemají univerzální využití a u obou dost závisí na konkrétních zadaných číselných hodnotách. Tyto metody tedy nejdou obecně využít na příklady, které k tomu nejsou „předurčeny“ tím, kdo nám je zadá. Jako nejlepší nám vyšla *metoda faktorizace,* která jde, hlavně pro cyklické soustavy, využít téměř univerzálně. Navíc jsme z ní vždy dostali maximálně kvadratické rovnice, oproti polynomům velmi vysokých stupňů, které bychom získali například využitím klasické *metody eliminace.*

Ve druhé části jsme se seznámili s pojmem rezultant a jeho využitím například k rozhodnutí, zda mají dva polynomy společný kořen. Větší část kapitoly byla pak věnována metodám pro jeho efektivnější výpočet. Představili jsme si Bézoutův determinant, který jsme počítali s využitím počítačového programu, a také další algoritmus, který jsme pro změnu aplikovali pro „ruční“ využití, což se u počítání determinantů bez využití počítače velmi hodí. Dospěli jsme k závěru, že oba algoritmy nám výrazně zmenší řád determinantu, který musíme vypočítat. Jejich efektivita byla demonstrována na konkrétním příkladu.

V poslední části jsme si ukázali několik příkladů na výpočet soustav algebraických rovnic, ať už s parametrem nebo bez něj. Narazili jsme také na některé limity počítačového programu, ani on není všemohoucí a vyplatí se nám znát, jak bychom sami při řešení takovýchto příkladů postupovali.

Samozřejmě by se dalo v této bakalářské práci dále pokračovat, a to popsáním dalšího, modernějšího, způsobu řešení polynomiálních rovnic, kterým jsou Gröbnerovy báze.

RESUMÉ

In this bachelor's thesis, we gradually became familiar with several methods of solving systems of polynomial equations. We started with a solution using only the elementary solution methods known from high school, supplemented by the creative involvement of our thinking. We have found that neither the method of elimination nor the method of squares has universal use, and both are quite dependent on the specific numerical values entered. Therefore, these methods cannot generally be used for examples that are not "predestined" for this by the person who assigns them to us. We found the factorization method to be the best, which can be used almost universally, especially for cyclic systems. In addition, we always obtained at most quadratic equations from it, as opposed to polynomials of very high degrees, which we would have obtained, for example, using the classical method of elimination.

In the second part, we got acquainted with the term resultant and its use, for example, to decide whether two polynomials have a common root. A larger part of the chapter was then devoted to methods for its more efficient calculation. We imagined the Bézout determinant, which we calculated using a computer program, and also another algorithm that we applied for "hand" use instead, which is very useful for calculating determinants without using a computer. We came to the conclusion that both algorithms will significantly reduce the order of the determinant that we have to calculate. Their effectiveness was demonstrated on a concrete example.

In the last part, we showed several examples for calculating systems of algebraic equations, either with or without a parameter. We also encountered some limits of the computer program, even it is not omnipotent and it pays to know how we would proceed when solving such examples ourselves.

Of course, this bachelor's thesis could be continued by describing another, more modern, way of solving polynomial equations, which are Gröbner bases.

SEZNAM LITERATURY

[1] ERNESTOVÁ, Martina. *Soustavy algebraických rovnic* [online]. In: . s. 193-207 [cit. 2024-03-16]. Dostupné z: https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/150549/UcitelMat_010-2002-4_1.pdf

[2] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky*. Dotisk 10. vydání. Praha: Prometheus, 2019. ISBN 978-80-7196-458-2.

[3] HORA, Jaroslav. *O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole*. II díl. Plzeň, 2005. ISBN 80-7020-038-3.

[4] autor. *Metody řešení soustav algebraických rovnic* [online]. In: . s. 3-28 [cit. 2024-03-16]. Dostupné z: https://kag.upol.cz/ucitprir/texty/MetResSousAR_JS.pdf

[5] MUSIL, Vít. *Cyklické soustavy rovnic* [online]. In: . s. 25-29 [cit. 2024-03-16]. Dostupné z: https://gimli.ms.mff.cuni.cz/~vejtek/hsmath/mks/2013_Mentaurov/CyklickeSoustavyRovnicVM.pdf

[6] Feuer, L.S. Sylvester in Virginia. *The Mathematical Intelligencer* **9**, 13–19 (1987). https://doi.org/10.1007/BF03025892

[7] O'CONNOR, J.J., ROBERTSON, E.F. 2005. MacTutor. [Online] 2005. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sylvester/

[8] LISKA, Richard. *Resultant* [online]. [cit. 2024-03-19]. Dostupné z: http://www-troja.fjfi.cvut.cz/~liska/poalg/node30.html

[9] Hašek,R.: Řešení soustav nelineárních rovnic [online] dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/Algebra5/Soustavy_nelinearnich_rovnic_Resultant.pdf

[10] Hora,J.: Rezulant polynomů, Plzeň [online] dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/Algebra5/Soustavy_nelinearnich_rovnic_Resultant.pdf

[11] TESKOVÁ, Libuše. *Lineární algebra*. 2010. ISBN 978-80-7043-966-1.

SEZNAM OBRÁZKŮ