ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

VYUŽITÍ VÝPOČETNÍ TECHNIKY PŘI ŘEŠENÍ SOUSTAV ROVNIC VE VÝUCE MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jan Kuneš

Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: Mgr. et Mgr. Soňa Königsmarková

Plzeň, 2024

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni dne 25. dubna 2024

....

vlastnoruční podpis

Rád bych zde poděkoval Mgr. et Mgr. Soně Königsmarkové za vedení mé bakalářské práce, za ochotu a cenné rady.

OBSAH

SEZNAM ZKRATEK

SŠ – střední škola

ZŠ – základní škola

Úvod

V dnešní době je výpočetní technologie nepostradatelným nástrojem v mnoha oblastech lidské činnosti. V oblasti matematiky a vzdělávání hraje zvláště důležitou roli. Velký rozvoj informačních technologií, kterého jsme svědky v posledních desetiletích, otevřel nové možnosti v oblasti vzdělávání, zejména v matematice. Díky výpočetní technologii jsou dnes žáci schopni lépe porozumět a aplikovat složitější matematické koncepty, včetně řešení soustav rovnic. Výpočetní technologie poskytuje žákům a studentům efektivní a interaktivní prostředí pro zkoumání matematických problémů, což výrazně zlepšuje jejich porozumění matematickým konceptům a metodám.

Téma výpočetní technologie je mi velice blízkým, od útlého věku jsem obdivoval nejnovější moderní technologie té doby. V posledních pár letech studia jsem začal spojovat svůj zájem o technologii s matematikou, což mě přivedlo k objevování matematických softwarů a jejich využití.

Cílem práce je čtenáře seznámit s typy soustav rovnic řešené na ZŠ a SŠ. Dalším cílem je čtenářům představit matematické softwary a jejich využití nejen v rámci výuky matematiky.

V úvodní části práce jsou představeny typy soustav rovnic řešené na ZŠ a SŠ. Následně se práce zaměřuje na popis matematických softwarů a jejich využití ve výuce. V rámci této práce byly uvedeny základní typy aplikačních úloh vedoucí na řešení pomocí soustavy rovnic. K těmto typům aplikačním úloh bylo vytvořeno několik příkladů i s řešením. Tyto příklady mohou sloužit učitelům matematiky jako podpůrný materiál ve výuce. V závěrečné části práce byl vytvořen dotazník, který zjišťoval povědomí žáků na základní škole o matematickém softwaru.

Práce by měla také motivovat současné pedagogy k začlenění matematického softwaru do své výuky.

1 SOUSTAVY ROVNIC

Soustava rovnic představuje soubor dvou nebo více rovnic, které mají společná řešení. Tento matematický koncept je základním nástrojem pro modelování a řešení situací, ve kterých se vyskytují vzájemně závislé proměnné. Soustavy rovnic nalezneme v různých oblastech, včetně fyziky, chemie, ekonomie, inženýrství a dalších přírodních a technických disciplín.

Obecnou soustavou lineárních rovnic o libovolném počtu rovnic m a libovolném počtu neznámých n rozumíme

$$
\begin{gathered}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.
\end{gathered}
$$

Koeficienty soustavy jsou dány množinou příslušných koeficientů

$$A = (a_{ij});\ i\ =\ 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$$

a sloupcem pravých stran $b = (b_1,\dots,b_m)$. Koeficienty soustavy budou standardně reálná čísla. Řešením soustavy s reálnými koeficienty se nazývá libovolná n-tice reálných čísel $x = (x_1,\dots,x_n)$ pro kterou jsou všechny rovnice soustavy splněny. (Souček 2011)

V reálném světě se soustavy rovnic vyskytují v mnoha situacích a oborech. Zde jsou některé příklady:

- Inženýrství: Při návrhu a analýze složitých systémů, jako jsou stavby mostů, konstrukce budov, elektrické obvody, aerodynamika letadel nebo mechanika materiálů, se často používají soustavy rovnic.
- Ekonomie: Při modelování ekonomických situací, jako jsou investiční portfolia, optimalizace výroby, rozhodování v oblasti marketingu, se využívají soustavy rovnic.
- Fyzika: Při popisu pohybu těles, elektromagnetických jevů, tepelných procesů nebo kvantové mechaniky jsou často používány fyzikální zákony vyjádřené pomocí soustav rovnic.

- Biologie: Při modelování biologických procesů, jako je šíření nemocí, růst populace, interakce mezi druhy nebo genetické dědictví, mohou být využity soustavy rovnic.
- Chemie: Při studiu chemických reakcí, rovnováhy látek, kinetiky reakcí nebo výpočtu chemických rovnováh+ se často pracuje se soustavami rovnic.
- Finance: Při analýze finančních trhů, modelování chování akciových trhů, optimalizaci portfolia nebo řešení úrokových sazeb mohou být použity soustavy rovnic.

Soustavy rovnic jsou klíčovým nástrojem pro modelování a řešení různorodých situací v reálném světě a mají široké uplatnění v různých disciplínách.

S prvními zmínkami o soustavách rovnic se dozvídají žáci v 9. ročníku základní školy. Žáci se seznamují se základními principy, postupy řešení soustav rovnic a aplikací soustav rovnic na slovní úlohy, které zpravidla představují problém z reálného života.

V rámci řešení soustav rovnic se často setkáváme s pojmem ekvivalentní úpravy. Ekvivalentní úpravy jsou základním nástrojem pro řešení soustav rovnic na základní škole. Tyto úpravy umožňují transformovat rovnice tak, aby se zjednodušily nebo aby se změnily na rovnice s ekvivalentními řešeními. Mezi základní ekvivalentní úpravy patří:

- přičtení/odečtení stejného výrazu,
- násobení/dělení stejným nenulovým výrazem,
- výměna levé a pravé strany rovnice,
- přeformulování rovnice (rozklad výrazů, zjednodušení složitějších výrazů).

1.1 LINEÁRNÍ ROVNICE SE DVĚMA NEZNÁMÝMI

Lineární rovnicí se dvěma neznámými je každá rovnice, kterou je možné převést pomocí ekvivalentních úprav na tvar

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1,$$

kde $a_{11}, a_{12} \in \mathbb{R} - \{0\};\ b_1 \in \mathbb{R}$ a x, y označují neznámé. Řešením této rovnice je množina uspořádaných dvojic $[x; y]$ (Janečková a kol., 2022). Řešení zapisujeme do hranatých závorek. Počet uspořádaných dvojic vyhovující dané rovnici je nekonečně mnoho. Vyřešením jedné z uspořádaných dvojic docílíme zvolením a dosazením libovolného reálného čísla za jednu z neznámých a následným dopočtením hodnoty pro druhou neznámou.

Příklad lineární rovnice se dvěma neznámými:

$$4x - y = 20,$$

kde je $a = 4, b = 1$ a $c = 20$. Řešením jsou např. uspořádané dvojice $[5; 0], [8; 12], [3; -8], \ldots$.

1.2 SOUSTAVA DVOU LINEÁRNÍCH ROVNIC O DVOU NEZNÁMÝCH

Soustavou dvou lineárních rovnic o dvou neznámých rozumíme rovnice, které po ekvivalentních úpravách můžeme převést do tvaru

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2,$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R} - \{0\}$; $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ a x, y jsou neznámé. Řešením je uspořádaná dvojice $[x; y]$, která vyhovuje daným rovnicím.

Příklad soustavy lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$x + y = 8,$$
$$2x - y = 10,$$

kde $a_{11} = 1, a_{12} = 1, b_1 = 8, a_{21} = 2, a_{22} = -1$ a $b_2 = 10$.

Řešení soustavy rovnic hledáme pomocí metod. Na základní škole se setkáme s dosazovací metodou, sčítací metodou a srovnávací metodou. V níže uvedené kapitole 2.1 jsou tyto metody důkladně popsány. V rámci střední školy se setkáme s řešením soustavy rovnic pomocí grafické metody, této metodě je věnována kapitola 3.1.

1.3 SOUSTAVA O „N“ NEZNÁMÝCH A „M“ LINEÁRNÍCH ROVNIC

Tato kapitola pojednává o obecném tvaru soustavy rovnic o n neznámých a m lineárních rovnic. Dále se tato kapitola zabývá vztahem mezi čísly n a m.

Obecnou soustavou lineárních rovnic o libovolném počtu rovnic m a libovolném počtu neznámých n rozumíme

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2,$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m.$$

Koeficienty soustavy jsou dány množinou příslušných koeficientů

$$A = (a_{ij});\ i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n$$

a sloupcem pravých stran $b = (b_1, \dots, b_m)$. Koeficienty soustavy budou standardně reálná čísla. Řešením soustavy s reálnými koeficienty se nazývá libovolná n-tice reálných čísel $x = (x_1, \dots, x_n)$ pro kterou jsou všechny rovnice soustavy splněny. (Souček 2011)

Nyní budeme řešit vzájemný vztah čísel n (počet neznámých) a m (počet rovnic), přičemž aby se jednalo o soustavu rovnic o dvou a více neznámých musí platit $n \in \mathbb{N} - \{1\}, m \in \mathbb{N} - \{1\}$.

Uvažujme, že jednotlivé rovnice soustavy nejsou navzájem lineárně závislé. Z tohoto důvodu nám vypadavá možnost $m > n$.

1. $m = n$

Jestliže je počet rovnic roven počtu neznámých, dostáváme právě jedno číselné řešení. Řešením je uspořádaná n-tice $[x_i, \dots, x_n]$.

2. $m < n$

Jestliže je počet rovnic v soustavě menší, než počet neznámých znamená to, že řešení bude závislé na parametru. Počet parametrů označíme p. Ze vztahu $p = n - m$ dostáváme počet parametrů. Nejméně můžeme dostat $p = 1$, nejvíce $p = n - 2$. Jelikož abychom mohli hovořit o soustavě, jsou potřeba alespoň dvě rovnice. Dále se počet parametrů odvíjí od počtu neznámých právě v těchto dvou rovnicích.

2 TYPY SOUSTAV ROVNIC ŘEŠENÝCH NA ZŠ

Na základní škole se žáci obvykle setkávají s jednoduššími typy soustav rovnic, které obsahují zpravidla dvě proměnné a jsou lineární. Nejčastěji se řeší soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Žáci se seznamují se se základními metodami pro řešení soustav.

Soustavy rovnic se mohou objevit při řešení některých slovních úloh. Slovní úlohy jsou obvykle formulovány tak, aby žákům představily konkrétní situaci nebo problém, který je třeba vyřešit. V mnoha případech se tyto úlohy dají převést do podoby soustavy rovnic, což umožňuje matematické řešení pomocí vhodných metod. Např. úlohy o směsích či roztocích vedou k vytvoření soustavy rovnic popisující podíl jednotlivých složek. Stejně tak úloha o pohybu dvou těles může být zpracována pomocí soustavy rovnic. Tímto způsobem lze slovní úlohy realizovat do matematických výrazů a efektivně řešit pomocí soustav rovnic, což umožňuje studentům lépe porozumět matematickým konceptům a jejich aplikacím v reálném světě. Slovním, speciálně aplikačním, úlohám je věnována kapitola 6. Následující kapitola se věnuje metodami řešení soustav rovnic.

2.1 METODY ŘEŠENÍ SOUSTAVY ROVNIC

Metody řešení soustavy rovnic jsou plánované postupy, které aplikujeme na dané příklady v praxi. Mezi tyto metody se řadí dosazovací metoda, sčítací (popř. odečítací) metoda nebo srovnávací metoda. Všechny tyto metody mají své využití v určitých situací. U každé metody je popsán její teoretický postup, je uvedeno, kdy je vhodné danou metodu využít, a následně pomocí této metody je vyřešen příklad.

2.1.1 DOSAZOVACÍ METODA

Dosazovací metoda je jednou ze základních metod pro řešení soustavy rovnic. Princip spočívá v tom, že se jedna rovnice převede na tvar, ve kterém je jedna proměnná vyjádřena pomocí druhé proměnné. Toto vyjádření se následně dosadí do druhé rovnice soustavy, čímž vznikne jednodušší rovnice s jednou proměnnou, kterou lze vyřešit pomocí ekvivalentních úpravy. Tento postup se často používá u soustav rovnic, kde lze jednoduše vyjádřit jednu proměnnou pomocí druhé.

Postup řešení soustavy rovnic pomocí dosazovací metody:

1. Z jedné z rovnic si vyjádříme námi zvolenou neznámou.
2. Takto vyjádřenou neznámou dosadíme za stejnou neznámou v druhé rovnici.
3. Vyřešíme nově získanou rovnici o jedné neznámé pomocí ekvivalentních úprav a tím dostaneme hodnotu této neznámé.
4. Vypočtenou hodnotu dosadíme do vyjádření z prvního kroku a tím dostaneme hodnotu druhé neznámé.
5. Provedeme zkoušku, tím že dosadíme vypočtené hodnoty za neznámé v původních rovnicích.
6. Zapíšeme řešení, kterým je uspořádaná dvojice.

Ukázkový příklad:

$$\mathbf{2x + y = 7}$$

$$\mathbf{5x - 3y = 1}$$

Z první rovnice si vyjádříme y.

$$y = 7 - 2x$$

Takto vyjádřenou neznámou dosadíme do druhé rovnice.

$$5x - 3(7 - 2x) = 1$$

Nyní vyřešíme rovnici pro neznámou x pomocí ekvivalentních úprav.

$$5x - 21 + 6x = 1$$

$$-21 + 11x = 1 \ /+21$$

$$11x = 22 \ /:11$$

$$\boldsymbol{x = 2}$$

Vypočtenou hodnotu neznámé x dosadíme do vyjádření y z prvního kroku.

$$y = 7 - 2 \cdot 2$$

$$\boldsymbol{y = 3}$$

Nyní provedeme zkoušku dosazením $x = 2$ a $y = 3$ do obou původních rovnic. Jestliže námi spočtené hodnoty jsou řešením soustavy, musí nastat rovnost mezi levou a pravou stranou, jak v první, tak i v druhé rovnici. Pokud si označíme levou stranu první rovnice jako L_1 a pravou jako P_1 a stejně pro druhou rovnici L_2 a P_2. Poté musí platit následující.

$$L_1 = P_1$$

$$L_2 = P_2$$

Dosazením do první rovnice $x = 2$ a $y = 3$ získáme:

$$L_1 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

$$P_1 = 7$$

$$L_1 = P_1$$

Dosazením do druhé rovnice $x = 2$ a $y = 3$ dostaneme:

$$L_2 = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 10 - 9 = 1$$

$$P_2 = 1$$

$$\boldsymbol{L_2 = P_2}$$

Ověřili jsme správnost zkouškou a tím pádem řešením dané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x; y] = [2; 3]$.

Dosazovací metoda se nejčastěji využije v případě, kdy jeden z koeficientů u některé z neznámých je *1* nebo *-1*. V tomto případě se vše ostatní převede na druhou stranu než námi vyjadřovaná neznámá (popř. když je koeficient -1, se pouze rovnice číslem -1 vynásobí). Při dosazení do druhé rovnice se nebudou v rovnici objevovat zlomky a tím je počítání mnohem jednodušší.

2.1.2 SČÍTACÍ METODA

Sčítací metoda je další základní metodou pro řešení soustav rovnic. Princip spočívá v tom, že rovnice se sčítají (či odečítají) tak, aby se jedna neznámá eliminovala a bylo možné dále vypočítat hodnotu druhé neznámé. Tato metoda je efektivní zejména při soustavách, ve kterých lze jednu z proměnných eliminovat přímým sčítáním (či odečítáním) rovnic. V některých případech je nejdříve potřeba jednu či obě rovnice upravit vynásobením reálným číslem, poté až můžeme rovnice sčítat (či odečítat), abychom vyrušili jednu neznámou.

Postup řešení soustavy rovnic pomocí sčítací metody:

1. Rovnice upravíme tak, aby koeficienty u jedné neznámé v první a ve druhé rovnici byla opačná čísla. Jinak tato metoda nemá smysl. Většinou tato úprava probíhá vynásobením jedné či druhé rovnice číslem tak, aby koeficienty byly opačná čísla.
2. Sečteme obě rovnice a získáme jednu rovnici o jedné neznámé. Opět označíme levou stranu první rovnice L_1 a pravou P_1 a stejně pro druhou rovnici L_2 a P_2. Můžeme tento krok popsat následovně:

$$L_1 + L_2 = P_1 + P_2.$$

3. Vyřešíme nově získanou rovnici o jedné neznámé pomocí ekvivalentních úprav a tím dostaneme hodnotu jedné neznámé.
4. Vypočtenou hodnotu dosadíme do libovolné původní rovnice a vypočítáme hodnotu druhé neznámé.
5. Provedeme zkoušku správnosti tím, že dosadíme obě vypočtené hodnoty za neznámé v původních rovnicích.
6. Zapíšeme řešení, kterým je uspořádaná dvojice.

Ukázkový příklad:

$$\boldsymbol{x - 2y = 5}$$

$$\boldsymbol{3x + 4y = -5}$$

První rovnici vynásobíme číslem 2, aby koeficienty u neznámé y byly v rovnicích opačné.

$$x - 2y = 5 \ /\cdot 2$$

$$2x - 4y = 10$$

Nyní můžeme sečíst levé a pravé strany obou rovnic. Následuje vyrušení neznáme y, řešíme jednu rovnici pro jednu neznámou x.

$$2x - 4y = 10$$

$$3x + 4y = -5$$

$$2x - 4y + 3x + 4y = 10 + (-5)$$

$$5x = 5 \; /:5$$

$$\boldsymbol{x = 1}$$

Nyní hodnotu x dosadíme do libovolné původní rovnice a vyřešíme nově vzniklou rovnici pro neznámou y.

$$1 - 2 \cdot y = 5 \; /-1$$

$$-2y = 4 \; /:(-2)$$

$$\boldsymbol{y = -2}$$

Provedeme zkoušku dosazením $x = 1; \; y = -2$.

$$L_1 = 1 - 2 \cdot (-2) = 1 + 4 = 5$$

$$P_1 = 5$$

$$L_1 = P_1$$

$$L_2 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = 3 - 8 = -5$$

$$P_2 = -5$$

$$\boldsymbol{L_2 = P_2}$$

Řešením této soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x; y] = [1; -2]$.

Sčítací metoda se nejčastěji využívá, pokud již zadané rovnice obsahují opačné koeficienty u některé z neznámých. Při takovéto situaci se nemusí rovnice nijak upravovat a následuje rovnou krok sčítání rovnic.

<u>Odečítací metoda</u>

Odečítací metoda je obdobná sčítací. Tato metoda se nejlépe využije, pokud v zadání soustavy rovnic máme stejné koeficienty u stejné neznámé v obou rovnicích. Metoda by postupovala následovně:

$$L_1 - L_2 = P_1 - P_2.$$

Tímto bychom dostali rovnici o jedné neznámé a dále bychom postupovali identicky jako u sčítací metody.

Ukázkový příklad:

$$\boldsymbol{3x + 2y = 5}$$

$$\boldsymbol{-x + 2y = 1}$$

Odečteme druhou rovnici od první rovnice a dopočítáme vzniklou rovnici pro neznámou x.

$$3x + 2y - (-x + 2y) = 5 - 1$$

$$3x + 2y + x - 2y = 4$$

$$4x = 4 \ /: 4$$

$$\boldsymbol{x = 1}$$

Dosazením $x = 1$ do libovolné původní rovnice vznikne rovnice pro výpočet neznáme y.

$$3 \cdot 1 + 2y = 5 \ /-3$$

$$2y = 5 - 3 \ /: 2$$

$$\boldsymbol{y = 1}$$

Nyní ověříme správnost počínání pomocí zkoušky.

$$L_1 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 + 2 = 5$$

$$P_1 = 5$$

$$\boldsymbol{L_1 = P_1}$$

$$L_{\mathbf{2}} = -(1) + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$$

$$P_2 = 1$$

$$\boldsymbol{L_2 = P_2}$$

2.1.3 SROVNÁVACÍ METODA

Srovnávací metoda je další technikou vedoucí k řešení soustavy rovnic. Její podstatou je srovnání jedné neznáme, která je vyjádřená pomocí druhé neznáme, z obou rovnic. Tato metoda je užitečná v případech, kdy v obou rovnicích máme stejné koeficienty u stejné neznáme.

Postup řešení soustavy rovnic pomocí srovnávací metody:

1. Zvolíme si jednu neznámou a vyjádříme ji z obou rovnic.
2. Tyto vyjádřené výrazy dáme do rovnosti a tím nám vznikne rovnice o jedné neznámé.
3. Vyřešíme nově získanou rovnici o jedné neznámé pomocí ekvivalentních úprav a tím dostaneme hodnotu této neznámé.
4. Vypočítanou hodnotu dosadíme do libovolné rovnice a vypočítáme hodnotu druhé neznámé.
5. Provedeme zkoušku správnosti řešení tím, že dosadíme obě hodnoty za neznámé v původních rovnicích.
6. Zapíšeme řešení, kterým je uspořádaná dvojice

Ukázkový příklad:

$$\boldsymbol{x - y = 5}$$

$$\boldsymbol{x + 2y = 8}$$

Vyjádříme neznámou x z obou rovnic.

$$x = 5 + y$$

$$x = 8 - 2y$$

Vyjádřené výrazy dáme do rovnosti, provedeme ekvivalentní úpravy a vypočteme hodnotu pro neznámou y.

$$5 + y = 8 - 2y \ /{+2y}$$

$$5 + y + 2y = 8 \ /{-5}$$

$$3y = 8 - 5$$

$$3y = 3 \ /{:3}$$

$$\boldsymbol{y = 1}$$

Vypočtenou hodnotu y dosadíme do libovolné rovnice. Zvolíme první rovnici a dopočteme hodnotu neznámé x.

$$x - 1 = 5 \;/{+1}$$

$$x = 5 + 1$$

$$\boldsymbol{x = 6}$$

Provedeme zkoušku.

$$L_1 = 6 - 1 = 5$$

$$P_1 = 5$$

$$L_1 = P_1$$

$$L_2 = 6 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8$$

$$P_2 = 8$$

$$\boldsymbol{L_2 = P_2}$$

Zkouška proběhla v pořádku, řešením zadané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x; y] = [6; 1]$.

2.2 ŘEŠENÍ SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

Při řešení soustavy rovnic mohou nastat tři případy.

1. Řešením soustavy rovnic je jedna uspořádaná dvojice $[x; y]$.
2. Soustava rovnic nemá řešení.
3. Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

<u>Soustava rovnic má jedno řešení</u>

Tento případ nastane, pokud nám pro dvojici x a y vyjdou reálná čísla. Tato uspořádaná dvojice je právě jedním správným řešením dané soustavy rovnic.

Řekneme, že řešením soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x; y]$. Jako ukázkový příklad si můžeme uvést příklad z kapitoly 3.1.2 o sčítací metodě.

$$\boldsymbol{x - 2y = 5}$$

$$\boldsymbol{3x + 4y = -5}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{x = 1; y = -2}$$

Řešením je uspořádaná dvojice $[x; y] = [1; -2]$.

<u>Soustava rovnic nemá řešení</u>

Tento případ nastane, pokud po úpravě soustavy rovnic na rovnici o jedné neznáme dostaneme neplatnou rovnost. Znamená to, že soustava rovnic nemá řešení. Po úpravách vychází

$$0x = k, k \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ nebo}$$

$$0y = k, k \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Ukázkový příklad:

$$\boldsymbol{x + 2y = 7}$$

$$\boldsymbol{2x + 4y = 5}$$

Využijeme sčítací metodu, první rovnici vynásobíme číslem *-2*. Dostaneme následující:

$$-2x - 4y = -14,$$

$$2x + 4y = 5,$$

$$-2x - 4y + 2x + 4y = -14 + 5,$$

$$\boldsymbol{0x + 0y = -9}.$$

Tato rovnost nemůže pro žádnou uspořádanou dvojici $[x; y]$ nikdy nastat, proto o dané soustavě rovnic řekneme, že nemá řešení.

Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení

Dostaneme-li po aplikování metody na soustavu rovnic lineární rovnici o jedné neznáme, při které rovnost platí ($0x = 0$ nebo $0y = 0$), znamená to, že soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení.

Ukázkový příklad:

$$\boldsymbol{x + 3y = 5}$$

$$\boldsymbol{2x + 6y = 10}$$

Zde můžeme využít odečítací metodu, první rovnici vynásobíme číslem 2.

$$2x + 6y = 10$$

$$2x + 6y = 10$$

Je zřejmé, že jedna rovnice je násobkem druhé.

$$(2x + 6y) - (2x + 6y) = 10 - 10$$

$$2x + 6y - 2x - 6y = 0$$

$$\boldsymbol{0x + 0y = 0}$$

Tato rovnost nastane vždy (pro jakoukoliv uspořádanou dvojici $[x; y]$), proto o dané soustavě rovnic řekneme, že má nekonečně mnoho řešení. Jednu z nekonečně mnoha uspořádaných dvojic získáme zvolením libovolného reálného čísla za jednu z neznámých a následné dopočtení druhé neznámé z původní rovnice. V našem případě by mohla být řešením uspořádaná dvojice např. $[2; 1]$.

Obecně můžeme upořádanou dvojici vyjádřit pomocí jedné neznámé. Z rovnice si vyjádříme jednu z neznámých.

$$x + 3y = 5 \ /-x$$

$$3y = 5 - x \ /:3$$

$$y = \frac{5 - x}{3}$$

Můžeme tedy napsat obecně, že řešením je upořádaná dvojice $[x; \frac{5-x}{3}]$. V tomto případě stačí jen libovolně zvolit hodnotu za x a následně dopočítat hodnotu y.

Obdobným způsobem při vyjádření druhé neznámé.

$$x + 3y = 5 \ /{-3y}$$

$$x = 5 - 3y$$

Obecný tvar řešení je $[5 - 3y; y]$. Zde dosazujeme libovolné reálné číslo za y a dopočtením dostaneme hodnotu x.

3 TYPY SOUSTAV ROVNIC ŘEŠENÝCH NA SŠ

Na středních školách se mimo soustav lineárních rovnic setkáme také s kombinací jedné kvadratické a jedné lineární rovnice, přičemž obě rovnice obsahují dvě neznámé. Řešením této soustavy rovnic budou všechny uspořádané dvojice, které vyhovují zadaným dvou rovnicím.

Na střední škole se žáci také setkávají s grafickou metodou řešení. Tato metoda se dá použít jak při řešení jednodušších lineárních rovnic, tak i při řešení soustav kvadratické a lineární rovnice.

3.1 GRAFICKÁ METODA

Grafická metoda při řešení soustavy rovnic je jedním z intuitivních přístupů v matematice, který využívá grafické reprezentace rovnic k nalezení jejich průsečíků, tedy společných řešení. Tato metoda je vhodná pro jednoduché soustavy a umožňuje vizuální porozumění vztahům mezi jednotlivými rovnicemi. Princip spočívá v převodu rovnic do grafu, kde každá rovnice představuje přímku nebo křivku. Je však důležité si uvědomit, že tato metoda není vždy přesná a efektivní pro složitější soustavy nebo v případě nepřesných grafických reprezentací.

V principu jde o uvažování o rovnici jako o předpisu funkce/přímky y v závislosti na proměnné x. Pokud předpokládáme obecný tvar lineární rovnice o dvou neznámých jako

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1,$$

poté si můžeme vyjádřit neznámou y následovně:

$$a_{12}y = b_1 - a_{11}x,$$

$$y = \frac{b_1 - a_{11} \cdot x}{a_{12}} = \frac{b_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x.$$

Pokud označíme $\frac{b_1}{a_{12}} = q$ a $-\frac{a_{11}}{a_{12}} = k$, dostáváme tvar

$$y = k \cdot x + q.$$

Tento tvar nazýváme směrnicová rovnice přímky nebo také obecný předpis lineární funkce, kde koeficienty $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ a $q \in \mathbb{R}$. Koeficient k se nazývá směrnicí přímky. Pro koeficient k platí následující:

$$k = tg(\alpha),$$

kde úhel α je úhel svírající přímkou y a osou x. Např. pro $k = 1$ je $\alpha = 45°$.

Pokud budeme řešit soustavu lineárních rovnic pomocí grafické metody, přemýšlíme nad úlohou tak, že máme zadané dvě přímky a řešením soustavy rovnic je průsečík těchto přímek. Grafickou metodu můžeme provádět na papíře nebo pomocí matematického softwaru.

Grafická metoda se lze perfektně vizualizovat v programu GeoGebra. GeoGebra je interaktivní matematický software, který poskytuje uživatelům možnost vizuálně modelovat matematické koncepty, včetně grafické metody řešení soustav rovnic. Pomáhá znázornit grafickou metodu tím, že umožňuje uživatelům vytvářet grafy funkcí jednoduše a intuitivně. Uživatel může zapsat rovnice soustavy do programu a GeoGebra automaticky vygeneruje odpovídající grafy. Detailnější pozornost bude věnována softwaru v kapitole 4.

Postup řešení soustavy rovnic pomocí grafické metody:

1. Z každé rovnice vyjádříme neznámou y.
2. Sestavením tabulky hodnot zjistíme alespoň dva body pro každou z daných přímek.
3. Sestrojíme grafy jednotlivých funkcí.
4. Průsečík přímek je řešením dané soustavy rovnic.
5. Provedeme zkoušku správnosti.
6. Řešení zapíšeme jako uspořádanou dvojici.

<u>Řešení soustavy lineárních rovnic v grafické podobě:</u>

<u>Soustava rovnic má jedno řešení:</u>

Tento případ nastane, pokud nám pro dvojici rovnic vznikne jejich průsečík právě v jednom bodě. Souřadnice tohoto bodu jsou hodnoty hledaných neznámých x a y.

Řešením soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x; y]$ a je právě jedním správným řešením dané soustavy rovnic.

Ukázkový příklad (z kapitoly 2.1.2):

$$\boldsymbol{x + 4y = 2}$$

$$\boldsymbol{3x + 8y = 5}$$

Rovnice si označíme r_1 a r_2 a převedeme je do tvaru směrnicové rovnice přímky.

$$r_1 \colon y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$r_2 \colon y = -\frac{3}{8}x + \frac{5}{8}$$

Vytvoříme tabulku hodnot pro jednotlivé rovnice. Za neznámou x volíme libovolné hodnoty a následně dopočteme hodnotu y. Toto provedeme pro obě rovnice dvakrát a tím získáme dva body. Pro rovnici r_1 dostáváme body A a B. Pro rovnici r_2 dostáváme body C a D.

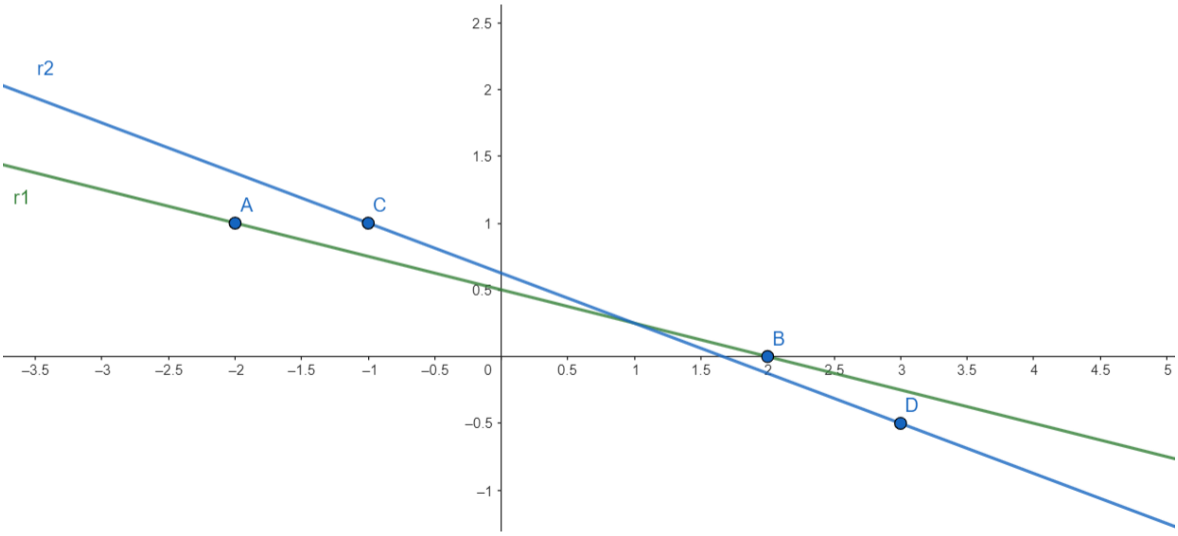
Tabulka 1 souřadnice bodů A, B

r_1	souřadnice	bod A	bod B
	x	-2	2
	y	1	0

Tabulka 2 souřadnice bodů C, D

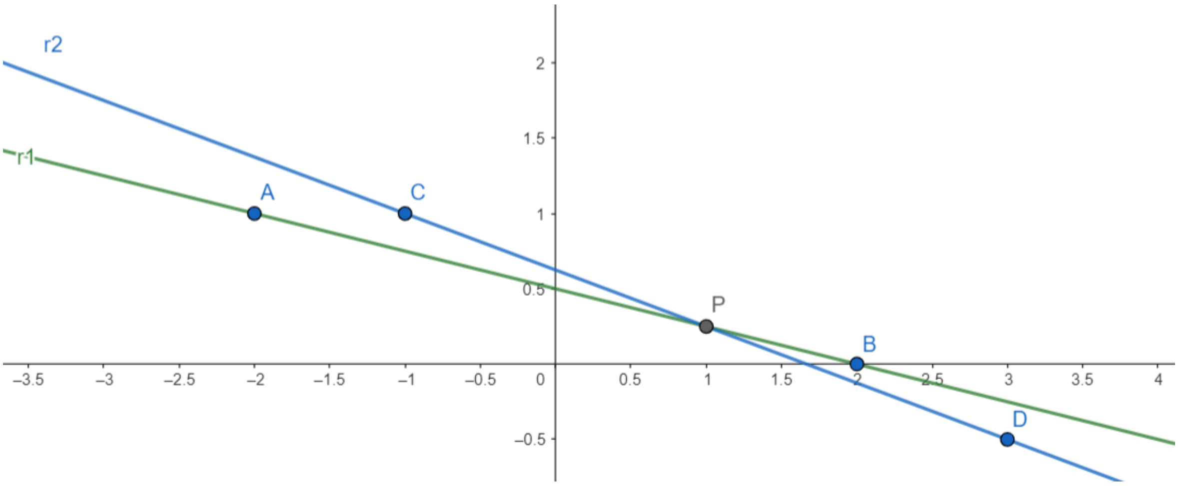
r_2	souřadnice	bod C	bod D
	x	-1	3
	y	1	-0,5

Body A, B, C a D vyneseme do soustavy souřadnic. Přímka r_1 je dána body A a B. Přímka r_2 je dána body C a D.



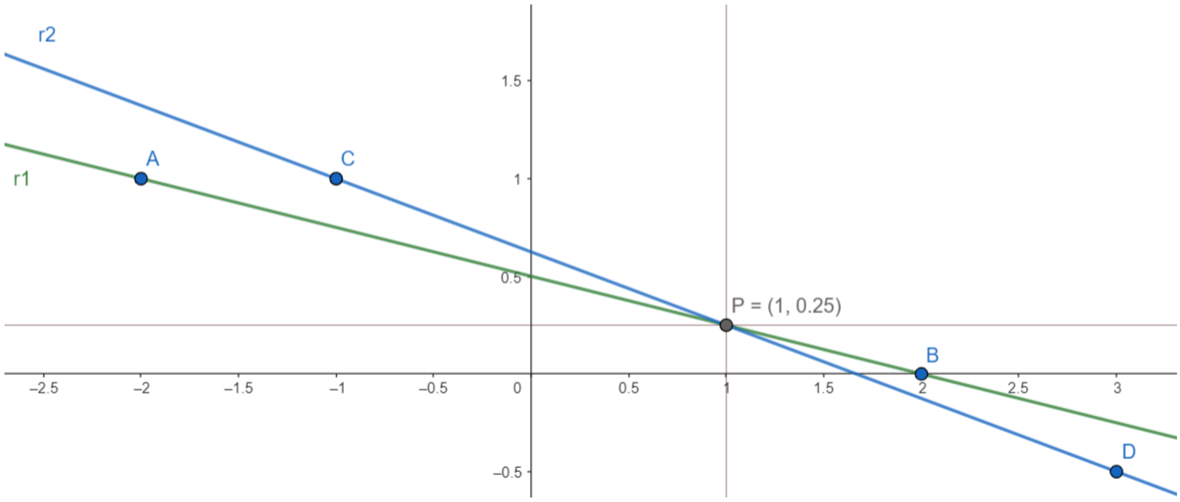
Obrázek 1 GeoGebra: Vynesení bodů A, B, C, D a sestrojení přímek r_1 a r_2 (zdroj: vlastní)

Průsečíkem těchto přímek je bod P.



Obrázek 2 GeoGebra: Sestrojení průsečíku P (zdroj: vlastní)

Vedením kolmic v bodě P na osy soustavy souřadnic x a y dostáváme souřadnice bodu P a tím i řešení soustavy rovnic.



Obrázek 3 GeoGebra: Sestrojení kolmic k osám x a y v průsečíku P (zdroj: vlastní)

Dostáváme souřadnice bodu $P = [1; 0{,}25]$.

Provedeme zkoušku dosazením $x = 1$ a $y = 0{,}25$ do původních rovnic.

$$L_1 = 1 + 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 1 + 1 = 2$$

$$P_1 = 2$$

$$L_1 = P_1$$

$$L_2 = 3 \cdot 1 + 8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 3 + 2 = 5$$

$$P_2 = 5$$

$$\boldsymbol{L_2 = P_2}$$

Řešením dané soustavy rovnic je uspořádaná dvojice $[x; y] = [1; 0{,}25]$.

<u>Soustava rovnic nemá řešení:</u>

Tento případ lze pomocí grafické metody poznat tak, že přímky jsou rovnoběžné různé, tzn. že nemají společný bod. O soustavě rovnic prohlásíme, že nemá řešení.

Ukázkový příklad (z kapitoly 2.2.2):

$$\boldsymbol{x + 2y = 7}$$

$$\boldsymbol{2x + 4y = 10}$$

Z jednotlivých rovnic si vyjádříme neznámou y.

$$r_3 \colon y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$$

$$r_4 \colon y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

Vytvoříme tabulku hodnot.

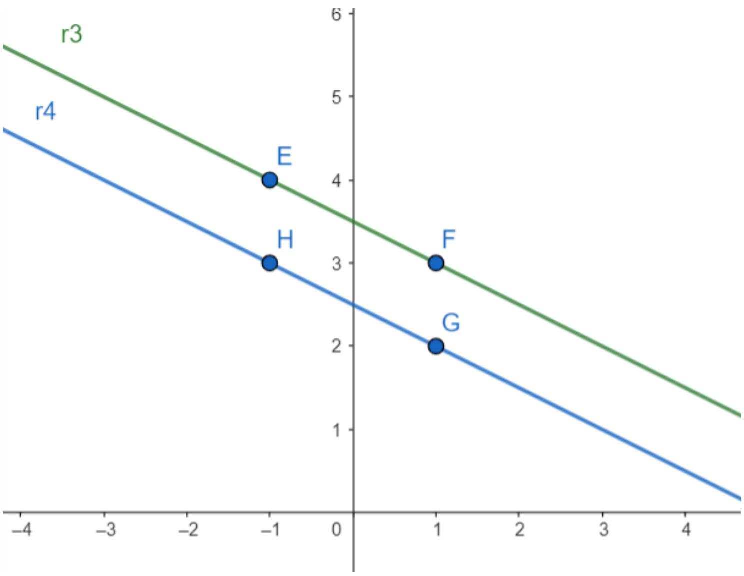
Tabulka 3 souřadnice bodů E, F

r_3	souřadnice	bod E	bod F
	x	-1	1
	y	4	3

Tabulka 4 souřadnice bodů G, H

r_4	souřadnice	bod G	bod H
	x	1	-1
	y	2	3

Body E, F, G a H vyneseme do soustavy souřadnic. Přímka r_3 je dána body E a F. Přímka r_4 je dána body G a H.



Obrázek 4 GeoGebra: Vynesení bodů E, F, G, H a sestrojení přímek r_3a r_4 (zdroj: vlastní)

Zde je viditelné že soustava rovnic nemá řešení právě, když jsou jednotlivé přímky rovnic rovnoběžné.

Soustava rovnic má nekonečně mnoho řešení:

V tomto případě se jedná o dvě totožné přímky. Průsečík těchto přímek je právě tato přímka. Řešením soustavy rovnic je libovolný bod se souřadnicemi $[x; y]$ ležící na dané přímce.

Ukázkový příklad (z kapitoly 2.2.3):

$$\boldsymbol{x + 3y = 5}$$

$$\boldsymbol{2x + 6y = 10}$$

Vyjádřením y dostáváme dva totožné předpisy směrnicové rovnice přímky:

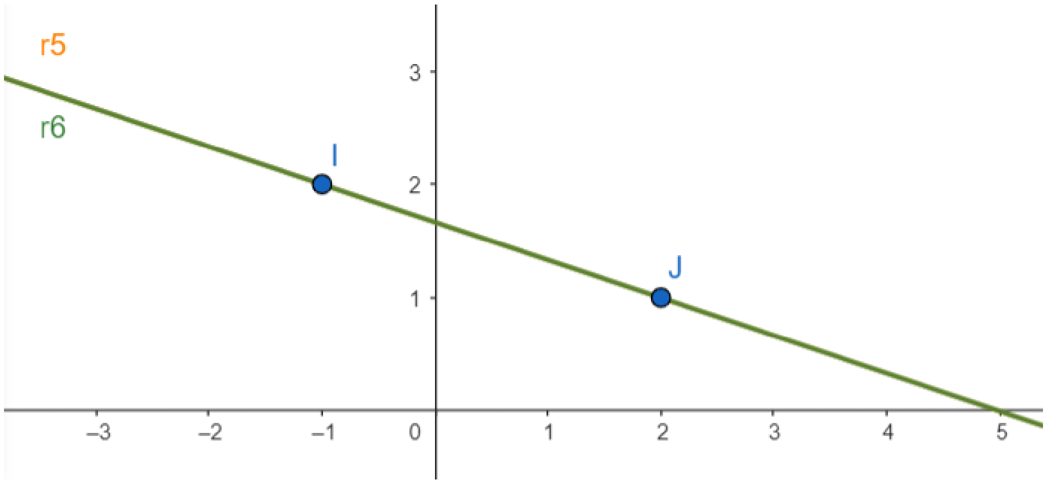
$$r_1, r_2 \colon y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}$$

Vytvoříme tabulku hodnot.

Tabulka 5 souřadnice bodů I, J

r_5, r_6	souřadnice	bod I	bod J
	x	-1	2
	y	2	1

Body I a J vyneseme do soustavy souřadnic. Přímka r_5 i r_6 je dána body I a J.



Obrázek 5 GeoGebra: Vynesení bodů I, J a sestrojení přímek r_5 a r_6 (zdroj: vlastní)

Řešením je libovolný bod daný souřadnicemi $\left[x, -\frac{x}{3}+\frac{5}{3}\right], x \in \mathbb{R}$.

3.2 SOUSTAVA ROVNIC OBSAHUJÍCÍ KVADRATICKOU A LINEÁRNÍ ROVNICI

Soustavou, jedné kvadratické a druhé lineární rovnice o dvou neznámých rozumíme rovnice, které po ekvivalentních úpravách můžeme převést do obecného tvaru

$$a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{13}x + a_{14}y = b_1,$$

$$a_{21}x + a_{22}y = b_2,$$

kde alespoň jeden z koeficientů $a_{11}, a_{12} \in \mathbb{R}$ se nesmí rovnat nule a alespoň jeden z koeficientů $a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ se nesmí rovnat nule, $a_{13}, a_{14}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ a x, y jsou neznáme.

Postup při řešení soustavy kvadratické a lineární rovnice (Cizlerová a kol., 2013):

1. Z lineární rovnice vyjádříme jednu (libovolnou) neznámou.
2. Získaný výraz dosadíme do kvadratické rovnice.
3. Touto úpravou získáme kvadratickou rovnici o jedné neznámé, kterou vyřešíme.
4. Ke každé nalezené hodnotě první neznámé dopočítáme příslušnou hodnotu druhé neznámé.
5. Provedeme zkoušku dosazením hodnot obou uspořádaných dvojic do původních rovnic. Řešíme tedy zkoušku pro obě uspořádané dvojice.
6. Zapíšeme řešení, které je vždy ve tvaru uspořádaných dvojic.

Ukázkový příklad:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 2}$$

$$\boldsymbol{x - 2y = 1}$$

Z lineární rovnice si vyjádříme *x*.

$$x = 1 + 2y$$

Dosadíme za *x* do první rovnice obsahující kvadratické členy.

$$(1 + 2y)^2 + y^2 = 2$$

Rovnici převedeme do základního tvaru kvadratické rovnice. Dále budeme řešit jednotlivé kořeny rovnice pomocí diskriminantu.

$$1 + 4y + 4y^2 + y^2 = 2$$

$$5y^2 + 4y + 1 = 2 \ /{-2}$$

$$5y^2 + 4y - 1 = 0$$

Jestliže uvažujeme obecný tvar kvadratické rovnice $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$, můžeme poté zjistit hodnotu diskriminantu D pomocí vzorce

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

Následně dopočteme kořeny dané rovnice pomocí vzorců

$$y_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ a } y_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}.$$

V našem případě jsou hodnoty koeficientů následující $a = 5, b = 4$ a $c = -1$.

$$D = \ 4^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-1)$$

$$D = 16 + 20$$

$$D = 36$$

$$\boldsymbol{y_1} = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2 \cdot 5} = \frac{-4 + 6}{10} = \frac{2}{10} = \boldsymbol{0{,}2}$$

$$\boldsymbol{y_2} = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2 \cdot 5} = \frac{-4 - 6}{10} = \frac{-10}{10} = \boldsymbol{-1}$$

Pro vypočtení hodnot druhé neznámé dosadíme y_1 a y_2 do vyjádření neznáme x z prvního kroku.

Dosadíme y_1.

$$\boldsymbol{x_1} = 1 + 2 \cdot 0{,}2 = 1 + 0{,}4 = \mathbf{1{,}4}$$

Dosadíme y_2.

$$\boldsymbol{x_2} = 1 + 2 \cdot (-1) = 1 - 2 = \mathbf{-1}$$

Provedeme zkoušku dosazením hodnot obou uspořádaných dvojic $[x_{1;}y_1]$ a $[x_{2;}y_2]$ do původních rovnic. Řešíme tedy zkoušku pro obě uspořádané dvojice.

Zkouška pro $x_1 = 1{,}4$ a $y_1 = 0{,}2$:

$$L_1 = (1{,}4)^2 + (0{,}2)^2 = 1{,}96 + 0{,}04 = 2$$

$$P_1 = 2$$

$$L_1 = P_1$$

$$L_2 = 1{,}4 - 2 \cdot 0{,}2 = 1{,}4 - 0{,}4 = 1$$

$$P_2 = 1$$

$$\boldsymbol{L_2 = P_2}$$

Zkouška pro $x_2 = -1$ a $y_2 = -1$:

$$L_3 = (-1)^2 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$$

$$P_3 = 2$$

$$L_3 = P_3$$

$$L_4 = -1 - 2 \cdot (-1) = -1 + 2 = 1$$

$$P_4 = 1$$

$$\boldsymbol{L_4 = P_4}$$

Soustava rovnic má dvě řešení $[x_1; y_2] = [1; 0{,}2]$ a $[x_2; y_2] = [-1; -1]$.

3.3 ŘEŠENÍ SOUSTAVY ROVNIC OBSAHUJÍCÍ KVADRATICKOU A LINEÁRNÍ ROVNICI

U soustavy rovnic kvadratické a lineární rovnice nastávají tři možné řešení.

1. Řešením soustavy rovnic jsou dvě uspořádané dvojice.
2. Řešením soustavy rovnic je jedna uspořádaná dvojice.
3. Soustava rovnic nemá řešení.

<u>Řešením soustavy rovnic jsou dvě uspořádané dvojice.</u>

Tato situace může nastat pouze v případě, kdy úpravou získaná kvadratická rovnice o jedné neznámé má dva různé kořeny neboli diskriminant této kvadratické rovnice musí být větší než nula. Pokud je tato podmínka splněna, řešením soustavy rovnic jsou dvě uspořádané dvojice $[x_1; y_2]$ a $[x_2; y_2]$. Jako ukázkový příklad (3.3a) můžeme brát následující soustavu:

$$\boldsymbol{x^2 - y = 0}$$

$$\boldsymbol{x + y = 0}$$

Vyjádřením y z druhé rovnice dostáváme.

$$y = -x$$

Dosazením výrazu do první rovnice dostáváme.

$$x^2 - (-x) = 0$$

$$x^2 + x = 0$$

Vytknutím x dostáváme rovnici.

$$x(x + 1) = 0$$

Levá strana rovnice se rovná nule, pokud $\boldsymbol{x_1 = 0}$ nebo $\boldsymbol{x_2 = -1}$. Pro vypočtení hodnot druhé neznámé dosadíme x_1 a x_2 do druhé, lineární, rovnice.

$$0 + y = 0$$

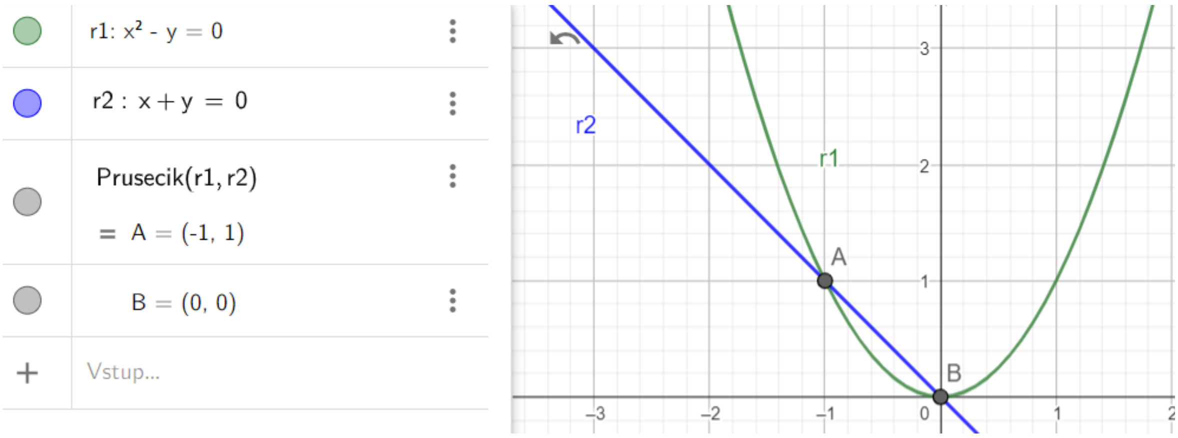
$$\boldsymbol{y_1 = 0}$$

$$-1 + y = 0 \ /{+1}$$

$$\boldsymbol{y_2 = 1}$$

Soustava rovnic má dvě řešení $[x_1; y_2] = [0; 0], [x_2; y_2] = [-1; 1]$.

Grafické znázornění v GeoGebře:



Obrázek 6 GeoGebra: řešení příkladu 3.3a (zdroj: vlastní)

<u>Řešením soustavy rovnic je jedna uspořádaná dvojice.</u>

Případ, že řešením je jen jedna uspořádaná dvojice, nastane ve chvíli, kdy získaná kvadratická rovnice o jedné neznámé má jen jeden dvojnásobný kořen neboli její diskriminant je roven nule. Řešení zapíšeme následovně: $[x_1; y_1]$.

Ukázkový příklad (3.3b):

$$\boldsymbol{x^2 + 2x + 2y = -1}$$

$$\boldsymbol{4x + y = 4}$$

Z lineární rovnice si vyjádříme y.

$$4x + y = 4 \ /-4x$$

$$y = 4 - 4x$$

Dosadíme do první rovnice a dostaneme kvadratickou rovnici o jedné neznámé.

$$x^2 + 2x + 2(4 - 4x) = -1$$

$$x^2 + 2x + 8 - 8x = -1$$

$$x^2 - 6x + 8 = -1 \ /+1$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

Následně vypočteme diskriminant.

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$$

$$D = 36 - 36$$

$$\boldsymbol{D = 0}$$

Nyní dosadíme do vzorce $x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = \boldsymbol{3}$$

Pro výpočet hodnoty druhé neznámé využijeme vyjádřený výraz z prvního kroku.

$$\boldsymbol{y_1} = 4 - 4 \cdot 3 = 4 - 12 = \boldsymbol{-8}$$

Provedeme zkoušku správnosti.

$$L_1 = (3)^2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-8) = 9 + 6 - 16 = -1$$

$$P_1 = -1$$

$$L_1 = P_1$$

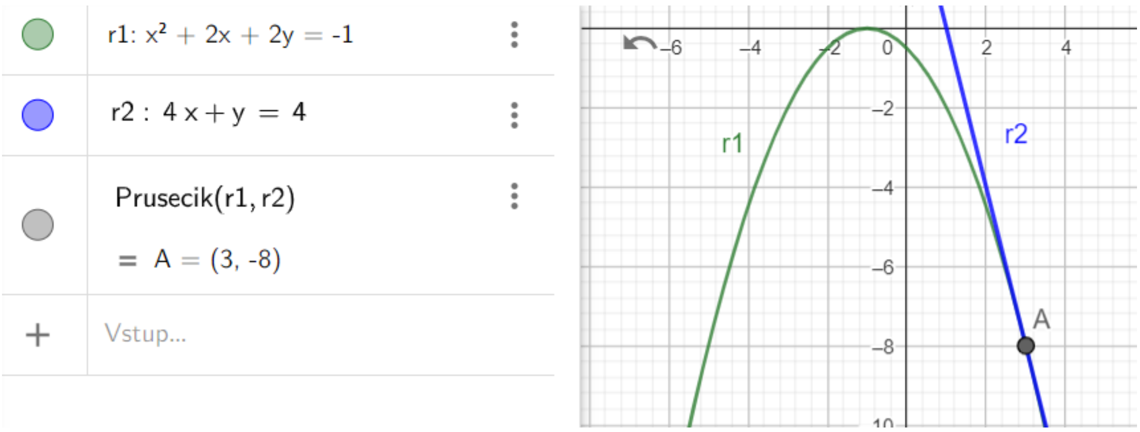
$$L_2 = 4 \cdot 3 + (-8) = 12 - 8 = 4$$

$$P_2 = 4$$

$$\boldsymbol{L_2 = P_2}$$

Řešením je jedna uspořádaná dvojice $[x_1; y_1] = [3; -8]$.

Grafické znázornění v GeoGebře:



Obrázek 7 GeoGebra: řešení příkladu 3.3b (zdroj: vlastní)

Soustava rovnic nemá řešení.

Případ, že soustava rovnic nemá řešení, nastane právě tehdy, když získaná kvadratická rovnice o jedné neznámé nemá reálný kořen neboli musí platit $D < 0$.

Ukázkový příklad (3.3c):

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 1}$$

$$\boldsymbol{x - y = 2}$$

Vyjádříme neznámou x z druhé, lineární, rovnice.

$$x = 2 + y$$

Dosadíme vyjádřený výraz pro x do kvadratické rovnice a rovnici upravíme do základního tvaru, ze kterého dále budeme řešit hodnotu diskriminantu.

$$(2 + y)^2 + y^2 = 1$$

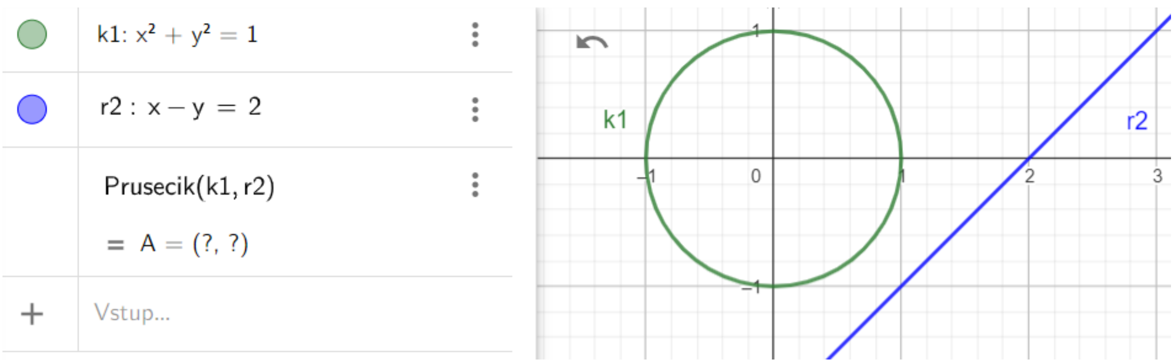
$$4 + 4y + y^2 + y^2 = 1 \,/-1$$

$$2y^2 + 4y + 3 = 0$$

$$\boldsymbol{D} = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 16 - 24 = \boldsymbol{-8}$$

Diskriminant vyšel záporný, znamená to, že rovnice nemá reálné řešení a tím pádem soustava rovnic nemá řešení.

Grafické znázornění v GeoGebře:



Obrázek 8 GeoGebra: řešení příkladu 3.3c (zdroj: vlastní)

4 MATEMATICKÝ SOFTWARE PRO VÝPOČET SOUSTAV ROVNIC

Matematický software je počítačový program navržený k provádění matematických výpočtů, analýz a modelování. Tento software umožňuje uživatelům provádět různé matematické operace, jako jsou výpočty, řešení rovnic, grafické zobrazení dat, numerická analýza, symbolické výpočty, statistické analýzy a další. V této práci budeme matematický software používat k řešení soustav rovnic.

Vzhledem k tomu, že digitální technologie budou hrát stále větší roli v našich životech, je klíčové, aby další generace žáků získaly potřebné dovednosti a znalosti v této oblasti. I proto se čím dál, tím víc promítají novodobé technologie do výuky ve škole. Mezi novodobé technologie můžeme jednoznačně zařadit i matematický software. Využívání matematického softwaru na základních a středních školách má několik důvodů a výhod:

- Vizualizace a interaktivita: Software umožňuje vizualizaci matematických konceptů, což pomáhá studentům lépe porozumět abstraktním tématům. Interaktivní funkce pak umožňují studentům zkoumat různé scénáře a experimentovat s různými parametry, což podporuje jejich učení.
- Podpora rychlého výpočtu: Software umožňuje rychlé a přesné výpočty, což ulehčuje řešení složitých matematických problémů. To umožňuje studentům soustředit se na koncepty a procesy namísto ručních výpočtů.
- Příprava na budoucnost: Dnešní svět je stále více digitální a matematický software je běžně používán v akademickém i profesionálním prostředí. Seznámení studentů se softwarem v raných fázích jejich vzdělávání je proto klíčové pro jejich přípravu na budoucí studium a kariéru.
- Různorodost metod a přístupů: Software nabízí různé metody a přístupy k řešení problémů, což umožňuje studentům objevovat různé perspektivy a přístupy k matematickým konceptům.
- Individualizace výuky: Software umožňuje přizpůsobit výuku potřebám jednotlivých studentů prostřednictvím různých úrovní obtížnosti, zadání úkolů nebo poskytnutí okamžitých zpětných vazeb.

Lze říci, že využívání matematického softwaru na základních a středních školách posiluje matematické dovednosti žáků a zlepšuje jejich digitální dovednosti.

Pro svoji práci jsem vybral několik programů, které považuji za nejvhodnější. Mezi nimi jsou GeoGebra, WolframAlpha a Wolfram Mathematica. První dva z těchto programů jsou volně dostupné softwary. Třetí program, Wolfram Mathematica, je placený. Jelikož jsme k tomuto programu v rámci studia dostali přístup, zahrnul jsem jej do trojice zvolených programů.

Jednotlivé programy budou popsány, uvedeny budou jejich výhody a v každém z programů bude vypočtena soustava dvou lineárních rovnic.

4.1 GeoGebra

„GeoGebra je dynamický matematický software pro všechny úrovně vzdělávání, který v sobě spojuje geometrii, algebru, tabulky, tvorbu grafů, statistiku a počítání.“ (GeoGebra c2024)

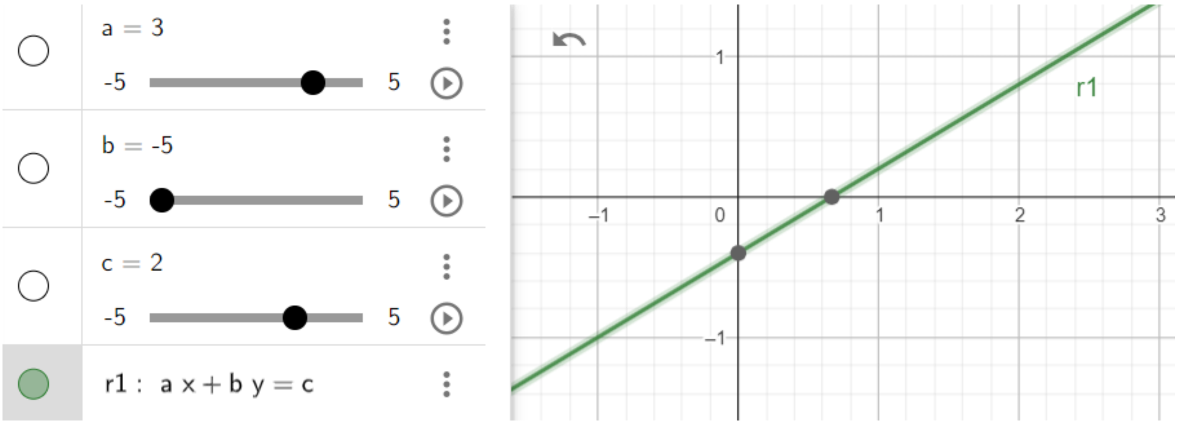
Pomocí GeoGebry lze vizualizovat matematické koncepty, zkoumat jejich vlastnosti a provádět výpočty v reálném čase. Tento software umožňuje uživatelům vytvářet geometrické konstrukce, grafy funkcí, animace a interaktivní aplikace, což podporuje hlubší porozumění matematickým konceptům.

Pokud jde o řešení soustav rovnic, GeoGebra poskytuje několik užitečných nástrojů a funkcí:

- Grafické zobrazení soustav rovnic: Uživatelé mohou vytvořit grafy rovnic v GeoGebře a vizuálně určit průsečíky, které představují řešení soustavy.
- Numerické řešení soustav rovnic.
- Dynamické manipulace s proměnnými: Uživatelé mohou v GeoGebře interaktivně manipulovat s proměnnými a sledovat, jak se mění řešení soustav rovnic v závislosti na změnách vstupních hodnot.

Díky těmto funkcím může GeoGebra sloužit jako užitečný nástroj pro výuku a porozumění řešení soustav rovnic, jak pro začátečníky, tak i pro pokročilé uživatele. Jeho velký přínos ve výuce je grafická názornost soustav rovnic pomocí grafů funkcí.

Další výhodou je dynamická manipulace s proměnnými skrze funkci *Posuvník*, pomocí které si můžeme libovolně měnit čísla v rovnici a následně pozorovat, jaký mají vliv na graf dané rovnice.



Obrázek 9 GeoGebra: ukázka využití funkce *Posuvník* (zdroj: vlastní)

Mezi výhody bych zařadil online dostupnost programu, snadné a intuitivní rozhraní a široké spektrum funkcí. Dále GeoGebra obsahuje spousty interaktivních výukových materiálů dostupných na webové stránce. Program GeoGebra lze využít v on-line verzi na webové stránce. Pro off-line využívaní programu je potřeba aplikace nainstalovat do zařízení. Nainstalované aplikace GeoGebry můžeme používat bez připojení k internetu. Pokud budeme používat on-line verzi, musíme být připojeni k internetu. V obou těchto verzích můžeme námi vytvořený soubor uložit. Pokud máme vytvořený účet a jsme přihlášeni, můžeme soubor uložit na cloudové úložiště. Vytvořený soubor lze uložit i na lokální disk zařízení.

Pro následující výpočet soustavy rovnic budu využívat volně dostupnou aplikaci GeoGebry *Graphing Calculator* neboli Grafický kalkulátor. Tato aplikace se zaměřuje na vykreslování funkcí, vyšetřování jejich kořenů, extrémů či inflexních bodů.

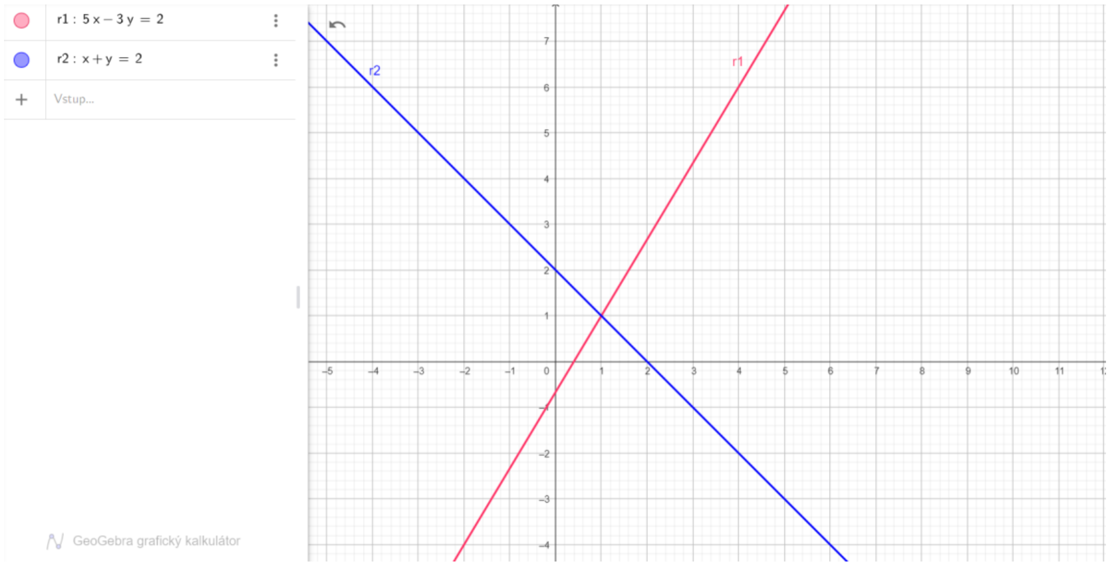
Postup řešení na ukázkovém příkladu (4.1a):

$$\mathbf{5\,x - 3\,y = 2}$$

$$\mathbf{x + y = 2}$$

Pro zadání rovnic do programu využijeme záložku *Algebra*. Jednotlivé rovnice zadáváme do inputu *Vstup*. Každá z rovnic musí být zadána do samostatného řádku. Software automaticky vykresluje zadávané příkazy a hodnoty do soustavy souřadnic.

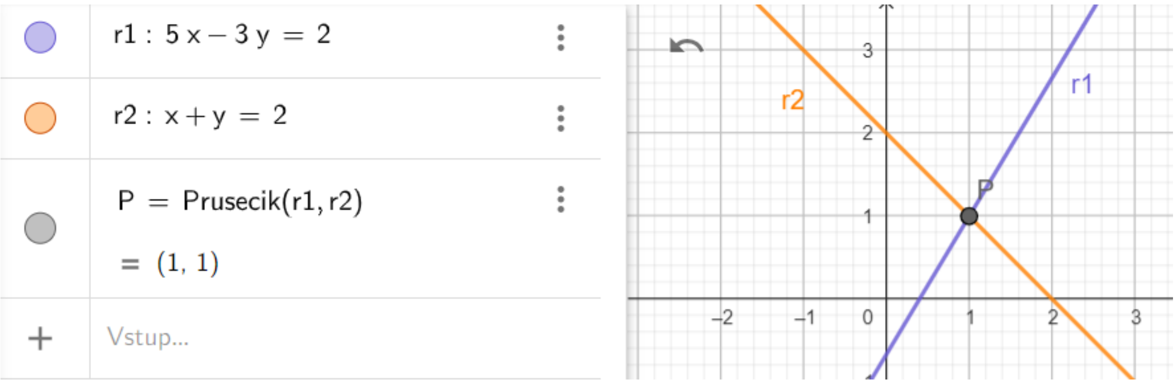
Obrázek 10 GeoGebra: ukázka rozhraní programu (zdroj: vlastní)



Obrázek 11 GeoGebra: vložení rovnic v záložce *Algebra* (zdroj: vlastní)

Řešení soustavy rovnic v grafické podobě odpovídá průsečíků funkcí, které jsou dány jednotlivými rovnicemi. Pro určení řešení soustavy rovnic máme dvě možnosti. První možnost je definovat další vstup v záložce *Algebra* jako *Prusecik()*. Funkce *Prusecik()* obsahuje dva povinné parametry, kterými jsou objekty, oddělené čárkou. Pro tyto dva objekty řeší jejich průsečík. V našem případě jsou to jednotlivé rovnice $r1$ a $r2$. Další možnost se nachází pod záložkou *Nástroje*, kde zvolíme nástroj *Průsečík*.

Poté jen klikneme na dané dva objekty v grafu (v našem případě přímky) a automaticky se vytvoří bod *P* v jejich průsečíku.



Obrázek 12 GeoGebra: ukázka funkce *Prusecik* a řešení příkladu 4.1a (zdroj: vlastní)

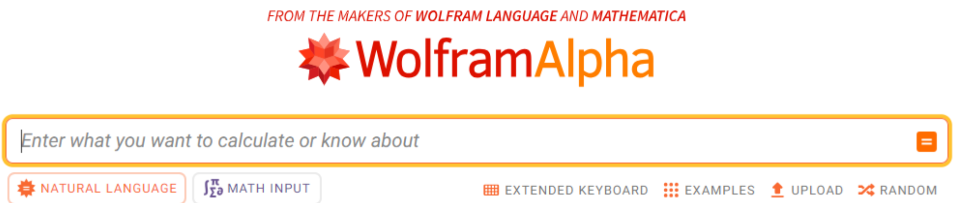
Řešení soustavy rovnic dostáváme v podobě souřadnic průsečíku v kulatých závorkách. Řešením této soustavy rovnice je uspořádaná dvojice $[x; y] = [1; 1]$.

4.2 WOLFRAMALPHA

WolframAlpha je online výpočetní program, který umožňuje uživatelům zadávat matematické dotazy, výrazy, otázky nebo data a získávat odpovědi, výsledky a řešení v reálném čase. Tento software kombinuje širokou škálu matematických, vědeckých a technických znalostí s pokročilým algoritmickým zpracováním a umělou inteligencí. WolframAlpha můžeme využít na jakémkoliv zařízení, které je připojené k internetu.

WolframAlpha je jedním z produktů společnosti Wolfram Research. Společnost Wolfram Research, kterou založil Stephen Wolfram v roce 1987, je jednou z nejuznávanějších světových společností v oblasti počítačového, webového a cloudového softwaru a zároveň je hnacím motorem vědeckých a technických inovací. (Wolfram c2024)

Na webové stránce wolframalpha.com najdeme příkazový řádek/input, do kterého zadáme náš požadavek.



Obrázek 13 WolframAlpha: ukázka rozhraní webové stránky (zdroj: vlastní)

Program dokáže zodpovědět nejrůznější otázky, týkající se především matematiky, ale odpoví i na otázky týkající se fyziky, chemie, historie, financí či nutričních hodnot jídla.

WolframAlpha můžeme využívat ve třech variantách: bez přihlášení, s přihlášením v bezplatné verzi a s přihlášením s měsíčním poplatkem. Verzi bez přihlášení a verzi bezplatnou mezi sebou nerozeznáme. Přihlášení se vyplatí jen v případě placené verze, která nabízí funkci *Step-by-step* neboli *Krok za krokem*. Tato funkce ukazuje, jak řešit zadaný požadavek krok po kroku. Toto je rozdíl od bezplatné verze, která jen ukáže výsledek/řešení požadavku a naznačí jen první krok postupu.

Ve výuce matematiky má tento program mnohá využití. Jedním z nich může být potřeba rychlého vyřešení zadaného příkladu. Dále využití funkce *Step-by-step*, která může být použita jako nápomoc žákům v podobě ukázání jednoho z kroků nebo ukázání celého postupu pro kontrolu správného řešení.

Pro zadání složitějších výrazů, jako jsou například zlomky, mocniny či odmocniny můžeme využít funkce *Math Input*. Tato funkce nabízí výběr výrazů, do kterých můžeme doplnit data.

Obrázek 14 WolframAlpha: ukázka nabídky *Math Input* (zdroj: vlastní)

Nevýhodou může být, že se program bez připojení k internetu nedá využívat. Pronějaké uživatele může být problém, že rozhraní programu je jen v anglickém jazyce.

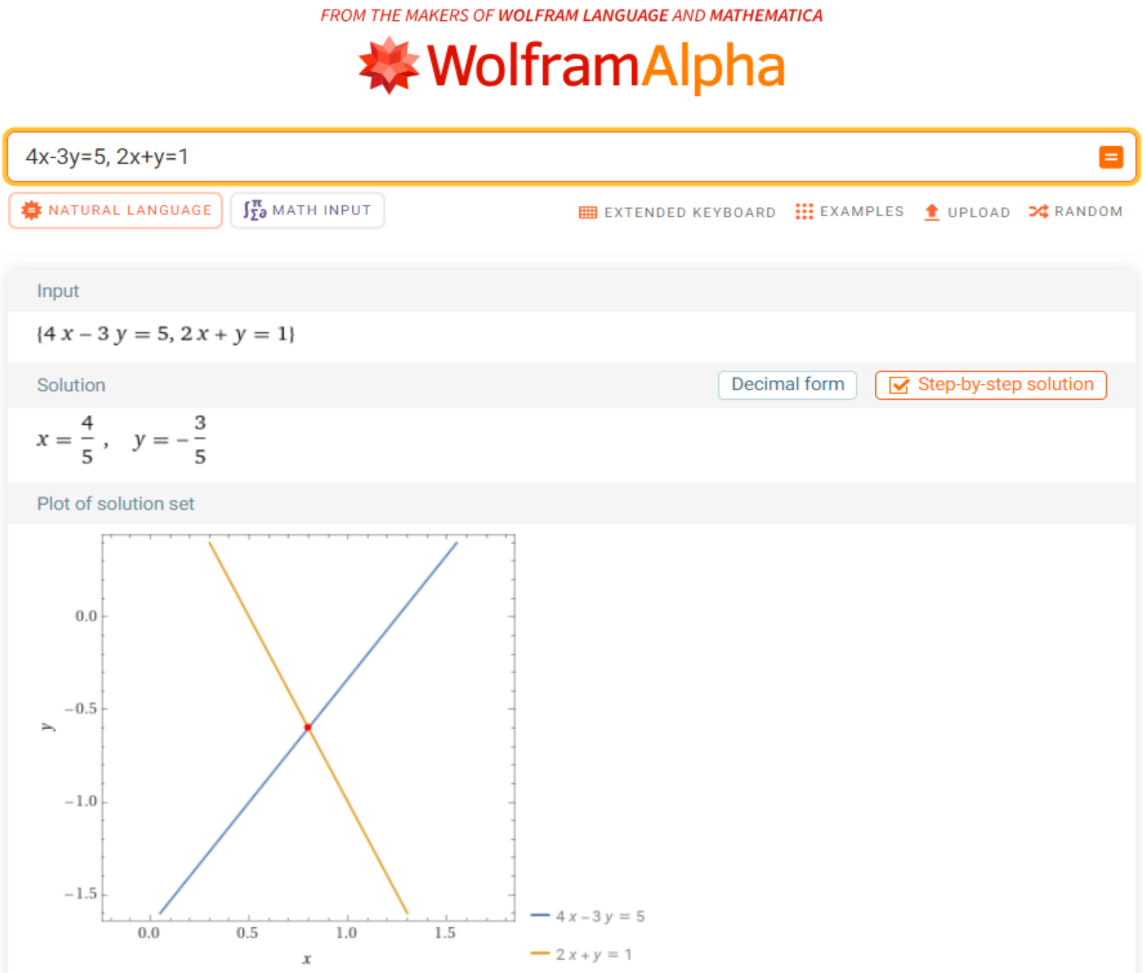
WolframAlpha lze nainstalovat jako aplikace do telefonu. Tato aplikace může být velice užitečná v roli rychlého kapesního pomocníka. Celkově je aplikace WolframAlpha skvělým nástrojem pro matematiky, vědce, studenty a všechny ostatní, kteří potřebují rychle provádět výpočty, zobrazovat data nebo získávat informace přímo na svém mobilním zařízení.

Postup řešení na ukázkovém příkladu (4.2a):

$$\mathbf{4x - 3y = 5}$$

$$\mathbf{2x + y = 1}$$

Zadávání příkladu je velice jednoduché, stačí jednotlivé rovnice zadat do řádku pro vstup a oddělit je čárkou. Námi zadaný input odešleme k řešení kliknutím na oranžové tlačítko v pravé části příkazového řádku. Během pár vteřin program na zadaný příkaz odpoví. V kolonce *Input* můžeme vidět, jak námi zadaný příkaz program WolframAlpha pochopil. Např. pokud bychom při zadávání nepoužili čárku mezi jednotlivými rovnicemi, zadaný požadavek by byl jiný a tím i reakce programu. V dalším řádku pod *Solution* najdeme řešení zadané soustavy rovnic. Řešením ukázkového příkladu je uspořádaná dvojice $[\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}]$. Pod tímto řádkem najdeme graf těchto rovnic a jejich průsečík zvýrazněný červenou tečkou. Tento graf není interaktivní a je jen ve formě obrázku.



Obrázek 15 WolframAlpha: řešení příkladu 4.2a (zdroj: vlastní)

4.3 WOLFRAM MATHEMATICA

Wolfram Mathematica je komplexní matematický software, který kombinuje širokou škálu funkcí pro numerické a symbolické výpočty, vizualizace dat, programování a další matematické operace do jednoho uživatelsky přívětivého prostředí. Wolfram Mathematica je jedním z předních produktů společnosti Wolfram Research a považuje se za počátek moderních matematických výpočtů pomocí softwaru. První zmínky o tomto softwaru jsou z roku 1988, kdy vyšla první verze Mathematica. Nejnovější verze v nynější době je Mathematica 14.0. Wolfram Mathematica můžeme považovat za „silnějšího bratra“ webové stránky WolframAlpha.

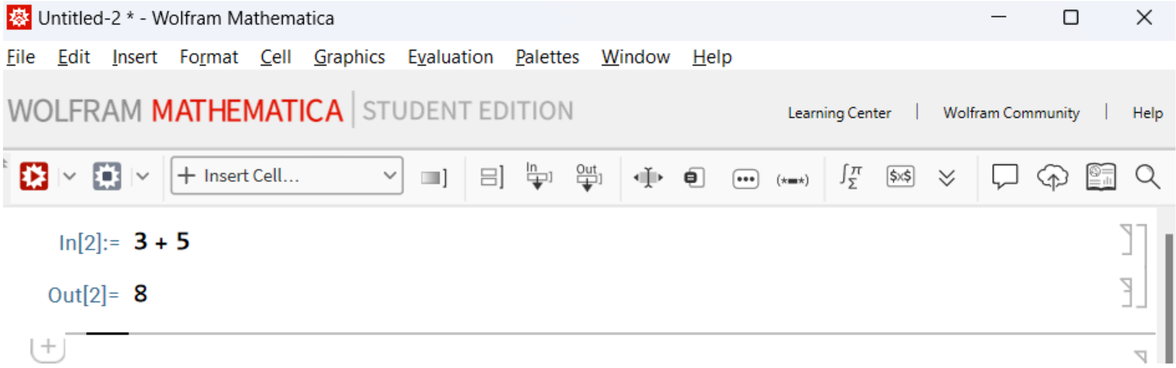
Wolfram Mathematica je placený software. Je zde možnost 15denního bezplatného vyzkoušení tohoto programu, po vypršení této doby se program znepřístupní.

V této práci se objeví verze 13.3., jelikož je tato verze licencovaná Západočeskou univerzitou v Plzni.

Za všemi výpočty v Mathematica stojí výpočetní jádro s názvem Kernel. S tímto jádrem komunikujeme pomocí Wolfram Language, speciální jazyk a syntaxe vytvořené přímo pro Wolfram Mathematica. Velkou pomocí ohledně jazyku, syntaxe a formulování příkazů může být oficiální dokumentace Wolframu, ke které se dostaneme stisknutí klávesy *F1*, pokud se nacházíme v programu.

Interakce s Wolfram Mathematica

Příkazy v jazyce Wolfram Language píšeme do řádku v rozhraní. Potvrzení příkazu a odeslání k výpočtu je vyvolána stisknutím kombinací kláves *Shift+Enter*. Náš příkaz se zobrazí v řádce označené *In*, výstupy programu najdeme v řádce *Out.*



Obrázek 16 Wolfram Mathematica: ukázka rozhraní programu (zdroj: vlastní)

Pro řešení soustav rovnic si vystačíme s jednoduchou syntaxí. Pro označení jednotlivých rovnic využijeme následný příkaz. Tímto příkazem založíme nové proměnné $r1$, $r2$ a uložíme do nich data, v našem případě rovnice.

```
In[12]:= r1 = 3 x + y == 8
         r2 = -x + y == -4
```

Obrázek 17 Wolfram Mathematica: uložení dat (rovnic) do nově založené proměnných (zdroj: vlastní)

Rovnítko mezi levou a pravou stranou rovnice musí být napsáno dvakrát. Jedná se o speciální syntaxi programu. Jedno rovnítko je chápáno jako definování, zatímco dvě rovnítka jsou chápány jako srovnávání.

Pro získání řešení budeme využívat funkci Solve[], která nám poskytne řešení zadané soustavy rovnic. Funkce má dva povinné parametry oddělené čárkou: jednotlivé rovnice oddělené znaky && a množinu hledaných neznámých ve složených závorkách. V praktickém použití to vypadá následovně.

```
Solve[r1 && r2, {x, y}]
```

Obrázek 18 Wolfram Mathematica: použití příkazu *Solve[]* (zdroj: vlastní)

V zásadě instruujeme program, aby platily obě rovnice současně (&&) a hledáme hodnoty x a y.

<u>Využití ve výuce, speciálně pro soustavy rovnic:</u>

- Rychlé řešení soustavy rovnic i o více než dvou neznámých,
- názorné grafické zobrazení 2D i 3D grafů pomocí funkcí *Plot* a *Plot3D*,
- dynamická změna proměnných v reálném čase pomocí funkce *Manipulate* a tím názorná ukázka vlivu změny proměnné,

- vytvoření unikátních soustav rovnic pomocí generování náhodných čísel proměnných skrze funkci *RandomInteger*.

```
In[2]:= a11 = RandomInteger[{-10, 10}]
        a12 = RandomInteger[{-10, 10}]
        b1 = RandomInteger[{-10, 10}]
        a21 = RandomInteger[{-10, 10}]
        a22 = RandomInteger[{-10, 10}]
        b2 = RandomInteger[{-10, 10}]
        a11 * x + a12 * y == b1
        a21 * x + a22 * y == b2
        Solve[a11 * x + a12 * y == b1 && a21 * x + a22 * y == b2, {x, y}]
```

Obrázek 19 Wolfram Mathematica: input pro náhodou soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými s řešením (zdroj: vlastní)

Out[26]= $-10\,x + 3\,y == 3$

Out[27]= $9\,x - 2\,y == -3$

Out[28]= $\left\{\left\{x \to -\frac{3}{7},\ y \to -\frac{3}{7}\right\}\right\}$

Obrázek 20 Wolfram Mathematica: output pro náhodou soustavu dvou rovnic se dvěma neznámými s řešením (zdroj: vlastní)

Ukázkový příklad (4.3a):

$$3x + y = 8$$

$$-x + y = -4$$

Zadané rovnice si označíme jako $r1$ a $r2$ a následně použijeme funkci *Solve[]*.

```
In[434]:= r1 = 3 x + y == 8
          r2 = -x + y == -4
          Solve[r1 && r2, {x, y}]
Out[434]= 3 x + y == 8
Out[435]= -x + y == -4
Out[436]= {{x → 3, y → -1}}
```

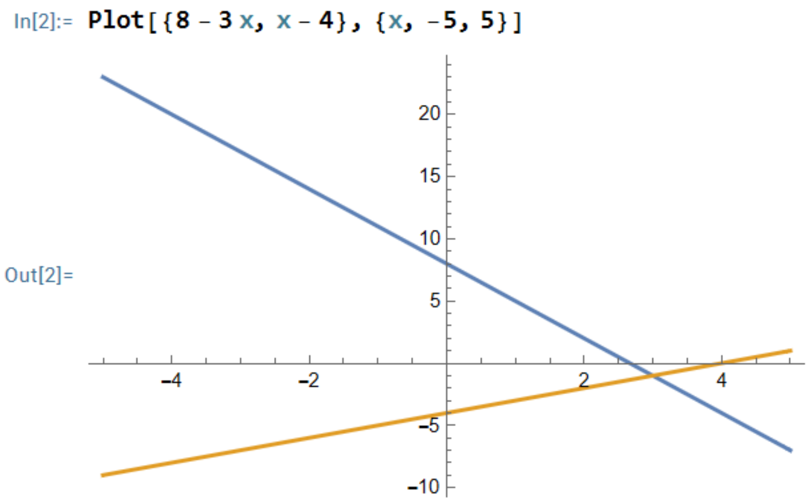
Obrázek 21 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 4.3a (zdroj: vlastní)

Řešení soustavy se objeví ve dvojitých složených závorkách. Řešením je uspořádaná dvojice $[x; y] = [3, -1]$.

Základní funkcí programu pro tvorbu grafů je příkaz *Plot[]*, ten zobrazí graf funkce jedné proměnné. Příklad *Plot[]* má dva povinné parametry ve složených závorkách, oddělené čárkou. První parametr obsahuje jednotlivé grafy funkcí oddělené čárkou. Funkce musí být v závislosti na jedné proměnné, tzn. že jednotlivé rovnice musíme převést do tvaru $y = P(x)$, kde do příkazu vkládáme pouze část $P(x)$. Druhý parametr určuje, jakých hodnot nabývá proměnná.

$$r1: 3x + y = 8 \rightarrow y = 8 - 3x$$

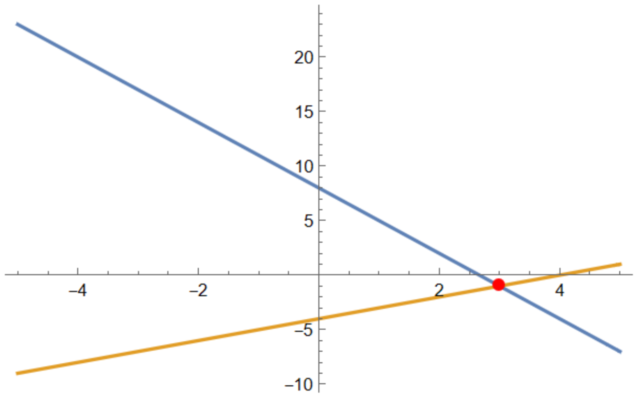
$$r2: -x + y = -4 \rightarrow y = x - 4$$



Obrázek 22 Wolfram Mathematica: grafické znázornění řešení příkladu 4.3a bez bodu (zdroj: vlastní)

```
In[442]:= Plot[{8 - 3 x, -4 + x}, {x, -5, 5}, Epilog → {PointSize[0.02], Red, Point[{3, -1}]}]
```

Out[442]=



Obrázek 23 Wolfram Mathematica: grafické znázornění řešení příkladu 4.3a s bodem (zdroj: vlastní)

Pro zadání bodu do stejného grafu využijeme dalšího volitelného parametru *Epilog->{}.* V tomto příkazu volíme velikost bodu (*PointSize[]*), barvu bodu a souřadnice bodu (*Point[{}]*).

Software Wolfram Mathematica, široce obdivovaná pro svou technickou zdatnost i elegantní jednoduchost použití, poskytuje jediný integrovaný, neustále se rozšiřující systém, který pokrývá celou šíři a hloubku technických výpočtů. (Wolfram c2024)

V Mathematica lze vytvářet a ukládat vytvořené projekty lokálně na PC. Vytvořené projekty mohou sloužit jako doplňující výukové materiály v hodinách matematiky a napomáhat žákům lépe porozumět abstraktním tématům.

5 ŘEŠENÍ SLOŽITĚJŠÍCH PŘÍKLADŮ POMOCÍ MATEMATICKÝCH PROGRAMŮ

V této kapitole vyzkoušíme jednotlivé programy pro řešení složitějších soustav rovnic. Budeme řešit soustavy rovnic o více než dvou neznámých, soustavy obsahující neznámou jako základ mocniny neznámo, soustavy obsahující násobek mezi neznámými, soustavy obsahující neznámou v argumentu logaritmu či neznámou v exponentu. Všechny typy rovnic vyzkoušíme vyřešit v jednotlivých programech a zjistíme, pokud je příklad v daném softwaru vůbec řešitelný. Některé typy z výčtu lze řešit i početně bez použití matematického softwaru. V mnoha případech však řešení bez matematického softwaru nelze najít.

5.1 SOUSTAVA O VÍCE NEŽ DVOU NEZNÁMÝCH

I zde platí to stejné jako u soustavy o dvou neznámých, a to že jsme potřebovali stejný počet rovnic jako počet neznámých, abychom dostali řešení nezávislé na parametru. Řešení soustavy, které je závislé na parametru/parametrech neboli na jedné neznámé/více neznámých dostáváme, pokud soustava obsahuje více různých neznámých, než je počet rovnic. Pokud si počet neznámých v soustavě označíme jako n, počet rovnic obsahující soustava jako m a počet parametrů jako p dostáváme triviální vztah pro výpočet počtu parametrů $p = n - m$. Z tohoto vztahu je jasné proč pro identický počet neznámých a rovnic není soustava závislá na parametru. Naopak pokud rovnice obsahuje např. čtyři neznámé, ale jen tři rovnice, je jasné že rovnice bude závislá na jednom parametru/jedné neznámé.

<u>Soustava o třech neznámých a třech lineárních rovnicích</u>

V této soustavě rovnic se jedná o případ, kdy rovnice vyjde číselně a nebude závislá na žádném parametru. Obecným tvarem soustavy o třech neznámých a třech lineární rovnic rozumíme

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1,$$

$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = b_2,$$

$$a_{31} \cdot x + a_{32} \cdot y + a_{33} \cdot z = b_3,$$

kde $\forall a_{ij} \in \mathbb{R} - \{0\}, i = 1,2,3; j = 1,2,3;\ b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R};\quad x, y, z$ jsou neznámé. Řešením této soustavy je uspořádaná trojice $[x; y; z]$.

O příkladu lze přemýšlet jako o předpisu tří rovin a řešením je průsečík právě těchto tří rovin. Koeficienty $a_{11}, a_{12,} a_{13}$ jsou hodnoty normálového vektoru této roviny $\overrightarrow{n_1} = (a_{11}; a_{12,}; a_{13})$.

Pokud bychom postupovali početně, máme tři možnosti. Dosazovací metodou bychom vyjádřili jednu neznámou z libovolné rovnice a následně dosadili vyjádřený výraz do obou dalších rovnic, dostali bychom dvě rovnice o dvou neznámých a dále řešili pomocí jedné z metod z kapitoly 2.1. Srovnávací metodou bychom z každé rovnici vyjádřili stejnou neznámou a dále jednotlivé dva výrazy dali do rovnosti. Např. výraz vyjádřený z první rovnice bychom dali do rovnosti jak s výrazem z druhé, tak i třetí rovnice. Opět dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých a postupujeme podle námi známých metod pro tento případ. Třetí možná metoda řešení je pomocí Gaussovy eliminace.

V našem případě budeme uvažovat, že jednotlivé rovnice soustavy nejsou navzájem nijak lineárně závislé neboli nejedná se o identické rovnice.

Ukázkový příklad (5.1a):

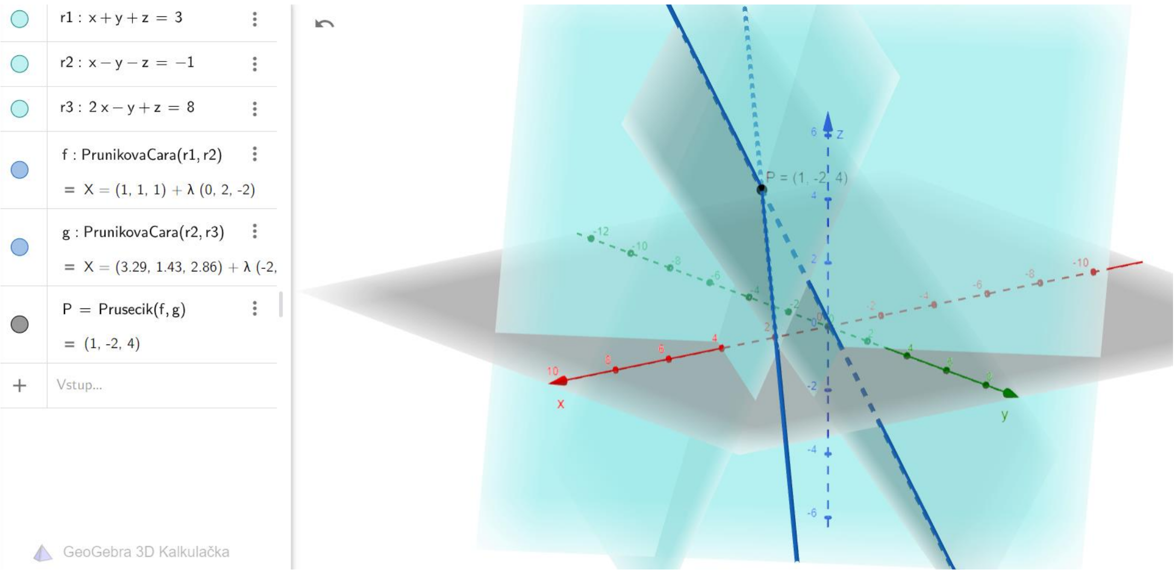
$$\boldsymbol{x + y + z = 3}$$

$$\boldsymbol{x - y - z = -1}$$

$$\boldsymbol{2x - y + z = 8}$$

a) řešený pomocí GeoGebra

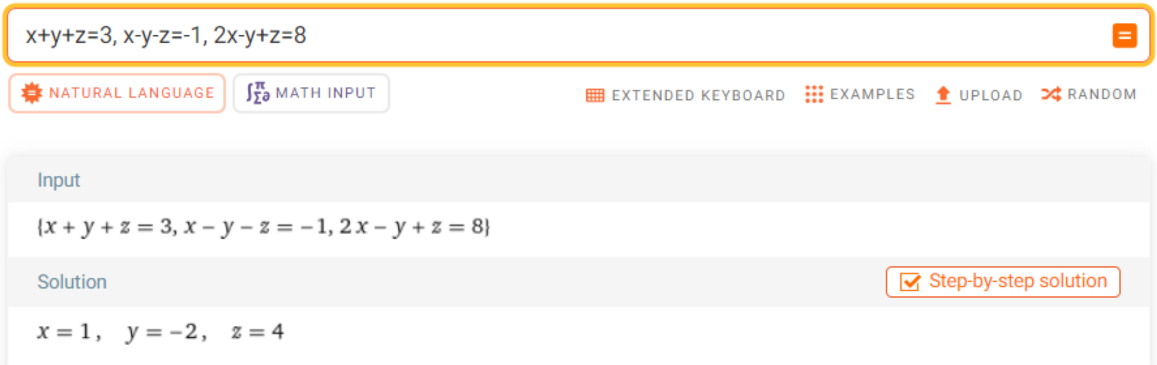
Pro soustavy o třech neznámých budeme využívat online aplikaci GeoGebry s názvem 3D grafy. Pro vyřešení použijeme funkci *Prusecik()*, která pouze řeší průsečík dvou objektů. Program automaticky funkci přepíše na *PrunickovaCara()*, jelikož se jedná a o průsečík dvou rovin, kterým je přímka. Nejdříve zjistíme průsečík první roviny s druhou a poté průsečík druhé rovniny s třetí. Dostáváme dvě přímky f a g, pro které opět použijeme funkci *Prusecik()*. Dostaneme bod $P = [1;\ -2; 4]$, který je řešením zadané soustavy rovnic.



Obrázek 24 GeoGebra: řešení příkladu 5.1a (zdroj: vlastní)

b) řešený pomocí WolframAlpha

Interakce s WolframAlpha je velice přímočará, jednotlivé rovnice oddělíme čárkou a za nedlouhou dobu dostáváme řešení $[x; y; z] = [1; -2; 4]$.



Obrázek 25 WolframAlpha: řešení příkladu 5.1a (zdroj: vlastní)

c) řešený pomocí Wolfram Mathematica

V programu Mathematica budeme využívat funkci *Solve[].* Mezi jednotlivé rovnice napíšeme znaky *&&* a jako druhou proměnnou funkce *Solve[]* píšeme trojici neznámých jako množinu.

```
In[64]:= Solve[x + y + z == 3 && x - y - z == -1 && 2 x - y + z == 8, {x, y, z}]

Out[64]= {{x → 1, y → -2, z → 4}}
```

Obrázek 26 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.1a (zdroj: vlastní)

Při grafickém vyzobrazení využijeme více funkcí dohromady. Funkce *Show[]* zkombinuje více grafických zobrazení na jednom grafu. Pro sestrojení grafu v trojrozměrné dimenzi použijeme *Plot3D[]*. V této funkci použijeme další možnosti na úpravu vzhledu grafu (*Mesh->*, *Boxed->*, *Axes->*). Jako poslední využijeme funkci *Graphics3D[]*, pomocí které vyneseme bod (*Point[{}])* na graf a jeho popisek (*Text[])*.

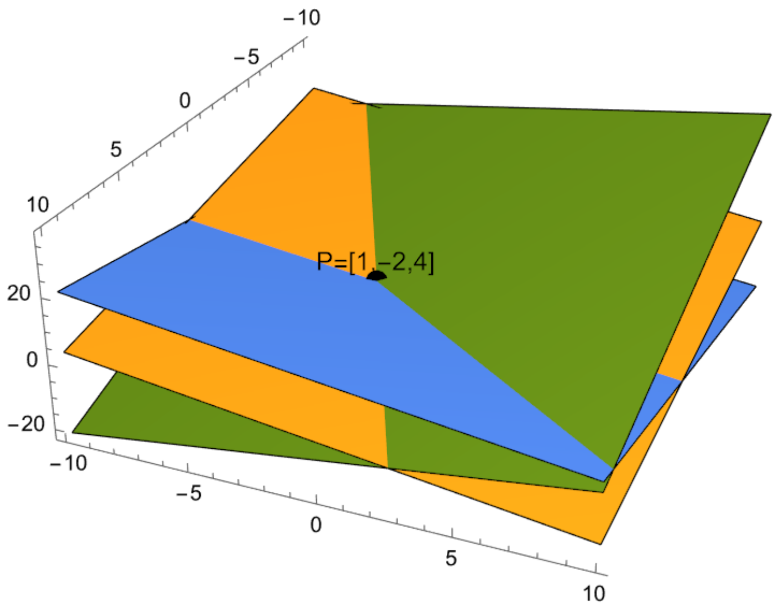
$$x + y + z = 3 \rightarrow z = 3 - x - y$$

$$x - y - z = -1 \rightarrow z = 1 + x - y$$

$$2x - y + z = 8 \rightarrow z = 8 - 2x + y$$

```
In[1]:= Show[Plot3D[{3 - x - y, 1 + x - y, 8 - 2 x + y}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
          Mesh → False, Boxed → False, Axes → True],
         Graphics3D[{Black, PointSize[0.03], Point[{1, -2, 4}],
           Text[Style["P=[1,-2,4]", 12], {1, -2, 10}]}]]
```

Out[1]=



Obrázek 27 Wolfram Mathematica: grafické zobrazení řešení příkladu 5.1a (zdroj: vlastní)

Soustava o třech neznámých a dvou lineárních rovnicích

Zde se bude objevovat případ, kdy řešení soustavy rovnic nebude jedna uspořádaná trojice, ale řešení bude závislé na volbě parametru. Jestliže soustava bude obsahovat dvě rovnice o třech neznámých, řešení bude závislé jen na jednom parametru. Nad řešením daného příkladu můžeme uvažovat jako nad průsečíkem dvou rovin, čímž je přímka. Řešením je tedy libovolný bod se souřadnicemi $[x; y; z]$ ležící právě na této průsečíkové přímce.

Obecným tvarem soustavy rovnic o třech neznámých a dvou lineárních rovnicích rozumíme

$$a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y + a_{13} \cdot z = b_1,$$

$$a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y + a_{23} \cdot z = b_2,$$

kde $\forall a_{ij} \in \mathbb{R} - \{0\}, i = 1{,}2; j = 1{,}2{,}3;\ b_1, b_2 \in \mathbb{R}; x, y, z$ jsou neznámé.

Tento případ může i nastat při zadání třech rovnic, z čehož dvě rovnic by byly lineárně závislé neboli totožné. Dostáváme dvě rovnice o třech neznámých.

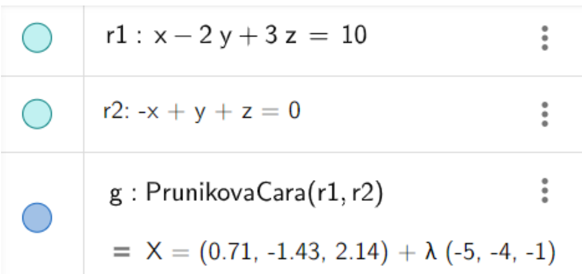
Ukázkový příklad (5.1b):

$$\boldsymbol{x - 2y + z = 10}$$

$$\boldsymbol{-x + y + z = 0}$$

a) řešený pomocí GeoGebra

Opět využijeme program 3D grafy, do kterého zadáme jednotlivé roviny. Jelikož průnikem dvou rovin je přímka, nikoliv bod využijeme funkci *PrunikovaCara().*

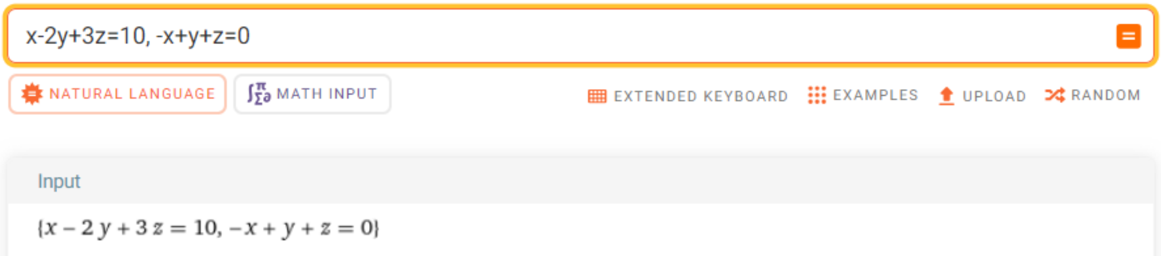


Obrázek 28 GeoGebra: řešení příkladu 5.1b (zdroj: vlastní)

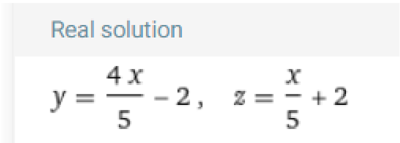
Dostáváme předpis pro přímku, s proměnou λ. Řešení zde není závislé na některé z neznámých, ale na obecném parametru λ. Řešení si do uspořádané trojice můžeme přepsat jako $[x; y; z] = [0{,}71 - 5\lambda; -1{,}43 - 4\lambda; 2{,}14 - \lambda]; \lambda \in \mathbb{R}$

b) řešený pomocí WolframAlpha

Zadané rovnice zadáme do inputového řádku a odešleme k řešení. WolframAlpha bere jako parametr neznámou x. Software vyjádří neznámou y a z pomocí neznámé x jako parametru.



Obrázek 29 WolframAlpha: input pro příklad 5.1b (zdroj: vlastní)



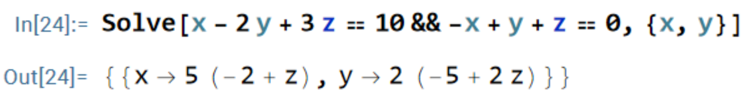
Obrázek 30 WolframAlpha: řešení příkladu 5.1b (zdroj: vlastní)

Řešením je uspořádaná trojice ve tvaru $\left[x; \frac{4x}{5} - 2; \frac{x}{5} + 2\right], x \in \mathbb{R}$.

c) řešený pomocí Wolfram Mathematica

V Mathematica použijeme funkci *Solve[]*. Zde máme výhodu v tom, že si můžeme volbu parametru nastavit. Uděláme to tím, že za druhou proměnnou funkce *Solve[]* zvolíme dvojici neznámých, které nechceme jako parametr. Neboli pokud zvolíme dvojici $\{x, y\}$, je zřejmé, že parametr bude neznámá z.

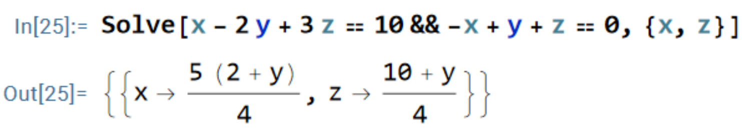
a. z jako parametr:



Obrázek 31 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.1b (z jako parametr) (zdroj: vlastní)

Řešením je uspořádaná trojice $[5(-2+z); 2(-5+z); z]$, po úpravě $[-10+5z; -10+4z, z], z \in \mathbb{R}$.

b. y jako parametr:



Obrázek 32 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.1b (y jako parametr) (zdroj: vlastní)

Řešení soustavy je $\left[\frac{5(2+y)}{4}; y; \frac{10+y}{4}\right], y \in \mathbb{R}$.

c. x jako parametr:

```
In[26]:= Solve[x - 2 y + 3 z == 10 && -x + y + z == 0, {y, z}]
```

$$\text{Out[26]=}\ \left\{\left\{y \to \frac{2}{5}(-5+2x),\ z \to \frac{10+x}{5}\right\}\right\}$$

Obrázek 33 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.1b (x jako parametr) (zdroj: vlastní)

Řešení je $\left[x; \frac{2}{5}(-5+2x); \frac{10+x}{5}\right], y \in \mathbb{R}$, po lehké úpravě dostáváme $\left[x; -2+\frac{4x}{5}; 2+\frac{x}{5}\right], x \in \mathbb{R}$.

Soustava o čtyřech neznámých a čtyřech lineárních rovnic

Obecným tvarem soustavy o čtyřech lineárních rovnic o čtyřech neznámých rozumíme

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2,$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3,$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4,$$

kde $\forall a_{ij} \in \mathbb{R} - \{0\}, i = (1,2,3,4), j = (1,2,3,4);\ b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$; x_1, x_2, x_3, x_4 jsou neznámé. Řešením této soustavy je upořádaná trojice $[x_1; x_2; x_3; x_4]$. Pro větší přehlednost se zpravidla od čtyř neznámých přechází na značení neznámých pomocí dolního indexu. Nejefektivnější početní metoda pro tento případ by byla Gaussova eliminace. Jelikož se nyní pohybujeme ve 4D, nelze příklad řešit pomocí grafické metody. Z tohoto důvodu nemůžeme na tento příklad použít GeoGebru, ta řeší problémy jen ve 2D (soustava rovnic o dvou neznámých) a 3D (soustava rovnic o třech neznámých).

V našem případě budeme uvažovat, že jednotlivé rovnice soustavy nejsou navzájem nijak lineárně závislé neboli nejedná se o totožné rovnice.

Ukázkový příklad (5.1c):

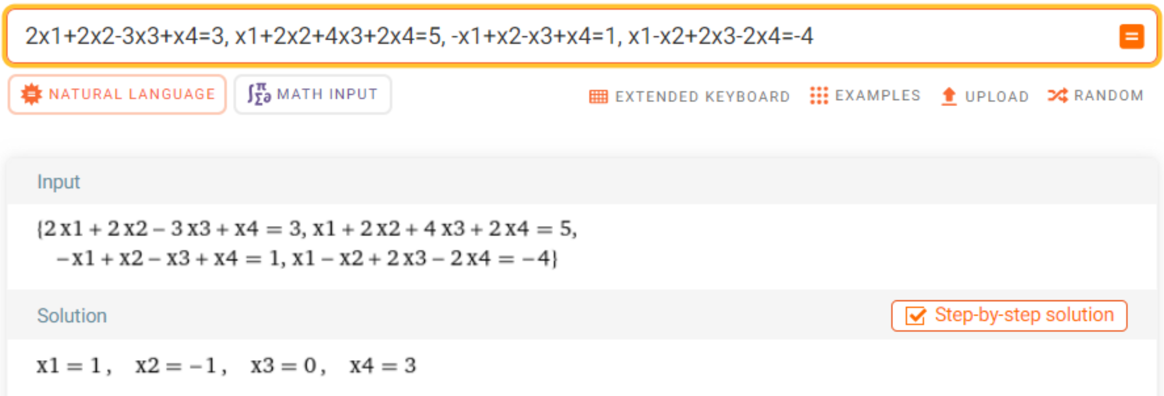
$$\mathbf{2}x_1 + \mathbf{2}x_2 - \mathbf{3}x_3 + x_4 = \mathbf{3}$$

$$x_1 + \mathbf{2}x_2 + \mathbf{4}x_3 + \mathbf{2}x_4 = \mathbf{5}$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = \mathbf{1}$$

$$x_1 - x_2 + \mathbf{2}x_3 - \mathbf{2}x_4 = -\mathbf{4}$$

a) řešený pomocí WolframAlpha



Obrázek 34 WolframAlpha: řešení příkladu 5.1c (zdroj: vlastní)

Řešením je uspořádaná čtveřice $[x_1, x_2, x_3, x_4] . = [1; -1; 0; 3]$.

Jelikož v neznámé nejdou odlišit pomocí dolního indexu, přeznačení probíhá následovně $x_1 = x1$ apod…

Pokud bychom v zadaní měli jen tři rovnice o čtyřech neznámých, řešení soustavy rovnice bude závislé na parametru a program bude jako parametr brát neznámou $x1$.

b) řešený pomocí Wolfram Mathematica

V softwaru Mathematica opět využijeme funkci *Solve[]*. Zde jednotlivé neznámé také nejdou odlišit pomocí indexu, proto značíme $x_1 = x1$ apod…

```
In[4]:= Solve[2 x1 + 2 x2 - 3 x3 + x4 == 3 && x1 + 2 x2 + 4 x3 + 2 x4 == 5 &&
          -x1 + x2 - x3 + x4 == 1 && x1 - x2 + 2 x3 - 2 x4 == -4, {x1, x2, x3, x4}]
Out[4]= {{x1 → 1, x2 → -1, x3 → 0, x4 → 3}}
```

Obrázek 35 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.1c (zdroj: vlastní)

Řešením je uspořádaná čtveřice $[x_1, x_2, x_3, x_4] . = [1; -1; 0; 3]$.

Jestliže by nastal případ, kdy počet neznámých je vetší, než je počet rovnic, můžeme si zvolit, jaké neznámé označíme jako parametr, tím že je vynecháme z množiny neznámých v druhé proměnné funkce *Solve[]* (viz. kapitola 3.1.2 c)).

5.2 SOUSTAVA ROVNIC OBSAHUJÍCÍ NEZNÁMOU JAKO ZÁKLAD MOCNINY

V této soustavě rovnic se musí objevit alespoň jedna neznámá jako základ mocniny.

Obecným tvarem soustavy dvou rovnic obsahující neznámou jako základ mocniny rozumíme

$$a_{11}x^2 + a_{12}y^2 + a_{13}x + a_{14}y = b_1,$$

$$a_{21}x^2 + a_{22}y^2 + a_{23}x + a_{24}y = b_2,$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ a x, y jsou neznáme. Alespoň jeden libovolný koeficient z koeficientů $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ nesmí být roven nule.

Soustava rovnic obsahující kvadratickou a lineární rovnici

Tato situace byla řešena v rámci kapitoly 3.1. Nyní si ukážeme řešení pomocí vybraných matematických softwarů.

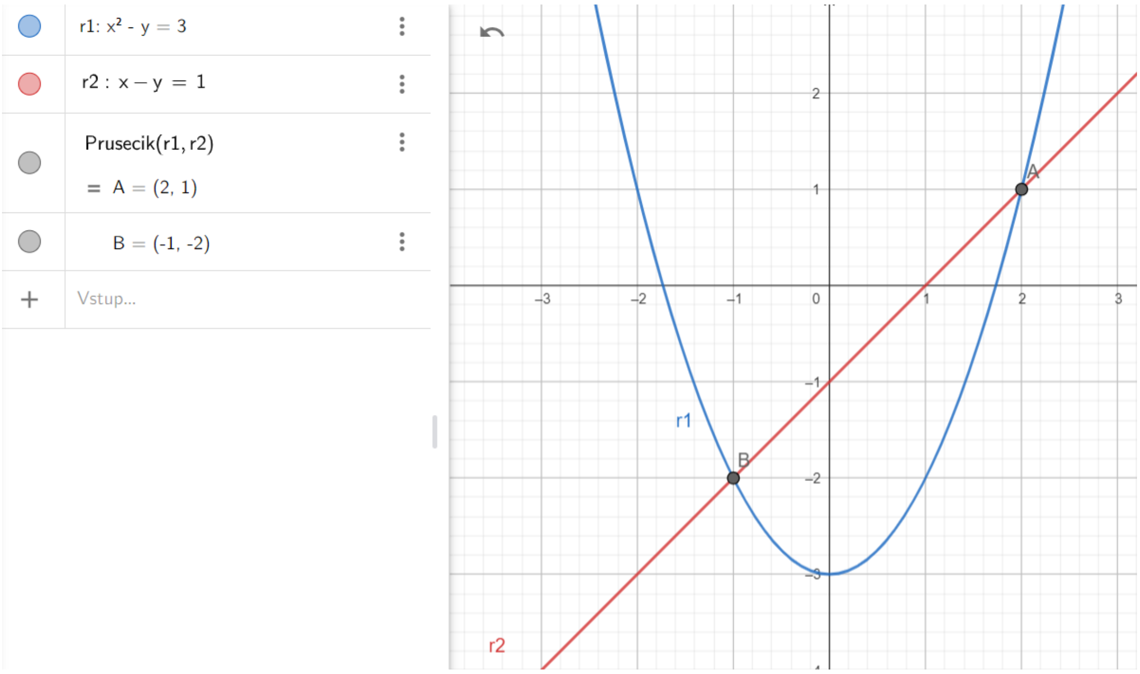
Ukázkový příklad (parabola a přímka) (5.2a):

$$\boldsymbol{x^2 - y = 3}$$

$$\boldsymbol{x - y = 1}$$

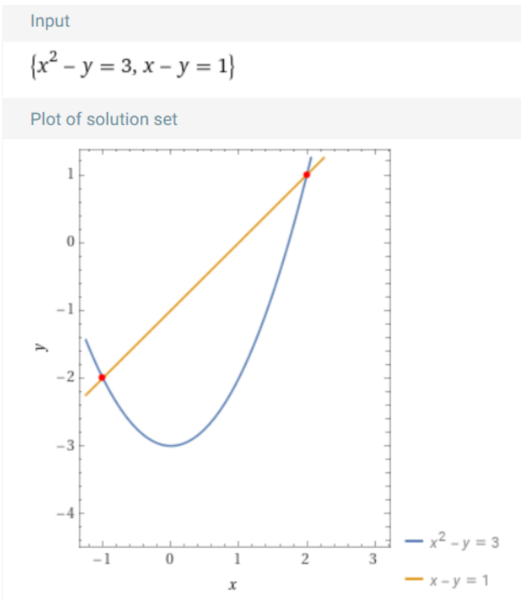
Zde se jedná o předpis kvadratické rovnice (neboli paraboly) a rovnici lineární rovnice (neboli přímky).

a) řešený pomocí GeoGebra



Obrázek 36 GeoGebra: řešení příkladu 5.2a (zdroj: vlastní)

b) řešený pomocí WolframAlpha



Obrázek 38 WolframAlpha: input a graf příklad 5.2a (zdroj: vlastní)

Solutions

$x = -1, \quad y = -2$

$x = 2, \quad y = 1$

Obrázek 37 WolframAlpha: řešení příkladu 5.2a (zdroj: vlastní)

c) řešený pomocí Wolfram Mathematica

I pro řešení soustavy s kvadratickou rovnicí můžeme využít funkci *Solve[].*

```
In[21]:= Solve[x^2 - y == 3 && x - y == 1, {x, y}]
Out[21]= {{x → -1, y → -2}, {x → 2, y → 1}}
```

Obrázek 39 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.2a (zdroj: vlastní)

Řešením je množina uspořádaných dvojic $\{[-1;-2],[2;1]\}$.

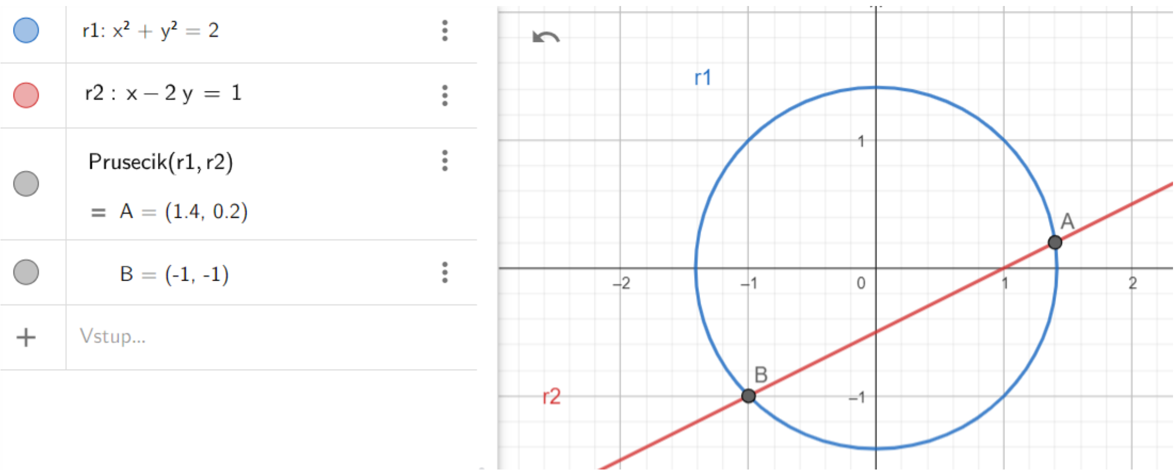
Ukázkový příklad (5.2b) z kapitoly 3.2:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 2}$$

$$\boldsymbol{x - 2y = 1}$$

Tento příklad řeší soustavu rovnic s kvadratickou rovnicí, která obsahuje obě neznáme v mocnině a lineární rovnici. Kvadratickou rovnicí s mocninami u obou neznámých rozumíme jako rovnici kružnice. Rovnici $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ nazveme středovou rovnicí kružnice se středem S v bodě $[m,n]$ a poloměrem r. V našem případě je $m = 0, n = 0, r = \sqrt{2}$. Nad řešením lze přemýšlet jako průsečík kružnice a přímky.

a) pomocí GeoGebra



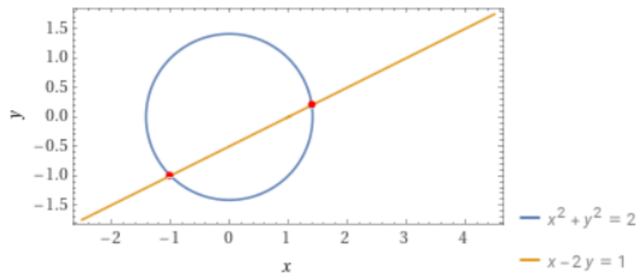
Obrázek 40 GeoGebra: řešení příkladu 5.2b (zdroj: vlastní)

b) pomocí WolframAlpha

Input

$\{x^2 + y^2 = 2, x - 2y = 1\}$

Plot of solution set



Solutions

$x = -1, \quad y = -1$

$x = \frac{7}{5}, \quad y = \frac{1}{5}$

Obrázek 41 WolframAlpha: řešení příkladu 5.2b (zdroj: vlastní)

Obrázek 42 WolframAlpha: input a graf příkladu 5.2b (zdroj: vlastní)

c) pomocí Wolfram Mathematica

```
In[22]:= Solve[x^2 + y^2 == 2 && x - 2 y == 1, {x, y}]
```

$$\text{Out[22]=} \left\{\{x \to -1, y \to -1\}, \left\{x \to \frac{7}{5}, y \to \frac{1}{5}\right\}\right\}$$

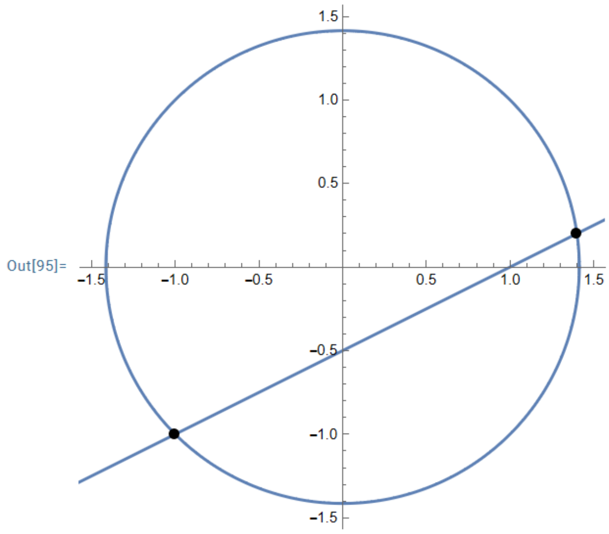
Obrázek 43 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.2b (zdroj: vlastní)

Řešením je množina uspořádaných dvojic $\{[-1; -1], [\frac{7}{5}; \frac{1}{5}]\}$.

Pro grafické znázornění kružnice využijeme funkci *ParametricPlot[]*. Dále ke složení jednotlivých grafů využijeme funkci *Show[]*.

```
In[91]:= kruznice = ParametricPlot[{Sqrt[2] Cos[x], Sqrt[2] Sin[x]}, {x, 0, 2 Pi}]
         p = Plot[0.5 x - 0.5, {x, -3, 3}]
         A = Graphics[{PointSize[0.02], Point[{-1, -1}]}]
         B = Graphics[{PointSize[0.02], Point[{7 / 5, 1 / 5}]}]
         Show[kruznice, p, A, B]
```

Obrázek 44 Wolfram Mathematica: input pro grafické zobrazení řešení příkladu 5.2b (zdroj: vlastní)



Obrázek 45 Wolfram Mathematica: grafické zobrazení řešení příkladu 5.2b (zdroj: vlastní)

Soustava dvou kvadratických rovnic

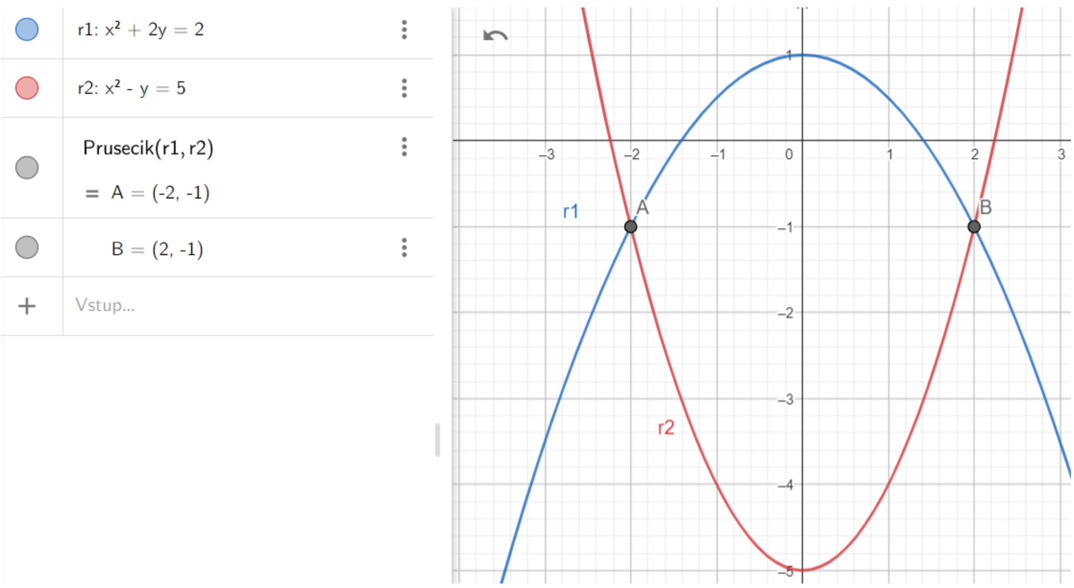
V situaci dvou kvadratických rovnic v soustavě mohou nastat tři případy: dvě paraboly, parabola a kružnic a dvě kružnice.

1. Dvě paraboly: Ukázkový příklad (5.2c):

$$\boldsymbol{x^2 + 2y = 2}$$

$$\boldsymbol{x^2 - y = 5}$$

a) řešený pomocí GeoGebra



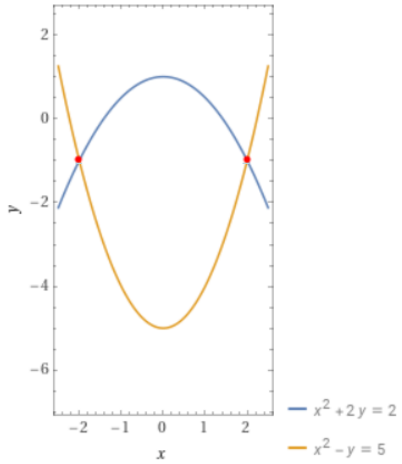
Obrázek 46 GeoGebra: řešení příkladu 5.2c (zdroj: vlastní)

b) řešený pomocí WolframAlpha

Input

$\{x^2 + 2y = 2, x^2 - y = 5\}$

Plot of solution set



Solutions

$x = -2, \quad y = -1$

$x = 2, \quad y = -1$

Obrázek 47 WolframAlpha: řešení příkladu 5.2c (zdroj: vlastní)

Obrázek 48 WolframAlpha: input a graf řešení příkladu 5.2c (zdroj: vlastní)

c) řešený pomocí Wolfram Mathematica

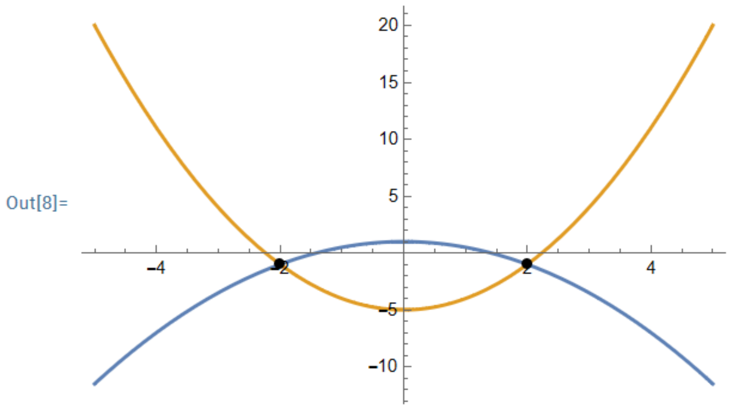
```
In[96]:= Solve[x^2 + 2 y == 2 && x^2 - y == 5, {x, y}]
Out[96]= {{x → -2, y → -1}, {x → 2, y → -1}}
```

Obrázek 49 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.2c (zdroj: vlastní)

Grafické znázornění bude zadané následovně.

```
In[5]:= paraboly = Plot[{(2 - x^2) / 2, x^2 - 5}, {x, -5, 5}]
        d = Graphics[{PointSize[0.015], Point[{-2, -1}]}]
        e = Graphics[{PointSize[0.015], Point[{2, -1}]}]
        Show[paraboly, d, e]
```

Obrázek 50 Wolfram Mathematica: input grafického znázornění řešení příkladu 5.2c (zdroj: vlastní)



Obrázek 51 Wolfram Mathematica: grafické znázornění řešení příkladu 5.2c (zdroj: vlastní)

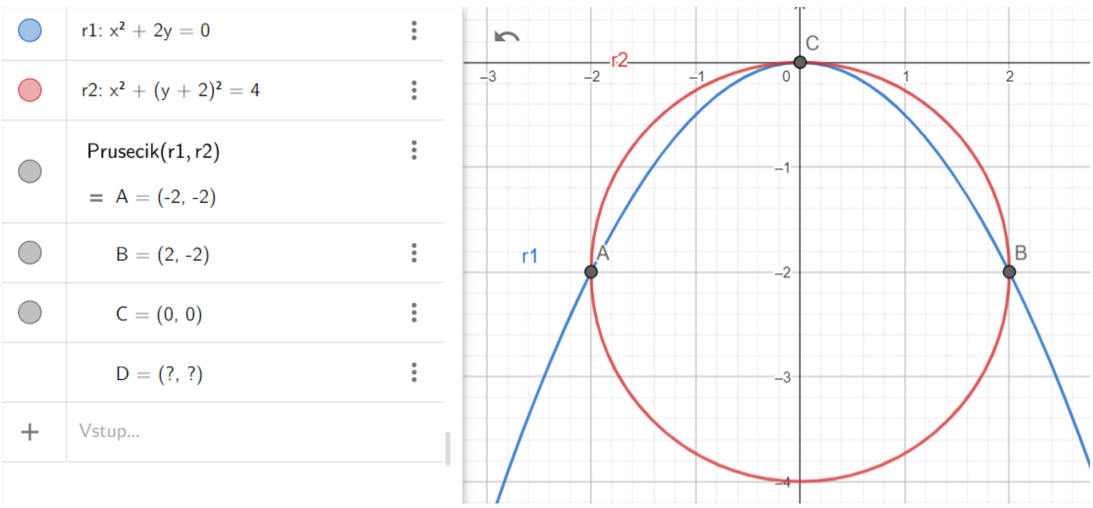
Řešením soustavy rovnic je množina uspořádaných dvojic $\{[-2; -1], [2; -1]\}$.

2. Parabola a kružnice: Ukázkový příklad (5.2d):

$$\boldsymbol{x^2 + 2y = 0}$$

$$\boldsymbol{x^2 + (y + 2)^2 = 4}$$

a) řešený pomocí GeoGebra



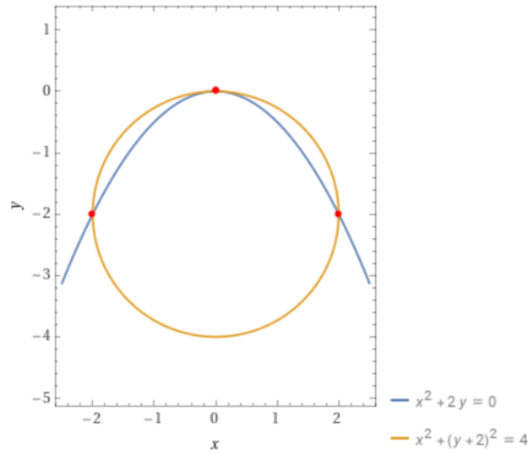
Obrázek 52 GeoGebra: řešení příkladu 5.2d (zdroj: vlastní)

b) řešený pomocí WolframAlpha

Input

$\{x^2 + 2y = 0, x^2 + (y+2)^2 = 4\}$

Plot of solution set



Solutions

$x = -2, \quad y = -2$

$x = 0, \quad y = 0$

$x = 2, \quad y = -2$

Obrázek 53 WolframAlpha: řešení příkladu 5.2d (zdroj: vlastní)

Obrázek 54 WolframAlpha: input a graf příkladu 5.2d (zdroj: vlastní)

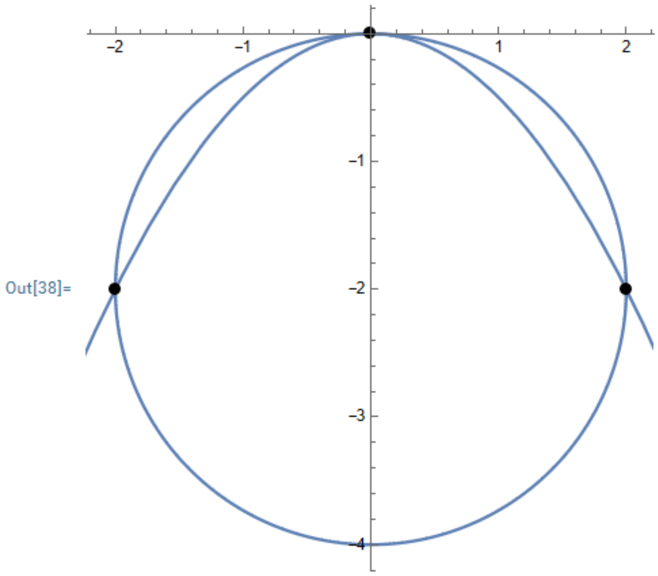
c) řešený pomocí Wolfram Mathematica

```
In[14]:= Solve[x^2 + 2 y == 0 && x^2 + (y + 2) ^2 == 4, {x, y}]
Out[14]= {{(x → -2), (y → -2)}, {(x → 0), (y → 0)}, {(x → 2), (y → -2)}}
```

Obrázek 55 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.2d (zdroj: vlastní)

```
In[33]:= kruznice1 = ParametricPlot[{2 Cos[x], 2 Sin[x] - 2}, {x, 0, 2 Pi}]
         parabola1 = Plot[(-x^2) / 2, {x, -5, 5}]
         f = Graphics[{PointSize[0.02], Point[{-2, -2}]}]
         g = Graphics[{PointSize[0.02], Point[{0, 0}]}]
         h = Graphics[{PointSize[0.02], Point[{2, -2}]}]
         Show[kruznice1, parabola1, f, g, h]
```

Obrázek 56 Wolfram Mathematica: input grafického znázornění řešení příkladu 5.2d (zdroj: vlastní)



Obrázek 57 Wolfram Mathematica: grafické znázornění řešení příkladu 5.2d (zdroj: vlastní)

Řešením soustavy rovnic je množina uspořádaných dvojic $\{[-2; -2], [0; 0], [2; 2]\}$.

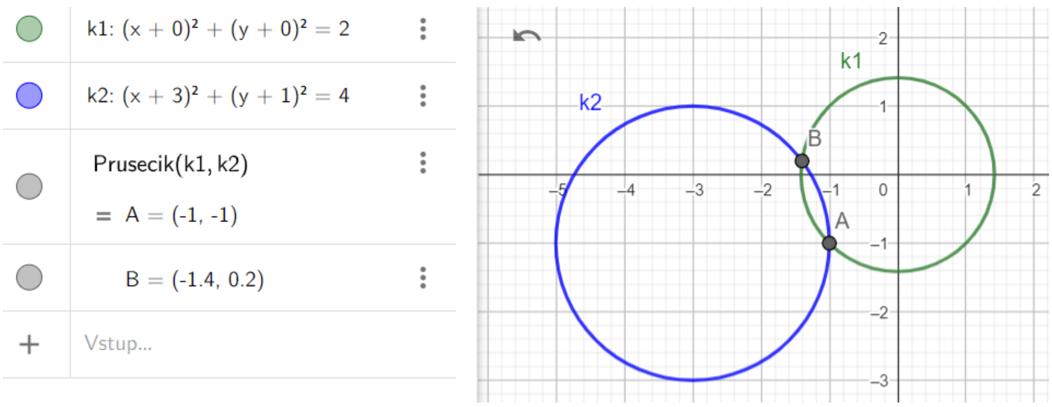
3. Dvě kružnice: Ukázkový příklad (5.2e):

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 2}$$

$$\boldsymbol{(x+3)^2 + (y+1)^2 = 4}$$

V našem případě řešíme průsečík dvou kružnic $k_1 = \left(S_1 = [0; 0], r_1 = \sqrt{2}\right)$ a $k_2 = (S_2 = [-3; -1], r_2 = 2)$.

a) řešený pomocí GeoGebra



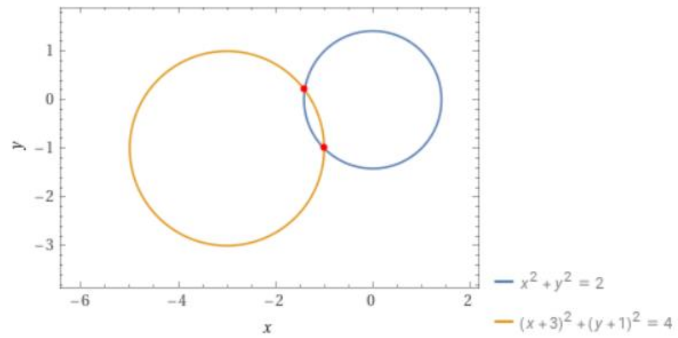
Obrázek 58 GeoGebra: řešení příkladu 5.2e (zdroj: vlastní)

b) řešený pomocí WolframAlpha

Input

$\{x^2 + y^2 = 2, (x+3)^2 + (y+1)^2 = 4\}$

Plot of solution set



Solutions

$x = -\frac{7}{5}, \quad y = \frac{1}{5}$

$x = -1, \quad y = -1$

Obrázek 59 WolframAlpha: řešení příkladu 5.2e (zdroj: vlastní)

Obrázek 60 WolframAlpha: input a graf příkladu 5.2e (zdroj: vlastní)

c) řešený pomocí Wolfram Mathematica

```
In[26]:= Solve[x^2 + y^2 == 2 && (x + 3) ^2 + (y + 1) ^2 == 4, {x, y}]
```

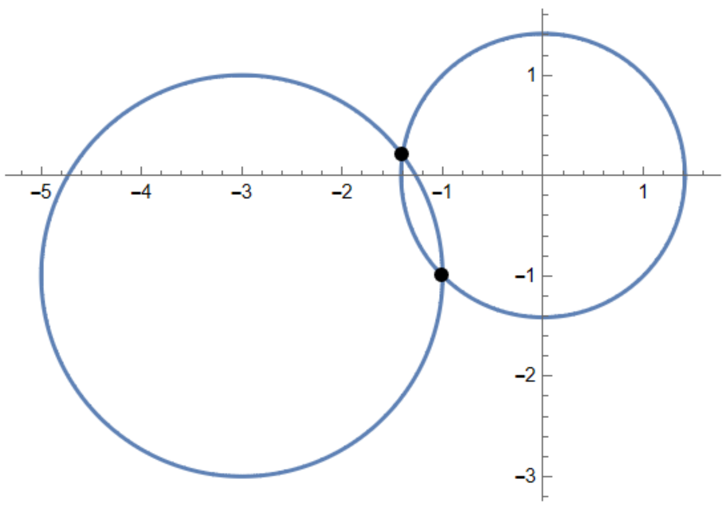
Out[26]= $\left\{\left\{x \to -\frac{7}{5},\ y \to \frac{1}{5}\right\},\ \{x \to -1,\ y \to -1\}\right\}$

Obrázek 61 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.2e (zdroj: vlastní)

```
In[21]:= kruznice1 = ParametricPlot[{Sqrt[2] Cos[x], Sqrt[2] Sin[x]}, {x, 0, 2 Pi}]
         kruznice2 = ParametricPlot[{2 Cos[x] - 3, 2 Sin[x] - 1}, {x, 0, 2 Pi}]
         i = Graphics[{PointSize[0.02], Point[{-1, -1}]}]
         j = Graphics[{PointSize[0.02], Point[{-1.4, 0.2}]}]
         Show[kruznice1, kruznice2, i, j, PlotRange → All]
```

Obrázek 62 Wolfram Mathematica: input grafického znázornění řešení příkladu 5.2e (zdroj: vlastní)

Out[25]=



Obrázek 63 Wolfram Mathematica: grafické znázornění řešení příkladu 5.2e (zdroj: vlastní)

Řešením soustavy rovnic je množina uspořádaných dvojic $\{[-1;-1],[-\frac{7}{5};\frac{1}{5}]\}$.

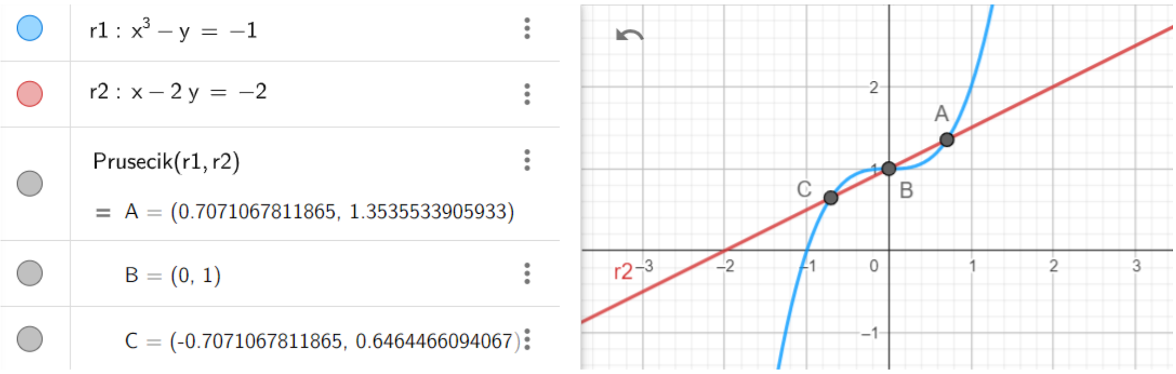
<u>Další soustavy rovnic s neznámou jako základ mocniny</u>

Příklad 5.2f:

$$\boldsymbol{x^3 - y = -1}$$

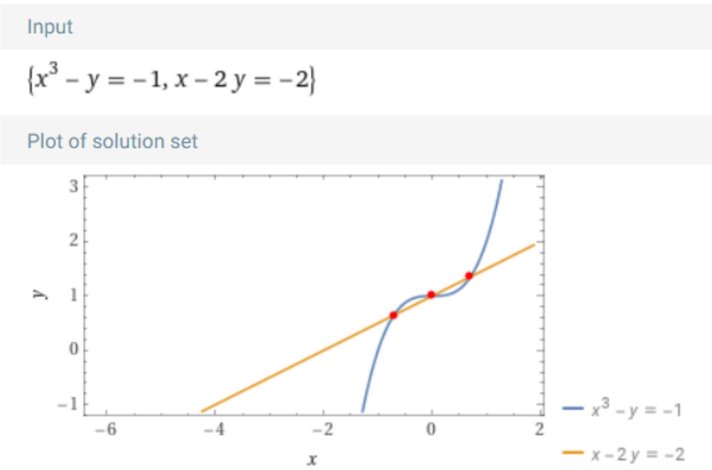
$$\boldsymbol{x - 2y = -2}$$

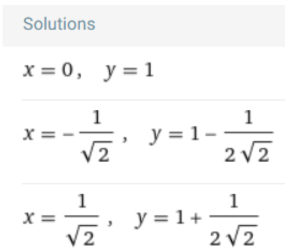
a) GeoGebra



Obrázek 64 GeoGebra: řešení příkladu 5.2f (zdroj: vlastní)

b) WolframAlpha

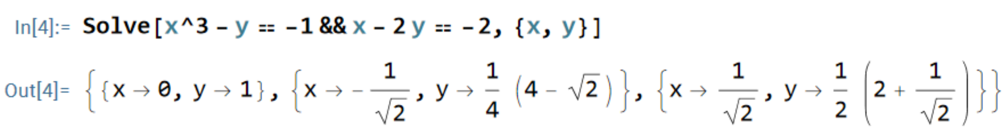




Obrázek 65 WolframAlpha: řešení příkladu 5.2f (zdroj: vlastní)

Obrázek 66 WolframAlpha: input a graf příkladu 5.2f (zdroj: vlastní)

c) Wolfram Mathematica



Obrázek 67 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.2f (zdroj: vlastní)

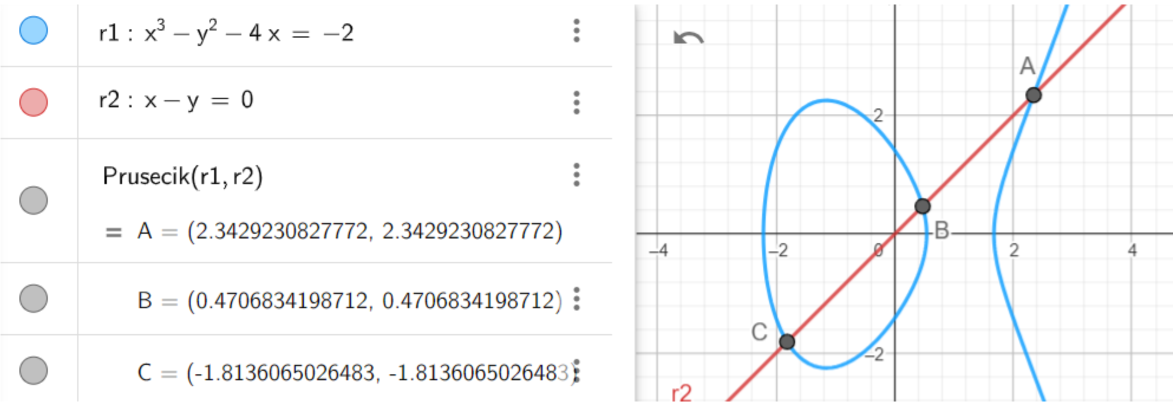
Řešením jsou tři uspořádaná dvojice $[0; 1], \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right], \left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$.

Příklad 5.2g:

$$\boldsymbol{x^3 - y^2 - 4x = -2}$$

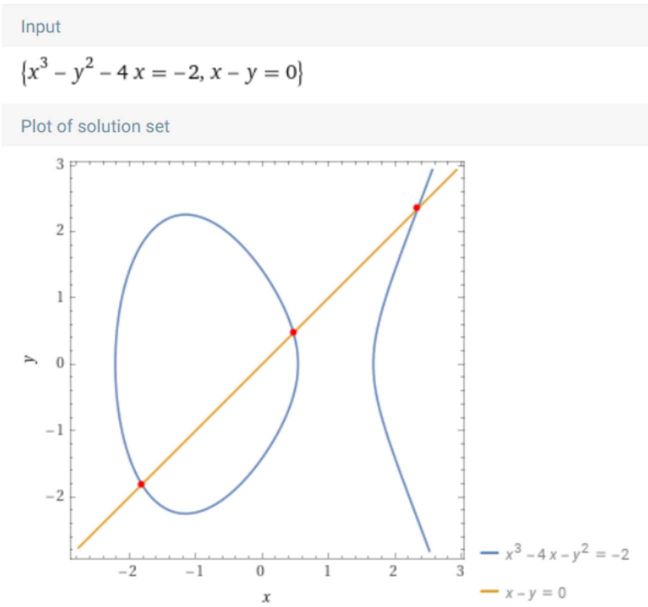
$$\boldsymbol{x - y = 0}$$

a) GeoGebra



Obrázek 68 GeoGebra: řešení příkladu 5.2g (zdroj: vlastní)

b) WolframAlpha



Obrázek 69 WolframAlpha: input a graf příkladu 5.2g (zdroj: vlastní)

Solutions

$x \approx -1.81361 + 0\,i, \quad y \approx -1.81361 + 0\,i$

$x \approx 0.470683 + 0\,i, \quad y \approx 0.470683 + 0\,i$

$x \approx 2.34292 - 7.40149 \times 10^{-17}\,i, \quad y \approx 2.34292 - 7.40149 \times 10^{-17}\,i$

Obrázek 70 WolframAlpha: řešení příkladu 5.2g (zdroj: vlastní)

c) Wolfram Mathematica

Pro zaokrouhlení hodnot řešení využijeme funkci *N[]*.

```
In[7]:= N[Solve[x^3 - y^2 - 4 x == -2 && x - y == 0, {x, y}]]
Out[7]= {{x → -1.81361, y → -1.81361}, {x → 0.470683, y → 0.470683}, {x → 2.34292, y → 2.34292}}
```

Obrázek 71 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.2g (zdroj: vlastní)

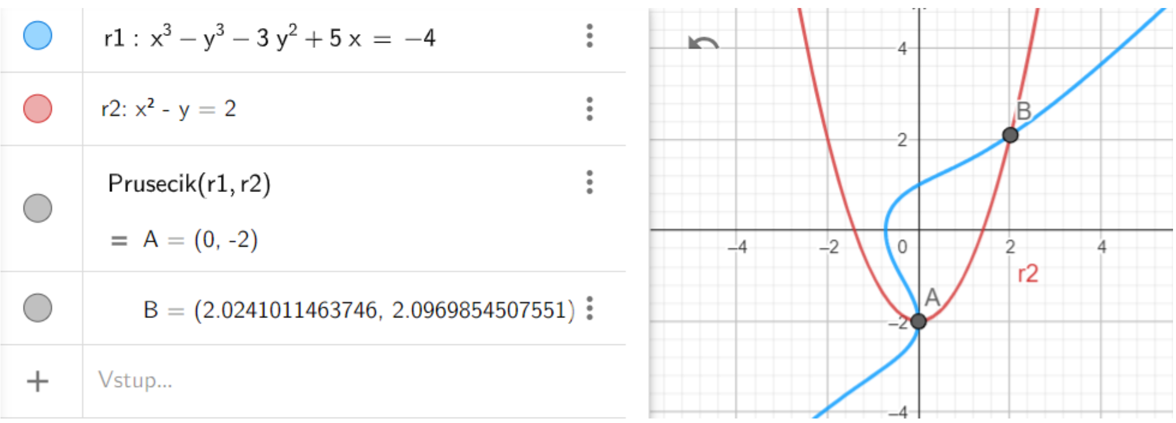
Řešením soustavy jsou tři uspořádané trojice $[-1{,}81361; -1{,}81361], [0{,}470683; 0{,}470683], [2{,}34292; 2{,}34292]$.

Příklad 5.2h:

$$x^3 - y^3 - 3y^2 + 5x = -4$$

$$x^2 - y = 2$$

a) GeoGebra



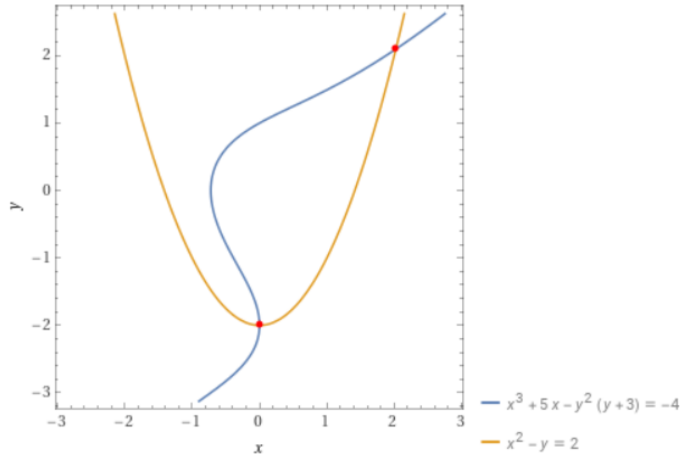
Obrázek 72 GeoGebra: řešení příkladu 5.2h (zdroj: vlastní)

b) WolframAlpha

Input

$\{x^3 - y^3 - 3\,y^2 + 5\,x = -4,\; x^2 - y = 2\}$

Plot of solution set



Obrázek 74 WolframAlpha: input a graf příkladu 5.2h (zdroj: vlastní)

Real solutions

$x = 0, \quad y = -2$

$x \approx 2.0241, \quad y \approx 2.09699$

Complex solutions

$\{x \approx -1.4134 - 0.5364\,i,\; y \approx -0.2899 + 1.5165\,i\}$

$\{x \approx -1.4134 + 0.5364\,i,\; y \approx -0.2899 - 1.5165\,i\}$

$\{x \approx 0.40139 - 0.95899\,i,\; y \approx -2.7585 - 0.7699\,i\}$

$\{x \approx 0.40139 + 0.95899\,i,\; y \approx -2.7585 + 0.7699\,i\}$

Obrázek 73 WolframAlpha: řešení příkladu 5.2h (zdroj: vlastní)

c) Wolfram Mathematica

```
In[4]:= N[Solve[x^3 - y^3 - 3 y^2 + 5 x == -4 && x^2 - y == 2, {x, y}]]

Out[4]= {{x → 0., y → -2.}, {x → 2.0241, y → 2.09699},
         {x → -1.41344 - 0.53644 i, y → -0.289943 + 1.51646 i},
         {x → -1.41344 + 0.53644 i, y → -0.289943 - 1.51646 i},
         {x → 0.401394 - 0.958993 i, y → -2.75855 - 0.769867 i},
         {x → 0.401394 + 0.958993 i, y → -2.75855 + 0.769867 i}}
```

Obrázek 75 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.2h (zdroj: vlastní)

Získáváme řešení, které obsahuje i komplexní řešení soustavy rovnic. Pokud chceme příkaz omezit pro řešení reálná, použijeme možnost *Reals* jako jednu z proměnných v rámci funkce *Solve[]*.

```
In[9]:= N[Solve[x^3 - y^3 - 3 y^2 + 5 x == -4 && x^2 - y == 2, {x, y}, Reals]]
Out[9]= {{x → 0., y → -2.}, {x → 2.0241, y → 2.09699}}
```

Obrázek 76 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.2h (omezené na ℝ) (zdroj: vlastní)

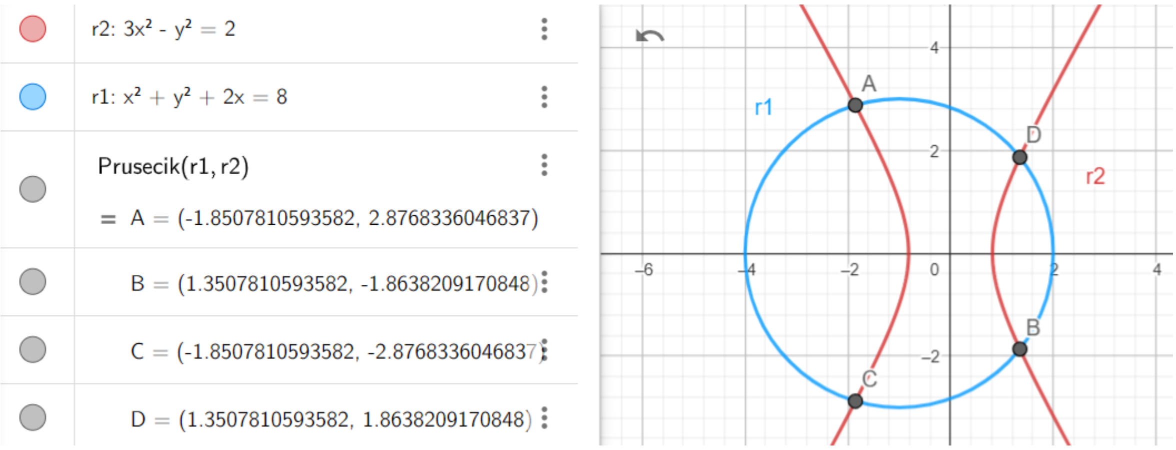
Zde jsme se poprvé setkali s komplexním řešením soustavy rovnic. Můžeme si povšimnou, že GeoGebra komplexní řešení nenašla, zatímco programy od Wolframu toto řešení zobrazily.

Příklad 5.2i:

$$3x^2 - y^2 = 2$$

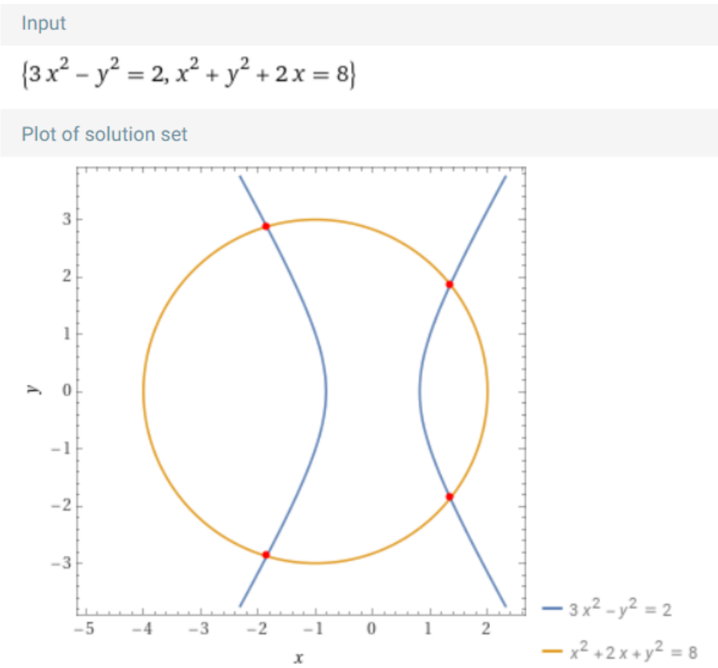
$$x^2 + y^2 + 2x = 8$$

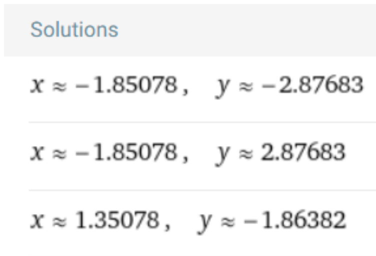
a) GeoGebra



Obrázek 77 GeoGebra: řešení příkladu 5.2i (zdroj: vlastní)

b) WolframAlpha





Obrázek 78 WolframAlpha: řešení příkladu 5.2i (zdroj: vlastní)

Obrázek 79 WolframAlpha: input a graf příkladu 5.2i (zdroj: vlastní)

c) Wolfram Mathematica

```
In[13]:= Solve[3 x^2 - y^2 == 2 && x^2 + y^2 + 2 x == 8, {x, y}, Reals]
```

Out[13]= $\left\{\left\{x \to \frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{41}\right),\ y \to -\sqrt{\frac{11}{2}-\frac{3}{8}\left(-1-\sqrt{41}\right)}\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{4}\left(-1-\sqrt{41}\right),\ y \to \sqrt{\frac{11}{2}-\frac{3}{8}\left(-1-\sqrt{41}\right)}\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{41}\right),\ y \to -\sqrt{\frac{11}{2}-\frac{3}{8}\left(-1+\sqrt{41}\right)}\right\},\ \left\{x \to \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{41}\right),\ y \to \sqrt{\frac{11}{2}-\frac{3}{8}\left(-1+\sqrt{41}\right)}\right\}\right\}$

Obrázek 80 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.2i (zdroj: vlastní)

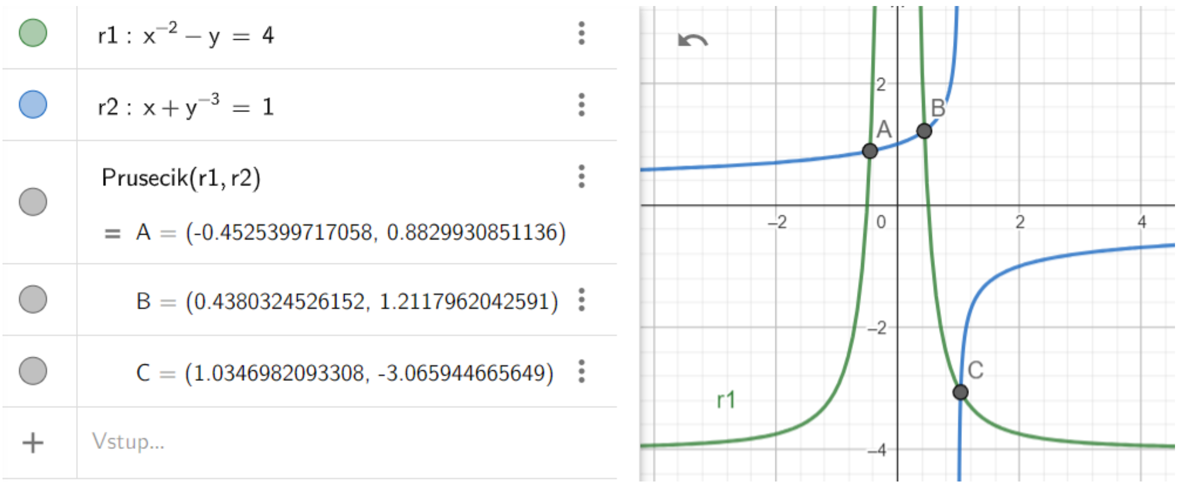
Zde si můžeme všimnou, že Mathematica jako jediný program určil řešení přesně bez zaokrouhlování.

Příklad 5.2j:

$$\boldsymbol{x^{-2} - y = 4}$$

$$\boldsymbol{x + y^{-3} = 1}$$

a) GeoGebra



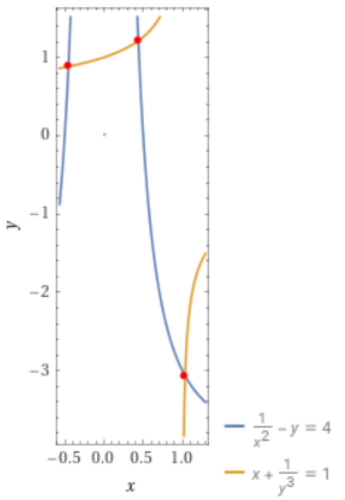
Obrázek 81 GeoGebra: řešení příkladu 5.2j (zdroj: vlastní)

b) WolframAlpha

Input

$$\left\{\frac{1}{x^2} - y = 4, x + \frac{1}{y^3} = 1\right\}$$

Plot of solution set



Real solutions

$x \approx -0.45254, \quad y \approx 0.882993$

$x \approx 0.438032, \quad y \approx 1.2118$

$x \approx 1.0347, \quad y \approx -3.06594$

Complex solutions

$\{x \approx -0.52175 - 0.05424\,i,\ y \approx -0.44352 - 0.74755\,i\}$

$\{x \approx -0.52175 + 0.05424\,i,\ y \approx -0.44352 + 0.74755\,i\}$

$\{x \approx 0.51947 - 0.08372\,i,\ y \approx -0.57091 + 1.13485\,i\}$

$\{x \approx 0.51947 + 0.08372\,i,\ y \approx -0.57091 - 1.13485\,i\}$

Obrázek 82 WolframAlpha: řešení příkladu 5.2j (zdroj: vlastní)

Obrázek 83 WolframAlpha: input a graf příkladu 5.2j (zdroj: vlastní)

c) Wolfram Mathemtica

```
In[6]:= N[Solve[x^-2 - y == 4 && x + y^-3 == 1, {x, y}]]

Out[6]= {{x → 1.0347, y → -3.06594},
         {x → -0.45254, y → 0.882993}, {x → 0.438032, y → 1.2118},
         {x → 0.519466 + 0.083725 i, y → -0.570906 - 1.13485 i},
         {x → 0.519466 - 0.083725 i, y → -0.570906 + 1.13485 i},
         {x → -0.521749 - 0.0542413 i, y → -0.443517 - 0.747548 i},
         {x → -0.521749 + 0.0542413 i, y → -0.443517 + 0.747548 i}}
```

Obrázek 84 WolframAlpha: řešení příkladu 5.2j (zdroj: vlastní)

Řešení soustavy v $\mathbb{R}$ jsou tři uspořádané dvojice $[-0{,}45254; 0{,}882993], [0{,}438032; 1{,}2118], [1{,}0347; -3{,}06594]$.

Příklad 5.2k:

$$x^2 + y^2 - z = 2$$

$$x + y^2 + 2z = 4$$

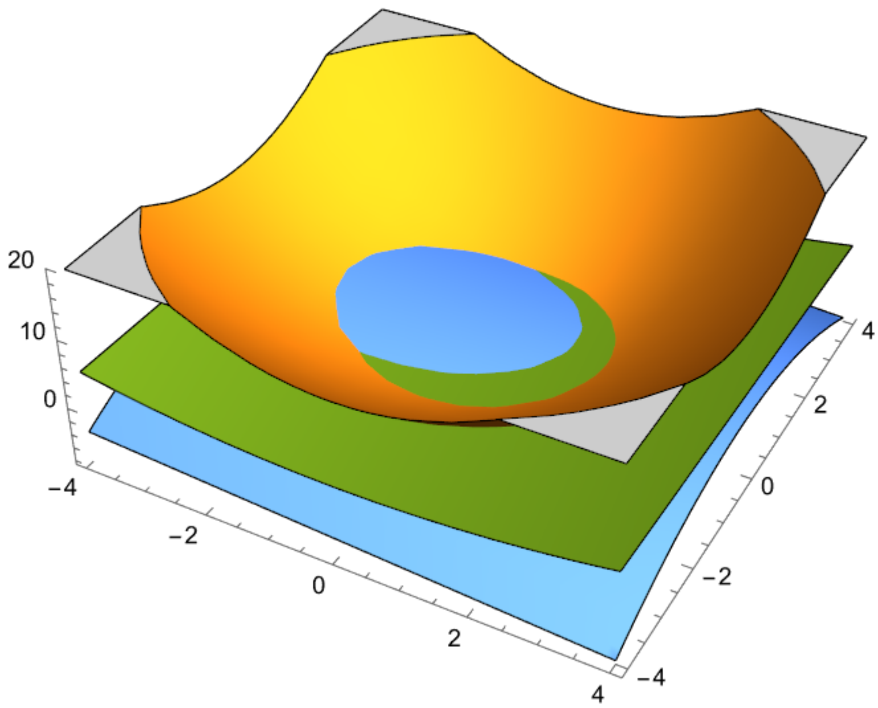
$$x^2 - y - 5z = -5$$

V GeoGebře si tento příklad lze jen graficky znázornit. Řešení soustavy ale program není schopen vyřešit. Pro tento příklad jsem zvolil jen program Mathematica. Příklad řešíme v ℝ.

```
In[29]:= N[Solve[x^2 + y^2 - z == 2 && x + y^2 + 2 z == 4 && x^2 - y - 5 z == -5,
            {x, y, z}, Reals]]
         Plot3D[{x^2 + y^2 - 2, (4 - x - y^2) / 2, (5 + x^2 - y) / 5},
           {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, Mesh → None, Boxed → False]

Out[29]= {{x → -1.24223, y → -1.43248, z → 1.59512},
          {x → -0.018945, y → 1.63485, z → 0.673101}}
```

Out[30]=



Obrázek 85 Wolfram Mathematica: řešení a grafické zobrazení řešení příkladu 5.2k (zdroj: vlastní)

Řešením jsou dvě uspořádané trojice $[1{,}24223; -1{,}43248; 1{,}59512]$, $[-0{,}018945; 163485; 0{,}673101]$.

5.3 SOUSTAVY ROVNIC S NEZNÁMOU POD ODMOCNINOU

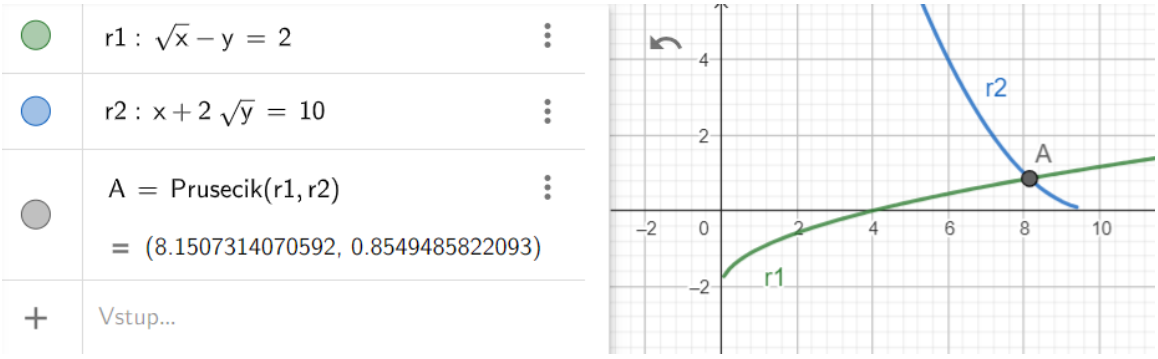
V této podkapitole se objeví soustavy rovnic obsahující alespoň jednu neznámou pod odmocninou. Budeme je řešit pomocí vybraných softwarů.

Příklad 5.3a:

$$\sqrt{x} - y = 2$$

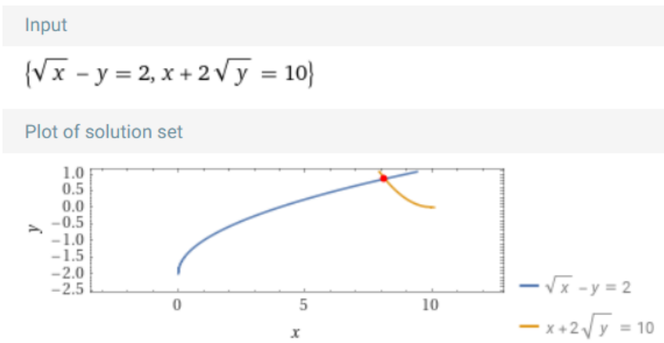
$$x + 2\sqrt{y} = 10$$

a) GeoGebra



Obrázek 86 GeoGebra: řešení příkladu 5.3a (zdroj: vlastní)

b) WolframAlpha



Solution

$x \approx 8.15073, \quad y \approx 0.854949$

Obrázek 87 WolframAlpha: řešení příkladu 5.3a (zdroj: vlastní)

Obrázek 88 WolframAlpha: input a graf příkladu 5.3a (zdroj: vlastní)

c) Wolfram Mathematica

```
In[37]:= N[Solve[Sqrt[x] - y == 2 && x + 2 Sqrt[y] == 10, {x, y}]]
Out[37]= {{x → 8.15073, y → 0.854949}}
```

Obrázek 89 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.3a (zdroj: vlastní)

Řešením je uspořádaná dvojice [8,15073; 0,854949].

Příklad 5.3b:

$$\sqrt{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \mathbf{8}$$

$$\boldsymbol{x} + \mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{y}} + \mathbf{3}\boldsymbol{z} = \mathbf{3}$$

$$\sqrt{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y} + \mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{z}} = \mathbf{7}$$

Tato soustava rovnic nejde graficky zobrazit pomocí GeoGebry, budeme řešit pouze v programu Mathematica.

```
In[51]:= N[Solve[Sqrt[x] - y + z == 8 && x + 2 Sqrt[y] + 3 z == 3 && Sqrt[x] + y + 2 Sqrt[z] == 7, {x, y, z}]]
Out[51]= {{x → -13.835 - 21.4127 i, y → -0.546685 + 1.94748 i, z → 5.03895 + 6.38191 i},
          {x → -13.835 + 21.4127 i, y → -0.546685 - 1.94748 i, z → 5.03895 - 6.38191 i}}
```

Obrázek 90 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.3b (zdroj: vlastní)

Řešení soustavy vychází jen v komplexních číslech, pro $\mathbb{R}$ nemá tato rovnice řešení. Grafické zobrazení v tomto případě nedává smysl, jelikož nedostáváme žádné reálné řešení.

5.4 SOUSTAVY ROVNIC OBSAHUJÍCÍ NÁSOBEK MEZI NEZNÁMÝMI

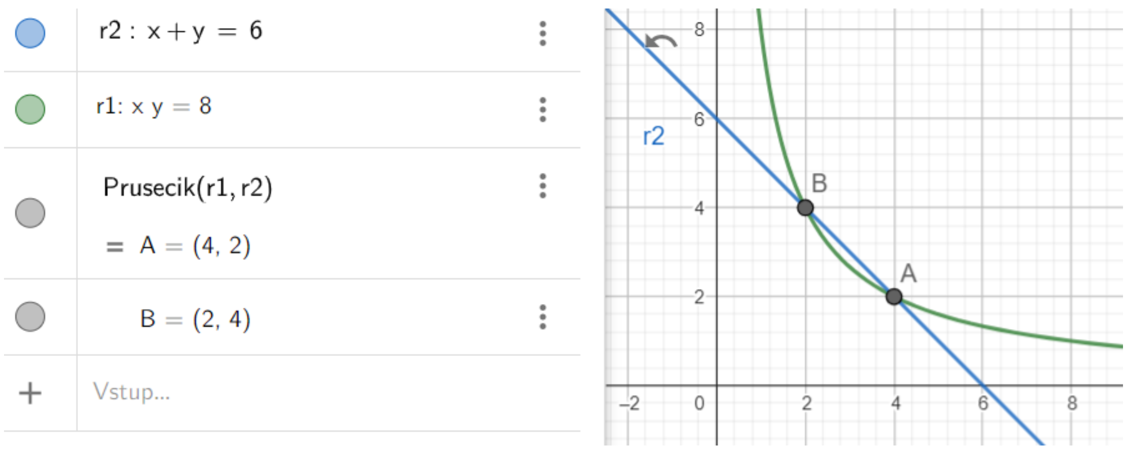
V této podkapitole si ukážeme řešení soustav rovnic obsahující násobek alespoň mezi dvěma neznámými pomocí matematických softwarů.

Příklad 5.4a:

$$\boldsymbol{xy} = \mathbf{8}$$

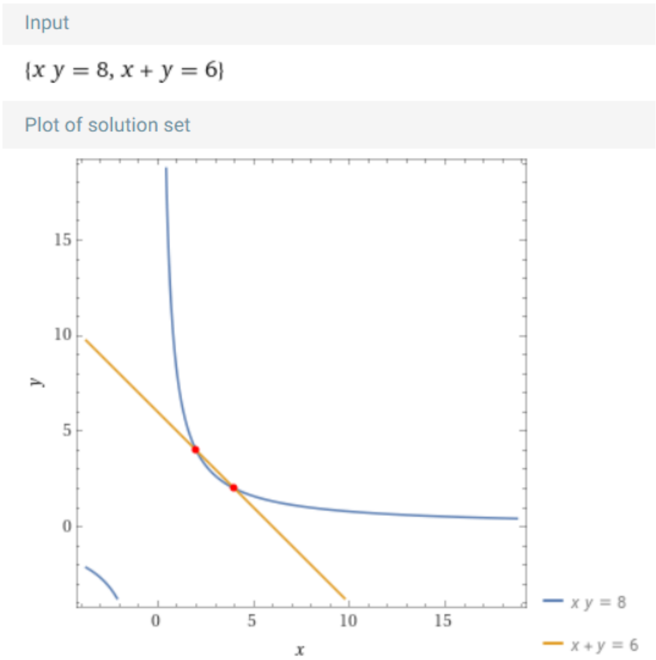
$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathbf{6}$$

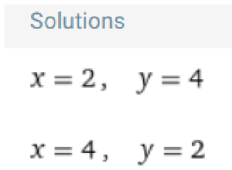
a) GeoGebra



Obrázek 91 GeoGebra: řešení příkladu 5.4a (zdroj: vlastní)

b) WolframAlpha

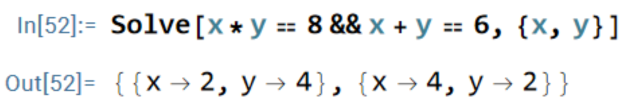




Obrázek 92 WolframAlpha: řešení příkladu 5.4a (zdroj: vlastní)

Obrázek 93 WolframAlpha: input a graf příkladu 5.4a (zdroj: vlastní)

c) Wolfram Mathematica



Obrázek 94 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.4a (zdroj: vlastní)

Řešením soustavy jsou dvě uspořádané dvojice [2; 4], [4; 2].

Příklad 5.4b:

$$xyz = 6$$

$$x + y + z = 6$$

$$2x - y + 3z = 9$$

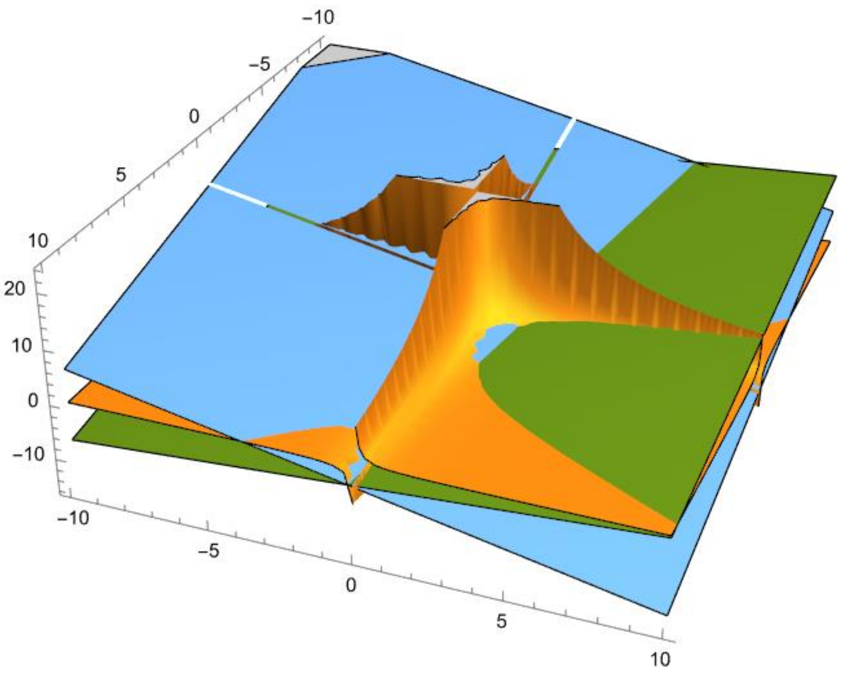
S tímto příkladem si neporadila GeoGebra. Řešení soustavy budeme hledat pomocí programu Mathematica.

```
In[66]:= NSolve[x*y*z == 6 && x + y + z == 6 && 2 x - y + 3 z == 9, {x, y, z}]
Out[66]= {{x → 9.70156, y → -0.175391, z → -3.52617},
          {x → 3.29844, y → 1.42539, z → 1.27617}, {x → 1., y → 2., z → 3.}}
```

Obrázek 95 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.4b (zdroj: vlastní)

```
In[1]:= Plot3D[{6 / (x*y), 6 - x - y, (9 - 2 x + y) / 3}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
         Mesh → None, Boxed → False]
```

Out[1]=



Obrázek 96 Wolfram Mathematica: grafické znázornění řešení příkladu 5.4b (zdroj: vlastní)

5.5 SOUSTAVY ROVNIC S NEZNÁMOU V EXPONENTU

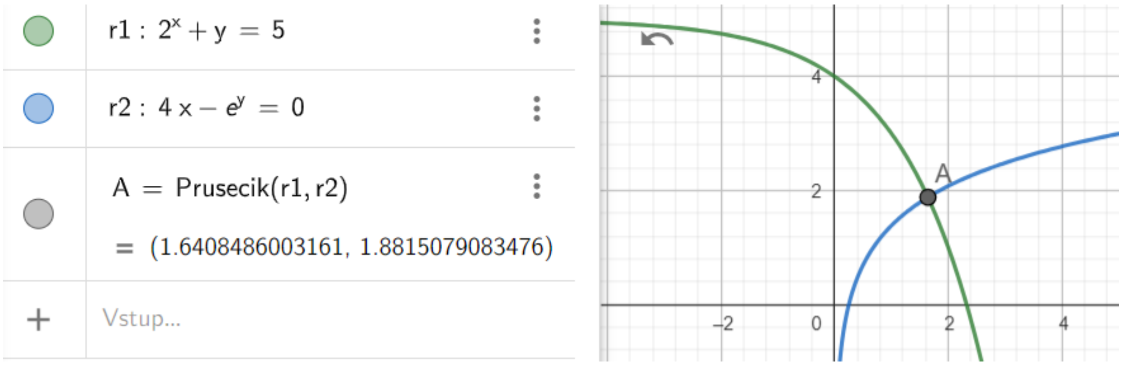
V této podkapitole si ukážeme řešení soustavy rovnic obsahující alespoň jednu neznámou v exponentu. Řešíme pomocí matematických softwarů.

Příklad 5.5a:

$$2^x + y = 5$$

$$4x - e^y = 0$$

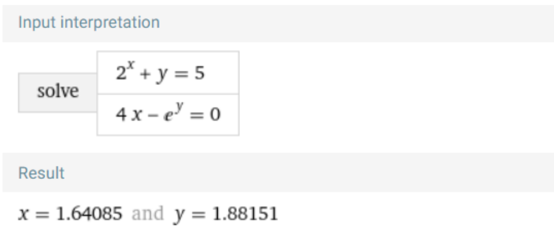
a) GeoGebra



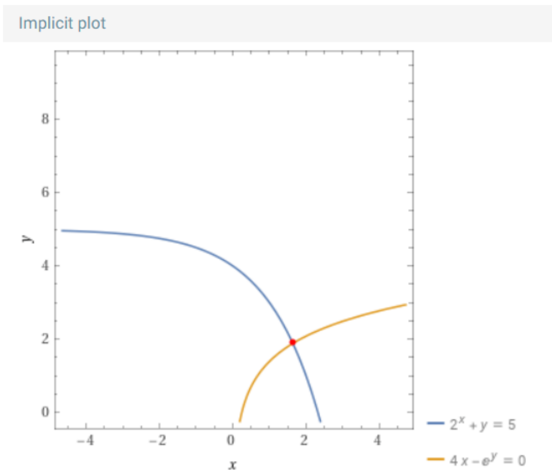
Obrázek 97 GeoGebra: řešení příkladu 5.5a (zdroj: vlastní)

b) WolframAlpha

V tomto případě zadání samotných rovnic programu nestačilo, pouze zobrazil jednotlivé grafy, ale bez řešení soustavy. Input byl nadále doplněn o slovo *Solve*, poté už program soustavu vyřešil.



Obrázek 99 WolframAlpha: input a řešení příkladu 5.5a (zdroj: vlastní)



Obrázek 98 WolframAlpha: graf příkladu 5.5a (zdroj: vlastní)

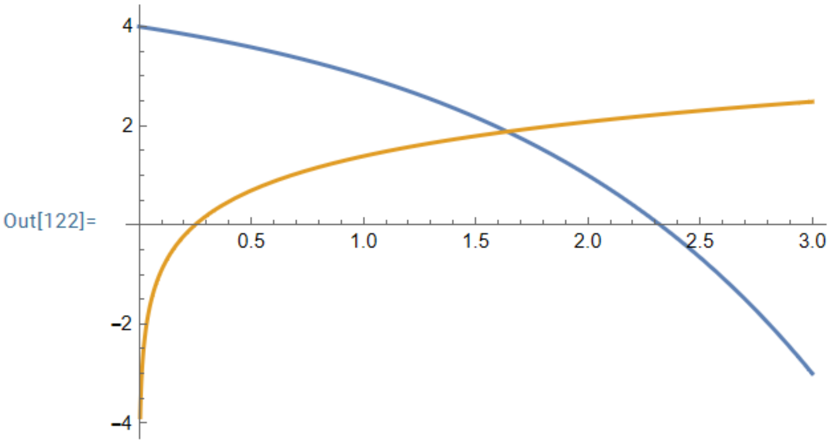
c) Wolfram Mathematica

Pro řešení soustavy rovnic obsahující neznámou v exponentu musíme použít funkci *FindInstance[]*, která obsahuje dvě proměnné: jednotlivé rovnice oddělené znaky && a množinu neznámých, pro které soustavu řešíme.

```
In[116]:= N[FindInstance[2^x + y == 5 && 4 x - Exp[y] == 0, {x, y}]]
Out[116]= {{x → 1.64085, y → 1.88151}}
```

Obrázek 100 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.5a (zdroj: vlastní)

```
In[122]:= Plot[{5 - 2^x, Log[4 x]}, {x, 0, 3}]
```



Obrázek 101 Wolfram Mathematica: grafické znázornění řešení příkladu 5.5a (zdroj: vlastní)

Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [1,64085; 1,88151].

5.6 Soustavy rovnic s neznámou v logaritmu

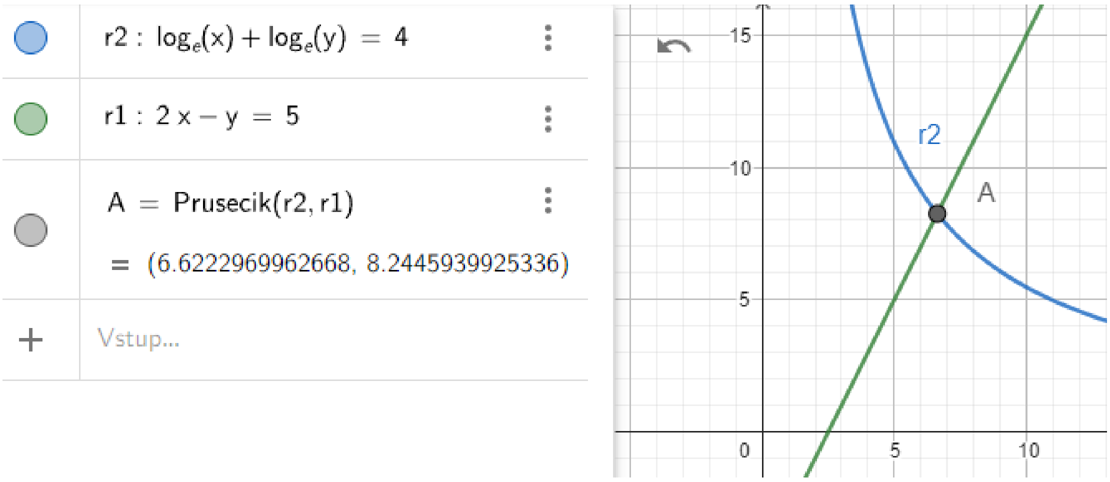
Zde si ukážeme řešení soustav rovnic obsahující alespoň jednu neznámou v argumentu logaritmu pomocí softwaru.

Příklad 5.6a:

$$\mathbf{2}x - y = \mathbf{5}$$

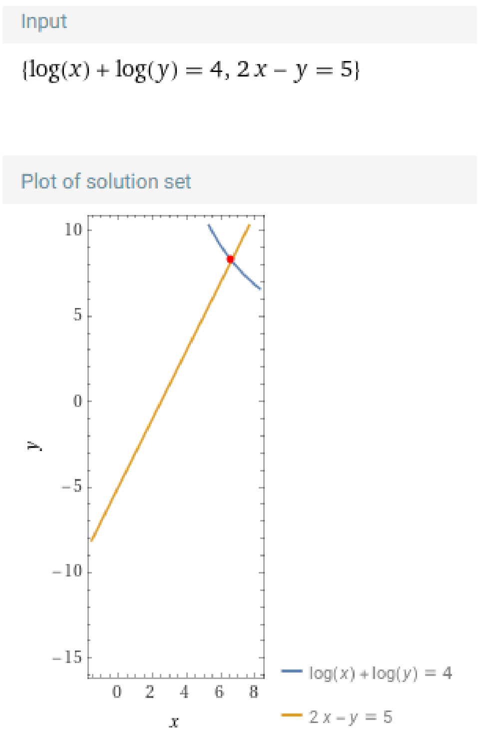
$$\ln x + \ln y = \mathbf{4}$$

a) GeoGebra



Obrázek 102 GeoGebra: řešení příkladu 5.6a (zdroj: vlastní)

b) WolframAlpha



Obrázek 103 WolframAlpha: řešení příkladu 5.6a (zdroj: vlastní)

Obrázek 104 WolframAlpha: input a graf příkladu 5.6a (zdroj: vlastní)

c) Wolfram Mathematica

```
In[10]:= Solve[Log[x] + Log[y] == 4 && 2 x - y == 5, {x, y}]
```

Out[10]= $\left\{\left\{x \to \frac{1}{4}\left(5 + \sqrt{25 + 8\,e^{4}}\right),\ y \to \frac{1}{2}\left(-5 + \sqrt{25 + 8\,e^{4}}\right)\right\}\right\}$

```
In[11]:= N[Solve[Log[x] + Log[y] == 4 && 2 x - y == 5, {x, y}]]
Out[11]= {{x → 6.6223, y → 8.24459}}
```

Obrázek 105 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.6a (zdroj: vlastní)

Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [6,6223; 8,24459].

5.7 SOUSTAVY ROVNIC OBSAHUJÍCÍ GONIOMETRICKÉ ROVNICE

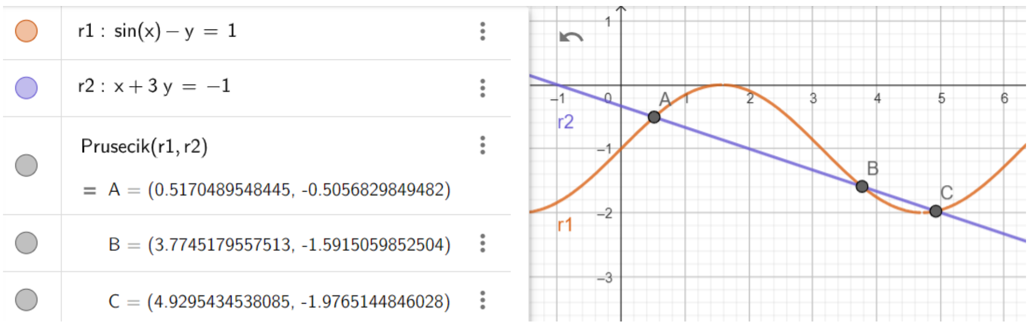
V této kapitole se objeví řešení soustav rovnic obsahující alespoň jednu neznámou v argumentu goniometrické funkce. Řešíme pomocí matematického softwaru.

Příklad 5.7a:

$$\sin x - y = 1$$

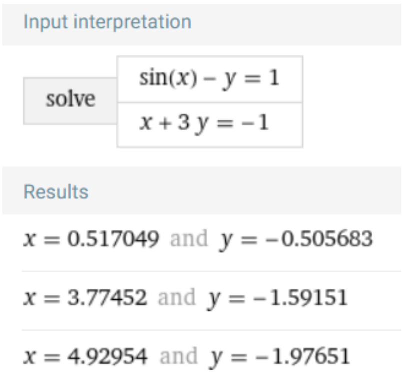
$$x + 3y = -1$$

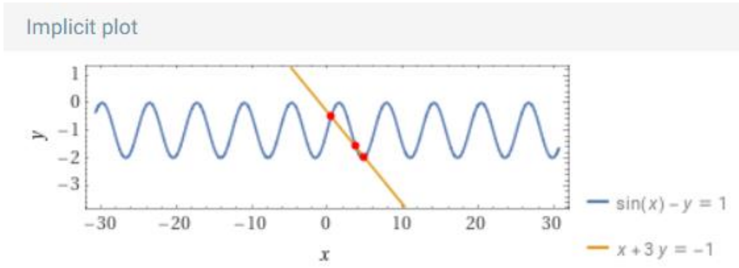
a) GeoGebra



Obrázek 106 GeoGebra: řešení příkladu 5.7a (zdroj: vlastní)

b) WolframAlpha





Obrázek 107 WolframAlpha: graf příkladu 5.7a (zdroj: vlastní)

Obrázek 108 WolframAlpha: input a řešení příkladu 5.7a (zdroj: vlastní)

c) Wolfram Mathematica

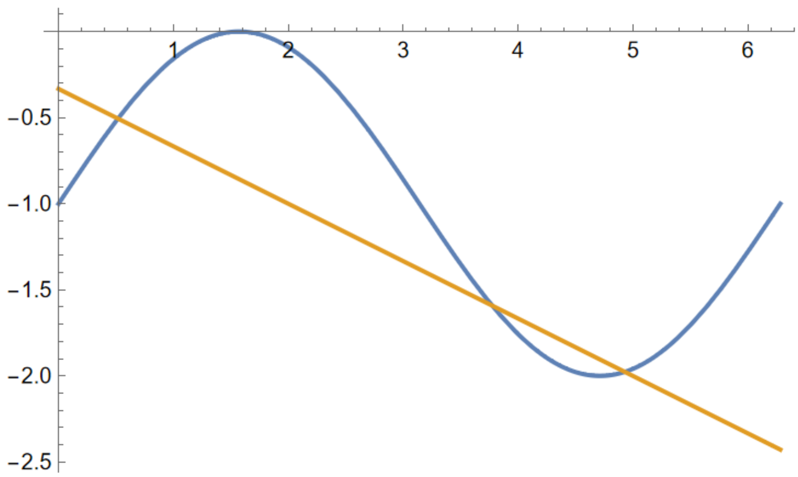
Zde se setkáváme s problémem, kdy soustava rovnic nejde vyřešit pomocí funkce *Solve[]*. Pokud použijeme funkci *FindInstance[]* musíme programu určit kolik „instancí“ ,které vyhovují právě zadané soustavě, hledáme.

```
In[46]:= N[FindInstance[Sin[x] - y == 1 && x + 3 y == -1, {x, y}, Reals, 3]]
Out[46]= {{x → 0.517049, y → -0.505683},
          {x → 3.77452, y → -1.59151}, {x → 4.92954, y → -1.97651}}
```

Obrázek 109 Wolfram Mathematica: řešení příkladu 5.7a (zdroj: vlastní)

```
In[45]:= Plot[{Sin[x] - 1, (-1 - x) / 3}, {x, 0, 2 Pi}]
```

Out[45]=



Obrázek 110 Wolfram Mathematica: grafické znázornění řešení příkladu 5.7a (zdroj: vlastní)

Řešením jsou tři uspořádané dvojice $[0{,}517049; -0{,}505683]$, $[3{,}77452; -1{,}59151]$, $[4{,}92954, -1{,}97651]$.

6 APLIKAČNÍ ÚLOHY ŘEŠENÉ SOUSTAVOU ROVNIC

Slovními úlohami ve školské matematice se rozumí všechny takové úlohy, jejichž zadání i položené otázky nejsou vyjádřeny pomocí matematické symboliky, ale jsou vyjádřeny ve slovní formě. (Polák 2014)

Matematické aplikační úlohy jsou úlohy, které tvoří námět, jímž je přirozená situace, jev, děj z běžného života nebo praxe související s některým (jiným než matematickým) vědním oborem. V takové úloze bývá formou otázky nebo příkazu vyjádřen problém, který z popsané situace vyplývá a který je možno řešit matematickými prostředky. (Metodický portál c2024)

Aplikační úlohy jsou důležitou součástí vyučování matematice, neboť při jejich řešení žáci poznávají význam matematických poznatků získávaných pro běžný život, učí se chápat matematiku jako zdroj prostředků pro řešení praktických úkolů, učí se vidět v okolním prostředí taková fakta a zákonitosti, která mohou být vyjádřena matematicky. (Metodický portál c2024)

Aplikační úlohy řešené soustavou rovnic jsou takové úlohy, jejíž zadání lze převézt do formy soustavy rovnic, která je dále řešitelná pomocí metod. V rámci této práce se budu zabývat čtyřmi typovými slovními úlohami, které vedou na soustavu rovnic. Jedná se o úlohy, ve kterých hledáme neznáme číslo, úlohy o směsích a roztocích, úlohy o rovnoměrném pohybu a úlohy o společné práci. Typové úlohy jsou takové úlohy, které podle zadání lze identifikovat a sloučit do jedné kategorie. Pro jednotlivé kategorie pak existuje obecný postup, který vede k řešení.

Pro všechny typové úlohy je možné sestavit velice obecný postup řešení:

1. Porozumění textu: Je velice důležité abychom správně chápali zadání slovní úlohy, potřebujeme vědět, čeho se úloha týká, jaké jsou dány podmínky řešení a jaká otázka je na nás kladena.
2. Rozbor (obrázek): V tento moment je důležité správně určit neznámé. V některých případech je na místě si úlohu vizualizovat jednoduchým obrázkem, který může být prospěšný pro správné určení neznámých a následně i sestavení rovnic soustavy.

3. Převedení úlohy do matematických výrazů: V tomto kroku již sestavujme rovnice pomocí zadání úlohy. Tento krok lze také nazvat *matematizace reálné situace.* (Šťovíčková 2012)
4. Řešení matematické úlohy: Zde probíhá řešení soustavy rovnic pomocí metod.
5. Zkouška: Zkoušku správnosti řešení dané úlohy je nutné provádět vzhledem k danému textu úlohy. Nestačí pouze zkouška např. sestavené rovnice, protože výsledkem matematizované úlohy může být více či méně řešení, než je počet řešení celé slovní úlohy. (Šťovíčková 2012)
6. Odpověď na otázku: Jako poslední odpovídáme na otázku tázanou v zadaní úlohy.

Účelem aplikačních úloh ve školách je přiblížení praktického využití matematických konceptů v reálném životě. Řešení aplikačních úloh vyžaduje analytické a kritické myšlení. Žáci musí formulovat problém, identifikovat vhodné matematické nástroje a postupně jejich použitím dojít k řešení. Aplikační úlohy simulují situace, které žáci mohou potkat v každodenním životě nebo v budoucí kariéře.

V aplikačních úlohách je kladen důraz na to, aby žák dokázal zadání úlohy přeformulovat do matematických konceptů (v našem případě soustavy rovnic). V následném výpočtu soustavy rovnic může být nápomocný matematický software a tím urychlit řešení aplikační úlohy.

Jelikož v těchto úlohách nejde až tak o vizualizaci řešení, budeme používat programy od Wolframu. Ty neřeší soustavy pomocí grafické metody na rozdíl od GeoGebry.

6.1 ÚLOHY, VE KTERÝCH HLEDÁME NEZNÁMÉ ČÍSLA

V úlohách, ve kterých hledáme neznáme čísla, jde o nalezení právě takových čísel, která vyhovují zadaným podmínkám. Úlohu si ukážeme na konkrétním případu.

Úloha 6.1.1: Najděte dvě čísla. Pokud k prvnímu číslu přičteme číslo 8 dostaneme číslo druhé. Druhé číslo je pětkrát větší, než číslo první.

První číslo označíme jako x a druhé číslo jako y. V tento moment je důležité správně převést slovní zadání do rovnice. První rovnice je sestavena velice triviálně, pouhým přepsáním slov do matematických výrazů dostaneme rovnici $\boldsymbol{x+8=y}$. Druhá rovnice může být pro sestavení komplikovanější. Pro lepší pochopení si můžeme říct: *„Aby se první číslo rovnalo druhému musíme první číslo vynásobit pěti, jelikož druhé číslo je pětkrát větší.“* Druhá rovnice bude tedy $\mathbf{5x = y}$. Dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Pro urychlení nalezení řešení budeme využívat matematický software.

```
In[1]:= Solve[x + 8 == y && 5 x == y, {x, y}]
Out[1]= {{x → 2, y → 10}}
```

Obrázek 111 Wolfram Mathematica: řešení soustavy rovnic z úlohy 6.1.1 (zdroj: vlastní)

Dostáváme řešení $x = 2, y = 10$. Jelikož jsme pro nalezení řešení využili matematický software nemusíme provádět zkoušku. Pro počítání bez softwaru se zkouška doporučuje. Odpověď na úlohu by zněla *„První číslo je 2, druhé číslo je 8.“*

Úloha 6.1.2: Součet dvou čísel je 25. Rozdíl jejich dvojnásobků je roven 10. Najdi tyto dvě čísla.

Opět si označíme neznámá čísla jako x a y. Z první věty dostáváme rovnici $x + y = 25$. Druhou větu můžeme převézt do tvaru rovnice následovně: $2x - 2y = 10$ nebo $2y - 2x = 10$. Pro obě tyto rovnice řešení získáme, je ale důležité si jednu z rovnic vybrat a následně s ní až do konce úlohy počítat. Nejdříve zvolíme první z uvedené dvojice, máme tedy dvě rovnice o dvou neznámých: $\mathbf{x + y = 25}$ a $\mathbf{2x - 2y = 10}$.

```
In[2]:= Solve[x + y == 25 && 2 x - 2 y == 10, {x, y}]
Out[2]= {{x → 15, y → 10}}
```

Obrázek 112 Wolfram Mathematica: řešení soustavy rovnic z úlohy 6.1.2 (zdroj: vlastní)

Dostáváme řešení soustavy $x = 15; y = 10$. Pokud bychom zvolili druhou z uvedených rovnic, řešení soustavy by bylo následující.

```
In[3]:= Solve[x + y == 25 && 2 y - 2 x == 10, {x, y}]
Out[3]= {{x → 10, y → 15}}
```

Obrázek 113 Wolfram Mathematica: řešení soustavy rovnic z úlohy 6.1.2 (zdroj: vlastní)

Toto neznamená, že řešením úlohy jsou dvě řešení, jelikož nehledáme uspořádanou dvojici. V tomto případě je nám jedno jestli první číslo je 15 a druhé 10 nebo naopak. Naším úkolem bylo zjistit dvě čísla, kterým vyhovuje zadaná podmínka a tím jsou čísla 10 a 15. Odpověď na úlohu zní: *„Hledaná dvě čísla jsou 10 a 15.“*

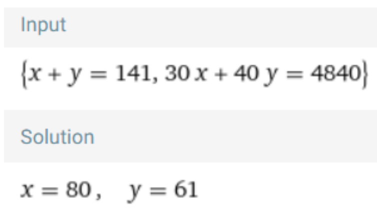
6.2 ÚLOHY O SMĚSÍCH A ROZTOCÍCH

Klasickým druhem slovních úloh jsou úlohy jsou úlohy o směsích. V chemii se směsí rozumí látková soustava složená z několika různých chemicky čistých látek, významnými příklady jsou slitiny kovů a roztoky látek v kapalině. Ve školské matematice se řeší slovní úlohy o směsích, jež vedou na matematický model ve tvaru soustavy dvou lineárních rovnic typu $x_1 + x_2 = x_3, c_1x_1 + c_2x_2 = c_3x_3$, kde hodnoty čtyř ze šesti proměnných jsou zadány a dvě proměnné jsou neznámé. (Polák 2014)

Úlohy o směsích a roztocích pojednávají o míchaní dvou směsích/roztocích s jinými vlastnostmi. Může se jednat o směs roztoků, bonbónů, typů zvířat atd… Ve většině případů hledáme počet kusů/kilogramů/litrů od jednotlivé směsi/roztoku, který vyhovuje požadavkům výsledné smíchané směsi.

Úloha 6.2.1 (směsi): Ve stánku se zmrzlinou se prodávají dvě velikosti zmrzliny, menší kopeček stojí 30Kč, větší kopeček stojí 40Kč. Kolik kopečků jednotlivých velikostí se za den prodalo, jestliže víme, že se celkem za den prodalo 141 kopečků a tržba činila 4840Kč.

Nejdříve si označíme počet kopečků malé zmrzliny jako x a počet kopečků velké zmrzliny jako y. Nyní můžeme sestavit jednoduchou rovnici, která zachovává počet zmrzlin $\boldsymbol{x + y = 141}$. Dále jestliže víme, že cena za všechny malé kopečky se odvíjí od počtu malých kopečků a ceně za kus, a to samé platí pro kopečky velké, můžeme zapsat následující rovnici $\boldsymbol{30x + 40x = 4840}$. Dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Pro zjištění řešení využijeme WolframAlpha.

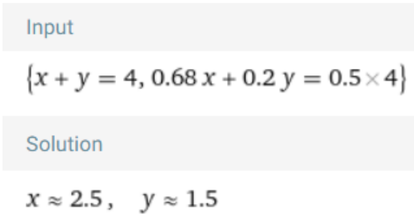


Obrázek 114 WolframAlpha: řešení soustavy rovnic z úlohy 6.2.1 (zdroj: vlastní)

Z řešení vyplývá následující odpověď: *„Malých kopečků se prodalo 80 kusů a velkých kopečků 61 kusů."*

Úloha 6.2.2 (roztoky): Kolik litrů 68% roztoku a 20% roztoku je potřeba na umíchání 4 litrů 50% roztoku?

Počet litrů 68% roztoku si označíme x a počet litrů 20% roztoku označíme y. Nejdříve sestavíme rovnici, která vyjadřuje objem roztoku. $\boldsymbol{x + y = 4}$. Procenta si převedeme na desetinná čísla neboli $68\% = 0{,}68$, $20\% = 0{,}2$ a $50\% = 0{,}5$. Dále sestavíme rovnici, která zachovává koncentraci roztoku: $\boldsymbol{0{,}68x + 0{,}2y = 0{,}5 \cdot 4}$. Soustavu rovnic vyřešíme pomocí softwaru.



Obrázek 115 WolframAlpha: řešení soustavy rovnic z úlohy 6.2.2 (zdroj: vlastní)

Řešení a odpověď na otázku k úloze je následující: *„Je potřeba 2,5 litru 68% roztoku a 1,5 litru 20% roztoku.“*

6.3 ÚLOHY O ROVNOMĚRNÉM POHYBU

Rovnoměrný pohyb je pohyb tělesa (hmotného bodu), u něhož velikost rychlosti v je konstantní (nezávislá na čase). Nejjednodušší je rovnoměrný přímočarý pohyb, při kterém má rychlost i neměnný směr. Začal-li rovnoměrný pohyb tělesa (hmotného bodu) ze zvoleného místa v čase $t_0 = 0$, pak pro dráhu s jím uraženou v čase t platí vztah $s = vt$, kde v je velikost rychlosti (konstanta přímé úměrnosti mezi s a t). (Polák 2014)

Úlohy o pohybu řeší problém, při kterém se dva objekty pohybují rovnoměrnou rychlostí a dojde k jejich setkání/srážce.

Úlohy můžeme rozdělit na dva typy. Jedním typem je, když se objekty pohybují opačným směrem tzn. pohybují se k sobě. V tomto případě vycházíme z úvahy, kde součet drah jednotlivých objektů musí být roven celkové vzdálenosti mezi těmito objekty na začátku: $s = s_1 + s_2$, kde s je celková dráha a s_1 a s_2 jsou uražené dráhy jednotlivých objektů.

Druhý typ pojednává o situaci, kdy se objekty pohybují stejným směrem. Jeden z objektů vyrazil dříve nebo má náskok a druhý, rychlejší, objekt dožene objekt první.

Úkolem této úlohy je většinou vyřešit, v jaké vzdálenosti od počátečního bodu se objekty setkají a v jakém čase toto nastane. Pro tento případ se jednotlivé dráhy od počátečního bodu musí rovnat: $s_1 = s_2$.

Úloha 6.3.1: Dva přátelé Petr a Ondra od sebe bydlí 5 km. Řeknou si že v 10:00 oba vyrazí a půjdou si naproti. V 10 h vyrazil Petr průměrnou rychlostí chůze 3 km/h. Ondra se o trochu zpozdil a vyšel o 12 minut později, ale šel rychlou chůzí průměrně 5 km/h. V jaký čas se potkají a v jaké vzdálenosti od Petrova domu to bude?

V našem případě budou neznáme jednotlivé časy neboli doby do setkání. Rychlost Petra označíme $v_1 = 3\frac{km}{h}$ a rychlost Ondry $v_2 = 5\frac{km}{h}$. Dobu chůze Petra označíme $t_1 \dots x$ a dobu chůze Ondry $t_2 \dots y$. Pro tyto dva časy/neznámé platí, že Ondra je na cestě o 12 minut méně neboli o $\frac{1}{5}h$. Poté můžeme napsat $\boldsymbol{y = x - \frac{1}{5}}$. Další rovnici sestavíme pomocí vztahu $s = s_1 + s_2$, dále rozepíšeme $s = v_1 \cdot t_1 + v_2 \cdot t_2$. Nyní dosadíme za celkovou vzdálenost a jednotlivé rychlosti: $\boldsymbol{5 = 3x + 5y}$. Dostáváme soustavu rovnic o dvou neznámých.

```
In[14]:= Solve[y == x - (1 / 5) && 5 == 3 x + 5 y, {x, y}]

Out[14]= {{x → 3/4, y → 11/20}}
```

Obrázek 116 Wolfram Mathematica: řešení soustavy rovnic z úlohy 6.3.1 (zdroj: vlastní)

Pro $t_1 = x$ získáváme hodnotu $\frac{3}{4}h$, tzn. že setkání nastalo třičtvrtě hodiny po tom, co vyšel Petr. Setkání nastalo v 10:45. Uraženou vzdálenost Petra zjistíme pomocí vztahu pro výpočet dráhy: $s_1 = v_1 \cdot t_1 = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}\ km = 2{,}25\ km$. Odpověď na úlohu zní: *„Potkají se v čase 10:45 a Petr ujde 2,25 km."*

Úloha 6.3.2: Z Plzně směrem na Kolín vyjel autobus jedoucí průměrnou rychlostí 80 km/h, o půl hodiny déle za ním vyjelo auto jedoucí průměrnou rychlostí 130 km/h. Zjisti, zda se autobus a auto minou, jestliže víš že města Plzeň a Kolín jsou vzdálené 160 km. Pokud ano, na jakém kilometru od Plzně to nastane?

I v tomto případě budou hledané neznáme časy jízdy jednotlivých vozidel. Čas jízdy autobusu označíme $t_1 \dots x$ a čas jízdy auta označíme $t_2 \dots y$. Můžeme mezi nimi sestavit vztah $\boldsymbol{x = y - \frac{1}{2}}$. Dále rychlosti označíme $v_1 = 80\frac{km}{h}$ a $v_2 = 130\frac{km}{h}$. Druhou rovnici sestavíme pomocí vztahu, který popisuje fakt, že jednotlivé dráhy se v momentu setkaní musí rovnat: $s_1 = s_2$. Pomocí vzorce pro dráhu dosadíme jednotlivé rychlosti a časy $v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2$ neboli $\mathbf{80x = 130y}$. Pro určení řešení soustavy využijeme software.

```
In[30]:= Solve[y == x - 1/2 && 80 x == 130 y, {x, y}]
Out[30]= {{x -> 13/10, y -> 4/5}}
```

Obrázek 117 Wolfram Mathematica: řešení soustavy rovnic z úlohy 6.3.2 (zdroj: vlastní)

Neznámá $t_1 = \frac{13}{10} h.$ a $t_2 = \frac{4}{5} h.$ Nyní potřebujeme zjistit na jakém kilometru se potkali. Zjistíme to pomocí dosazení do vzorce dráhy pro libovolné vozidlo, jelikož se vzdálenosti rovnají. $s_2 = v_2 \cdot t_2 = 130 \cdot \frac{4}{5} = 104\ km.$ Odpověď zní: *„Vozidla se potkají ještě před Kolínem a nastane to na 104 km od Plzně.“*

6.4 ÚLOHY O SPOLEČNÉ PRÁCI

Tyto slovní úlohy spočívají v porovnávání práce či jiné činnosti určitých subjektů (pracovníků, zařízení apod.), jestliže je jimi prováděna jednotlivě a když ji provedou společně. Označíme-li C celkovou práci (resp. jinou činnost), která se má vykonat, $t_1, t_2, \dots, t_n$ doby práce jednotlivých subjektů a t dobu jejich společné ekvivalentní práce. pak slovní úloha tohoto typu vede na rovnici tvaru

$$\frac{C}{t_1} + \frac{C}{t_2} + \cdots + \frac{C}{t_n} = \frac{C}{t} \; čili \; \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n} = \frac{1}{t}.$$

Zlomky na levé straně rovnice vyjadřují části práce C (příp. $C = 1$) vykonané jednotlivými subjekty za jednotku času a zlomek na pravé straně rovnice vyjadřuje ekvivalentní práci vykonanou společně za jednotku doby. (Polák 2014)

Úlohy o společné práci se zabývají situacemi, kdy skupina lidí nebo strojů spolupracuje na dokončení určitého úkolu. Tyto úlohy často vyžadují stanovení pracovního tempa jednotlivých pracovníků nebo strojů a určení času potřebného k dokončení úkolu, pokud pracují společně. Ukážeme si názorně na příkladu.

Úloha 6.4.1: Táta a syn mají za úkol vymalovat 3 stejně velké pokoje za jeden den. Syn začal v 8 hodin ráno a první pokoj mu trval vymalovat 6 hodin. Táta měl za úkol vymalovat druhý pokoj, začal o dvě hodiny později než syn, ale s prací skončil ve stejný čas jako syn. Poté měli společně hodinovou pauzu na oběd a domluvili se, že na poslední *místnosti budou dělat společně. Vypočítej, jak dlouho jim trvalo vymalovat třetí pokoj a v kolik hodin s prací skončili?*

Zde je tedy důležité si nejdříve uvědomit jako dlouho každému trvalo vymalování jednoho pokoje. Syn pracoval 6 hodin a táta o 2 hodiny méně, tím pádem 4 hodiny. Zapíšeme v závislosti na x a y obecně, co známe:

Táta: $4\ hodiny \dots 1\ pokoj$	$1\ hodina \dots \frac{1}{4}\ pokoje$	$x\ hodin \dots \frac{x}{4}\ pokoje$
Syn: $6\ hodin \dots 1\ pokoj$	$1\ hodina \dots \frac{1}{6} pokoje$	$y\ hodin \dots \frac{y}{6} pokoje$

V tomto případě budou pracovat na posledním pokoji stejně dlouho, tím pádem $\boldsymbol{x = y}$. Druhou rovnici sestavíme pomocí myšlenky, že část pokoje, co vymaluje táta a část, co vymaluje syn musí dohromady dát jeden celý pokoj neboli $\boldsymbol{\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1}$. Soustavu vyřešíme.

```
In[52]:= Solve[x == y && x / 4 + y / 6 == 1, {x, y}]
Out[52]= {{x → 12/5, y → 12/5}}
```

Obrázek 118 Wolfram Mathematica: řešení soustavy rovnic z úlohy 6.4.1 (zdroj: vlastní)

Čas, který stráví malování třetího pokoje je tedy $x = \frac{12}{5} h = 2{,}4h = 144\ min$. Následně vypočteme v kolik hodin skončili: $8h\ (čas\ začátku) + 6h\ (práce\ syna) + 1h\ (pauza) + 2{,}4h\ (společná\ práce) = 17.4h \to 17{:}24$. Odpověď zní: *„Vymalování třetího pokoje jim trvalo 2 h a 24 min a skončili v 17:24.“*

7 METODOLOGIE VÝZKUMU

7.1 DOTAZNÍK JAKO VÝZKUMNÁ METODA

Dotazník je jednou z nejběžnějších metod sběru dat v pedagogickém výzkumu. Jedná se o strukturovaný soubor otázek, které jsou rozdány respondentům, aby poskytli odpovědi na konkrétní otázky. Otázky jsou též označovány jako položky. Dotazníková metoda umožňuje sbírat kvantitativní data od velkého počtu respondentů, což poskytuje široký a reprezentativní pohled na daný jev. Při navrhování dotazníku je důležité definovat cíl výzkumu a zajistit, aby otázky byly jasné, srozumitelné a přesně formulovány.

Podle toho, jakým způsobem má respondent v určité položce dotazníku odpovědět, lze rozdělit položky na otevřené a uzavřené (nestrukturované a strukturované). U otevřených položek respondent odpověď sám vytváří, u položek uzavřených určitým způsobem manipuluje s odpověďmi již navrženými (např. vybírá, seřazuje apod.). (Chráska 2016)

Uzavřené položky lze rozdělit na dichotomické a polytomické.

Pokud na položku lze dát jen dvě vzájemně se vylučující odpovědi (např. ano – ne), hovoříme o položkách dichotomických. U polytomických položek se předkládá více odpovědí než dvě. Tyto položky je možno dále rozdělit na výběrové, výčtové a stupnicové. Ve výběrových položkách se respondentům předkládá několik odpovědí, z nichž jednu mají vybrat. Je důležité, aby kategorie odpovědí (nabídky) byly vyčerpávající, ale ne příliš početné. (Chráska 2016)

Výběrové položky jsou takové, kde lze označit jen jednu odpověď. Zatímco položky výčtové nabízí zaškrtnutí více odpovědí, než je jedna.

Abychom se vyhnuli nebezpečí, že neuvedeme některou možnou odpověď, můžeme použít i nabídky „jiná odpověď‟. Tuto nabídku volí respondent v případě, že mu nevyhovuje žádná z nabízených možností. Položky tohoto typu bývají označovány jako položky polouzavřené. (Chráska 2016)

7.1.1 TVORBA DOTAZNÍKU

Vytvořený dotazník byl autorem v dubnu 2024 zanesen do základní školy, kde byl ve spolupráci s paní magistrou vyplněn žáky 9. ročníku při hodině matematiky. Úvodní část dotazníku zahrnuje představení autora dotazníku, vysvětlení smyslu dotazníkového šetření a poděkování za vstřícnost a spolupráci. Dotazník obsahuje dvě otevřené položky, jednu uzavřenou polootevřenou a čtyři polouzavřené položky.

Položky v dotazníku:

- Jaký obor chcete dále studovat po ukončení základní školy? (otevřená položka)
- Se kterým matematickým softwarem jste se již setkali? (výčtová polouzavřená položka)
    - GeoGebra
    - WolframAlpha
    - Wolfram Mathematica
    - Matlab
    - Maple
    - Jiné (uveďte)
- Kde jste se setkali s matematickým softwarem? (výčtová polouzavřená položka)
    - Ve škole
    - V zájmovém kroužku
    - Ve volném čase
    - Jiné (uveďte)
- Využili jste některý z programů pro řešení soustavy rovnic? Pokud ano, uveďte který. (otevřená položka)
- Jaké jsou podle Vás hlavní výhody používání matematického softwaru při řešení soustavy rovnic? (výčtová polouzavřená položka)
    - Rychlost
    - Přesnost
    - Možnost vizualizace
    - Zjednodušení složitějších výpočtů

  - Lepší porozumění postupu řešení
  - Jiné (uveďte)

- Myslíte si, že používání matematického softwaru vám pomohlo zlepšit Vaše dovednosti v matematice obecně? (výběrová uzavřená položka)
  - Ano, výrazně
  - Ano, trochu
  - Žádný rozdíl jsem nepocítil/a
- V rámci řešení slovní úlohy vedoucí na soustavu rovnic (úlohy o směsích, úlohy o společné práci) Vám nejvíce dělá potíže: (výběrová polouzavřená položka)
  - Pochopení zadání
  - Správné určení neznámých
  - Sestavení rovnic
  - Vyřešení soustavy rovnic
  - Formulování odpovědí
  - Jiné (uveďte)

7.1.2 VÝSLEDKY DOTAZNÍKU

Matematický software, se kterým se žáci nejvíce setkávají je GeoGebra (označeno 42 % dotázaných). Jako další program, se kterým se žáci setkali, který nebyl uveden ve výčtu, byl program Photomath (označeno 37 % dotázaných). V otázce „Kde jste se setkali s matematickým softwarem?“ se 63 % dotázaných žáků setkalo s matematickým softwarem ve škole. Mezi softwary, které žáci využili k řešení soustavy rovnic se dostal jen program Photomath (program využilo 37 % dotázaných). Můžeme si všimnout, že pokud se žák s programem Photomath setkal jistě ho využil při řešení soustavy rovnic. Ostatní žáci se v rámci řešení soustavy rovnic s žádným softwarem nesetkali. V otázce hlavních výhod softwaru se nejčastěji objevovala odpověď *Rychlost* (označeno 68 % dotázaných). Dále se nejčastěji objevovaly odpovědi *Přesnost* (37 %) a *Zjednodušení složitějších výpočtů* (42 %). V rámci otázky na zlepšení matematických dovedností 70 % dotázaných pociťuje zlepšení právě prostřednictvím matematického softwaru. Z poslední položky vyplývá, že 84 % dotázaných mají největší problém ještě před samotným řešením soustavy rovnic, tj.

Pochopení zadání, Správné určení neznámých, Sestavení soustavy. Nejčastěji se objevila varianta potíže při sestavení rovnic (32 % dotázaných).

Ze získaných výsledků z dotazníkového šetření bylo zjištěno, že většina žáků se setkala s matematickým softwarem ve školním prostředí, čímž se dokázalo, že matematické softwary hrají na školách, čím dál, tím větší roli. Velký přínos matematického softwaru ve výuce vidím při řešení aplikačních úloh, kdy většina pozornosti může být věnována žákovo pochopení zadání a následné sestavení soustavy. Samotné řešení soustavy může být přenecháno na matematický software.

7.2 INTERVIEW JAKO VÝZKUMNÁ METODA

Interview je metoda shromažďování dat o pedagogické realitě, která spočívá v bezprostřední verbální komunikaci výzkumného pracovníka a respondenta. Někdy se v podobném významu používá také obsahově širšího českého termínu „rozhovor“. Protože však ne každý rozhovor je interview, je používání pojmu „interview“ přesnější a výstižnější. Anglický výraz „interview“ je složen ze dvou částí, kde inter znamená „mezi“ a view znamená „názor“ nebo „pohled“. (Chráska 2016)

Nestrukturované interview se více přibližuje přirozené komunikaci mezi lidmi. Výhodou nestandardizovaného interview je především to, že umožňuje snadnější navázání kontaktu mezi tazatelem a respondentem, což může znamenat jeho bezprostřednější a upřímnější projev. (Chráska 2016)

7.2.1 VÝSLEDKY VÝZKUMU POMOCÍ INTERVIEW

V rámci výzkumu vzniklo nestrukturované interview s paní magistrou, která vyučuje matematiku na druhém stupni základní školy.

Při rozhovoru paní magistra uvedla, že autorem zmiňované matematické softwary zná, ale že je kvůli časové dotaci hodin matematiky na základní škole nelze plně využít. Jako další důvod, proč zmiňované matematické softwary využívá jen částečně uvedla, že je pro ni mnohem jednodušší a dostačující demonstrovat danou matematickou problematiku pouhým náčrtem na školní tabuli. Zmínila však, že vidí vysoký potenciál jejich využití na středních školách hlavně na matematicky zaměřených studijních oborech.

ZÁVĚR

Na začátku práce byly uvedeny soustavy rovnic řešené na základní a střední škole. Byly popsány metody jejich řešení. Dále se práce zabývala matematickým softwarem a jeho využití při řešení soustav rovnic. Pro každý software byly uvedeny důvody a výhody využití softwaru ve školách. Mezi hlavní výhody matematických softwarů patří mimo jiné i grafická vizualizace řešení soustavy rovnic. V práci se dále objevuje popis interakce s matematickými softwary, zejména při řešení soustav rovnic. Následně byly jednotlivé matematické softwary vyzkoušeny i při řešení složitějších soustav rovnic. V další části byla práce zaměřena na aplikační úlohy vedoucí na řešení pomocí soustavy rovnic. Na závěr byl vypracován malý výzkum na základní škole na téma matematických softwarů prostřednictvím dotazníkového šetření a interview.

Cílem této práce bylo představit některé z matematických softwarů a uvést jejich využití v rámci výuky matematiky.

RESUMÉ

At the beginning of the work a system of equations taught in primary and secondary school were introduced. Different methods of their solution were described. Next, the thesis dealt with mathematical software and its use in solving systems of equations. For each software were given reasons and advantages of using the software in school. The main advantages of a mathematical software include graphical visualization of solutions for system of equations. The paper also includes a description of the interaction with mathematical software, especially in solving systems of equations. Subsequently, different mathematical software were also tested in solving more complex systems of equations. In the next part, the thesis focused on application problems leading to solutions using systems of equations. Finally, small research was conducted in a primary school about mathematical software through a questionnaire survey and interview.

The aim of this thesis was to introduce some of the mathematical software and to indicate their use in mathematics education.

SEZNAM LITERATURY

CIZLEROVÁ M.; KUPKA P.; POLICKÝ Z.; ŠKAROUPKOVÁ B. a BLEIER T. *Matematika pro střední školy - 2. díl: Výrazy, rovnice, a nerovnice – Učebnice*. Brno: DIDAKTIS, 2013. ISBN 978-80-7358-208.

GEOGEBRA. *Co je GeoGebra?* Online. c2024. Dostupné z: https://www.geogebra.org/about. [cit. 2024-04-03].

GERGELITSOVÁ Š. *Průvodce Geogebrou: počítač ve výuce nejen geometrie*. Praha: Generation Europe, 2011. ISBN 978-80-904974-3-6.

CHRÁSKA, M. *Metody pedagogického výzkumu*. Online. 2. vydání. Grada Publishing, 2016. ISBN 978-80-271-9225-0. Dostupné z: https://is.mvso.cz/el/mvso/zima2021/YMSID/250420/Metody_pedagogickeho_vyzkumu__1_.pdf. [cit. 2024-04-21].

JANEČKOVÁ M.; KREJČÍČKOVÁ K.; MATASOVÁ B.; MIHÁLIKOVÁ L.; NÁDVORNÍKOVÁ P. et al. *Hravá matematika 9*. Praha: Taktik International, spol., 2022. ISBN 978-80-7563-501-3.

KREJČÍKOVÁ K. *Možnosti využití programu Wolfram Mathematica ve výuce matematiky* Online. Praha, 2014 [cit 2024-03-31]. Dostupné z: https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/73222/BPTX_2012_2_11410_0_352057_0_136228.pdf. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky.

METODICKÝ PORTÁL RVP.CZ. *Jak řešit aplikační úlohy*. Online. c2024. Dostupné z: https://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/17847/jak-resit-aplikacni-ulohy.html. [cit. 2024-04-15].

POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7238-449-5.

PŮLPÁN Z.; ČIHÁK M.; TREJBAL J.; BOUŠKOVÁ J. a BRZOŇOVÁ M. *Matematika 9 pro základní školy*. 2. vydání. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, akciová společnost, 2019. ISBN 978-80-7235-614-0.

SOUČEK V. *Soustavy lineárních rovnic.* Online. 2011. Dostupné z: https://www.karlin.mff.cuni.cz/~soucek/LA_11_9.pdf. [cit. 2024-04-13].

STUDENTŮM PEDAGOGIKY. *Metodologie výzkumu*. Online. c2024. Dostupné z: https://pedagogika.skolni.eu/pedagogika/metodologie-vyzkumu/#8. [cit. 2024-04-21].

ŠŤOVÍČKOVÁ Marie. *Aplikační úlohy řešené rovnicemi.* Online. Brno, 2012 [cit. 2024-04-15]. Dostupné z: https://is.muni.cz/th/gqu2t/DipK.pdf. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky

WOLFRAM. *About Wolfram*. Online. c2024. Dostupné z: https://www.wolfram.com/company/. [cit. 2024-04-04].

WOLFRAM. *Wolfram Mathematica*. Online. c2024. Dostupné z: https://www.wolfram.com/mathematica/. [cit. 2024-04-04].

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ