ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY
ODDĚLENÍ MATEMATIKY

Některé metody řešení rovnic a jejich soustav

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Viktor Karpovich

Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: Mgr. Jan Frank, Ph.D.

Plzeň, 2024

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni dne …………………

....
vlastnoruční podpis

Především bych chtěl poděkovat svému vedoucímu práce, panu Mgr. Janu Frankovi, Ph.D., za jeho velkou pomoc při psaní této práce. Také bych chtěl poděkovat celému kolektivu katedry matematiky ZČU, především sekretariátu, za pomoc s organizačními záležitostmi.

1 OBSAH

1 ÚVOD

V oblasti matematického vzdělávání zvládnutí řešení algebraických rovnic a soustav je základem, který studentům nabízí vstupní bránu k širšímu pochopení řešení kvantitativních problémů. Tato práce se snaží prozkoumat a objasnit různé metody používané při řešení rovnic, od základních až po pokročilé, se zaměřením na jejich pedagogické důsledky.

Význam pro pedagogiku: Matematické vzdělávání hraje klíčovou roli při utváření analytického myšlení, dovednosti řešit problémy a logicky uvažovat. Rovnice a soustavy, které jsou v matematickém diskurzu přítomné všude, poskytují studentům perspektivu, díky níž mohou tyto základní kognitivní schopnosti zdokonalovat. Komplexním zkoumáním metod řešení rovnic získávají pedagogové poznatky pro tvorbu účinných výukových strategií, které odpovídají různým stylům učení a schopnostem.

Rozsah a klasifikace: Tato práce se zabývá rozmanitým prostředím algebraických rovnic, zahrnujícím lineární, kvadratické a kubické formy. Soustavy rovnic, křižovatka, kde se prolínají matematické pojmy, jsou zkoumány od základních konfigurací až po složitější případy. Vymezení metod je nejen zkoumáním matematických principů, ale i plánem pro pedagogy, kteří mohou své studenty provést odstupňovanou výukou.

Cíl a přístup: Hlavním cílem této práce je vybavit pedagogy jemným porozuměním různým metodám řešení rovnic a umožnit jim tak přizpůsobit metodiku výuky potřebám jejich žáků. Počínaje základními pojmy připomínajícími základy vzdělání, přes pokročilé metody a konče náběhem k výpočetním nástrojům, tato práce uplatňuje systematický přístup.

Praktické využití a výhledy do budoucna: Při procházení krajiny řešení algebraických rovnic a soustav se budeme zabývat také reálnými aplikacemi a možným začleněním do vzdělávacích technologií. Bude rozebráno využití výpočetních nástrojů, jako jsou Wolfram Mathematica a GeoGebra, které pedagogům nabídnou pohled na symbiózu tradičních matematických principů a moderních technologií.

Tato práce v podstatě není pouhým matematickým výkladem, ale pedagogickým počinem, který pedagogům poskytuje sadu nástrojů, jak vštípit svým studentům matematické dovednosti. Prostřednictvím důkladného zkoumání rozmanitých metod řešení se vydáváme na cestu, která nejen objasňuje matematické principy, ale také přispívá ke zdokonalení pedagogických postupů.

2 TYPY ROVNIC A ZÁKLADNÍ METODY JEJICH ŘEŠENÍ.

2.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Rovnice.

Rovnice v matematice představuje rovnost dvou výrazů, které obsahují jednu nebo více proměnných. Kořen rovnice představuje hodnotu proměnné (nebo sada hodnot proměnných), při níž je rovnost splněna.

Proměnná v matematice a programování slouží jako symbolická reprezentace objektů, což umožňuje plně abstraktní manipulaci s nimi. Proměnná reprezentuje libovolný myslitelný objekt z dané třídy nebo množiny. Při řešení rovnic obvykle pracujeme v množině reálných čísel.

Formální definice rovnice:

$$f(x) = g(x)$$

Kde *f(x)* a *g(x)* jsou funkce, definované na nějaké množině. Jedná se o funkci jedné neznámé x, funkce *f(x)* se nazývá levá strana rovnice a funkce *g(x)* se nazývá pravá strana.

Rovnice o *n* neznámých má **tvar**

$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

Kořeny rovnice

Každé číslo x_0 z množiny, v níž je rovnice definována, které splňuje podmínku $f(x_0) = g(x_0)$ nazývá se kořen rovnice.

Dále se v této práci budeme držet těchto definic.

Věta: Počet kořenů algebraické rovnice je roven jejímu stupni, jestliže každý kořen počítáme tolikrát, kolik činí jeho násobnost (ŠIŠLER 1996, s.14).

2.2 TYPY ROVNIC

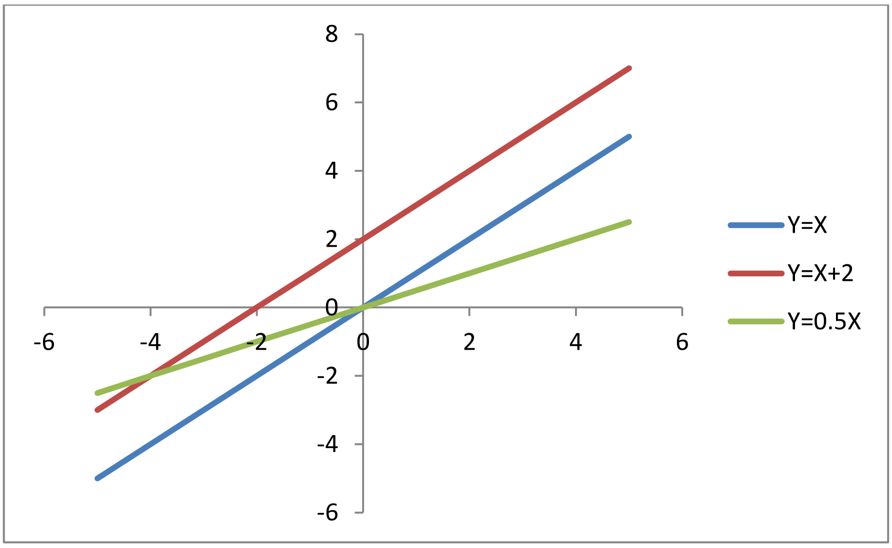
Lineární rovnice

Lineární rovnice jsou všechny rovnice, které lze elementárními úpravami převést do tvaru:

$$ax + b = 0$$

Kde x je proměnná, a - koeficient, b je volný člen. $a, b \in R, a \neq 0$

Geometrický výklad: Grafem lineární rovnice v rovině souřadnic je přímka. Sklon a průsečík s osou f(x) sdělují informace o vztahu mezi koeficienty.



Obr. 1 Lineární rovnice

Jak vidíme. První přímka (modrá) prochází souřadnicí [0;0] pod úhlem 45 stupňů. Druhá přímka (červená) prochází také pod úhlem 45 stupňů, ale je posunuta o 2 jednotky nahoru, to proto, že koeficient b ovlivňuje místo průsečíku grafu s osou y (neboli f(x)). Třetí přímka (zelená) prochází souřadnicí (0;0), ale pod úhlem 30 stupňů s osou x, protože tento úhel nastavuje tzv. úhlový koeficient.

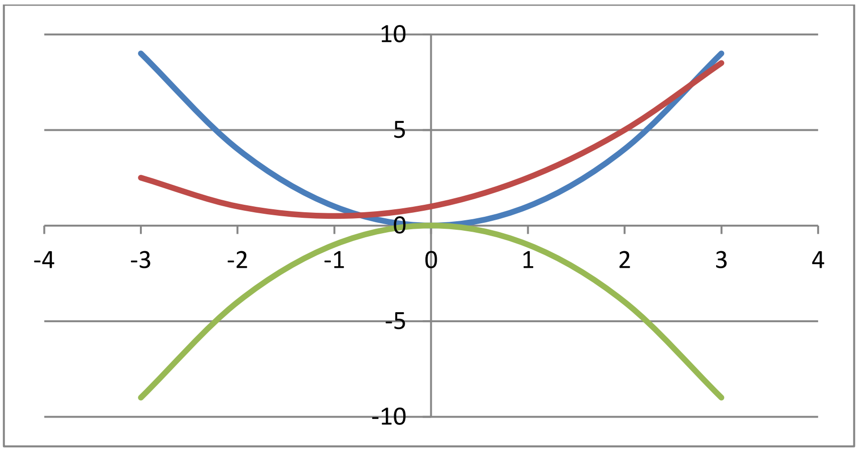
Kvadratická rovnice

Kvadratická rovnice je rovnice, kterou lze upravit na tvar $ax^2 + bx + c = 0$

Kde *a,b,c* jsou koeficienty z množiny *R*, $a \neq 0$.

Později mohou se vyskytovat výrazy také termín **redukovaná kvadratická rovnice**. Je to rovnice, v níž je koeficient *a*= 1. **Neúplná kvadratická rovnice** je rovnice, ve které je koeficient *b* =0 nebo *c*=0

Geometrický výklad:



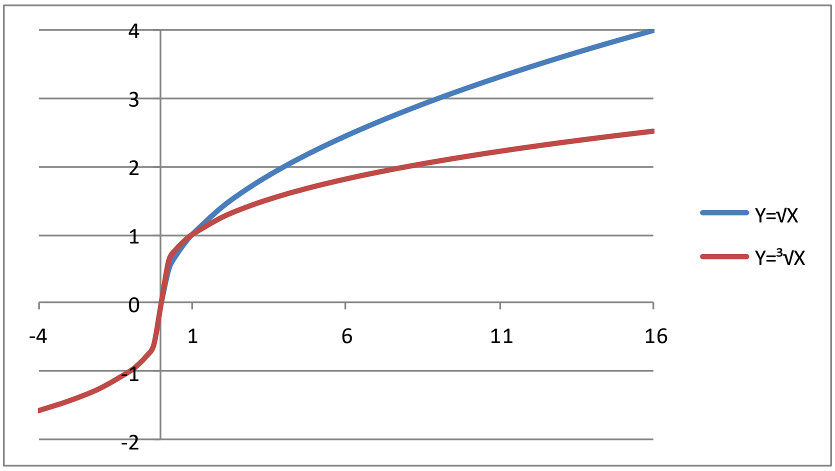
Obr. 2 kvadratická rovnice

Graf kvadratické rovnice se nazývá parabola. První křivka (modrá) s koeficienty $a = 1, b = 0, c = 0$. Druhá křivka (zelená) s koeficienty $a = -1, b = 0, c = 0$. Třetí křivka (červená) s koeficienty $a = 0{,}5, b = 1, c = 1$. Jak vidíme, znaménko před koeficientem a odpovídá za směr paraboly (nahoru a dolů) a a hodnota jeho absolutní hodnoty odpovídá za rozšíření nebo zúžení paraboly. Koeficient b je zodpovědný za souřadnice počátečního bodu, koeficient c za souřadnice bodu průsečíku s osou y. To vše budeme potřebovat v další práci.

Iracionální rovnice

Dalším typem rovnic jsou iracionální rovnice. Jednoduše řečeno, pokud rovnice obsahuje odmocninu, nazývá se iracionální rovnice.

Graf iracionální rovnice vypadá jako parabola, v níž jsou osy x a y převrácené s jednou nebo dvěma větvemi. Graf je znázorněn na obr. 3.



Obr. 3 iracionální rovnice

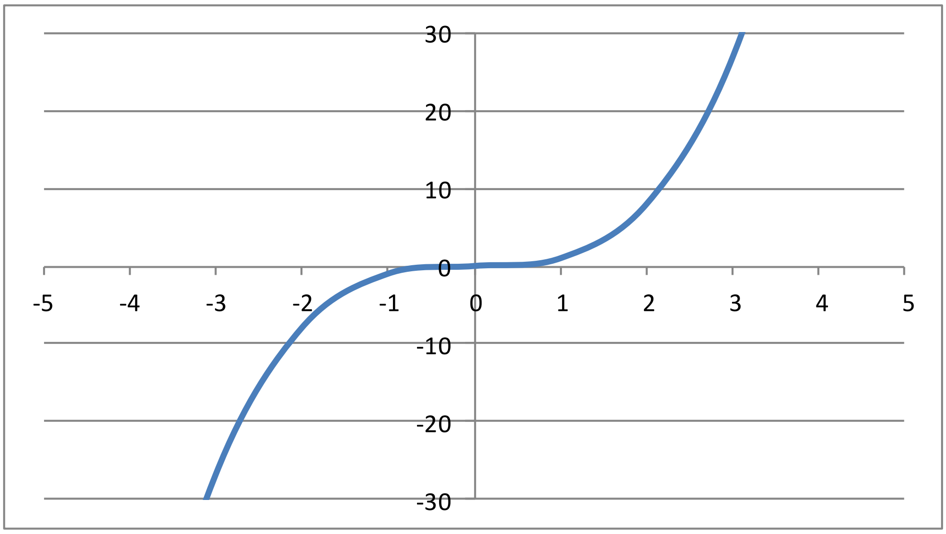
Definiční obor se mění v závislosti na stupni odmocniny. Pokud je odmocnina sudého stupně, může proměnná pod odmocninou nabývat pouze hodnot větších než nula.

Existuje několik typů těchto rovnic.

1. Rovnice má pouze jednu odmocninu.
2. V rovnici jsou dvě odmocniny.
3. Rovnice má více odmocnin i čísel samotných.

Rovnice vyššího stupně

Všechny rovnice, v nichž má proměnná mocninu větší než dvě, lze nazvat rovnicemi vyššího stupně. Rovnice stupně 3 se nazývají kubické a jejich graf se nazývá kubická parabola, jejíž levá větev se liší směrem od kvadratické paraboly (obr. 4).



Obr. 4 rovnice stupně 3

Rovnice má tvar: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

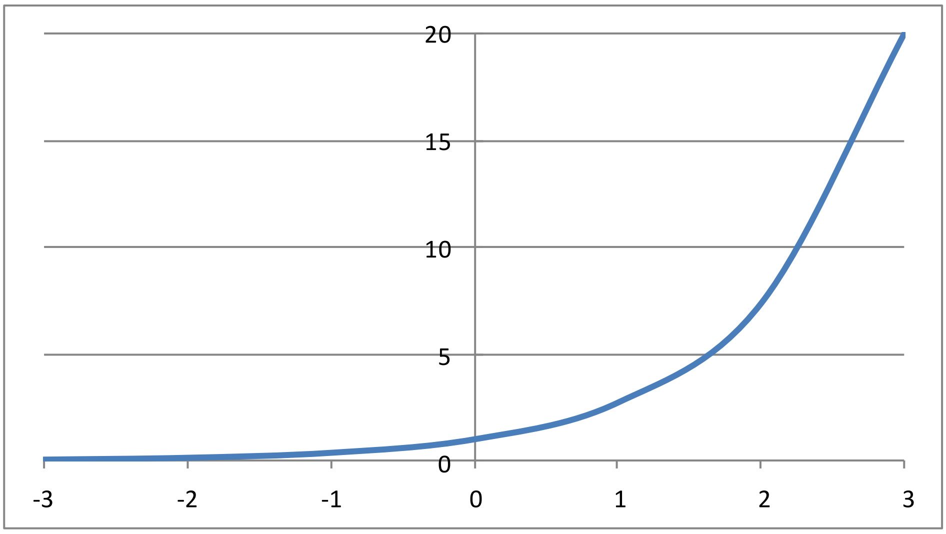
Kde $a \in R;\ n \in N; n > 2$

Exponenciální rovnice.

Rovnice, ve které je naše proměnná ve stupni nějakého čísla, se nazývá exponenciální rovnice:

$$a^{f(x)} = 0$$

Graf pro $a = e$ je uveden na obr.5.

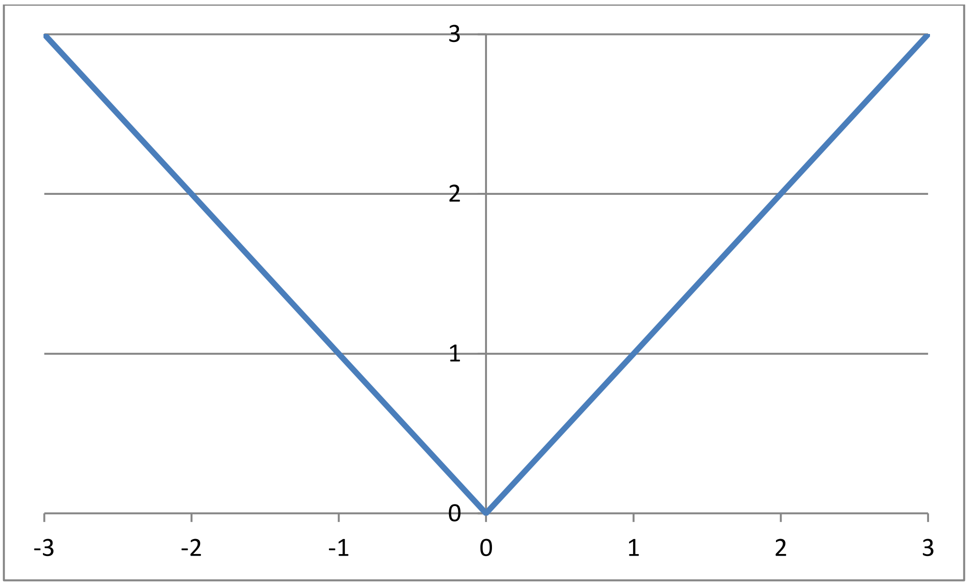


Obr. 5 exponenciální rovnice

Rovnice s absolutními hodnotami

Z názvu je patrné, že se jedná o typ rovnice, ve které je neznámá v absolutní hodnotě.

Graf funkce $y = |x|$je znázorněn na obr. 6.



Obr. 6 absolutní hodnota

Logaritmické rovnice

Logaritmické rovnice jsou rovnice, které mají neznámou v argumentu logaritmické funkce. Existují dva typy logaritmických rovnic.

1) Rovnice s jedním logaritmem typu

$\log_a x = b,\ \ \text{kde } a > 0; a \neq 1\ x > 0$

Z definice logaritmu pak vyplývá vzorec pro nalezení řešení $x = a^b$

Také se mohou vyskytnout rovnice, kde se neznámá nachází v základu logaritmu (tj. na místě konstanty a). V kapitole o řešení se budeme zabývat oběma variantami.

2) Rovnice s >1 logaritmem typu

$\log_a f_1(x) + \log_a f_2(x) + \cdots + \log_a f_n(x) = \log_a g_1(x) + \log_a g_2(x) + \cdots + \log_a g_m(x)$

$\text{kde } a > 0; a \neq 1, f_i(x) \text{ pro } i = 1,2,\dots,n;\ \ g_i(x) \text{ pro } i = 1,2,\dots,m\ \ > 0$

Soustavy rovnic

Soustava rovnic dvou nebo více proměnných jsou rovnice s tzv. "společnými kořeny", tj. kořeny jedné rovnice budou řešením jiných rovnic.

Formální zápis soustavy m rovnic pro n proměnných je následující:

$$\begin{cases} F_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ F_2 = (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \qquad \dots \\ F_m = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Kulatá závorka znamená, že řešení $(x_1, x_2, \dots, x_M)$ musí řešit každou rovnici.

Soustava m lineárních rovnic pro n neznámých vypadá takto:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Graf soustavy rovnic vypadá jako několik funkcí na stejné souřadnicové soustavě s průsečíky v bodech, jejichž souřadnice jsou kořeny této soustavy.

2.3 ZÁKLADNÍ METODY ŘEŠENÍ ROVNIC

2.3.1 METODY ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH ROVNIC.

Víme, že lineární rovnice má tvar: $ax + b = 0$

Řešení lineární rovnice bude mít tvar: $x = -\frac{b}{a}$

K získání základního tvaru lineární rovnice můžeme použít ekvivalentní úpravy:

- K oběma částem rovnice přičteme (nebo odečteme) stejný výraz.
- Přičteme násobku neznámé k oběma stranám rovnice
- Vynásobíme (nebo vydělíme) obě strany rovnice stejným výrazem (nerovným nule).

Při řešení lineárních rovnic se můžeme setkat se třemi výsledky:

1) **Kořen rovnice má pouze jedno řešení**

Příklad 1.3.1:

$\frac{3x}{2} + 5 = \frac{5x}{2} - 1 / \cdot 2$ (Celou rovnici vynásobte dvěma)

$3x + 10 = 5x - 2$ (Teď přesuňme všechny proměnné na jednu stranu a volné členy na druhou stranu)

$-2x = -2 - 10 / : -2x$ (Celou rovnici vydělte číslem -2)

$$x = \frac{-12}{-2} = 6$$

2) **Rovnice má nekonečně mnoho řešení. To se může stát pro: $\boldsymbol{a, b = 0}$.**

Příklad 1.3.2:

$12x - 8x + 4 = 4x + 6 - 2$

$(12 - 8 - 4)x = 6 - 2 - 4$

$0x = 0$

Protože koeficient proměnné x je nula a na pravé straně máme také nulu, nezáleží na tom, jakou hodnotu naše proměnná nabývá. Proto dostáváme, že x může nabývat libovolné hodnoty. Matematicky můžeme zapsat, že $x = (-\infty; +\infty)$ tj. x může nabývat libovolné hodnoty od mínus nekonečna do plus nekonečna.

3) **Kořen rovnice nenabývá žádné reálné hodnoty.**

Jednoduše řečeno, rovnice nemá žádné řešení. To se může stát pro: $a = 0; b \neq 0$

Příklad 1.3.3:

$16x + 3 = 4 \cdot (4x + 10)$

$16x + 3 = 16x + 40$

$(16 - 16)x = 40 - 3$

$0x = 37$

Jak vidíme, koeficient před naší proměnnou je roven nule. Takže nezávisle na tom, jakou hodnotu nabývá, dostaneme v každém případě nulu. Číslo 37 v tomto případě nelze získat. Proměnná x tedy nemůže nabývat žádné hodnoty.

2.3.2 METODY ŘEŠENÍ KVADRATICKÝCH ROVNIC

1) **Pomocí diskriminantu rovnice**

Diskriminant kvadratické rovnice se vypočítá podle vzorce $D = b^2 - 4ac$. Pak lze kořeny rovnice vypočítat podle vzorce $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Z tohoto vzorce vyplývá, že kvadratická rovnice bude mít dva reálné kořeny, pokud je hodnota diskriminantu větší než 0, jeden kořen, pokud je roven nule, a žádný reálný kořen, pokud je diskriminant menší než nula.

Příklad 1.3.4:

$-x^2 - 2x + 3 = 0$

$D = 4 - 4 \cdot (-1) \cdot 3 = 4 + 12 = 16$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{-2} = -3 \text{ a } 1$$

2) **Vietovy vzorce.**

Pro řešení kvadratických rovnic existují Vietovy vzorce:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

Příklad 1.3.5:

$$-x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{-1} = -3 \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{-2}{-1} = -2 \end{cases}$$

Obyčejnou dosazovací metodou dojdeme k tomu, že kořeny rovnice se rovnají: -3 a 1. Bohužel, protože tato metoda je založena na substituci nebo odhadu kořenů, je vhodná pouze pro případy, kdy je rovnice dostatečně jednoduchá nebo kdy $\frac{c}{a}$ a $-\frac{b}{a}$ dávají celá čísla.

3) **Je-li součet koeficientů roven nule**

Je-li součet všech koeficientů kvadratické rovnice roven nule $(a + b + c = 0)$, bude kořen takové rovnice roven jedné$(x_1 = 1)$ a druhý se bude rovnat poměru volného členu ke koeficientu a $(x_2 = \frac{c}{a})$ (Карпенко 2017)

Příklad 1.3.6:

$-x^2 - 2x + 3 = 0$ $\quad a = -1; b = -2; c = 3$

$a + b + c = -1 - 2 + 3 = 0$ (To znamená, že jeden z kořenů je roven 1)

$$x_2 = \frac{3}{-1} = -3$$

4) **Řešení redukovaných kvadratických rovnic**

V tabulce jsou zapsány metody řešení redukovaných kvadratických rovnic (je-li jeden z koeficientů b,c nulový).

$b, c = 0$	$b \neq 0, c = 0$	$b = 0, c \neq 0$
$ax^2 = 0$ $x = 0$	$ax^2 + bx = 0$ $x(ax + b)$ $x_1 = 0$ $x_2 = \frac{-b}{a}$	$ax^2 + c = 0$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

Tab. 1 řešení redukovaných kvadratických rovnic

Příklad 1.3.7:

a) $4x^2 = 0 \to x = 0$

b)$18x^2 - 36x = 0 \to x(18x - 36) = 0 \to x_1 = 0\ x_2 = -\frac{-36}{18} = 2$

c)$2{,}5x^2 - 10 = 0 \to x^2 = \frac{10}{2{,}5} = 4 \to x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

5) **Rozklad kvadratické rovnice**

Pomocí vzorce pro kvadratický součet (nebo rozdíl) ($(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$) můžeme kvadratickou rovnici výrazně zjednodušit. Pomocí vzorce pro kvadratický součet (nebo rozdíl) můžeme kvadratickou rovnici výrazně zjednodušit. Tato metoda spočívá v tom, že z kvadratické rovnice s vhodnými koeficienty můžeme získat součet (rozdíl) na druhou. Můžeme se také uchýlit k "triku sečti a odečti", kdy k získání požadovaného volného členu můžeme tento člen sečíst a následně odstranit ze závorek. Podívejme se na to na příkladu.

Příklad 1.3.8:

$625x^2 + 300x + 11 = 0$ (V této rovnici bude velmi vhodné použít naši metodu, protože$625 = 25^2; 300 = 25 \cdot 2 \cdot 6$. Bohužel nám však chybí potřebný volný člen 6^2. K tomu do naší rovnice přičteme číslo 36 a od rovnice ho odečteme, takže odpověď se nezmění, protože výraz zůstane beze změny)

$(25x)^2 + 2 \cdot 25 \cdot 6 + 6^2 - 6^2 + 11 = 0$ (Zde jsme sečetli a odečetli 36, abychom dostali b=300.)

$((25x)^2 + 2 \cdot 25 \cdot 6 + 6^2) = 36 - 11$(Jak vidíme, výraz v závorce nám udává kvadrát součtu.)

$(25x + 6)^2 = 25$

$25x + 6 = \pm 5$

$x_1 = -\frac{1}{25};\ x_2 = -\frac{11}{25}$

2.3.3 ŘEŠENÍ KUBICKÉ ROVNICE

($\boldsymbol{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0}$)

1) **Řešení neúplné kubické rovnice**

$d = 0$	$b, c, d = 0$
Odstraníme x $x(ax^2 + bx + c) = 0$ Jeden z kořenů = 0, zbylé dva jsou řešením kvadratické rovnice.	$x^3 = a$ $x = \sqrt[3]{a}$

Tab. 2 řešení neúplné kubické rovnice

2) **Metoda rozkladu násobků**

Někdy lze levou stranu kubické rovnice rozložit na násobky. Toho dosáhneme, pokud mezi členy rovnice najdeme společný násobek. Podle toho bude mít rovnice podobu násobení tohoto společného násobitele součtem zbývajících členů. Ukažme si tento postup na příkladu.

Příklad 1.3.9.

$5x^3 - x^2 - 20x + 4 = 0$ (Zkusme levou stranu rozložit na součin dvou součtů)

$(5x^3 - 20x) - (x^2 - 4) = 0$

$5x(x^2 - 4) - (x^2 - 4) = 0$ (V tomto případě je společným násobkem $x^2 - 4$. Zbývající členy budou 5*x* a -1)

$(5x - 1) \cdot (x^2 - 4) = 0$

Z tohoto zápisu rovnice vidíme, že jeden z kořenů je řešením obyčejné lineární rovnice ($x_1 = \frac{1}{5}$) a ostatní jsou řešením zkrácené kvadratické rovnice ($x_{2,3} = \pm 2$).

3) **Metoda řešení kubické rovnice s hádáním kořenů**

K této metodě je možné přistoupit, pokud se kubickou rovnici nepodařilo vyřešit předchozí metodou.

Rozdělme si tuto metodu na body.

Je-li součet všech koeficientů = 0, pak je kořen rovnice roven 1.

Jestliže $b + d = a + c$, pak kořen rovnice je -1.

Jsou-li všechny koeficienty celá čísla - rovnice má racionální kořen $\frac{p}{q}$, pro který platí, že *d* je dělitelné číslem *p*, *a* je dělitelné číslem *q.* Podívejme se na tento bod na příkladu.

Příklad 1.3.10:

$2x^3 + 5x^2 + 3x - 3 = 0 \quad a = 2; b = 5; c = 3; d = -3$

Vidíme, že všechny koeficienty jsou celá čísla.

Najděme dělitele koeficientu *d*: $\pm 1;\ \pm 3$ Toto bude naše číslo *p*

Teď najděme dělitele koeficientu *a*: $\pm 1;\ \pm 2$ Toto bude naše číslo *q*

Získejme možné hodnoty kořenů dělením každého z dělitelů d každým z dělitelů a (číslo $\frac{p}{q}$):

$\pm 1;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm 3;\ \pm\frac{3}{2}$

Dosazením každé z nich dostaneme, Že číslo $\frac{1}{2}$ je kořenem rovnice. Pomocí odhadnutého kořene můžeme polynom rozložit na násobky ($P(x)_n = (x - x_0) \cdot Q(x)$, kde *P(x)* je původní polynom, x_0 je nalezený kořen, a Q(x) je výsledek dělení $\frac{P(x)}{x-x_0}$).

$$\frac{P(x)}{x - x_0} = \frac{(2x^3 + 5x^2 + 3x - 3)}{x - \frac{1}{2}} = 2x^2 + 6x + 6$$

$$P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 6x + 6) = 0$$

Původní rovnici jsme značně zjednodušili, protože teď máme jednu lineární rovnici a jednu kvadratickou rovnici, jejichž metody řešení jsme popsali dříve. Kořeny této rovnice jsou: $-\frac{1}{2}$; Protože diskriminant kvadratické rovnice je menší než nula, nemá žádné kořeny, ale mohou nastat i opačné případy, pak bude mít původní rovnice dva nebo tři kořeny.

Je vhodné poznamenat, že každou rovnici s racionálními koeficienty lze převést na rovnici s celočíselnými koeficienty vynásobením společným jmenovatelem. Proto je tato metoda použitelná pro jakoukoli kubickou rovnici. Tato metoda však bohužel vyžaduje mnoho času a úsilí, takže byste se k ní měli uchýlit, pokud koeficienty jsou čísla s malým počtem dělitelů nebo pokud jiné metody nefungují.

2.3.4 ŘEŠENÍ ROVNIC VYŠŠÍHO STUPNĚ

Nejprve je třeba uvést, že některé z dříve uvedených metod, jako je rozklad na násobky, používání dělitele a odhad kořenů, lze použít k řešení rovnic vyšších stupňů.

Jednou z nejpoužívanějších metod je záměna proměnných nebo tzv. substituční metoda. Pokud se v rovnici opakuje výraz, který obsahuje určitý stupeň proměnné, můžeme ji nahradit novou proměnnou. Což by teoreticky mělo vést k rovnici, která je mnohem jednodušší než ta původní. Po vyřešení této rovnice a zjištění hodnoty nově zavedené proměnné se můžeme vrátit k hledaným proměnným a zjistit jejich číselné hodnoty. Podívejme se na metodu řešení na příkladu.

Příklad 1.3.11:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Zde můžeme zavést substituci $x^2 = t$. Z toho vyplývá, že $x^4 = (x^2)^2 = t^2$. Pak bude původní rovnice vypadat takto:

$at^2 + bt + c = 0$. A tak se rovnice vyššího stupně změnila na kvadratickou rovnici, jejíž řešení můžeme najít například pomocí determinantu.

$D = b^2 - 4ac \to t_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Z naší substituce získáme $x^2 = t \to x = \sqrt{t} \to x_{1,2} = \sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$; $x_{2,3} = \sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

V závislosti na koeficientech může mít tato rovnice buď žádné kořeny, nebo jeden až čtyři kořeny.

2.3.5 METODY ŘEŠENÍ EXPONENCIÁLNÍCH ROVNIC

1) **Rovnice se stejným základem**

Tato metoda vychází ze skutečnosti, že pokud jsou exponenty se stejnými základy rovny, pak jsou rovny i jejich stupně.

Vzorec bude vypadat takto: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \to f(x) = g(x)$

V této metodě je cílem uvést výrazy na obou stranách do společného základu pomocí základních vlastností mocnin:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

$a^n : a^m = a^{n-m}$

$(a^n)^m = a^{nm}$

$(ab)^n = a^n b^n$

Příklad 1.3.12:

$4^{3x} \cdot 2{,}5^{3x} = 100^{x-3}$(Použijme jednu z vlastností mocnin (poslední uvedenou) a získejme $4^{3x} \cdot 2{,}5^{3x} = (4 \cdot 2{,}5)^{3x} = 10^{3x}$).

$10^{3x} = (10^2)^{x-3}$

$10^{3x} = 10^{2x-6}$ (Protože máme stejné základy, musí být stejné i mocniny)

$3x = 2x - 6$

$x = -6$

2) **Logaritmování rovnice.**

Pro řešení rovnice, ve které je naše proměnná v některé mocnině čísla, můžeme použít funkci logaritmu. Použití logaritmů vychází z vlastnosti, že mocninu argumentu můžeme přenést jako násobek logaritmu. O vlastnostech této funkce si více napíšeme v části věnované řešení logaritmických rovnic. Postup této metody je následující:

1. Máme původní rovnici $a^{f(x)} = b^{g(x)}$.
2. Zlogaritmujme původní rovnici $\log a^{f(x)} = \log b^{g(x)}$.
3. Z logaritmu vyjmeme stupeň $f(x) \cdot \log a = g(x) \cdot \log b$.
4. Upravíme rovnici $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\log a}{\log b}$.

Příklad 1.3.13:

$3^x \cdot 6^{2x} = 4^{x-3}$

$\log(3^x \cdot 6^{2x}) = \log(4^{x-3})$

$\log 3^x + \log 6^{2x} = \log 4^{x-3}$

$x \log 3 + 2x\log 6 = (x-3)\log 4$

$x(\log 3 + 2\ \log 6 - \log 4) = -3 \log 4$

$$x = \frac{-3 \log 4}{\log 3 + 2\ \log 6 - \log 4}$$

3) **Substituce**

Exponent s proměnnou v mocnině můžeme nahradit obyčejným číslem. Ukažme si tuto metodu na příkladu.

Příklad 1.3.14. $8^{2x} + 8^x - 6 = 0$

Zavedeme substituci. $8^x = t$

$t^2 + t - 6 = 0.$

Kořeny této rovnice budou čísla -3 a 2. -3 nevyhovuje naší substituci, protože kladné číslo v libovolné mocnině nemůže dát záporné číslo. Nyní dosaďme kořen do naší substituce $2 = 8^x$

$2 = 2^{3x} \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

2.3.6 METODY ŘEŠENÍ IRACIONÁLNÍCH ROVNIC

K řešení iracionálních rovnic se používá metoda umocňování. Protože se nejedná o ekvivalentní úpravu, musíme po zjištění kořene výsledek zkontrolovat. Pro zkoušku použijeme takový postup, že získanou hodnotu kořene dosadíme do původní rovnice a zjistíme, zda je správná

Příklad 1.3.15.

$\sqrt{x-5}=4$ Z rovnice vyplývá podmínka $x \geq 5$. V tomto případě, abychom se zbavili odmocniny, musíme celou rovnici převést na druhou mocninu.

$\left(\sqrt{x-5}\right)^2 = 4^2$

$x-5=16$

$x=16+5=21$

Uděláme zkoušku: $\sqrt{21-5}=\sqrt{16}=4$

Stejný postup bude platit pro rovnici se dvěma kořeny, ale bez samostatných čísel.

Příklad 1.3.16. Rovnice s více kořeny a čísly.

$2+\sqrt{x-7}=\sqrt{x+9}\quad x \geq 7; x \geq -9$

$\left(2+\sqrt{x-7}\right)^2 = \sqrt{x+9}^2$(V tomto případě použijeme k řešení rovnice vzorec pro $(a+b)^2$)

$4+2\cdot 2\cdot\sqrt{x-7}+x-7=x+9$ (Opět jsme dostali iracionální rovnici, ale tentokrát pouze s jednou odmocninou)

$4\sqrt{x-7}=12$ /:4

$\sqrt{x-7}=3$ /(^2)

$x-7=9$

$x=9+7=16$

Zkouška: $2+\sqrt{16-7}=\sqrt{16+9}$

$2+\sqrt{9}=\sqrt{25}$

$2+3=5$

$5=5$

2.3.7 METODY ŘEŠENÍ ROVNIC S ABSOLUTNÍ HODNOTOU

Pro jednoduché rovnice tohoto typu (s jednou absolutní hodnotou) lze použít jednoduchou metodu. V tomto případě budeme muset rozdělit dva různé případy této rovnice. První z nich je ten, ve kterém je absolutní hodnota výrazu větší než nula, takže odstranění znaménka absolutní hodnoty výraz nezmění. Druhý případ je ten, kdy výraz v závorce absolutní hodnoty bude menší než nula. V tomto případě se znaménka tohoto výrazu po odstranění závorek změní.

Příklad 1.3.17.

$|4x + 1| = 23$

Na základě této rovnice víme, že výraz uvnitř absolutní hodnoty může být $4x + 1$ nebo $-(4x + 1)$. Proto vezmeme v úvahu obě varianty.

1) $4x + 1 = 23$

$4x = 22$

$x = \frac{22}{4} = 5{,}5$

2)$4x + 1 = -23$

$4x = -23 - 1 = -24$

$x = -\frac{24}{4} = -6$

Získali jsme dvě hodnoty $x_1 = 5{,}5; x_2 = -6$. Obě splňují podmínku rovnice.

Pokud se v rovnici vyskytuje více než jedna absolutní hodnota, my nevíme, s jakým znaménkem tyto hodnoty rozložit. Proto se řešení takových rovnic provádí na intervalech. Nejprve najdeme nulové body, což jsou hodnoty, v nichž je každá absolutní hodnota nulová. Poté odstraníme znaménka absolutní hodnoty a každému výrazu přiřadíme znaménko, které vyhovuje zvolenému intervalu. Ukažme si to na příkladu.

Příklad 1.3.18.

$|5 - x| = |x + 4|$ V tomto případě budou nulové kořeny: $x = 5; x = -4$

Vytvořme tabulku pro tři intervaly hodnot x.

		5-x	x+4
I_1	$(-\infty: -4\rangle$	$+$	$-$
I_2	$(-4:5\rangle$	$+$	$+$
I_2	$(5: +\infty)$	$-$	$+$

Tab. 3 příklad 1.3.18.

Nyní odstraníme závorky s absolutní hodnotou tak, že je vynásobíme znaménkem, které jim vyhovuje.

I_1) $5 - x = -(x + 4)$
$5 - x = -x - 4$
$5 = -4$ Jak vidíme, tato rovnice nemá řešení, tím méně řešení, které by odpovídalo našemu intervalu.

I_2) $5 - x = x + 4$
$2x = 1$
$x = 0{,}5$ Tento kořen vyhovuje intervalu, ve kterém musí ležet.

I_3) $-(5 - x) = x + 4$
$-5 + x = x + 4$
$-5 = 4$ Opět tu máme rovnici, která nemá řešení.

Výsledkem je, že jsme našli pouze jeden kořen této rovnice: $x = \frac{1}{2}$

Můžeme se také setkat s rovnicemi, kde se uvnitř absolutní hodnoty bude nacházet další absolutní hodnota. V takovém případě budeme muset uvažovat 4 varianty řešení této rovnice.

Příklad 1.3.19.

$\left||x - 1| - 7\right| = 10$ (Nejprve otevřeme závorky vnější absolutní hodnoty a zjistíme, jaké varianty dostaneme).

$\left[\begin{matrix} |x-1|-7=10 \\ |x-1|-7=-10 \end{matrix}\right. \rightarrow \left[\begin{matrix} |x-1|=17 \\ |x-1|=-3 \end{matrix}\right.$ (Vyřešme každou z rovnic zvlášť, každá z nich nám dá další dvě možnosti).

1)$|x - 1| = 17$
$\left[\begin{matrix} x - 1 = 17 \\ x - 1 = -17 \end{matrix}\right. \rightarrow x_1 = 18, x_2 = -16$
2)$|x - 1| = -3$ Tato rovnice nebude mít kořeny, protože absolutní hodnota nemůže nikdy dávat záporné hodnoty, a proto je řešením naší původní rovnice: $x_1 = 18, x_2 = -16$

2.3.8 METODY ŘEŠENÍ LOGARITMICKÝCH ROVNIC

- Metody řešení logaritmických rovnic 1. typu

Nejjednodušší metodou řešení logaritmických rovnic je nalezení řešení z definice logaritmu. Vzorec pro tuto metodu je uveden v definici rovnice v předchozí kapitole.

Příklady 1.3.20-1.3.22.:

1)$\log_3(2x-3)=4$ Ze vzorce $x=a^b$ vyplývá $2x-3=3^4$Z definičního oboru $x>1{,}5$

$x=\dfrac{3^4+3}{2}=42$

Někdy argument logaritmu obsahuje nelineární funkci. Řešení této rovnice proto může vést k řešení jiných typů rovnic, o kterých jsme hovořili dříve.

2)$\log_3(x^2-x-3)=3$

$x^2-x-3=3^3=9$ Jak vidíme, řešení logaritmické rovnice se změnilo na řešení kvadratické rovnice $x^2-x-12=0$. Vyřešíme ji pomocí Vietových vzorců.

$\begin{cases} x_1\cdot x_2=-12 \\ x_1+x_2=1 \end{cases} \rightarrow x_1=6\; x_2=-5; K=\{6;-5\}$

3) Řešení rovnic, pokud je proměnná v základu logaritmu. K tomu můžeme použít vzorec:

$\log_x a=b \leftrightarrow x=\sqrt[b]{a}$

$\log_x 64=3 \leftrightarrow x=\sqrt[3]{64}=4$

- Metody řešení logaritmických rovnic 2. Typu

Řešení logaritmických rovnic druhého typu je založeno na jejich převedení na první typ pomocí vlastností logaritmu. Ukážeme si tyto vlastnosti.

$a^{\log_a b}=b$

$\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$

$\log_a b-\log_a c=\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)$

$\log_a b^n=n\cdot\log_a b$

$\log_{a^2} b=\dfrac{1}{n}\log_a b$

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

$\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$

$\log_{a^n} b^n=\log_a b$

A také z definice logaritmu $\log_a b=\log_a c \leftrightarrow b=c$

Prozkoumejme použití některých z těchto vlastností na příkladech.

Příklady 1.3.23-1.3.27.:

1)$\log x^4+\log\frac{1}{x}=2 \quad x>0$

$\log\left(x^4\cdot\dfrac{1}{x}\right)=\log 10^2$

$\log x^3=\log 100 \leftrightarrow x^3=100 \leftrightarrow x=\sqrt[3]{100}$

2)$\log_4(2x-7) - \log_4(x+3) = 1 \quad x > 3{,}5$

$\log_4 \dfrac{2x-7}{x+3} = \log_4 4$

$\dfrac{2x-7}{x+3} = 4 \leftrightarrow 2x - 7 = 4x + 12$

$2x = -19 \leftrightarrow x = -9{,}5$ Výsledná odpověď nevyhovuje definičnímu oboru, takže tato rovnice nemá řešení.

3)$\log^2 x + \log x^2 - 8 = 0 \quad x > 0$

$\log^2 x + 2\log x - 8 = 0$ V tomto případě vidíme, že se jedná o kvadratickou rovnici, kde místo proměnné je logaritmická funkce. Proto můžeme zavést substituci $\log x = t$. Pak

$t^2 + 2t - 8 = 0$

Vyřešme tuto rovnici pomocí Vietových vzorců

$\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = -8 \\ t_1 + t_2 = -2 \end{cases} \quad t_1 = -4;\ t_2 = 2$ Vraťme se k naší substituci a najděme x

$\log x = -4 \leftrightarrow x = 10^{-4} = 0{,}0001$

$\log x = 2 \leftrightarrow x = 10^2 = 100 \quad K = \{100; 0{,}0001\}$

4)$\log_4(\log_3(\log_2 x)) = 0$ Protože hledání definičního oboru v této rovnici je náročné na čas a práci, provedeme zkoušku až po nalezení řešení.

$\log_4(\log_3(\log_2 x)) = \log_4 1 \leftrightarrow \log_3(\log_2 x) = 1 \leftrightarrow \log_3(\log_2 x) = \log_3 3 \leftrightarrow \log_2 x = 3$

$x = 2^3 = 8$ Proveďme zkoušku

$\log_4(\log_3(\log_2 8)) = \log_4(\log_3 3) = \log_4(1) = 0$ Nalezené řešení vyhovuje původní rovnici

$K = \{0\}$

5) Logaritmická rovnice s různými základy

$\log_2 x = \log_4 9 \quad x > 0$

$\log_4 9 = \log_{2^2} 3^2 = \dfrac{2}{2}\log_2 3 = \log_2 3$

$\log_2 x = \log_2 3 \leftrightarrow x = 3$

2.3.9 ZMÍNKA O GRAFICKÉ METODĚ

Pomocí grafické metody lze řešit většinu typů rovnic, o kterých jsme psali dříve. Tuto metodu však probereme až v kapitole věnované použití různých výpočetních nástrojů.

3 SOUSTAVY ROVNIC

3.1 ŘEŠENÍ SOUSTAV ROVNIC SE DVĚMA NEZNÁMÝMI

Řešit soustavu rovnic znamená najít nejen řešení, ale i soustavy řešení, tj. takové hodnoty všech proměnných, které při současném dosazení do soustavy převedou každou její rovnici na identitu.

3.1.1 GRAFICKÁ METODA.

Soustavu rovnic lze řešit i grafickou metodou, ale jak bylo napsáno dříve, tuto metodu si vysvětlíme později.

3.1.2 DOSAZOVACÍ METODA

Jedná se o jednu z nejjednodušších metod, ale u složitějších systémů může být velmi časově náročná.

1) v jedné z rovnic soustavy (té jednodušší) vyjádříme jednu proměnnou prostřednictvím ostatních;

2) výsledný výraz se dosadí do ostatních rovnic na místo této rovnice proměnné;

3) po vyřešení této rovnice a zjištění hodnoty (nebo hodnot) jedné z proměnných - postupně se vrátíme k dříve vyjádřeným proměnným a nalezené hodnoty dosadíme.

Příklad 2.1.1.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 6x - 5y = 15 \end{cases}$$

$\begin{cases} y = 8 - x \\ 6x - 5(8 - x) = 15 \end{cases}$ (Vyjádření proměnné y prostřednictvím proměnné x. Výsledný výraz dosadíme do druhé rovnice.)

$\begin{cases} y = 8 - x \\ 6x - 40 + 5x = 15 \end{cases}$ (Rovnici vyřešíme pro proměnnou x)

$11x = 55$ /:11

$x = 5$

$y = 8 - 5$ (Získanou hodnotu dosadíme do výrazu pro y)

$y = 3$

$K = \{[5; 3]\}$

3.1.3 SČÍTACÍ METODA

Jednou z vlastností soustav rovnic je, že můžeme kteroukoli z rovnic vynásobit libovolným číslem a také můžeme rovnice navzájem sčítat a odčítat, což nemá vliv na odpověď. Proto můžeme tuto vlastnost využít ke zjednodušení soustav rovnic. Například odstranit jednu z proměnných.

Algoritmus této metody je následující:

1)Obě strany jedné z rovnic vynásobíme takovým číslem, aby po sečtení dvou (nebo více) rovnic jedna z proměnných zmizela.

2)Vyřešme výslednou lineární rovnici s jednou neznámou pomocí již známých metod.

3)Dosadíme získanou hodnotu jedné z neznámých do jedné z rovnic ze zadání.

Příklad 2.1.2.

$\begin{cases} 4x - 7y = 18 \\ 2x - 3y = 8 \mid\cdot (-2) \end{cases}$ (Jak vidíme, druhou rovnici můžeme vynásobit číslem −2. To povede k tomu, že proměnná *x* v první a druhé rovnici bude mít koeficienty opačného znaménka, ale stejné koeficienty v hodnotě)

$\begin{cases} 4x - 7y = 18 \\ -4x + 6y = -16 \end{cases} \quad + \begin{cases} 4x - 7y = 18 \\ -4x + 6y = -16 \end{cases}$

$-y = 2 \Leftrightarrow y = -2$ (Když se zbavíme jedné proměnné, získáme lineární rovnici s jednou proměnnou, kterou můžeme snadno vyřešit.)

$2x - 3 \cdot (-2) = 8$ (Po zjištění hodnoty jedné z proměnných můžeme tuto hodnotu dosadit do libovolné rovnice původní soustavy a zjistit, čemu se rovná druhá proměnná.)

$2x + 6 = 8$

$x = 1$

$K = \{[1; -2]\}$

3.1.4 METODA ROZKLADU ROVNIC

Výše jsme psali o tom, jak lze rozložit kvadratickou rovnici (nebo rovnici vyššího stupně) na násobky. Tuto vlastnost můžeme využít ke zjednodušení řešení soustav rovnic. Pokud lze jednu z rovnic rozdělit na násobky (s nulou na pravé straně). Pak můžeme každý z těchto násobků přirovnat k nule a ostatní rovnice původní soustavy přidat, čímž získáme kombinaci několika soustav (které budou jednodušší než původní soustava). Ukážeme na příkladu.

Příklad 2.1.3.

$\begin{cases}(x-5y)(x-3)=0\\4y^2-xy+3y+4=0\end{cases}$ (V tomto případě byla první rovnice již rozdělena na násobky, ale lze použít i vzorec pro rozdělení polynomu.)

$(x-5y)(x-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-5y=0\\x-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5y\\x=3\end{cases}$ (Získali jsme dvě hodnoty pro proměnnou x, dosaďme každou z nich do samostatné soustavy s druhou rovnicí původní soustavy.)

$\begin{cases}\begin{cases}x=5y\\4y^2-xy+3y+4=0\end{cases}\\\begin{cases}x=3\\4y^2-xy+3y+4=0\end{cases}\end{cases}$ (Vyřešme každou z těchto soustav samostatně.)

a) $\begin{cases}x=5y\\4y^2-xy+3y+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5y\\4y^2-5y^2+3y+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5y\\-y^2+3y+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}x=-5\\y=-1\end{cases}\\\begin{cases}x=20\\y=4\end{cases}\end{cases}$

$b)$ $\begin{cases}x=3\\4y^2-xy+3y+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5y\\4y^2-3y+3y+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5y\\4y^2+4=0\end{cases}$ (Toto řešení nemá žádné reálné kořeny, protože druhá rovnice nemůže být nikdy rovna nule, bude vždy větší.)

$K=\{[-5;-1];[20;4]\}$

3.1.5 METODA DĚLENÍ A NÁSOBENÍ

Věta. *Pokud obě části rovnice* $f_2(x;y)=g_2(x;y)$ *současně při žádných hodnotách* $(x;y)$ *nenabývají nulové hodnoty, pak jsou soustavy*

$\begin{cases}f_1(x;y)=g_1(x;y)\\f_2(x;y)=g_2(x;y)\end{cases}$; $\begin{cases}f_1(x;y)=g_1(x;y)\\f_1(x;y)f_2(x;y)=g_1(x;y)g_2(x;y)\end{cases}$; $\begin{cases}f_1(x;y)=g_1(x;y)\\\frac{f_1(x;y)}{f_2(x;y)}=\frac{g_1(x;y)}{g_2(x;y)}\end{cases}$

*ekvivalentní (*Меньшова, 2020).

Smyslem této metody je vydělit nebo vynásobit jednu z rovnic druhou a získat novou rovnici, která by měla být mnohem jednodušší než původní.

Příklad 2.1.4.

$\begin{cases} x^5y^7 = 32 \\ x^7y^5 = 128 \end{cases}$ (V této rovnici je nejlepší uchýlit se k vydělení jedné rovnice druhou. $\frac{x^7y^5}{x^5y^7} = \frac{128}{32} \Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} = 4 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 2 \Leftrightarrow x = 2y$ (Dělením získáme novou rovnici, která je mnohem jednodušší než kterákoli z původních dvou.)

$\begin{cases} x = 2y \\ (2y)^7y^5 = 128 \end{cases}$ (Jednu z rovnic v původní úloze nahradíme novou rovnicí.)

$(2y)^7y^5 = 128 \Leftrightarrow 128y^{12} = 128 \Leftrightarrow y^{12} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$(Vyřešme získaný systém pomocí již známých metod.)

$\begin{cases} x = 2 * 1 = 2 \\ x = 2 * (-1) = -2 \end{cases}$

$K = \{[-2; -1]; [2; 1]\}$

3.1.6 METODA SUBSTITUCE PROMĚNNÉ

Z názvu je zřejmé, že v této metodě se můžeme uchýlit k nahrazení výrazu (nebo několika výrazů) nějakou novou proměnnou (nebo proměnnými), pokud se tento výraz (nebo výrazy) opakuje v obou rovnicích soustavy, což by mělo vést ke zjednodušení systému. Uvažujme tuto metodu na příkladu.

Příklad 2.1.5.

$\begin{cases} xy + x + y = 29 \\ xy - 2(x + y) = 2 \end{cases}$ (Zde vidíme, že se v obou rovnicích vyskytují výrazy (xy) a (x+y).)

$\begin{cases} a = xy \\ b = x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 29 \\ a - 2b = 2 \end{cases}$ (Nahrazením těchto výrazů jsme získali systém, který je jednodušší než původní. Můžeme ji vyřešit odečtením jedné rovnice od druhé, protože proměnná *a* se stejnými koeficienty se opakuje v obou rovnicích)

$-\begin{cases} a + b = 29 \\ a - 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow b + 2b = 27 \Leftrightarrow 3b = 27 \Leftrightarrow b = 9$

$a + 9 = 29 \Leftrightarrow a = 29 - 9 = 20$

$\begin{cases} xy = 20 \\ x + y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (9 - y) * y = 20 \\ x = 9 - y \end{cases}$

$-y^2 + 9y - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 4 \end{cases}$

$x_1 = 9 - 5 = 4$

$x_1 = 9 - 4 = 5$

$K = \{[4; 5]; [5; 4]\}$

Prošli jsme si jednotlivé metody řešení soustav rovnic. Samozřejmě lze k řešení libovolné soustavy rovnic použít kombinace všech těchto metod. Volba způsobu řešení se může vždy lišit podle toho, o jaký systém se jedná.

3.2 ŘEŠENÍ SOUSTAV SE TŘEMI A VÍCE ROVNICEMI

3.2.1 ÚVOD DO MATIC

V předchozí části jsme se zabývali metodami řešení soustav se dvěma rovnicemi. Tyto metody lze samozřejmě použít i pro řešení soustav s více rovnicemi. Jde však o to, že při řešení soustav s více rovnicemi mohou být tyto metody docela náročné na práci a čas. Pro řešení takových soustav existují jiné metody řešení, především pomocí matic. Vysvětleme si některé pojmy a věty.

***Definice**. Nechť X je neprázdná množina a m, n přirozená čísla. Maticí typu n × m nad množinou X budeme rozumět obdélníkové schema*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

kde a_{ij} ∈ X pro každé i = 1,...,n a každé j = 1,...,m; tuto matici budeme značit též $(a_{ij})_{n\times m}$ nebo jednodušeji (a_{ij}). Jestliže je m ≠ n, pak hovoříme o obdélníkové matici typu n × m; jestliže je m = n, hovoříme o čtvercové matici řádu n. Dále říkáme, že prvek a_{ij} stojí v matici na místě ij (Bečvář 2005).

Definice. *Nechť A = (a_{ij}) je matice typu n × m nad komutativním okruhem R. Transponovanou maticí k matici A budeme rozumět matici A^T = (b_{ij}) typu m × n, kde pro každé i = 1,...,n a j = 1,...,m je b_{ij} = a_{ij} (Bečvář 2005).*

Definice. *Nechť R je komutativní okruh. Diagonální maticí nad okruhem R budeme rozumět každou matici, která má mimo hlavní diagonálu samé nulové prvky. Obdélníková matice A = (a_{ij}) typu n × m je tedy diagonální, jestliže pro každé i = 1,...,n a j = 1,...,m, i ≠ j, je a_{ij} = 0 (Bečvář 2005).*

Hlavní diagonála obsahuje prvky a_{ij} *pro každé i=j.*

Čtvercové matice mají determinant. Definice determinantu je založena na permutacích a vysvětlení těchto pojmů by zabralo hodně času. Proto se zaměříme pouze na vzorce pro výpočet determinantu a jeho vlastnosti.

Determinant matice A se značí jako $\det A$ nebo $|A|$

Determinant čtvercové matice druhého řádu lze vypočítat jako rozdíl mezi součinem prvků hlavní diagonály a součinem prvků vedlejší diagonály.

Sarrusovo pravidlo

Pomocí Sarrusova pravidla vypočítáme determinant matice třetího řádu.

Princip spočívá v tom, že původní matici rozšíříme o dva řádky, které duplikují první a druhý řádek. Determinant této matice se vypočítá jako rozdíl mezi součtem součinů prvků hlavních diagonál a součtem součinů prvků vedlejších diagonál.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\det A = |A| = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} + a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21})$$

Příklad 2.2.1.

Určete determinant matice $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot 1 \cdot 3 + (-4) \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 7 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \cdot 5 - 3 \cdot 7 \cdot (-4)$$

$$= 15 + 0 + 0 - 2 - 0 + 84 = 97$$

Laplaceův rozvoj

Nejprve definujme pojem submatice matice a minor matice.

Submatice matice je nová matice, která vznikne odstraněním jednoho řádku a sloupce původní matice. Matice má samozřejmě několik submatic, takže každá submatice má své koeficienty.

Příklad 2.2.2.

Máme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Jednou z submatic této matice bude nová matice $S_{11}^{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Koeficienty ve spodní části udávají, který řádek a sloupec původní matice odstraňujeme. Koeficient v horní části označuje matici, jejíž je naše nová matice submaticí.

Minor matice je determinant submatice. V našem příkladu je tedy minorem matice je hodnota $M_{11}^{A} = |S_{11}^{A}| = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 0 = 25$.

Vzorec pro nalezení determinantu matice pomocí Laplaceova rozvoje vypadá takto:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot M_{ij}^{A}$$

Můžeme říci, že tento algoritmus spočívá v tom, že determinant matice najdeme pomocí součtu součinů každé submatice s prvkem původní matice se stejnými koeficienty pro řádek nebo sloupec, ve kterém se tento prvek nachází a s -1 na stupeň rovný součtu koeficientů.

Příklad 2.2.3.

Vezměme matici z předchozího příkladu. $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vypočítejme determinant této matice Laplaceovým rozvojem na třetím řádku.

$$\begin{aligned} |A| &= (-1)^{3+1} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2 + 0 + 99 = 97 \end{aligned}$$

Jak vidíme, získáme stejnou hodnotu jako v předchozím příkladu.

***Definice**. Nechť R je komutativní okruh s jednotkovým prvkem a A čtvercová matice řádu n nad R. Inverzní maticí k matici A budeme rozumět matici A^{-1}, pro kterou je AA^{-1} = $A^{-1}A$ = E. Matice A, ke které inverzní matice existuje, se nazývá invertibilní. E je jednotková matice, tj. matice s prvky hlavní diagonály rovnými jedné a ostatními prvky rovnými nule.*

***Definice**. Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu n × m nad komutativním okruhem R. Transponovanou maticí k matici A budeme rozumět matici $A^T = (b_{ij})$ typu m × n, kde pro každé i = 1,...,n a j = 1,...,m je $b_{ji} = a_{ij}$.*

Metoda nalezení inverzní matice

Existuje algoritmus pro nalezení inverzní matice. Rozebereme si ho krok za krokem.

1) Nejprve zjistíme determinant původní matice. Pokud je různý od nuly, pak k této matici existuje inverzní matice.

2) Najdeme matici minorů. Místo každého prvku původní matice napíšeme minor tohoto prvku.

3) Najdeme matici algebraických doplňků$(A\,*)$. Za tímto účelem vynásobíme každý prvek matice minorů číslem 1^{i+j}

4) Najdeme transponovanou matici $(A\,*)^T$algebraických doplňků.

5) Vypočítáme inverzní matici podle vzorce $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A\,*)^T$.

Příklad 2.2.4.

Najděme inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

1)$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$. To můžeme vypočítat metodami, které již známe.

$$2)M = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -38 & -27 \\ -1 & -41 & -29 \\ -1 & -34 & -24 \end{pmatrix}$$

3)$A *= \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}$

4) $(A *)^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}$

5)$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A *)^T = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$

Metody řešení soustav rovnic pomocí matic

3.2.2 GAUSSOVA METODA

Tato metoda je založena na vlastnosti matic, že můžeme násobit řádky a sloupce libovolným reálným číslem a sčítat je navzájem, měnit pořadí řádků. Ze soustavy rovnic vytvoříme matici s dalším sloupcem z množiny volných koeficientů rovnic v soustavě (čísla bez proměnných). Těmito ekvivalentními změnami pak matici opravíme na matici s nulami pod hlavní diagonálou (A ještě lépe s 1 nebo -1 na hlavní diagonále). Pak můžeme snadno zjistit hodnotu poslední proměnné a z ní najít ostatní.

Příklad 2.2.5.

Vyřešte soustavu rovnic Gaussovou metodou.

$\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -1 \\ 2x - y + 3z = 13 \\ x + 2y - z = 9 \end{cases}$ Rozšířená matice pro tuto soustavu rovnic vypadá takto:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right)$Přistupme k elementárním úpravám, abychom získali trojúhelníkovou matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & 13 \\ 3 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 14 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Probereme si jednotlivé úpravy v pořadí, v jakém se vyskytují: 1) Vyměňme první a třetí řádek. 2)První řádek vynásobíme -2 a přičteme k druhému řádku. 3) Vynásobíme první řádek číslem -3 a přičteme ke třetímu řádku. 4) Vydělíme druhý řádek číslem -5 a třetí řádek číslem -2. 5)Druhý řádek vynásobíme -2 a přičteme ke třetímu řádku. 6) Vydělíme třetí řádek číslem 3.

Výsledkem je nová soustava rovnic, která by měla být mnohem jednodušší:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 9 \\ \quad y - z = 1 \\ \quad\quad z = 4 \end{cases} \rightarrow y = 1 + 4 = 5 \rightarrow x = 9 - 10 + 4 = 3$$

$K = \{[3; 5; 4]\}$

Proveďme zkoušku dosazením získaných hodnot do původní soustavy rovnic.

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 - 5 \cdot 4 = 9 + 10 - 20 = -1 \\ 2 \cdot 3 - 5 + 3 \cdot 4 = 6 - 5 + 12 = 13 \\ 3 + 2 \cdot 5 - 4 = 3 + 10 - 4 = 9 \end{cases}$$ Získané hodnoty vyhovují původní soustavě rovnic.

3.2.3 METODA S INVERZNÍ MATICÍ

Podívejme se, jak se soustava rovnic zapisuje v maticovém tvaru.

$A \cdot X = B$ Kde matice A je matice koeficientů proměnných, matice X je matice proměnných a matice B je matice řešení rovnic. Pokud pak obě části této rovnosti vynásobíme inverzní maticí, získáme následující výraz.

$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$ Protože násobení matic má vlastnost asociativity, můžeme tento výraz změnit na tvar:

$(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B \Leftrightarrow \mathrm{X} = A^{-1} \cdot B$

Z posledního kroku získáme vzorec pro řešení soustav rovnic pomocí inverzní matice: $\mathrm{X} = A^{-1} \cdot B$

Příklad 2.2.6. Vyřešit soustavu rovnic pomocí inverzní matice.

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 3x - y + 3x = -1 \\ -2x + 2y + 3z = 5 \end{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nejprve najdeme determinant matice A, což můžeme provést některou z výše uvedených metod. Nebudeme se již zabývat rozkladem samotným a zapíšeme pouze výsledek. $A = -11$

Protože determinant je různý od nuly, existuje inverzní matice A^{-1}. Najděme ji. Algoritmus pro nalezení inverzní matice s příkladem je opět uveden výše.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A*)^T = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -7 & 5 & 4 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

Teď najdeme řešení soustavy. $\mathrm{X} = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -7 & 5 & 4 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad x = 0; y = -2; z = 3$$

$K = \{[0; -2; 3]\}$

Příklad 2.2.7. Vyřešit soustavu rovnic pomocí inverzní matice.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 3 \\ 5x + 7y + z = -1 \\ 3x + 3y + 5z = 0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nejprve opět najděme determinant maticeA

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 5 + \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 3 \cdot (-2) - (-2) \cdot 7 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot 3$$
$$= 0$$

Jak vidíme, determinant této matice je nulový, takže tuto soustavu rovnic nemůžeme řešit maticovou metodou.

3.2.4 CRAMEROVO PRAVIDLO

Nechť $A \cdot x = b$ je soustava lineárních rovnic, kde A je regulární matice stupně n. Pro každé j = 1, 2, ..., n označme A_j matici, která vznikne z matice A nahrazením j–tého sloupce sloupcovým vektorem b pravých stran rovnic dané soustavy. Potom pro každé j = 1, 2, ..., n platí:

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$$

Jinými slovy. Řešení soustavy rovnic se bude rovnat determinantu matice, v níž je jeden ze sloupců změněn na sloupec s hodnotami na pravé straně, děleno determinantem původní matice. Pokud je determinant matice A nulový, nelze samozřejmě systém řešit pomocí Cramerova pravidla.

Příklad 2.2.8. Vyřešit soustavu rovnic pomocí Cramerova pravidla

$$\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 15 \\ 5x - 3y + 2y = 15 \\ 10x - 11y + 5z = 36 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{pmatrix} \ b = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Nejprve najdeme determinant matice A

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 10 & -11 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 7 \cdot (-3) \cdot 5 + 5 \cdot (-11) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 10 - 3 \cdot (-3) \cdot 10 - 7 \cdot 2 \cdot (-11) + 5 \cdot 5 \cdot 2 = -36$$

Teď místo jednotlivých sloupců matice A nahradíme sloupec matice b a vypočítáme jejich determinanty. Nejprve dosadíme sloupec b místo sloupce koeficientů x, зotom místo y a na konci místo z.

$$\det A_x = \begin{vmatrix} 15 & 2 & 3 \\ 15 & -3 & 2 \\ 36 & -11 & 5 \end{vmatrix} = -72$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 7 & 15 & 3 \\ 5 & 15 & 2 \\ 10 & 36 & 5 \end{vmatrix} = 36$$

$$\det A_z = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 15 \\ 5 & -3 & 15 \\ 10 & -11 & 36 \end{vmatrix} = -36$$

Pak získáme.

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{-73}{-36} = 2 \ \ y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{36}{-36} = -1 \ \ z = \frac{\det A_z}{\det A} = \frac{-36}{-36} = 1$$

$$K = \{[2; -1; 1]\}$$

4 POUŽÍVÁNÍ VÝPOČETNÍCH NÁSTROJŮ K ŘEŠENÍ ROVNIC.

4.1 GEOGEBRA

Program GeoGebra nabízí velké množství nástrojů pro práci s grafickými objekty, jako je vykreslování grafů, sestrojování různých těles, práce s jejich daty a práce ve 3D. Pomocí tohoto programu si ukážeme grafický způsob řešení rovnic pro různé typy rovnic a jejich soustav. Grafickou metodu lze samozřejmě použít i na papíře s tužkou a pravítkem, ale například u rovnic vyšších stupňů, logaritmických a iracionálních rovnic a soustav o třech rovnicích může být použití grafické metody velmi obtížné.

4.1.1 ŘEŠENÍ LINEÁRNÍCH ROVNIC

Pro řešení lineární rovnice grafickou metodou musíme:

1) Upravit rovnici tak, aby nula zůstala na pravé straně rovnice.

2) Nakreslit graf funkce na levé straně rovnice.

3) Najít x-ovou souřadnici průsečíku grafu funkce s osou x.

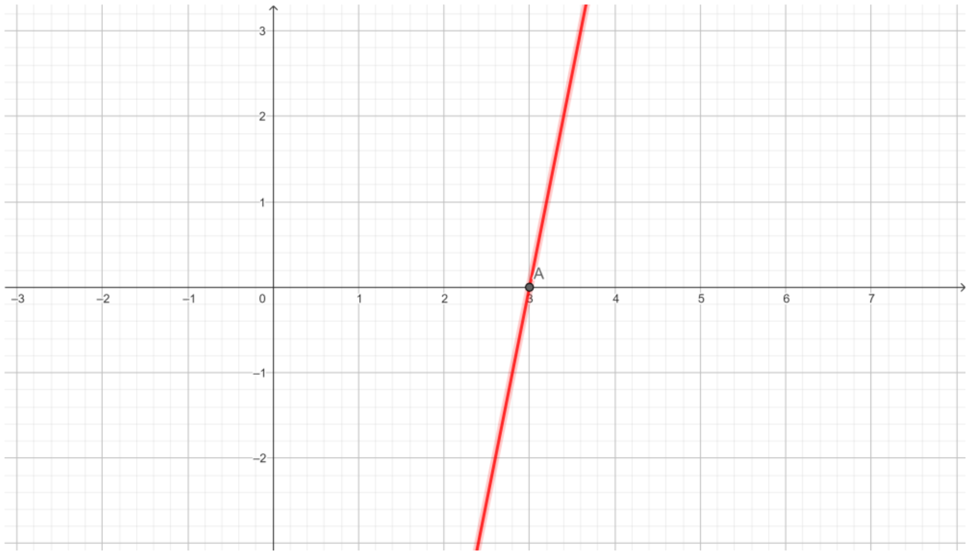
Jinými slovy, máme dvě funkce. První je funkce vlevo. Druhá je funkce napravo, v našem případě y=0. Řešením rovnice budou souřadnice průsečíku obou těchto funkcí. Pro snadnější řešení má GeoGebra také příkaz "Roots", který vrátí a zvýrazní řešení naší funkce.

Příklady 3.1.1-3.1.7:

$4(2x-3)+2=3x+5$ (Nejprve posuneme vše na levou stranu).

$8x-12+2-3x-5=0$
$5x-15=0$
$5(x-3)=0$

Samozřejmě se jedná o jednu z nejjednodušších lineárních rovnic a její řešení již vidíme, ale podívejme se na její graf. Funkce vykreslená pomocí programu GeoGebra je znázorněna na obr. 7.



Obr. 7 řešení lineárních rovnic

Z grafu je vidět, že funkce y nabývá hodnoty rovné nule v jednom bodě A(3;0). Souřadnice x tohoto bodu tedy bude řešením naší rovnice (x=3).

Ověřme si to obvyklou metodou řešení rovnice.

$5(x - 3) = 0$

$x - 3 = 0$

$x = 3$ Získané řešení je shodné s řešením získaným grafickou metodou

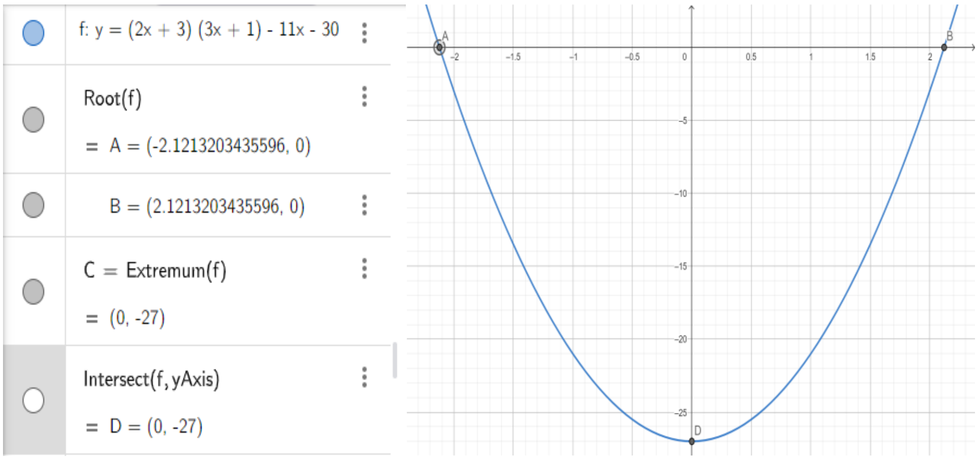
Podívejme se na některé složitější typy rovnic.

1) **Kvadratická rovnice**

$(2x + 3)(3x + 1) = 11x + 30$ (Přesuneme vše na jednu stranu)

$y = (2x + 3)(3x + 1) - 11x - 30 = 0$

Kdybychom tuto rovnici řešili metodou diskriminantů nebo jinou metodou, dostali bychom iracionální řešení rovnice. Program GeoGebra však umožňuje nejen vykreslit graf funkce, ale také určit hlavní body jejího grafu. Graf funkce a souřadnice bodů jsou znázorněny na obr.8.



Obr. 8 řešení kvadratické rovnice

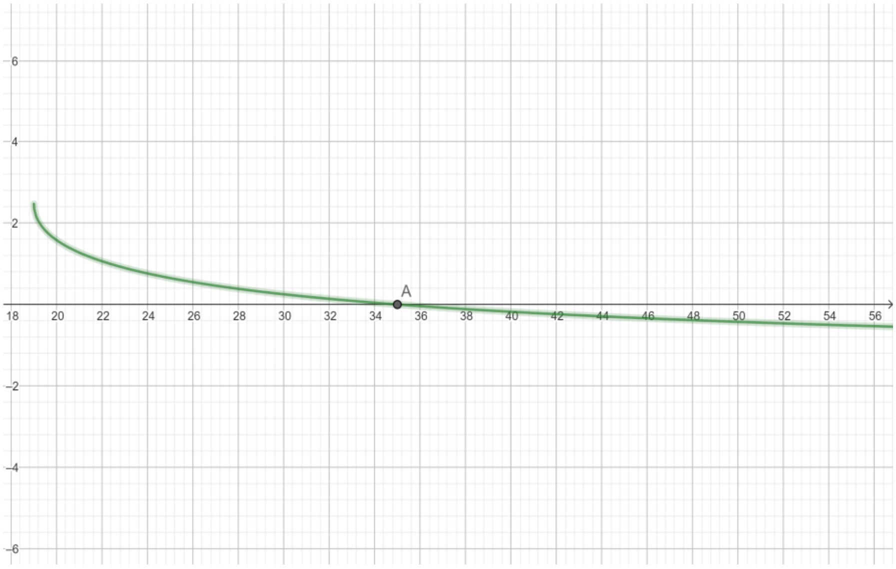
Z tohoto grafu vidíme, že souřadnice bodů A a B nemůžeme zjistit jednoduše z obrázku. Pokud však zvolíme možnost zobrazit hlavní body, můžeme tyto souřadnice vidět. Z této části vidíme, že řešením naší rovnice budou hodnoty $x_{1,2} \approx \pm 2{,}12$

2) **Iracionální rovnice**

$$\sqrt{x+1} = 2 + \sqrt{x-19} \quad x > 19$$

$$y = \sqrt{x+1} - 2 - \sqrt{x-19} = 0$$

Hlavní potíž při vykreslování grafu této iracionální rovnice spočívá v tom, že při obvyklém vykreslování grafu, kdy bereme stejnou cenu dělení pro osu x a y, pak dostaneme téměř přímku, která leží velmi blízko osy x. Program GeoGebra umožňuje změnit cenu dělení pro osy tak, aby graf vypadal lépe. Změnou měřítka nebo stejným způsobem jako v předchozím příkladu zjistíme, že bod průsečíku grafu funkce s osou x (bod A) má souřadnice (35;0). Z toho vyplývá, že řešením naší rovnice je $x = 35$. Funkce je znázorněna na obr. 9.

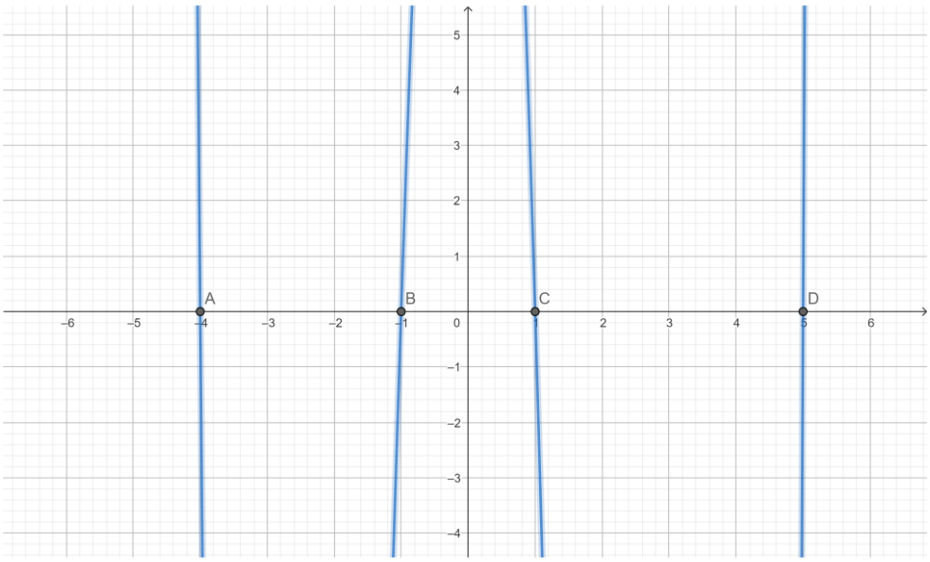


Obr. 9 řešení iracionální rovnice

3) **Rovnice vyššího stupně**

$x^4 - x^3 - 21x^2 + x + 20 = 0$

Protože tato rovnice má všechny koeficienty celočíselné, mohli bychom ji vyřešit pomocí dělitelů absolutního členu.

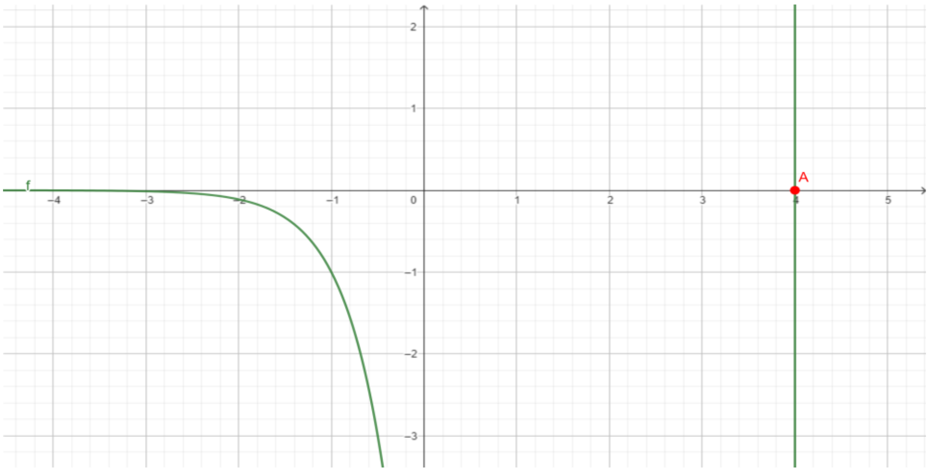


Obr. 10 řešení rovnice vyššího stupně

Při vykreslení grafu (Obr.10) však ihned vidíme, že řešením této rovnice jsou body A(-4;0), B(-1;0), C(1;0) a D(5;0). Podle toho bude množina řešení $K = \{-4; -1; 1; 5\}$.

4) **Exponenciální rovnice**

$27 \cdot 3^{4x-9} - 9^{x+1} = 0$



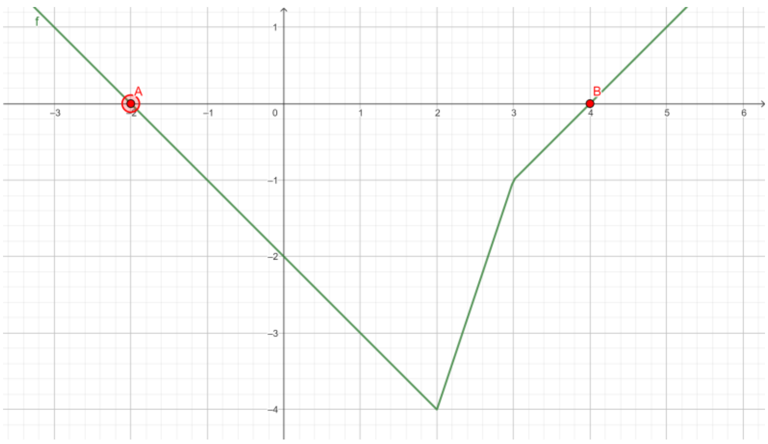
Obr. 11 řešení exponenciální rovnice

Funkce je znázorněna na obr. 11. Jednoduchým použitím programu GeoGebra jsme byli schopni získat tento složitý graf, pro jehož konstrukci na papíře bychom museli tuto funkci analyzovat, hledat extrémy, konvexitu-konkávnost atd. Výběrem speciálních bodů grafu zjistíme, že bod se souřadnicí y=0 (bod A) má souřadnici x=4. To bude naše řešení.

5) **Rovnice s absolutní hodnotou**

$\big||3-x|-x+1\big|+x=6$

V rámci běžného postupu řešení zabývali bychom se dvěma případy, kdy $(3-x) \geq 0$ nebo $(3-x) < 0$. Pak bychom v každém z nich řešili další dva případy, kde celá absolutní hodnota je také větší nebo menší než nula. To trvá velmi dlouho a je to poměrně složité. Sestrojíme tedy graf a řešení najdeme z něho.



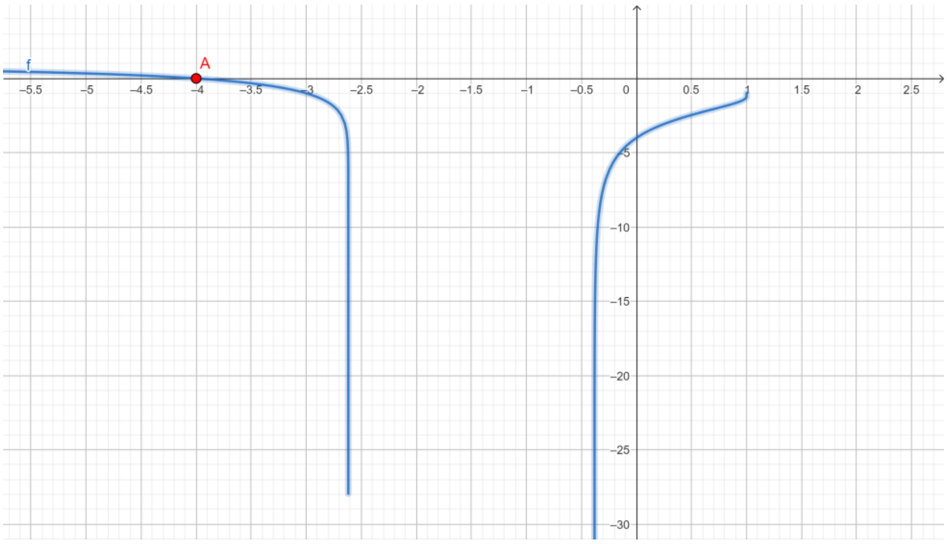
Obr. 12 řešení rovnice s absolutní hodnotou

Z vykresleného grafu (Obr. 12) vidíme, že řešením rovnice budou body -2 a 4. Z toho vyplývá, že množina řešení $K = \{-2; 4\}$.

6) **Logaritmické rovnice**

$\log_{1-x}(x^2 + 3x + 1) = 1$

Při řešení této rovnice metodami, které jsme probrali výše, bychom museli vypsat definiční obor, uvést jedničku na pravé straně do logaritmu a poté srovnat základy. Podívejme se, jak vypadá řešení této rovnice na obr. 13.



Obr. 13 řešení logaritmické rovnice

Jedná se o složitý graf, jehož sestavení by vyžadovalo mnoho času a práce. Ale vidíme z něj, že bod, který nám vyhovuje, je bod A(-4;0). A řešením naší rovnice je jeho souřadnice $x = -4$.

4.1.2 POUŽITÍ PROGRAMU GEOGEBRA K ŘEŠENÍ SOUSTAV ROVNIC

Řešení soustav rovnic grafickou metodou je založeno na tom, že pokud soustava rovnic platí pro libovolnou množinu proměnných, pak grafy jednotlivých funkcí budou mít společné body, jejichž souřadnice jsou rovny hledané množině proměnných.

Podívejme se na tuto metodu nejprve na soustavě dvou rovnic

Příklad 3.1.8

$$\begin{cases} 6x^2 - 12xy + 6y^2 - 5x + 5y - 1 = 0 \\ 9x^2 - 3xy - 2y^2 - 12x + 11y - 5 = 0 \end{cases}$$

Tato rovnice je poměrně složitá, a to nejen pro školskou úroveň, ale i pro úroveň vysokých škol. Abychom ji vyřešili negrafickou metodou, museli bychom nejprve najít diskriminanty pro každou rovnici (jako kdyby jedna z proměnných byla konstanta nebo volný člen) a pak z každé rovnice získat další dvě rovnice (v tomto případě by každá rovnice dala dvě rovnice přímky). A pak vyřešit soustavu čtyř rovnic. Zde je rychlý pohled na to, jak by takové řešení vypadalo:

$6x^2 - 12xy + 6y^2 - 5x + 5y - 1 = 6y^2 - y(12x - 5) + 6x - 5x - 1 = 0$ V tomto případě jsme vzali první rovnici a nyní budeme hledat její diskriminant, jako by proměnná x byla konstantní.

$$D = (12x - 5)^2 - 24(6x^2 - 5x - 1) = 49 = 7^2 \leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{12x - 5 + 7}{12} = x + \dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{12x - 5 - 7}{12} = x - 1 \end{cases}$$

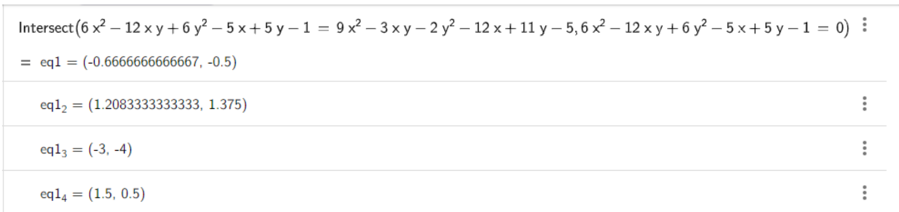
$$\leftrightarrow \begin{cases} 6x - 6y + 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

V tomto případě jsme získali dvě rovnice. Budou to rovnoběžné přímky, protože koeficient proměnné x je stejný. Druhá rovnice původní soustavy by dala dvě rovnice pro protínající se přímky. Protože smysl tohoto postupu je jasný, vynecháme jej. Z druhé rovnice získáme soustavu:

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x}{2} + \dfrac{1}{2} \\ y = -3x + 5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases}$$

Z původní soustavy nám nakonec vyjdou čtyři rovnice, které musíme vyřešit. Jak je vidět, řešení touto metodou je velmi dlouhé a složité.

Při řešení této soustavy v programu Geogebra můžeme obě rovnice vyrovnat najednou, takže získáme pouze čtyři body, ve kterých rovnice platí. Tento způsob je znázorněn na následujícím obr. 14.


Intersect$(6x^2 - 12xy + 6y^2 - 5x + 5y - 1 = 9x^2 - 3xy - 2y^2 - 12x + 11y - 5, 6x^2 - 12xy + 6y^2 - 5x + 5y - 1 = 0)$

$= \mathrm{eq1} = (-0.6666666666667, -0.5)$

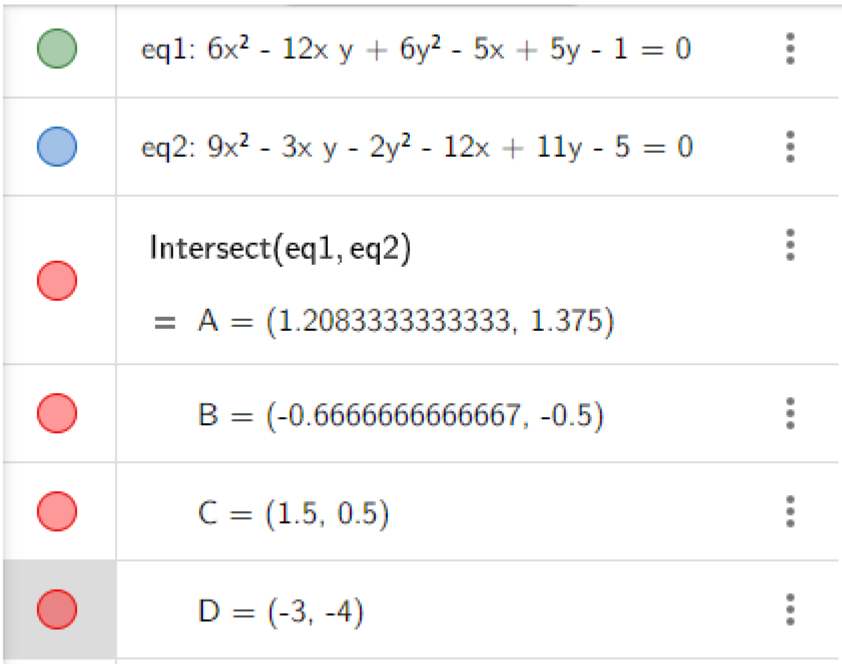
$\mathrm{eq1}_2 = (1.2083333333333, 1.375)$

$\mathrm{eq1}_3 = (-3, -4)$

$\mathrm{eq1}_4 = (1.5, 0.5)$

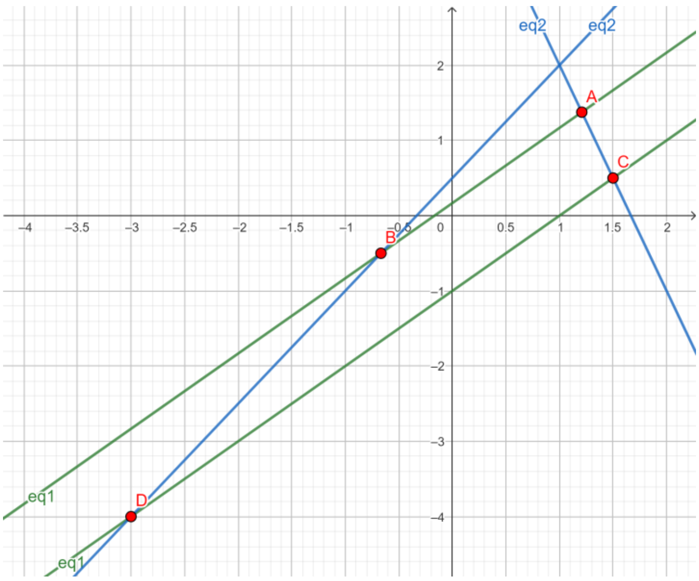
Obr. 14 řešení soustavy dvou rovnic (zápis)

Nebo můžeme zadat každou z rovnic zvlášť, takže uvidíme přímky, které budou výsledkem každé z rovnic. Abychom získali souřadnice průsečíků těchto dvou rovnic, budeme muset použít příkaz "Intersect(ob1;ob2)", kde místo objektu 1 a objektu 2 budou názvy našich rovnic, například eq1 a eq2. Tento způsob je znázorněn na obr. 15.



Obr. 15 řešení soustavy dvou rovnic (zápis)

Získali jsme graf a průsečíky, které budou řešením naší rovnice (Obr. 16).



Obr. 16 řešení soustavy dvou rovnic (graf)

$$K = \{[1{,}2; 1{,}375]; \left[-\frac{2}{3}; -0{,}5\right]; [1{,}5; 0{,}5]; [-3; -4]\}$$

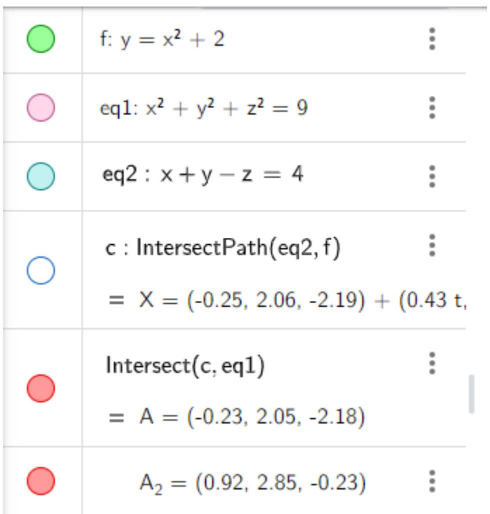
Řešení soustav tří rovnic grafickou metodou v programu GeoGebra

Řešení soustav rovnic o třech neznámých grafickou metodou je založeno na stejném operačním principu jako řešení soustav o dvou proměnných. Řešení takových rovnic však spočívá v tom, že je téměř nemožné spolehlivě znázornit trojrozměrný prostor na papíře. Proto v takových případech můžeme k vizualizaci a provedení takového řešení používat software. GeoGebra umožňuje vizualizovat řešení soustav rovnic graficky v trojrozměrném prostoru.

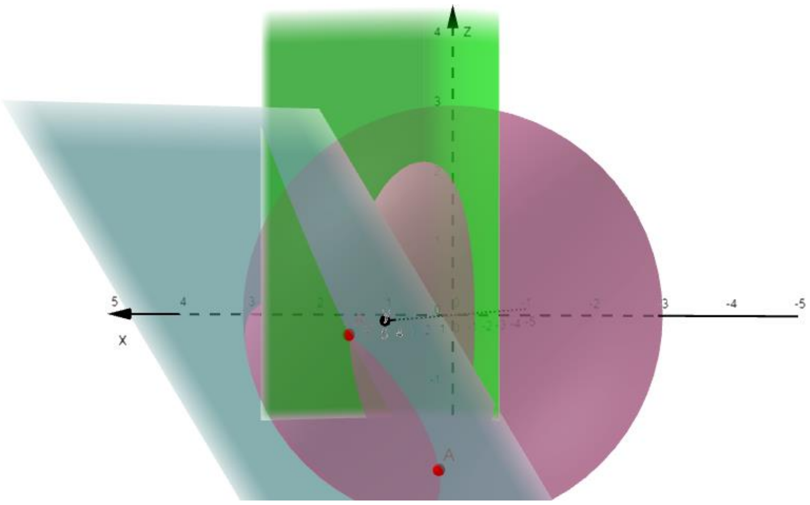
Příklad 3.1.9

$$\begin{cases} y = x^2 + 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

Pokud bychom tuto soustavu rovnic neřešili grafickou metodou, řešili bychom ji dosazovací metodou nebo některou z dalších výše uvedených metod. Podívejme se však, jak vypadá řešení pomocí grafické metody. První rovnice této soustavy ve 2D prostoru by nám dala rovnici paraboly, ale protože graficky řešíme ve 3D, bude to parabolický válec. Druhá rovnice je rovnicí koule a druhá rovnice je rovnicí roviny. Po sestrojení všech tří objektů můžeme přejít k nalezení společných bodů. Abychom je našli, museli jsme nejprve najít společný objekt (parabolu) mezi rovinou (eq2) a parabolickým válcem. Ve druhém kroku jsme našli společné body mezi výslednou parabolou a koulí z druhé rovnice. Výsledný příkazový řádek a grafy jsou na obr. 17 a 18.



Obr. 17 řešení soustavy tří rovnic (zápis)



Obr. 18 řešení soustavy tří rovnic (graf)

Červené body A1 a A2 jsou společné body, které jsou řešením naší soustavy. Podle toho bude množina řešení $K = \{[-0{,}23; 2{,}05; -2{,}18]; [0{,}92; 2{,}85; -0{,}23]\}$.

4.2 WOLFRAM MATHEMATICA

Wolfram Mathematika je program, který poskytuje různé nástroje pro řešení různých matematických problémů. V programu Mathematica můžeme řešit rovnice, jejich soustavy, ale i složitější typy rovnic, se kterými se v naší práci nesetkáváme, jako jsou rekurentní a diferenciální rovnice apod., můžeme také zjednodušovat výrazy, sestavovat grafy a také je upravovat, je možné integrovat, diferencovat, hledat limity, derivace, převádět funkce do Taylorových řad a provádět s nimi různé operace, stejně jako obrovské množství dalších různých možností.

My se budeme věnovat pouze těm funkcím programu, které pomáhají při řešení rovnic a jejich analýze. Zvláštní pozornost budeme věnovat maticovým metodám řešení soustav rovnic v programu Wolfram Mathematika.

4.2.1 ŘEŠENÍ ROVNIC S JEDNOU PROMĚNNOU

Správný zápis funkcí a rovnic hraje ve Wolfram Mathematica klíčovou roli při úspěšném řešení matematických problémů. V této části práce si nejprve projdeme pravidla a syntaxi pro zápis funkcí a rovnic v systému Mathematica.

Zápis funkcí:

1) Použití symbolů a operátorů: V systému Mathematica je možné používat symboly a operátory k definování funkcí. Funkci $f(x) = x^2 + 2x + 1$ lze například zapsat takto:

$F[\mathrm{x}] == x\^{}2 + 2 * x + 1$

Základní značky a operátory používané v programu Mathematica:

( ) - (kulaté závorky) slouží k označení pořadí výpočtů.

[ ] - (hranaté závorky) se používají k označení argumentů funkce; Tan[x] je tečna k x. Pokud napíšete Tan(x), nebude to fungovat.

{ } - (složené závorky) se používají k označení seznamu; {1,2,3,4} je seznam čtyř čísel.

"!" znamená faktoriál; píše se s argumenty dohromady.

"=" znamená přiřazení; x=4 je x přiřazené 4.

":=" odkládá přiřazení.

"==" kontroluje rovnost; x==4 vrací True, pokud je x rovno 4.

"!=" kontroluje nerovnost; a!=4 vrací True, pokud x není rovno 4. Při psaní této funkce je však třeba dávat pozor na mezery mezi argumenty, protože x!=4 může znamenat "faktoriál x se rovná čtyřem".

Základní funkce pro řešení rovnic

V této části práce se budeme zabývat různými metodami řešení rovnic s jednou proměnnou v programu Mathematica, včetně analytických, číselných a grafických přístupů. Podíváme se také na příklady rovnic, které kombinují různé matematické funkce, například exponenciální, logaritmické, iracionální a funkce absolutní hodnoty.

V systému Mathematica lze k řešení rovnic s jednou proměnnou použít funkce Solve, NSolve, FindRoot, Reduce a další, ale tyto čtyři funkce jsou základem pro řešení rovnic. Každá z těchto funkcí má své vlastní vlastnosti a je použitelná v různých případech.

- **Solve**: Tato funkce je určena k analytickému řešení rovnic. Snaží se najít přesné analytické řešení, pokud nějaké existuje.

Příklad 3.2.1:

Musíme vyřešit rovnici $x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$. Najděme kořeny pomocí funkce Solve. Nejprve si zjistíme, jak tuto rovnici správně zapsat. Máme dvě možnosti: Buď naši rovnici zapíšeme přímo do funkce Solve, nebo naši rovnici upravíme tak, aby vypadala jako funkce, pojmenujeme ji a tento název pak zapíšeme do funkce Solve. Zde je znázorněno, jak budou vypadat obě možnosti

1) $\text{Solve}[x\hat{}3 - 5x\hat{}2 + 6x - 2 == 0, x]$
2) $F[x] = x\hat{}3 - 5x\hat{}2 + 6x - 2;$
$\text{Solve}[F[x] == 0, x]$

Písmeno "x" za čárkou v hranatých závorkách znamená, že rovnici budeme řešit pro danou proměnnou. Důležitý je také znak ";" ve druhém zápisu v prvním řádku; řádky s tímto znakem se v odpovědi (Out) nezobrazují. V programu Mathematica to vypadá následovně:

```
In:= Solve[x^3 - 5x^2 + 6x - 2 == 0, x]//1. způsob
F[x]=x^3 - 5x^2 + 6x - 2;
Solve[F[x]==0, x]// 2. Způsob
Out:=(1.způsob)[{{x→1},{x→2-√2},{x→2+√2}}]
              (2.způsob)[{{x→1},{x→2-√2},{x→2+√2}}]
```

Jak vidíme, rovnice má tři řešení a v obou způsobech zápisu jsou stejné.

- **NSolve**: Tato funkce slouží k numerickému řešení rovnic. Může poskytnout přibližné numerické řešení rovnic, které nelze řešit analyticky, tj. pokud jsou řešením rovnice iracionální čísla nebo různé logaritmy, pak tato funkce vypíše přibližné numerické hodnoty řešení.

Příklad 3.2.2:

Na rozdíl od předchozího způsobu nám tato funkce umožní získat číselná řešení, která jsou aproximací iracionální odpovědi. Vyřešme rovnici z předchozího příkladu a porovnejme odpovědi. Zde již nebudeme věnovat pozornost tomu, jak je naše rovnice zapsána. Bude vypadat například takto:

```
In:= NSolve[x^3-5x^2+6x-2==0,x]
Pak budeme mít řešení:Out:=
            {{x→0.5857864376269049},{x→1.0000000000000009},{x→3.414213562373095}}
```

Z toho, co víme: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$. Naše odpovědi se tedy shodují s předchozím příkladem.

- **FindRoot**: Tato funkce slouží k číselnému nalezení kořenů rovnic. Lze ji použít v případě, že je známa pouze přibližná hodnota kořene, například pokud rovnice může mít několik kořenů, ale my potřebujeme pouze jeden, který se blíží známé hodnotě.

Příklad 3.2.3:

$| x - 2 | + \sqrt{x} - 4 = 0$. Protože používáme funkci "FindRoot", musíme také vzít počáteční aproximaci. V rovnici máme absolutní hodnotu. Jak si pamatujeme, můžeme ji rozložit buď s minusem, nebo s plusem. Vezměme první přiblížení, kdy se rozkládá s plusem, tj. x>2. Pro tento účel vezměme například další číslo za 2, které této podmínce vyhovuje:

```
In:=FindRoot[Abs[x-2]+Sqrt[x]-4==0,{x,3}]
Out:= {x→4.}
```

Dostali jsme odpověď, která odpovídá naší rovnici. Zkusme však najít druhou odpověď, ve které absolutní hodnota nabývá opačné hodnoty. Protože nemůžeme vzít x<0 (kvůli odmocnině), vezměme aproximaci jako 1.

```
In:=FindRoot[Abs[x-2]+Sqrt[x]-4==0,{x,1}]
Out:= {x→-1.2330697202611234+1.5164369488200424ⅈ}
```

V takovém případě však rovnice nemá žádné skutečné kořeny. Kdybychom totiž tuto rovnici sami řešili, dostali bychom: $\sqrt{x} - x = 2$. Z toho je zřejmé, že tato rovnice ve skutečnosti nemá žádné reálné kořeny.

- **Reduce**: Tato funkce slouží k nalezení všech možných řešení rovnice při splnění všech možných podmínek. "Reduce" je užitečná zejména tehdy, když chceme prozkoumat celý prostor řešení rovnice a najít všechna možná řešení. "Reduce" také umožňuje nastavit další podmínky, které mohou omezit prostor řešení.

Příklad 3.2.4

Vezměme rovnici z předchozího příkladu.

```
In:=Reduce[Abs[x-2]+Sqrt[x]-4==0,{x}]
Out:= x==4
```

Jak vidíme, tato metoda vyřešila naši rovnici v reálných číslech. Z tohoto příkladu není příliš zřejmé, čím se tato funkce liší od ostatních, ale její role je viditelnější při řešení soustav rovnic.

- **Plot**: Wolfram Mathematica nám také umožňuje vykreslovat grafy pomocí funkce "Plot", pomocí které můžeme nastavovat a měnit parametry samotného grafu, vybírat body a vykreslovat funkce s parametrem, kde můžeme tento parametr měnit a ukázat, jak ovlivňuje graf a řešení rovnice.

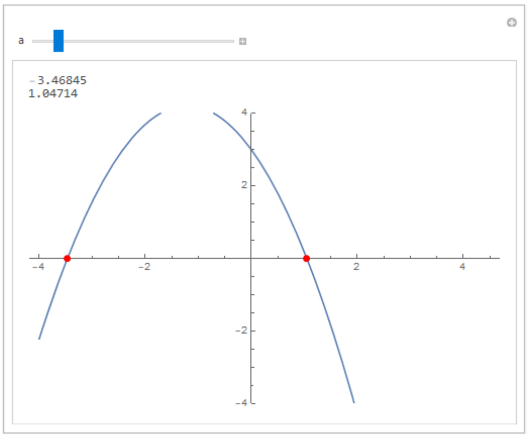
Příklad 3.2.5

$$ax^2 - 2x + 3$$

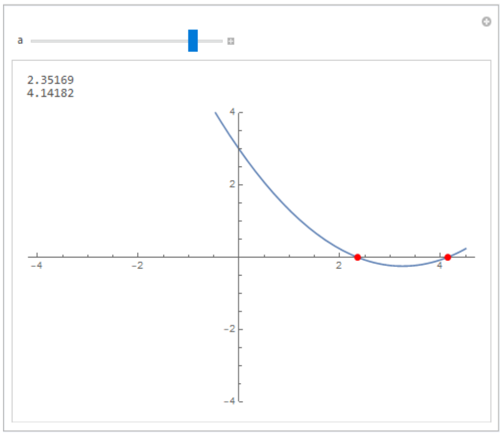
Uvažujme kvadratickou rovnici s parametrem a. Jak víme, znaménko tohoto parametru ovlivní, zda tato parabola bude mít větve směrem dolů nebo nahoru, a hodnota tohoto parametru ovlivňuje počet kořenů a hodnoty těchto kořenů samotných. V programu Mathematica můžeme tento graf nakreslit a můžeme také vypsat řešení této rovnice v závislosti na tom, jakou hodnotu parametru zvolíme. Níže je uvedeno, jak by to vypadalo:

```
In:=Manipulate[Module[{roots},roots={x,0}/.NSolve[a*x^2-2*x+3==0,x];Plot[a*x^2-
             2*x+3,{x,-3,3},PlotRange->{{-3,3},{-5,10}},Epilog-
             >{PointSize[Large],Red,Point[roots]},PlotLabel-
             >TableForm[{Style[ToString[Round[#,0.001]]&/@roots,Black]},TableAlig
             nments->Right],ImagePadding-
             >{{Automatic,10},{Automatic,Automatic}}]],{{a,1},-3,3,0.1}]
```

Grafy s různými parametry jsou znázorněny na obr. 19 a 20.



Obr. 19 graf s parametrem (1)



Obr. 20 graf s parametrem (2)

Další užitečné funkce pro řešení rovnic

Tento jazyk nabízí také mnoho dalších funkcí, které mohou výrazně zjednodušit řešení problémů, například rozklad mnohočlenu na násobky, zjednodušení rovnice, otevírání závorek a počítání počtu kořenů. Zde jsou některé z nich:

- Faktor: Funkce Faktor slouží k rozkladu polynomů na násobky.

```
In:= Factor[x^4-16]
Out:= (-2 + x) (2 + x) (4 + x^2)
```

- Simplify: Funkce Simplify v případě potřeby zjednodušuje výrazy včetně rovnic.

```
In:=Simplify[(x^2 + 2x + 1) / (x + 1)]
```

```
Out:= 1 + x
```

- Expand: Funkce Expand odstraňuje závorky ve výrazech, což může být užitečné při analýze.

```
Expand[(x + y)^3]
x^3 + 3 x^2 y + 3 x y^2 + y^3
```

- RootCount: Funkce RootCount určuje počet reálných kořenů rovnice v daném intervalu. Funkce bohužel není v naší verzi podporována z důvodu absence balíčku Algebra. Funkce však vypadá následovně:

```
In:= RootCount[x^2-4,{-10,10}]
```

- FindInstance: Funkce FindInstance najde hodnoty proměnných, které splňují zadanou rovnici nebo nerovnici.

```
FindInstance[x^2 + y^2 == 5 && x - y == 1, {x, y}, Reals]
{{x -> -1, y -> -2}}
```

- Eliminate: Funkce Eliminate zjednodušuje soustavu rovnic odstraněním zadaných proměnných.

```
Eliminate[{x^2 == 2+2x+y, x+y==0},y]
-x + x^2 == 2
```

4.2.2 ŘEŠENÍ SOUSTAV ROVNIC V PROGRAMU WOLFRAM MATHEMATICA

V programu Mathematica můžeme řešit nejen rovnice, ale také soustavy rovnic. Protože jsme se zabývali grafickou metodou řešení soustav rovnic v programu GeoGebra, v této části se podíváme na vizualizaci a funkčnost řešení soustav rovnic pomocí maticových metod.

Matice jsou v systému Mathematica reprezentovány jako seznamy, což umožňuje jejich intuitivní použití. Jakoukoli soustavu rovnic lze vyjádřit jako maticovou rovnici. Pro zápis seznamu jako matice můžeme použít příkaz MatrixForm.

$A \cdot x = b$ kde A je matice koeficientů, x je vektor neznámých a b je vektor volných členů.

Základní funkce pro maticové operace v programu Wolfram Mathematica:

- **Násobení matic:**

Potřebujeme například najít matici M: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}; M = A \cdot B$

Za tímto účelem můžeme zadat matice A a B jako seznam a poté použít příkaz "**Dot**", který je zodpovědný za násobení matic. Pomocí příkazu MatrixForm pak získáme naši matici M, nikoli seznam řádků.

```
In:=Q={{1, 2}, {3, 4}};
R={{5, 6}, {7, 8}};
M=Dot[Q,R];
MatrixForm[M]
```
Out:= $\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

- **Determinant matice:**

Nyní zjistíme determinant matice M. Je to velmi jednoduché, v programu Mathematica k tomu slouží příkaz "**Det**".

```
In:=Det[M]
Out:=4
```

$$|M| = 4$$

- **Inverzní matice:**

Pro nalezení inverzní matice k naší matici M si můžeme intuitivně uvědomit, že můžeme použít příkaz "**Inverse**".

```
In:=Inverse[M]//MatrixForm
```
Out:= $\begin{pmatrix} \frac{25}{2} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{43}{4} & \frac{19}{4} \end{pmatrix}$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{25}{2} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{43}{4} & \frac{19}{4} \end{pmatrix}$$

- **Nalezení transponované matice:**

Tento příkaz je jasný i intuitivně. K nalezení transponované matice použijeme příkaz "**Transpose**".

```
In:=Transpose[M]//MatrixForm
```
Out:= $\begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$

$$M^T = \begin{pmatrix} 19 & 43 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$$

- **Řešení soustav lineárních rovnic**

1)Máme-li jednoduchou soustavu lineárních rovnic, je nejjednodušší použít příkaz "**LinearSolve**[A, b]", kde A je matice koeficientů, x je vektor neznámých a b je vektor volných členů. Ukážeme si tento příkaz na příkladu soustavy:

$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{cases}; \; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Příkaz pro řešení tohoto systému by byl:

```
In:=LinearSolve[{{2,1},{1,-1}},{5,-1}]
```
Out:= $\{\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\}$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} \leftrightarrow x = \frac{4}{3}; y = \frac{7}{3}$$

2) **Gaussova metoda**

Podívejme se, jak v tomto programu fungují složitější metody řešení soustav rovnic, které byly popsány v části o maticových metodách řešení soustav. Začněme Gaussovou metodou. Jak si pamatujeme, v této metodě redukujeme rozšířenou matici, kterou tvoří matice koeficientů + sloupec volných členů, na tvar trojúhelníkové matice pomocí ekvivalentních změn, takže dostaneme jinou, jednodušší, soustavu. K použití této metody v programu Mathematica použijeme příkaz "RowReduce". A k vytvoření rozšířené matice použijeme následující příkaz: $\mathrm{Transpose}[\mathrm{Join}[\mathrm{Transpose}[A], \{b\}]]$. Ano, je to možná trochu složité, ale udělali jsme to jen proto, abychom vám ukázali, jak bude taková matice vypadat. V samotném řešení místo původního řádku matice A jednoduše zapíšeme řádek rozšířené matice.

Příklad 3.2.6:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

V tomto a všech dalších příkladech budeme používat stejnou soustavu rovnic, takže A, b a X zůstanou stejné.

```
In:=A={{2, 1, -1}, {-3, -1, 2}, {-2, 1, 2}};
b={8, -11, -3};
Transpose[Join[Transpose[A],{b}]]//MatrixForm
```
Out:= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

```
In:= Ab = {{2, 1, -1, 8}, {-3, -1, 2, -11}, {-2, 1, 2, -3}};
RowReduce[Ab]//MatrixForm
```
Out:= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Jak vidíme, příkaz "RowReduce" vytvořil z původní matice A nejen trojúhelníkovou matici, ale i jednotkovou matici, a také změnil další sloupec volných členů, což nám umožní snadno vyřešit tuto soustavu rovnic. Protože $x = b_1 = 2; y = b_2 = 3; z = b_3 = -1$.

3) **Metoda využívající inverzní matici**

Jak si pamatujeme z předchozí kapitoly:$X = A^{-1} \cdot b$. Pro nalezení matice kořenů X tedy můžeme použít výše uvedený příkaz "Inverse" pro nalezení inverzní matice a příkaz "Dot" pro její vynásobení maticí b.

```
In:= AInverse = Inverse[A];
Print["A^(-1):", Inverse[A]//MatrixForm];
{x, y, z} = Dot[AInverse, b];
Print["x= ", x];
Print["y= ", y];
Print["z= ", z];
```

Out:= A^(-1): $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

```
x= 2
y= 3
z= -1
```

4) **Cramerovo pravidlo**

Jak si pamatujete, tato metoda spočívá v tom, že determinant matice, v níž je jeden ze sloupců změněn na matici volných koeficientů, střídavě dělíme determinantem původní matice koeficientů, čímž získáme hodnoty proměnných. V tomto kódu jsme použili příkaz "**Amod**". Tento příkaz vytvoří kopii argumentu (v našem případě matice A), takže můžeme změnit jeden ze sloupců v této kopii, aniž bychom měnili samotnou matici A. Zde je vidět, jak vypadá kód a řešení:

```
In:= detA = Det[A];
Print["detA: ", detA];

Amod = A;
Amod[[All, 1]] = b;
detAx = Det[Amod];
Print["detAx: ", detAx];

Amod = A;
Amod[[All, 2]] = b;
detAy = Det[Amod];
Print["detAy: ", detAy];

Amod = A;
Amod[[All, 3]] = b;
detAz = Det[Amod];
Print["detAz: ", detAz];

x = detAx/detA;
y = detAy/detA;
```

```
z = detAz/detA;

Print["x=: ", x];
Print["y=: ", y];
Print["z=: ", z];
Out:=
detA: -1
detAx: -2
detAy: -3
detAz: 1
x=: 2
y=: 3
z=: -1
```

4.2.3 VÝHODY A NEDOSTATKY POUŽÍVÁNÍ VÝPOČETNÍCH NÁSTROJŮ

V naší práci jsme se zabývali pouze dvěma programy: Geogebra a Wolfram Mathematica. Důvodem je to, že pomocí těchto dvou základních programů již můžete mít k dispozici obrovské množství funkcí pro řešení téměř jakéhokoli matematického problému. Je však třeba poznamenat, že v dnešní době existuje obrovské množství takových programů a každý z nich poskytuje něco jiného, takže každý člověk si může najít něco, co mu bude vyhovovat. Některé z těchto programů vyžadují znalosti programování a některé stačí jen stáhnout do telefonu.

Jaké jsou však výhody a nevýhody používání těchto programů pro sebe a při výuce ostatních? Používání výpočetních nástrojů, jako je software pro symbolické výpočty (např. WolframAlpha, Maple, Mathematica), grafické kalkulátory, počítačové algebraické systémy (CAS), webové aplikace a online zdroje má při řešení rovnic a jejich soustav a při výuce tohoto tématu ve školách a na univerzitách své výhody i omezení.

Výhody používání výpočetních nástrojů:

- Větší rychlost a přesnost: Výpočetní nástroje mohou řešit rovnice rychleji a s větší přesností než ručně, zejména u složitých rovnic a soustav.
- Vizualizace: Grafické kalkulačky a software pro symbolické výpočty mohou vizualizovat grafy funkcí, což usnadňuje pochopení a analýzu matematických pojmů.
- Automatizované kroky řešení: Mnoho výpočetních nástrojů poskytuje podrobné kroky řešení rovnic, což studentům pomáhá pochopit postup řešení a lépe si osvojit látku.

- Práce s velkými objemy dat: Některé výpočetní nástroje jsou schopny pracovat s velkými objemy dat, což jim umožňuje řešit složité problémy a analyzovat různé scénáře.

Nedostatky při používání výpočetních nástrojů:

- Závislost na technologiích: Používání počítačových programů vyžaduje počítač nebo zařízení s přístupem k internetu, který může být v některých vzdělávacích prostředích omezený.
- Nedostatečné porozumění postupu řešení: Studenti se mohou spoléhat na výpočetní nástroje, aniž by plně porozuměli matematickým pojmům a postupům řešení rovnic.
- Omezení v osvojování dovedností: Používání výpočetních nástrojů může bránit rozvoji dovedností manuálního řešení rovnic, které mohou být důležité pro některé oblasti matematiky a inženýrství.
- Omezení dostupnosti a ceny: Některé výpočetní nástroje mohou být drahé nebo nedostupné pro všechny studenty a instituce.

Výuka pomocí výpočetních nástrojů:

- Integrace do výukového procesu: Učitelé mohou využívat výpočetní nástroje jako součást výukového procesu, aby doplnili tradiční výukové metody a poskytli studentům další zdroje pro výuku matematiky.
- Rozvoj technologických dovedností: Používání výpočetních nástrojů při studiu pomáhá studentům rozvíjet dovednosti v oblasti moderních technologií, které mohou být užitečné v jejich budoucí kariéře.
- Podpora studentů s různou úrovní matematických znalostí: Výpočetní nástroje mohou být užitečné pro individualizaci výuky a podporu studentů s různou úrovní matematických znalostí.
- Důraz na pochopení pojmů: Je důležité vyvážit používání výpočetních nástrojů s důrazem na pochopení matematických pojmů a postupů řešení rovnic. Vyučující by měli studenty podporovat v praktickém řešení problémů a kritickém myšlení.

ZÁVĚR

Cílem této bakalářské práce bylo shrnout metody řešení rovnic a jejich soustav. Práce byla koncipována jako průvodce nejen pro odborníky v matematice, ale i pro učitele, kteří v ní mohou najít informace téměř pro všechny stupně školního vzdělávání, a také pro samotné studenty, kteří chtějí najít pokročilé informace, které ve škole nemusí dostávat. Proto jsem se v této práci občas vyhýbal odborným termínům a snažil se zjednodušit některé definice. Práce je rozdělena do 3 kapitol, z nichž každá ideově navazuje na předchozí, ale zároveň se zabývá vlastním samostatným tématem.

V první kapitole naší práce jsme se seznámili s hlavními typy rovnic a metodami jejich řešení. To nám umožnilo seznámit se s rozmanitostí přístupů k řešení rovnic a pochopit jejich výhody a omezení.

V druhé kapitole jsme se zabývali metodami řešení soustav rovnic. Studovali jsme číselné metody pro řešení soustav lineárních rovnic, popsali jsme základní pojmy v tématu matic a uvedli přehled metod pro řešení soustav rovnic, které je využívají, jako je Gaussova metoda a Cramerova metoda. Tento přehled nám umožnil pochopit, které metody jsou v různých situacích nejefektivnější a jak je lze použít v praxi.

Ve třetí kapitole zkoumali použití počítačových programů, jako jsou GeoGebra a Wolfram Mathematica, k řešení rovnic a soustav rovnic. Ukázali jsme, že tyto počítačové nástroje s příjemným uživatelským prostředím a obrovskou použitelností umožňují efektivně a přesně řešit matematické problémy, vizualizovat je a lépe jim porozumět. To otevírá nové perspektivy ve výzkumu a výuce matematiky.

Na závěr bych chtěl říci, že studium metod řešení rovnic a soustav rovnic hraje klíčovou roli při budování matematických dovedností a rozvoji analytického myšlení studentů. Pochopení těchto metod pomáhá studentům nejen hlouběji porozumět matematickým pojmům, ale také rozvíjí jejich schopnost analyzovat a řešit složité problémy. Tyto dovednosti jsou stále žádané jak v akademickém prostředí, tak v profesní kariéře, a proto je studium metod řešení rovnic a soustav rovnic důležitou součástí matematického vzdělávání. Tento článek se nezabývá složitějšími typy rovnic (např. diferenciálními rovnicemi) a metodami jejich řešení (např. Newtonova metoda, numerické metody). Zpracování těchto typů může vést k další, hlubší výzkumné práci.

RESUMÉ

Tato práce popisuje různé metody řešení rovnic a jejich soustav, včetně využití výpočetních nástrojů.

V úvodu jsou popsány cíle této práce, její význam a ostatní hlavní části.

Druhá kapitola "Typy rovnic a základní metody jejich řešení " obsahuje základní pojmy související s řešením rovnic, základní typy rovnic (lineární, vyššího stupně, exponenciální atd.) a základní metody jejich řešení.

Třetí kapitola "Soustavy rovnic" popisuje soustavy rovnic, metody jejich řešení (substituční metoda, ekvivalentní úpravy, substituční metoda a další). Kapitola obsahuje také základní pojmy týkající se matic a popisuje metody řešení rovnic, které využívají matice (Gaussova metoda, Cramerovo pravidlo a metoda inverzní matice).

Čtvrtá kapitola "Používání výpočetních nástrojů k řešení rovnic" popisuje využití počítačových programů Geogebra a Wolfram Mathematica k řešení rovnic a jejich soustav. V části věnované programu Geogebra je popsána i grafická metoda řešení, která dosud nebyla popsána. V této kapitole je zároveň uvedena diskuse o využití těchto programů ve vyučovacím procesu, o jeho výhodách a nevýhodách.

Závěr je analýzou této práce.

SEZNAM LITERATURY

[1] BEČVÁŘ, J. Lineární algebra. Vyd. 3. Praha: Matfyzpress, 2005. ISBN 80-86732-57-6.

[2] BICAN, L. Lineární algebra a geometrie. Vyd. 2. Praha: Academia, 2009. ISBN 978-80-200-1707-9.

[3] DOSTÁLOVÁ M., GARDAVSKÁ E., HAMŘÍKOVÁ R., JANKŮ V., TANNENBERGOVÁ M. Základy matematiky. Technická univerzita ostrava, 2008. ISBN 978- 80-248-1295-3

[4] ŠIŠLER, M. O řešení algebraických rovnic. Mladá fronta. 1966, s. 5-20.

[5] Švrček, J. Metody řešení soustav algebraických rovnic. Univerzita Palackého v Olomouci, 2012. 978-80-244-3228-1

[6] WOLFRAM, S. An elementary introduction to the Wolfram Language/Stephen Wolfram. Champaign, IL, USA: Wolfram Media, 2015. ISBN 978-1-944183-01-1.

[7] GeoGebra Manual: The official manual of GeoGebra. [online]. International GeoGebra Institute, 2016. Dostupné z https://wiki.geogebra.org/GeoGebra-en-Manual.pdf

[8] ДОЛЯ П. Mathematica для математиков. Харьковский Национальный Университет механико – математический факультет 2015 г. Dostupné z http://geometry.karazin.ua/resources/documents/20150217125800_2fe9e7bfd.pdf

[9] КАРПЕНКО Н. Нестандартные методы решения квадратных уравнений. 2017

[10] САДОВНИЧИЙ Ю., ТУРКМЕНОВ Р. Использование интерактивной геометрической среды GeoGebra при проблемном обучении на примере решения нелинейных систем уравнений с двумя переменными. Dostupné z: https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-interaktivnoy-geometricheskoy-sredy-geogebra-pri-problemnom-obuchenii-na-primere-resheniya-nelineynyh-sistem-uravneniy-s

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ