

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

ÚLOHY NA VLASTNÍ ČÍSLA S VÁHOVOU FUNKCÍ

PLZEŇ, 2024

FILIP ŠTEFFEL

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2023/2024

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Filip ŠTEFFEL**
Osobní číslo: **A21B0066P**
Studijní program: **B0541A170007 Matematika a její aplikace**
Téma práce: **Úlohy na vlastní čísla s váhovou funkcí**
Zadávací katedra: **Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování

1. Nastudovat standardní jednorozměrné úlohy na vlastní čísla Sturmova-Liouvilleova typu.
2. Uvažovat úlohu na vlastní čísla s po částech konstantní váhovou funkcí a zaměřit se na závislost vlastních čísel a tvaru vlastních funkcí na parametrech váhy.
3. Porovnat případy pozitivně definitních, semidefinitních a indefinitních vah.
4. Využít a porovnat známé odhady nejmenšího vlastního čísla v případě obecnějších váhových funkcí.
5. Provést numerické experimenty a pomocí nich ilustrovat získané teoretické výsledky.

Rozsah bakalářské práce: **20-50 stran**
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

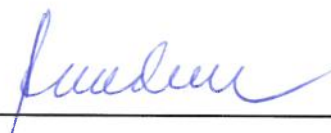
1. A. Kufner: *Obyčejné diferenciální rovnice*. Západočeská univerzita, Plzeň (1993).
2. F. V. Atkinson: *Multiparameter eigenvalue problems*. Vol. 1. New York: Academic Press (1972).
3. J.R.L. Webb: *Estimates of eigenvalues of linear operators associated with nonlinear boundary value problems*, *Dynamic Systems and Applications*, 23 (2014), 415-430.
4. B. Yang: *Positive solutions of the $(n - 1, 1)$ conjugate boundary value problem*, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.* 53 (2010), 13 pp.

Vedoucí bakalářské práce: **Doc. Ing. Gabriela Holubová, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **2. října 2023**
Termín odevzdání bakalářské práce: **22. května 2024**



Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni, dne 21. května 2024

.....
vlastnoruční podpis

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucí bakalářské práce doc. Ing. Gabriele Holubové, Ph.D. za návrh tématu bakalářské práce, trpělivost, cenné rady, připomínky a laskavost po celou dobu vedení práce. Dále bych rád poděkoval doc. RNDr. Petru Stehlíkovi, Ph.D. a RNDr. Jonáši Volkovi, Ph.D. za vytvoření a poskytnutí této šablony.

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zaměřuje na problematiku vlastních čísel s váhovou funkcí. Pro jednoduchost uvažujeme konkrétní obyčejný diferenciální operátor druhého řádu s Dirichletovými okrajovými podmínkami. Nejprve určíme vlastní čísla a vlastní funkce v případě po částech konstantní váhové funkce a studujeme jejich závislost na parametrech váhové funkce. V druhé polovině práce zkoumáme dolní odhady vlastních čísel a iterační odhady principiálního vlastního čísla. Tyto odhady porovnáme na několika nelineárních váhových funkcích, u kterých provedeme numerické experimenty.

Klíčová slova: vlastní čísla, vlastní funkce, Sturmova-Liouvilleova úloha, víceparametrová váhová funkce, odhady vlastních čísel, principiální vlastní číslo

Abstract

This bachelor thesis focuses on the eigenvalue problem with weights. For simplicity, we consider a particular second order ordinary differential operator with Dirichlet boundary conditions. We first determine the eigenvalues and eigenfunctions in the case of a piecewise constant weight function and study their dependence on the parameters of the weight function. In the second half of the paper, we investigate lower estimates of the eigenvalues and iterative estimates of the principal eigenvalue. We compare these estimates on several nonlinear weight functions for which we perform numerical experiments.

Keywords: eigenvalues, eigenfunctions, Sturm-Liouville problem, multiparameter weight function, eigenvalue estimates, principal eigenvalue

Obsah

Předmluva	iii
Obsah	viii
1 Formulace úlohy	1
1.1 Úvod	1
2 Po částech konstantní váhová funkce s jedním parametrem	3
2.1 Obecné řešení na podintervalech	3
2.2 Řešení okrajové úlohy	4
2.3 Závislost vlastních čísel na parametru ϵ	9
3 Po částech konstantní váhová funkce s dvěma parametry	13
3.1 Příklad $\zeta < 0$	13
3.2 Příklad $\zeta > 0$	16
4 Principiální vlastní číslo a jeho odhady	21
4.1 Odhad na základě Poincarého nerovnosti	21
4.2 První odhad na základě Morreyho nerovnosti	22
4.3 Druhý odhad na základě Morreyho nerovnosti	23
4.4 Yangův iterační odhad pomocí Greenovy funkce	24
4.5 Druhý iterační odhad pomocí Collatzových-Wielandtových čísel	28
4.6 Porovnání odhadů	29
5 Závěr	39
Literatura	41

Formulace úlohy 1

1.1 Úvod

Vlastní čísla a vlastní prvky jsou klíčový pojem a nástroj v mnoha oblastech nejen matematiky, ale také v dalších vědních disciplínách, které čerpají z matematiky a používají ji jako základní nástroj pro analýzu, modelování a řešení problémů. Jejich znalost je zásadní v teorii dynamických systémů, kde slouží k určení stability stacionárních bodů. V teorii grafů je spektrum matice sousednosti jeden ze základních nástrojů pro určování vlastností grafů. Vlastní čísla a vlastní funkce samoadjungovaných operátorů jsou klíčové pro popis kvantových systémů. Například vlastní čísla známého Hamiltonova operátoru odpovídají energiím, které může kvantový systém nabývat. V klasické fyzice jsou vlastní čísla matice tuhosti a hmotnosti základní pro analýzu vibrací a dynamických vlastností mechanických a strukturálních systémů. Například vlastní frekvence a tvarové vlastnosti vlastních funkcí odpovídají vibracím daného mechanického dynamického systému.

Úlohou na vlastní čísla většinou rozumíme rovnici ve tvaru

$$Ly = \lambda y, \quad (1.1)$$

kde $L : X \rightarrow X$ je lineární operátor, y je prvek prostoru X a $\lambda \in \mathbb{R}$. Takovému λ , pro které existuje netriviální řešení rovnici (1.1), se říká vlastní číslo a y se nazývá vlastní prvek (respektive vektor, funkce a podobně). V této práci se budeme zabývat vlastními čísly obyčejných diferenciálních operátorů, tedy $y = y(x)$ je (dostatečně diferencovatelná) funkce. Speciálním problémem na vlastní čísla je takzvaná Sturmova-Liouvilleova úloha ve tvaru

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = \lambda r(x)y, \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

kde funkce $p(x)$, $q(x)$ a $r(x)$ jsou dané funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$. V případě takzvané regulární Sturmovy-Liouvilleovy úlohy musí být funkce $p(x)$ kladná na intervalu (a, b) a $r(x)$, známá jako váhová funkce, musí být také kladná. Okrajové podmínky, kde $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ jsou reálné konstanty, zahrnují Dirichletovy, Neumannovy nebo obecnější Robinovy podmínky. V případě regulárního problému je nezbytné, aby obě konstanty α_1 a α_2 nebyly nulové a zároveň ani obě konstanty β_1 a β_2 nemohou být nulové současně.

Tento problém a teorii okolo něj rozvinuli francouzští matematici Jacques Charles François Sturm (1803–1855) a Joseph Liouville (1809–1882), po kterých je pojmenována.

V této bakalářské práci budeme zkoumat speciální případ Sturmovy-Liouvilleovy úlohy na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$, kde funkce $p(x) \equiv 1$ a $q(x) \equiv 0$. Okrajové podmínky budou homogenní Dirichletovy podmínky, tedy $y(0) = y(\pi) = 0$.

Základní úloha tedy bude mít tvar

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda r(x)y(x) = 0 & \text{pro } x \in (0, \pi), \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

V případě $r(x) \equiv 1$ je známé, že vlastní čísla mají tvar druhých mocnin přirozených čísel a vlastní funkce jsou ve tvaru $y(x) = \sin nx$. My se soustředíme na případy, kdy váhová funkce $r(x) \neq 1$. V kapitole 2 začneme po částech konstantní funkcí, která bude nejprve obsahovat jeden parametr, který bude popisovat bod nespojitosti. Pro tuto funkci vyjádříme vztah pro vlastní čísla a provedeme analýzu závislosti vlastních čísel na parametru. V kapitole 3 budeme uvažovat po částech konstantní váhovou funkci popsanou pomocí dvou parametrů. V poslední stěžejní kapitole odvodíme dolní odhady vlastních čísel a zavedeme 2 iterační odhady principiálního vlastního čísla. Budeme uvažovat složitější a nelineární váhové funkce, na kterých porovnáme odhady pomocí softwarové implementace.

Po částech konstantní váhová funkce s jedním parametrem 2

V této kapitole budeme studovat Sturmovu-Liouvilleovu úlohu (1.2) s váhovou funkcí ve tvaru

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0; \epsilon), \\ 1, & x \in (\epsilon; \pi), \end{cases}$$

kde $\epsilon \in (0, \pi)$ je parametr. Všimněme si, že funkce $r(x)$ není na daném intervalu kladná, tedy se nejedná o regulární Sturmovu-Liouvilleovu úlohu.

2.1 Obecné řešení na podintervalech

Jelikož váhová funkce $r(x)$ není spojitá na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$, tak ani hledané řešení $y(x)$ nemůže být dvakrát spojitě diferencovatelné. Budeme tedy hledat zobecněné řešení, pro které platí

$$\begin{cases} y(x) \in C^2(0; \epsilon), \\ y(x) \in C^2(\epsilon; \pi), \\ y(x) \in C^1(0; \pi). \end{cases}$$

Zobecněné řešení budeme hledat po částech, tedy ve tvaru

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x) & \text{pro } x \in (0, \epsilon), \\ y_2(x) & \text{pro } x \in (\epsilon, \pi). \end{cases}$$

1) Na intervalu $x \in (0; \epsilon)$ je $r(x) = 0$, a tedy (1) se redukuje na

$$y''(x) = 0.$$

Charakteristická rovnice je tedy ve tvaru

$$\mu^2 = 0$$

a obecné řešení $y_1(x)$ má podobu

$$y_1(x) = A + Bx. \quad (2.1)$$

2) Na intervalu $(\epsilon; \pi)$, kde je $r(x) \equiv 1$, dostaneme rovnici ve tvaru

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0,$$

jejíž řešení lze rozdělit na tři možnosti v závislosti na parametru λ .

1. Příklad $\lambda > 0$

Pokud je λ kladné, tak jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice $\pm i\sqrt{\lambda}$ a obecné řešení y_2 je ve tvaru

$$y_2(x) = C \cos \sqrt{\lambda}(x - \pi) + D \sin \sqrt{\lambda}(x - \pi). \quad (2.2)$$

2. Příklad $\lambda = 0$

V tomto případě se diferenciální rovnice redukuje na tvar $y'' = 0$ a obecné řešení y_2 je lineární funkce ve tvaru

$$y_2(x) = D(x - \pi) + C. \quad (2.3)$$

3. Příklad $\lambda < 0$

V posledním případě jsou kořeny charakteristické rovnice $\pm \sqrt{-\lambda}$ a obecné řešení je lineární kombinace hyperbolických funkcí, tedy

$$y_2(x) = C \cosh \sqrt{-\lambda}(x - \pi) + D \sinh \sqrt{-\lambda}(x - \pi). \quad (2.4)$$

V případě řešení ve tvaru (2.2), (2.3) a (2.4) jsme argumenty funkcí záměrně posunuly o π . Díky tomuto posunu bude jednodušší určit konstanty C a D pomocí stanovených okrajových podmínek a podmínek na hladkost řešení.

2.2 Řešení okrajové úlohy

Nyní budeme požadovat splnění okrajových podmínek ve tvaru $y(0) = y(\pi) = 0$. Dále chceme, aby řešení bylo třídy C^1 na intervalu $(0, \pi)$, tedy spojitě včetně první derivace na podintervalech $(0, \epsilon)$, (ϵ, π) a i v bodě napojení $x = \epsilon$. Protože na intervalu $(0; \epsilon)$ je řešení vždy ve tvaru (2), tak můžeme rovnou určit, že z okrajové podmínky $y(0) = 0$ plyne $A = 0$. Tedy první část řešení se redukuje na tvar:

$$y_1(x) = Bx.$$

1. Příklad $\lambda > 0$

Z druhé okrajové podmínky $y_2(\pi) = 0$ pro $y_2(x)$ dané předpisem (3) dostaneme:

$$0 = C \cos(0) + D \sin(0),$$

odkud vyplývá $C = 0$. Tedy

$$y_2(x) = D \sin \sqrt{\lambda}(x - \pi).$$

V bodě napojení, to jest $x = \epsilon$, musí platit

$$y_1(\epsilon) = y_2(\epsilon),$$

$$y_1'(\epsilon) = y_2'(\epsilon).$$

Po dosazení za y_1, y_2 dostaneme soustavu rovnic

$$B\epsilon = D \sin \sqrt{\lambda}(\epsilon - \pi),$$

$$B = D\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}(\epsilon - \pi).$$

Z druhé rovnice dosadíme do první za B

$$D\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}(\epsilon - \pi)\epsilon = D \sin \sqrt{\lambda}(\epsilon - \pi).$$

Pro $D = 0$ dostaneme jen triviální řešení, tedy uvažujme $D \neq 0$ a můžeme vydělit D :

$$\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}(\epsilon - \pi)\epsilon = \sin \sqrt{\lambda}(\epsilon - \pi), \quad (2.5)$$

neboli

$$\epsilon\sqrt{\lambda} = \operatorname{tg} \sqrt{\lambda}(\epsilon - \pi). \quad (2.6)$$

Hledáme taková $\lambda > 0$, která řeší rovnici (2.4). Pro zjednodušení označíme $z := \sqrt{\lambda}$, tedy hledáme průsečíky funkce

$$f(z) = \epsilon z$$

a funkce

$$g(z) = \operatorname{tg} z(\epsilon - \pi).$$

Je zřejmé, že pro všechna $\epsilon \in (0, \pi)$ existuje spočetně mnoho průsečíků $z_n > 0$, tedy spočetně mnoho hodnot $\lambda_n = z_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, splňující rovnici (2.6). To je znázorněno na obrázku 2.1.

Jelikož libovolný násobek vlastní funkce je opět vlastní funkcí, můžeme jeden z parametrů volit libovolně. Například $D = -1$. Pak dostaneme B ve tvaru $B = -\lambda_n \cos \lambda_n(\epsilon - \pi)$.

Vlastní funkce y_n , pak můžeme zapsat ve tvaru

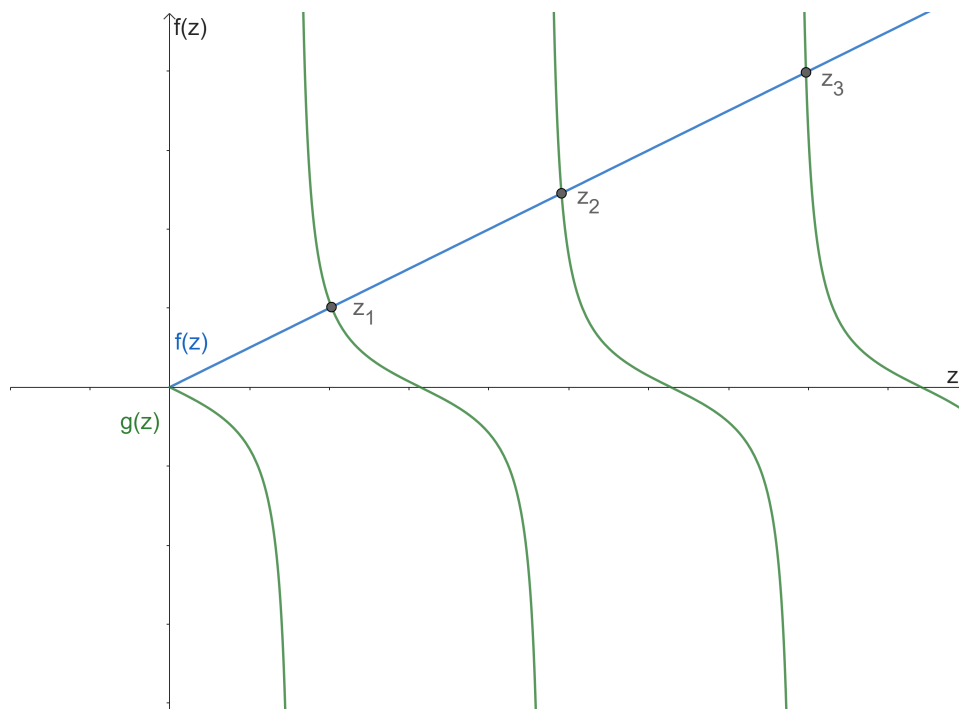
$$y_n = \begin{cases} -\lambda_n x \cos \lambda_n(\epsilon - \pi), & \text{pro } x \in (0, \epsilon), \\ -\sin \lambda_n(x - \pi), & \text{pro } x \in (\epsilon, \pi). \end{cases}$$

Na obrázku 2.2 jsou vidět grafy vlastních funkcí pro první tři hodnoty vlastních čísel λ_n pro $\epsilon = \frac{\pi}{2}$. Na obrázku 2.3 jsou grafy pro $\epsilon = 0.05$ a na obrázku 2.4 pro $\epsilon = 2.8$. Pokud $\epsilon = \frac{\pi}{2}$, vyjdou hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ následovně:

$$\lambda_1 \approx 1.67,$$

$$\lambda_2 \approx 9.78,$$

$$\lambda_3 \approx 25.80.$$



Obrázek 2.1: Funkce $f(z) = \epsilon z$ (modře), $g(z) = \operatorname{tg}((\epsilon - \pi)z)$ (zeleně) pro $\epsilon = \frac{\pi}{2}$.

2. Příklad $\lambda = 0$

Funkce $y_1(x)$ vypadá ve všech třech případech stejně, to je

$$y_1(x) = Bx.$$

Funkce $y_2(x)$ je pro $\lambda = 0$ také lineární a z druhé okrajové podmínky určíme, že $C = 0$. Tím se nám funkce redukuje na tvar

$$y_2(x) = D(x - \pi).$$

V bodě ϵ musí platit

$$y_1(\epsilon) = y_2(\epsilon),$$

$$y_1'(\epsilon) = y_2'(\epsilon),$$

tedy po dosazení

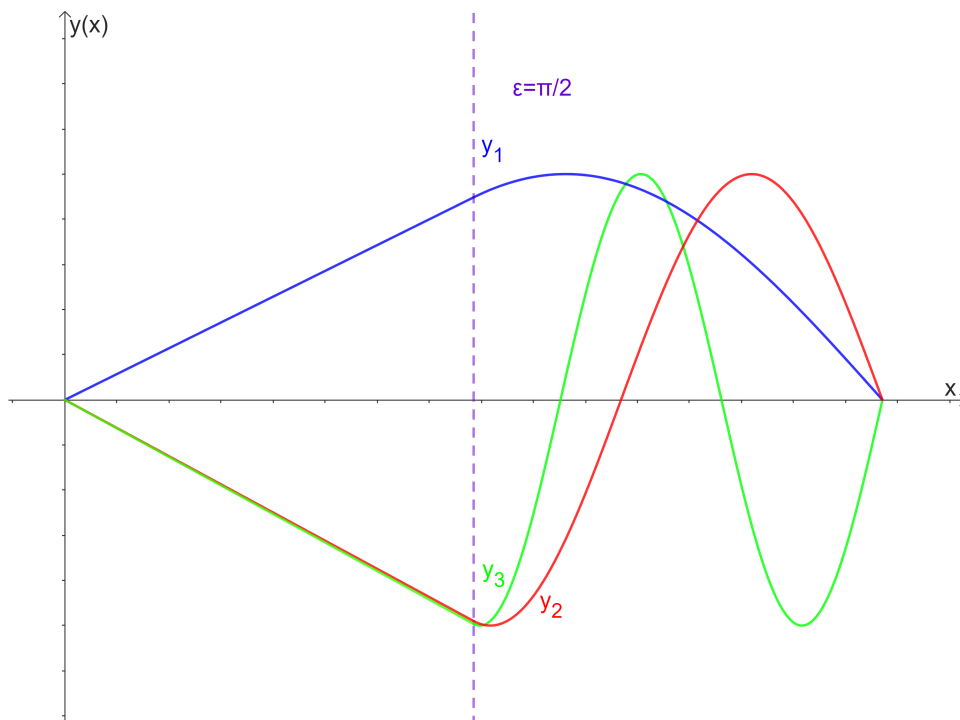
$$B\epsilon = D(\epsilon - \pi),$$

$$B = D.$$

Za B dosadíme do první rovnice

$$D\epsilon = D(\epsilon - \pi).$$

Jediná možnost jak splnit tuto rovnost je $D = 0$, tedy i $B = 0$. Všechny konstanty jsou nulové a existuje jen triviální řešení. Tedy 0 není vlastním číslem úlohy (1).

Obrázek 2.2: První tři vlastní funkce y_1, y_2, y_3 , pro $\epsilon = \frac{\pi}{2}$.3. Příklad $\lambda < 0$

Funkce $y_1(x)$ je opět stejná:

$$y_1(x) = Bx.$$

Funkci $y_2(x)$ dostaneme pro $\lambda < 0$ jako lineární kombinaci hyperbolických funkcí:

$$y_2(x) = C \cosh \sqrt{|\lambda|}(x - \pi) + D \sinh \sqrt{|\lambda|}(x - \pi).$$

Z okrajové podmínky $y_2(\pi) = 0$ se y_2 redukuje do tvaru

$$y_2(x) = D \sinh \sqrt{|\lambda|}(x - \pi).$$

V bodě ϵ musí platit

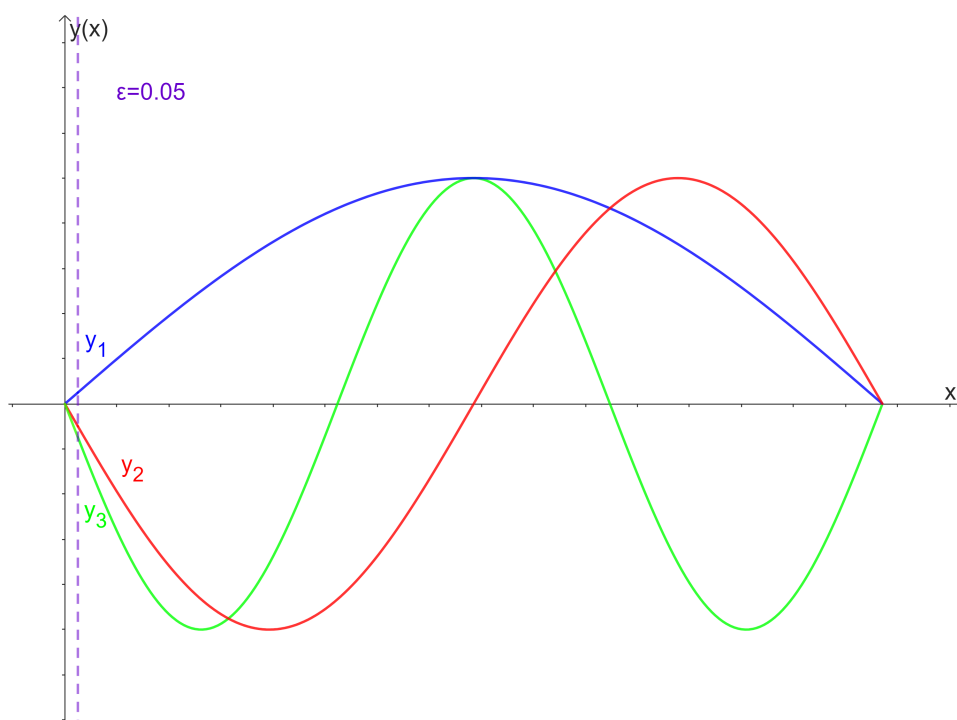
$$y_1(\epsilon) = y_2(\epsilon),$$

$$y_1'(\epsilon) = y_2'(\epsilon),$$

tedy po dosazení

$$B\epsilon = D \sinh \sqrt{|\lambda|}(\epsilon - \pi),$$

$$B = D \sqrt{|\lambda|} \cosh \sqrt{|\lambda|}(\epsilon - \pi).$$

Obrázek 2.3: První tři vlastní funkce y_1, y_2, y_3 , pro $\epsilon = 0.05$.

Dosadíme do první rovnice za B z druhé rovnice:

$$D\sqrt{|\lambda|} \cosh \sqrt{|\lambda|}(\epsilon - \pi)\epsilon = D \sinh \sqrt{|\lambda|}(\epsilon - \pi).$$

Pro $D = 0$ dostaneme jen triviální řešení, tedy uvažujme $D \neq 0$ a můžeme vydělit D . Dostaneme tedy rovnost

$$\sqrt{|\lambda|} \cosh \sqrt{|\lambda|}(\epsilon - \pi)\epsilon = \sinh \sqrt{|\lambda|}(\epsilon - \pi),$$

neboli

$$\epsilon\sqrt{|\lambda|} = \operatorname{tgh} \sqrt{|\lambda|}(\epsilon - \pi). \quad (2.7)$$

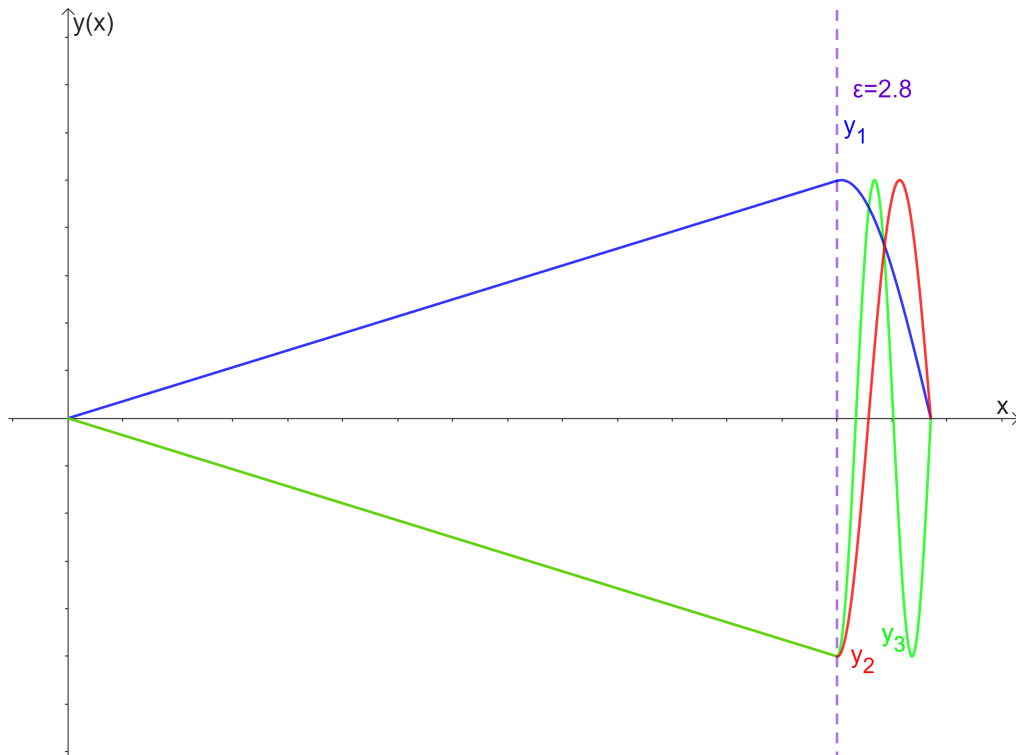
Nyní hledáme taková $\lambda < 0$, která jsou řešením rovnice (2.7). Pro zjednodušení označíme $z = \sqrt{|\lambda|}$ a hledáme průsečíky funkcí

$$f(z) = \epsilon z$$

a

$$g(z) = \operatorname{tgh} z(\epsilon - \pi).$$

V tomto případě je zřejmé, že pro všechna $\epsilon \in (0, \pi)$ existuje pouze jediný průsečík, a to je hodnota $z = 0$, ta ale nespĺňuje podmínku $-z^2 = \lambda < 0$ a tedy úloha nemá žádná záporná vlastní čísla. Na obrázku 2.5 je vidět situace pro $\epsilon = \frac{\pi}{2}$.

Obrázek 2.4: První tři vlastní funkce y_1, y_2, y_3 , pro $\epsilon = 2.8$.

2.3 Závislost vlastních čísel na parametru ϵ

Nyní probereme závislost mezi parametrem ϵ , který určuje bod napojení, a vlastními čísly λ_n , $n \in \mathbb{N}$. Platí následující série tvrzení.

VĚTA 2.1. *Mějme funkci $F(\epsilon, z) = \epsilon z \cos z(\pi - \epsilon) + \sin z(\pi - \epsilon)$. Hodnota $\lambda > 0$ je vlastním číslem úlohy (1.2) právě tehdy, když $F(\epsilon, \lambda^2) = 0$. Množina $F(\epsilon, z) = 0$ je v libovolném bodě popsateľná funkcí $z = z(\epsilon)$.*

Důkaz. První část tvrzení plyne přímo z odvození v předchozí sekci a vztahu (2.6).

Druhá část plyne z věty o implicitní funkci [2]. Pro parciální derivaci funkce $F(\epsilon, z)$ podle z platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= \epsilon z \cos z(\pi - \epsilon) - \epsilon z(\pi - z) \sin z(\pi - \epsilon) + (\pi - \epsilon) \cos z(\pi - \epsilon) \\ &= \pi \cos z(\pi - \epsilon) - \epsilon z(\pi - \epsilon) \sin z(\pi - \epsilon). \end{aligned}$$

Nyní je potřeba ověřit, že soustava rovnic $F_z(\epsilon, z) = 0, F(\epsilon, z) = 0$, to je

$$\begin{aligned} \pi \cos z(\pi - \epsilon) - \epsilon z(\pi - \epsilon) \sin z(\pi - \epsilon) &= 0, \\ \epsilon z \cos z(\pi - \epsilon) + \sin z(\pi - \epsilon) &= 0, \end{aligned}$$

nemá řešení pro $\epsilon \in (0, \pi)$ a $z > 0$. Z první rovnice vyjádříme $\cos z(\pi - \epsilon)$ ve tvaru

$$\cos z(\pi - \epsilon) = \frac{\epsilon z(\pi - \epsilon)}{\pi} \sin z(\pi - \epsilon)$$

a ten dosadíme do druhé rovnice. Dostáváme rovnici

$$\frac{\epsilon^2 z^2(\pi - \epsilon)}{\pi} \sin z(\pi - \epsilon) + \sin z(\pi - \epsilon) = 0.$$

Rovnici vydělíme $\sin z(\pi - \epsilon)$, což je určitě nenulový výraz, protože pokud by byl roven nule, tak $\cos z(\pi - \epsilon) \neq 0$ a soustava by neměla řešení. Dostáváme tvar

$$\frac{\epsilon^2 z^2(\pi - \epsilon)}{\pi} + 1 = 0.$$

Oba výrazy na pravé straně jsou kladné, tedy jejich součet nemůže být 0, což je spor a soustava rovnic nemá řešení. Podle věty o implicitní funkci (viz[1]), lze tedy v každém bodě hladinu $F(\epsilon, z) = 0$ lokálně popsat funkcí $z = z(\epsilon)$. □

VĚTA 2.2. Nultou hladinu funkce $F(\epsilon, z)$ tvoří spočetný systém funkcí $z_n = z_n(\epsilon)$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $\epsilon \in (0, \pi)$.

Důkaz. Zderivujeme funkci $F(\epsilon, z)$ podle z

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \pi \cos z(\pi - \epsilon) - \epsilon z(\pi - \epsilon) \sin z(\pi - \epsilon).$$

Pro libovolně zvolené pevné $\epsilon_0 \in (0, \pi)$ jsou funkce $F(\epsilon_0, z)$ a $F_z(\epsilon_0, z)$ funkcemi jedné proměnné. Z důkazu u tvrzení 2.1 víme, že nemají žádný společný nulový bod. Nulové body funkce $F_z(\epsilon_0, z)$ označíme jako d_n . Platí, že $F_z(\epsilon_0, z) = 0$ právě tehdy, když

$$\cot z(\pi - \epsilon_0) = \frac{\epsilon_0(\pi - \epsilon_0)}{\pi} z.$$

Tedy víme, že $d_n(\pi - \epsilon_0)$ náleží intervalu $((n-1)\pi; (n-1)\pi + \frac{\pi}{2})$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna $\epsilon_0 \in (0; \pi)$. Z vlastností goniometrických funkcí vyplývá, že

$$\operatorname{sgn} F(\epsilon_0, d_n) = (-1)^{n-1}.$$

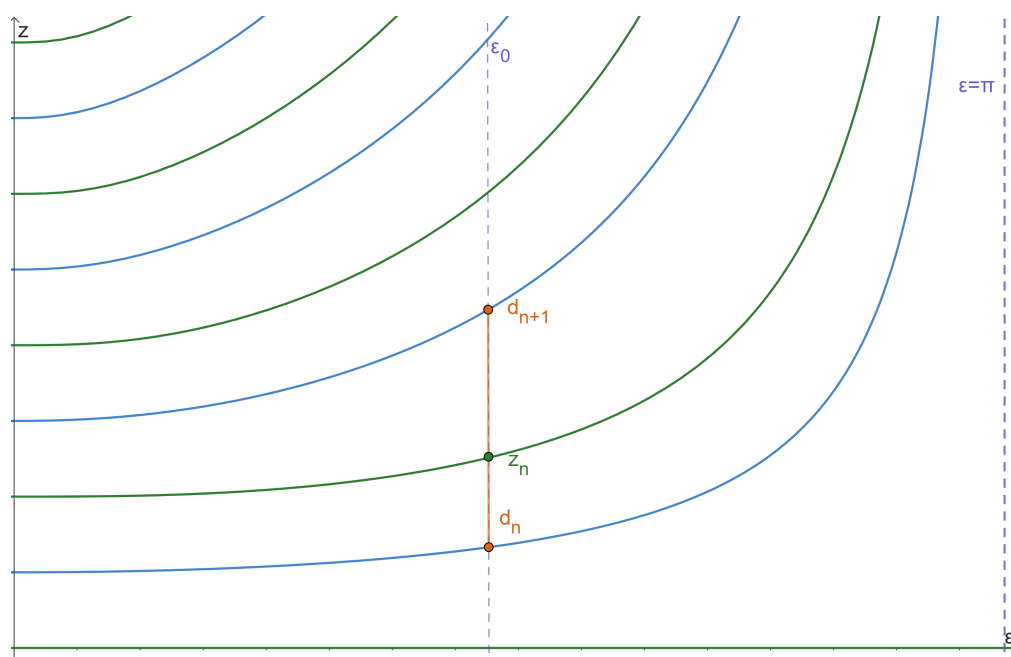
Jelikož funkce $F(\epsilon_0, z)$ pravidelně střídá svá znaménka ve stacionárních bodech d_n a je spojitá a ostře monotónní na intervalu $(d_n; d_{n+1})$, tak v každém intervalu $(d_n; d_{n+1})$ leží právě jeden bod z_n . To platí pro každé $\epsilon_0 \in (0; \pi)$ a tedy celý systém funkcí, který tvoří nultá hladina funkce $F(\epsilon, z)$ je spočetný. □

Následující tvrzení lépe popíše systém funkcí, které tvoří nultá hladina funkce $F(\epsilon, z)$.

VĚTA 2.3. Vlastní čísla λ_n jsou rostoucími funkcemi parametru ϵ .

Důkaz. Ukážeme, že z roste právě tehdy, když roste ϵ , to je $\frac{dz}{d\epsilon} > 0$ pro všechny $\epsilon \in (0; \pi)$ a z splňující rovnici $F(\epsilon, z) = 0$. Chceme ukázat, že platí

$$\frac{dz}{d\epsilon} = -\frac{F_\epsilon}{F_z} = -\frac{\epsilon z^2 \sin z(\pi - \epsilon)}{\pi \cos z(\pi - \epsilon) - \epsilon z(\pi - \epsilon) \sin z(\pi - \epsilon)} > 0,$$



Obrázek 2.5: Zeleně nulté hladiny funkce $F(\epsilon, z)$, modře nulté hladiny funkce $F_z(\epsilon, z)$, oranžově body d_n a d_{n+1} , $n = 1$, pro pevně zvolené ϵ_0 .

pokud platí

$$\epsilon z \cos z(\pi - \epsilon) + \sin z(\pi - \epsilon) = 0.$$

Z rovnice $F(\epsilon, z) = 0$ vyjádříme $\sin z(\pi - \epsilon)$ a dosadíme do nerovnice $\frac{dz}{d\epsilon} > 0$. Po jednoduché úpravě dostáváme

$$\frac{\epsilon^2 z^3}{\pi + \epsilon^2 z^2 (\pi - \epsilon)} > 0,$$

což je splněno pro všechna $\epsilon \in (0; \pi)$ a $z > 0$. Tedy s rostoucím ϵ roste i z . Protože $z = \sqrt{\lambda}$ a odmocnina je rostoucí funkce, tak s rostoucím ϵ roste i λ .

□

VĚTA 2.4. Pro ϵ blíží se k hodnotě π zleva funkce $z = z(\epsilon)$ a tedy i vlastní čísla λ_n divergují do nekonečna.

Důkaz. Zderivujeme funkci $F(\epsilon, z)$ podle ϵ a dostaneme

$$F_\epsilon(\epsilon, z) = \epsilon z^2 \sin z(\pi - \epsilon).$$

Platí $F_\epsilon(\epsilon, z) = 0$ právě tehdy, když $z(\pi - \epsilon) = k\pi$, kde $k \in \mathbb{N}$. Obdobně jako v případě důkazu věty 2.2 lze ukázat, že lze každou funkci $z_n = z(\epsilon)$ zavřít mezi funkce $z = \frac{k\pi}{(\pi - \epsilon)}$, které pro $\epsilon \rightarrow \pi^+$ divergují do nekonečna. Z věty o sevření musí platit, že i funkce $z_n = z(\epsilon)$ divergují do nekonečna pro $\epsilon \rightarrow \pi^+$.

□

V této kapitole jsem uvažovali případ váhové funkce, která je na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$ nezáporná. Váhové funkce s touto vlastností se někdy označují jako pozitivně semidefinitní. Díky volbě pozitivně semidefinitní váhy jsme získali pouze kladná vlastní čísla. Podobně se zavádí také označení pozitivně definitní, negativně definitní, negativně semidefinitní a indefinitní váhová funkce. Tyto případy a jejich vliv probereme v závěru kapitoly 3.

Po částech konstantní váhová funkce s dvěma parametry 3

Nyní budeme uvažovat funkci $r(x)$ ve tvaru

$$r(x) = \begin{cases} \zeta, & x \in (0; \epsilon), \\ 1, & x \in (\epsilon; \pi), \end{cases}$$

kde $\zeta \in \mathbb{R}$. Tato úprava zapříčiní, že obecné pro $\lambda > 0$ řešení na intervalu $x \in (0; \epsilon)$ bude spojitě přecházet z hyperbolického tvaru pro záporné hodnoty parametru ζ , do lineárního tvaru pro hodnotu $\zeta = 0$ a nakonec do goniometrického tvaru pro kladné hodnoty ζ . Pro $\zeta = 0$ je postup výpočtu stejný jako v kapitole 2. Zaměříme se tedy na případy $\zeta < 0$ a $\zeta > 0$.

3.1 Příklad $\zeta < 0$

Stejně jako v kapitole 2 rozdělíme výpočet na tři případy.

3.1.1 Příklad $\lambda > 0$

Na intervalu $\langle 0; \epsilon \rangle$ jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice reálné a řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$y_1(x) = A \cosh \sqrt{-\lambda \zeta} x + B \sinh \sqrt{-\lambda \zeta} x.$$

Z okrajové podmínky

$$y(0) = 0,$$

dostaneme

$$A = 0,$$

a řešení se redukuje na

$$y_1(x) = B \sinh \sqrt{-\lambda \zeta} x.$$

Ze sekce 2.1 víme, že na intervalu $\langle \epsilon; \pi \rangle$ má řešení po dosazení okrajové podmínky $y(\pi) = 0$ tvar

$$y_2(x) = D \sin(\sqrt{\lambda}(x - \pi)).$$

Pro určení parametrů B a D použijeme opět požadavky na spojitost v bodě $x = \epsilon$.

$$y_1(\epsilon) = y_2(\epsilon),$$

$$y_1'(\epsilon) = y_2'(\epsilon).$$

Tedy musí platit

$$B \sinh \sqrt{-\lambda \bar{\zeta}} \epsilon = D \sin \sqrt{\lambda} (\epsilon - \pi),$$

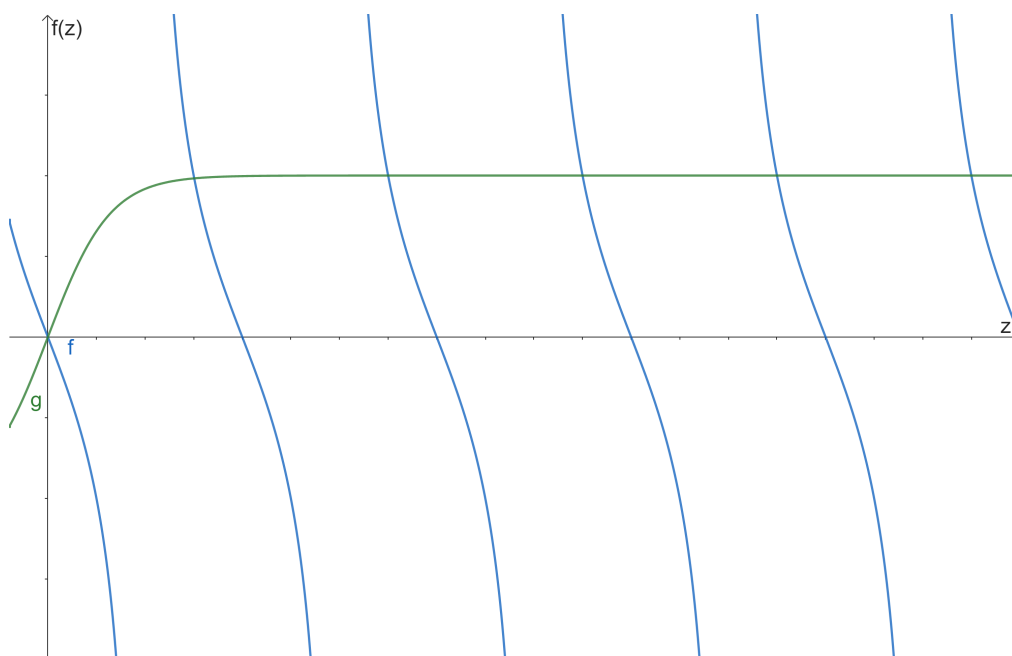
$$B \sqrt{-\lambda \bar{\zeta}} \cosh \sqrt{-\lambda \bar{\zeta}} \epsilon = D \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} (\epsilon - \pi).$$

První rovnici vydělíme $\sinh \sqrt{-\lambda \bar{\zeta}} \epsilon$ a B dosadíme do druhé rovnice

$$\frac{D \sin \sqrt{\lambda} (\epsilon - \pi)}{\sinh \sqrt{-\lambda \bar{\zeta}} \epsilon} \sqrt{-\lambda \bar{\zeta}} \cosh \sqrt{-\lambda \bar{\zeta}} \epsilon = D \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} (\epsilon - \pi)$$

a po zjednodušení dostaneme

$$\sqrt{-\bar{\zeta}} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} (\epsilon - \pi) = \operatorname{tgh} \sqrt{-\lambda \bar{\zeta}} \epsilon.$$

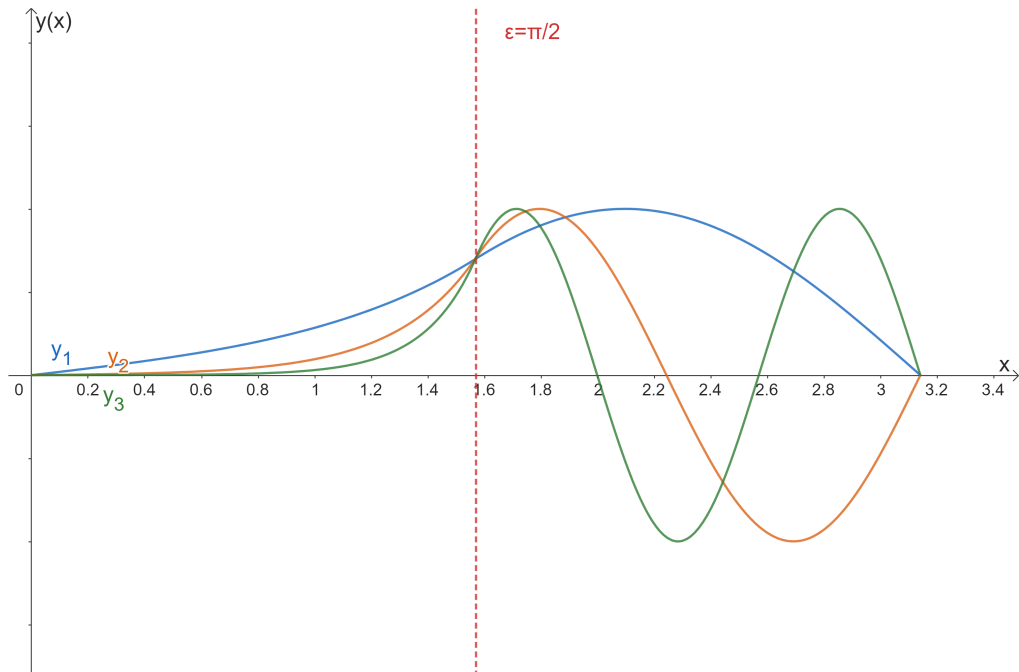


Obrázek 3.1: Modře graf funkce $g(z) = -\operatorname{tg}(z\frac{\pi}{2})$, zeleně graf funkce $f(z) = \operatorname{tgh} z\frac{\pi}{2}$. Pro $\epsilon = \frac{\pi}{2}$, $\bar{\zeta} = -1$ a $z = \sqrt{\lambda}$.

Z vlastností funkcí $\tan x$ a $\operatorname{tanh} x$ (viz obrázek 3.1.1) plyne, že vlastních čísel je opět spočetně mnoho, ke každému existuje právě jedna vlastní funkce ve tvaru

$$y_n = \begin{cases} B \sinh \sqrt{-\lambda_n \bar{\zeta}} x, & x \in (0; \epsilon), \\ D \sin \sqrt{\lambda_n} (x - \pi), & x \in (\epsilon; \pi), \end{cases}$$

kde $B = \sin \sqrt{\lambda_n} (\epsilon - \pi)$ a $D = \sinh \sqrt{\lambda_n \bar{\zeta}} \epsilon$.



Obrázek 3.2: Grafy prvních tří vlastních funkcí y_1 , y_2 a y_3 , pro hodnoty $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ a $\zeta = -1$.

3.1.2 Příklad $\lambda = 0$

Tento případ je popsán v sekci 2.1.

3.1.3 Příklad $\lambda < 0$

Na intervalu $(0; \epsilon)$ jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice komplexní a řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$y_1(x) = A \cos \sqrt{\lambda \zeta} x + B \sin \sqrt{\lambda \zeta} x.$$

Okrajová podmínka $y(0) = 0$ redukuje funkci do tvaru

$$y_1(x) = B \sin \sqrt{\lambda \zeta} x.$$

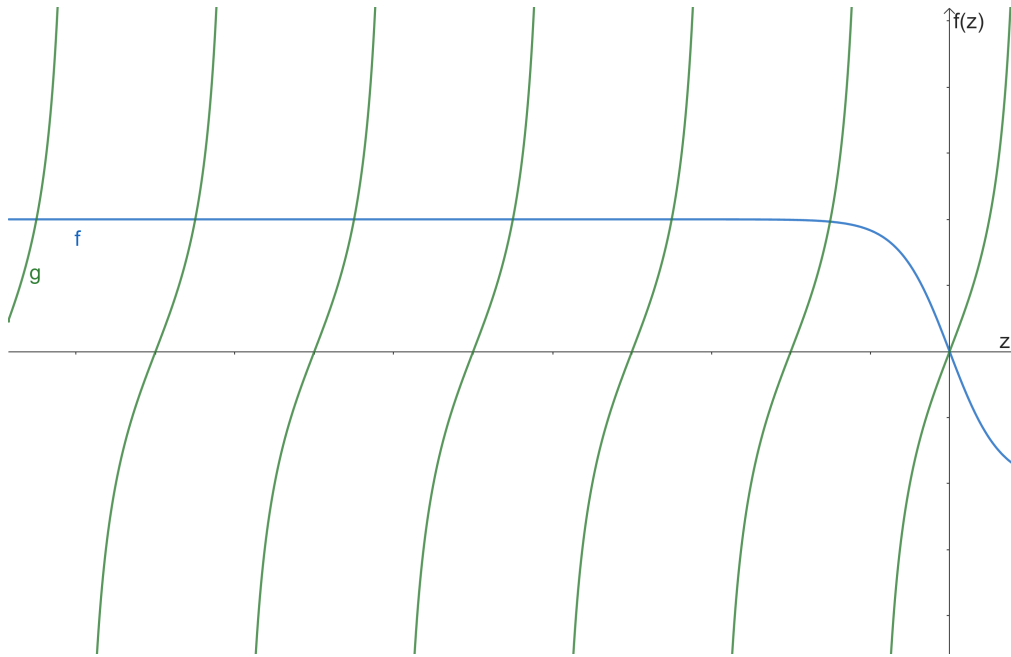
Na intervalu $(\epsilon; \pi)$ je řešení podle sekce 2.1 a okrajové podmínky ve tvaru

$$y_2(x) = D \sinh \sqrt{-\lambda} (x - \pi).$$

Konstanty B a D určíme opět pomocí napojení v bodě ϵ . Po stejné úpravě jak v sekci 3.1.1 dostáváme tvar

$$\sqrt{-\zeta} \operatorname{tgh} \sqrt{-\lambda} (\epsilon - \pi) = \operatorname{tg} \sqrt{\lambda \zeta} \epsilon.$$

Vlastních čísel je opět spočetně mnoho a příslušné vlastní funkce mají tvar



Obrázek 3.3: Modře graf funkce $g(z) = -\operatorname{tgh}(z\frac{\pi}{2})$, zeleně graf funkce $f(z) = \operatorname{tg} z\frac{\pi}{2}$. Pro $\epsilon = \frac{\pi}{2}$, $\zeta = -1$ a $z = \sqrt{-\lambda}$.

$$y_n = \begin{cases} B \sin \sqrt{\lambda_n \zeta} x, & x \in (0; \epsilon), \\ D \sinh \sqrt{-\lambda_n} (x - \pi), & x \in (\epsilon; \pi), \end{cases}$$

kde $B = \sinh \sqrt{\lambda_n} (\epsilon - \pi)$ a $D = \sin \sqrt{\lambda_n \zeta} \epsilon$.

3.2 Příklad $\zeta > 0$

Řešení opět rozdělíme na tři případy podle vlastního čísla λ . Příklad s $\lambda = 0$ byl už opět vyřešen v kapitole 2.

3.2.1 Příklad $\lambda > 0$

Na intervalu $\langle 0; \epsilon \rangle$ jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice komplexní a řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$y_1(x) = A \cos \sqrt{\lambda \zeta} x + B \sin \sqrt{\lambda \zeta} x.$$

Z okrajové podmínky

$$y(0) = 0,$$

dostaneme

$$A = 0$$

a řešení se redukuje na

$$y_1(x) = B \sin \sqrt{\lambda \zeta} x.$$

Na intervalu $\langle \epsilon; \pi \rangle$ je rovnice $y_2(x)$, stejně jako v sekci 3.1.1, ve tvaru

$$y_2(x) = D \sin(\sqrt{\lambda}(x - \pi)).$$

Pro určení parametrů B a D použijeme opět požadavky na spojitost v bodě $x = \epsilon$.

$$y_1(\epsilon) = y_2(\epsilon),$$

$$y_1'(\epsilon) = y_2'(\epsilon).$$

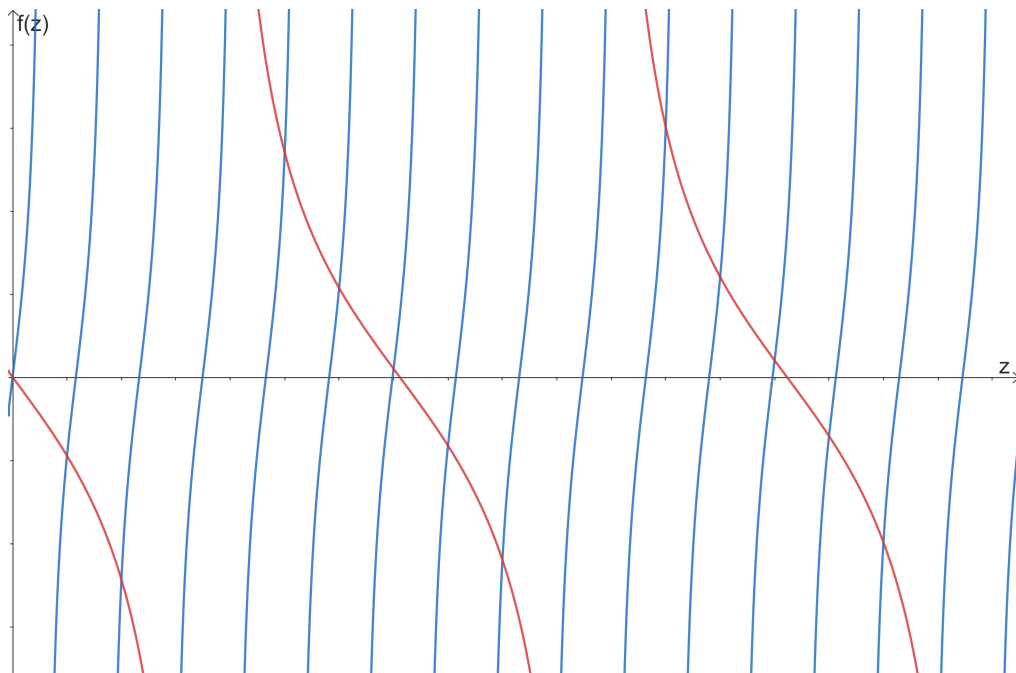
Po dosazení dostaneme tvar

$$B \sin \sqrt{\lambda \zeta} \epsilon = D \sin \sqrt{\lambda}(\epsilon - \pi),$$

$$B \sqrt{\lambda \zeta} \cos \sqrt{\lambda \zeta} \epsilon = D \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}(\epsilon - \pi).$$

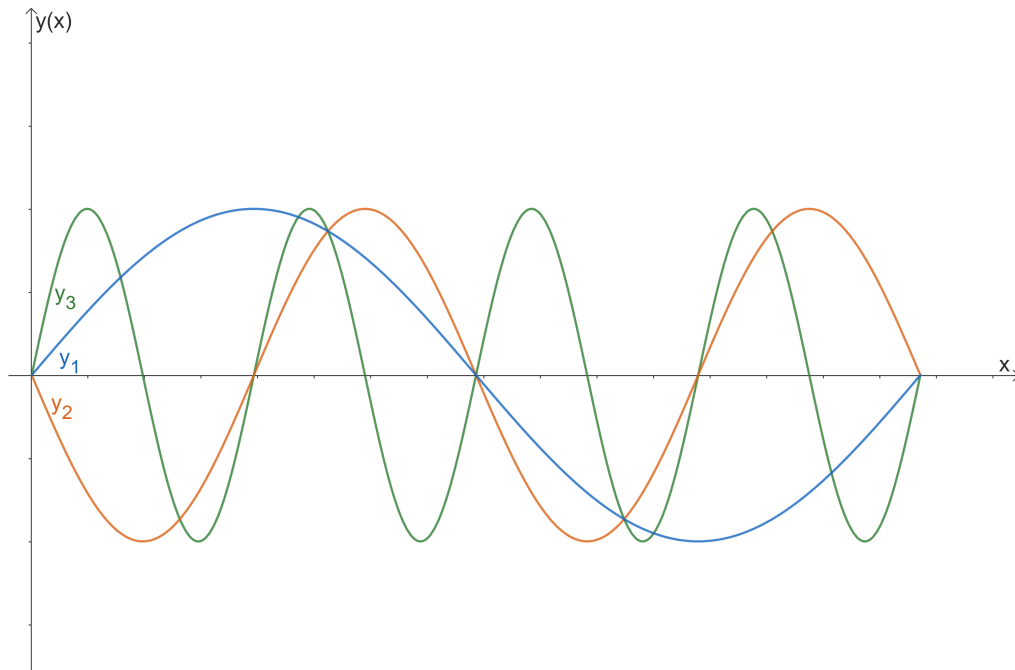
A po úpravě dostaneme

$$\sqrt{\lambda \zeta} \operatorname{tg} \sqrt{\lambda}(\epsilon - \pi) = \operatorname{tg} \sqrt{\lambda \zeta} \epsilon.$$



Obrázek 3.4: Modře graf funkce $f(z) = \operatorname{tg} \epsilon \sqrt{\zeta} z$ a červeně graf $g(z) = z \sqrt{\zeta} \operatorname{tg} z(\epsilon - \pi)$ pro $\epsilon = 2.8$ a $\zeta = 1$.

Lze ukázat, že pro všechny $\epsilon \in (0; \pi)$ a $\zeta > 0$ je Vlastních čísel opět spočetně mnoho. Například pro nastavení parametrů $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ a $\zeta = 1$ jsou vlastní čísla ve tvaru $\lambda_n = 2n$ a první tři vlastní funkce jsou znázorněny ve na obrázku 3.2.1.



Obrázek 3.5: Grafy prvních tří vlastních funkcí y_1 , y_2 a y_3 , pro hodnoty $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ a $\zeta = 1$.

3.2.2 Příklad $\lambda < 0$

Na intervalu $(0; \epsilon)$ jsou kořeny příslušné charakteristické rovnice reálné a řešení můžeme znovu po úpravě pomocí okrajové podmínky zapsat ve tvaru

$$y_1(x) = B \sinh \sqrt{-\lambda \zeta} x.$$

Na intervalu $(\epsilon; \pi)$ dostáváme tvar

$$y_2(x) = D \sinh \sqrt{-\lambda} (x - \pi).$$

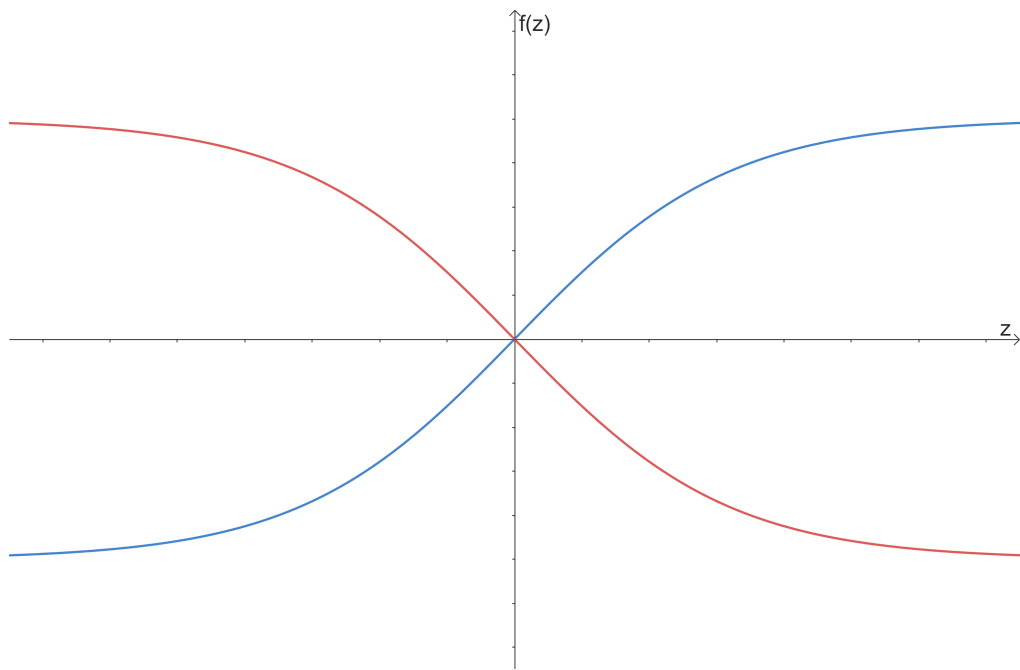
Po jednoduché úpravě dostáváme vztah pro vlastní čísla

$$\sqrt{-\lambda \zeta} \operatorname{tgh} \sqrt{-\lambda} (\epsilon - \pi) = \operatorname{tgh} \sqrt{-\lambda \zeta} \epsilon.$$

Rovnice má pro všechny volby parametrů jediné řešení a to $\lambda = 0$, které však neuvažujeme.

V této kapitole jsme se setkali s případy pozitivně definitní a indefinitní váhové funkce. V případě indefinitní váhové funkce, tedy volbu parametru $\zeta < 0$, jsme získali kladná i záporná vlastní čísla. V případě pozitivně definitní váhové funkce jsme dostali, stejně jako v případě pozitivně semidefinitní váhové funkce, pouze kladná vlastní čísla.

Stejně jako v kapitole 2 by bylo vhodné provést analýzu závislosti vlastních čísel na parametrech ζ a ϵ . Toto ponecháme jako námět na další práci.



Obrázek 3.6: Modře graf funkce $f(z) = \operatorname{tgh} \sqrt{\zeta} z \epsilon$ a červeně graf $g(z) = z \sqrt{\zeta} \operatorname{tgh} z(\epsilon - \pi)$ pro $\epsilon = \frac{\pi}{2}$ a $\zeta = 1$.

Principiální vlastní číslo a jeho odhady 4

V této části probereme několik odhadů prvního vlastního čísla pro obecnější váhové funkce. První dva budou sloužit pro dolní odhad vlastních čísel a další dva budou iterační pro přesnější určení prvního vlastního čísla. Na závěr srovnáme odhady pomocí vhodného softwaru. Mějme úlohu (1.2), to je:

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda r(x)y(x) = 0 & \text{pro } x \in (0, \pi), \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Váhová funkce $r(x)$ bude v této části uvažována nezáporná na intervalu okrajové úlohy, tedy musí platit $\forall x \in \langle 0; \pi \rangle : r(x) \geq 0$ a $\int_0^\pi r(x) dx > 0$. Z tohoto požadavku vyplývá, že úloha (1.2) má prosté principiální vlastní číslo λ_1 a jemu příslušná vlastní funkce na intervalu $(0; \pi)$ nemění své znaménko. Jelikož libovolný nenulový násobek vlastní funkce je také vlastní funkcí, tak můžeme říct, že vlastní funkce $\varphi_1(x)$ je na daném intervalu kladná. [5]

4.1 Odhad na základě Poincarého nerovnosti

První dolní odhad vlastního čísla λ_1 získáme pomocí Poincarého nerovnosti.

VĚTA 4.1 (Poincarého nerovnost [3]). *Nechť $1 \leq p < \infty$, Ω je otevřená omezená souvislá množina v \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje konstanta c závislá pouze na p a Ω taková, že platí*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (4.1)$$

V našem případě je $n = 1, \Omega = (0, \pi), p = 2$ a lze ukázat, že optimální konstanta v nerovnosti (4.1) je v tomto případě $c = 1$ (viz [3]). Tedy platí následující nerovnost

$$\int_0^\pi y^2(x) dx \leq \int_0^\pi (y'(x))^2 dx \quad \forall y(x) \in W_0^{1,2}(0, \pi). \quad (4.2)$$

Nyní obě strany rovnice z úlohy (1.2) vynásobíme $y(x)$ a zintegrujeme přes interval $(0; \pi)$. Levou stranu integrujeme metodou per partes. Získáme

$$-\left[y(x)y(x)' \right]_0^\pi + \int_0^\pi (y'(x))^2 dx = \int_0^\pi \lambda r(x)y^2(x) dx. \quad (4.3)$$

První člen na levé straně se kvůli okrajovým podmínkám rovná nule. Dostali jsme rovnici do tvaru, kde je možné použít Poincarého nerovnost (4.1), tedy platí

$$\int_0^\pi y^2(x) dx \leq \int_0^\pi \lambda r(x) y^2(x) dx.$$

Nyní ještě odhadneme pravou stranu nerovnosti a dostaneme

$$\int_0^\pi y^2(x) dx \leq \lambda \max_{x \in (0; \pi)} r(x) \int_0^\pi y^2(x) dx.$$

Odtud dostáváme vztah pro vlastní čísla λ

$$\lambda \geq \frac{1}{\max_{x \in (0; \pi)} r(x)}. \quad (4.4)$$

4.2 První odhad na základě Morreyho nerovnosti

Druhý odhad získáme podobně jako v předchozí kapitole, ale pomocí jiné známé nerovnosti, a to Morreyho nerovnosti.

VĚTA 4.2 (Morreyho nerovnost [2]). *Nechť I je otevřený a omezený interval a necht' $u \in W^{1,p}(I)$ a $1 < p < +\infty$. Potom platí, že $u \in C^{0,1-\frac{1}{p}}(\bar{I})$ a pro všechna $a, b \in I$*

$$|y(a) - y(b)| \leq |a - b|^{1-\frac{1}{p}} \|y'\|_{L^p(I)}. \quad (4.5)$$

V našem případě volíme za $p = 2$ a dostáváme nerovnost ve tvaru

$$|y(a) - y(b)| \leq \sqrt{|a - b|} \|y'\|_{L^2(I)}.$$

Začneme stejně jako pro odhad v kapitole 4.1 a dostaneme rovnost (4.3).

Označíme $y_m := \max_{x \in (0, \pi)} y(x)$ a $x_m \in (0, \pi)$ bod, kde nastává maximum, tedy $y(x_m) = y_m$. Integrál na pravé straně (4.3) odhadneme shora jako

$$\int_0^\pi (y'(x))^2 dx \leq y_m^2 \lambda \int_0^\pi r(x) dx. \quad (4.6)$$

Uvažujme dva případy.

1) Necht' $x_m \leq \frac{\pi}{2}$.

Díky Morreyho nerovnosti

$$y_m = |y(x_m) - y(0)| \leq \sqrt{x_m} \|y'\|_{L^2(0, x_m)} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|y'\|_{L^2(0, \pi)}.$$

2) Necht' $x_m \geq \frac{\pi}{2}$.

Pomocí Morreyho nerovnosti dostaneme

$$y_m = |y(\pi) - y(x_m)| \leq \sqrt{\pi - x_m} \|y'\|_{L^2(x_m, \pi)} \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|y'\|_{L^2(0, \pi)}.$$

Celkově tedy platí

$$y_m^2 \leq \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (y'(x))^2 dx.$$

Po dosazení do (4.6) dostáváme

$$\int_0^\pi (y'(x))^2 dx \leq \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (y'(x))^2 dx \int_0^\pi \lambda r(x) dx.$$

Po jednoduché úpravě dostáváme druhý odhad vlastních čísel ve tvaru

$$\boxed{\lambda \geq \frac{2}{\pi \int_0^\pi r(x) dx}}. \quad (4.7)$$

4.3 Druhý odhad na základě Morreyho nerovnosti

Odhad v předchozí kapitole lze ještě dvojnásobně zlepšit. Začneme stejně jako v části 4.2 a dostaneme dvě nerovnosti, které platí bez ohledu na pozici x_m v intervalu $(0, \pi)$:

$$y_m^2 \leq x_m \int_0^{x_m} (y'(x))^2 dx,$$

$$y_m^2 \leq (\pi - x_m) \int_{x_m}^\pi (y'(x))^2 dx.$$

První nerovnost vynásobíme $(\pi - x_m)$ a druhou vynásobíme x_m

$$(\pi - x_m)y_m^2 \leq x_m(\pi - x_m) \int_0^{x_m} (y'(x))^2 dx,$$

$$x_my_m^2 \leq x_m(\pi - x_m) \int_{x_m}^\pi (y'(x))^2 dx.$$

Nerovnosti sečteme a upravíme do tvaru

$$\pi y_m^2 \leq x_m(\pi - x_m) \int_0^\pi (y'(x))^2 dx. \quad (4.8)$$

Nyní využijeme AG nerovnost, která spojuje aritmetický a geometrický průměr čísel c_1, c_2, \dots, c_n . Pokud $c_i > 0 \forall i = 1, \dots, n$, pak platí

$$\sqrt[n]{c_1 c_2 \dots c_n} \leq \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}.$$

V našem případě je $n = 2$, $c_1 = x_m$ a $c_2 = \pi - x_m$. Musí tedy platit

$$\sqrt{x_m(\pi - x_m)} \leq \frac{x_m + (\pi - x_m)}{2} = \frac{\pi}{2},$$

tedy platí

$$x_m(\pi - x_m) \leq \frac{\pi^2}{4}.$$

Po dosazení do vztahu (4.8) dostáváme nerovnost

$$y_m^2 \leq \frac{\pi}{4} \int_0^\pi (y'(x))^2 dx.$$

Dosadíme do (4.6) a upravíme. Dostáváme lepší odhad s využitím Morreyho nerovnosti

$$\lambda \geq \frac{4}{\pi \int_0^\pi r(x) dx}. \quad (4.9)$$

4.4 Yangův iterační odhad pomocí Greenovy funkce

V této sekci představíme iterační metodu pro odhad principiálního vlastního čísla představenou B. Yangem [6] a J. Webbem [4]. Odhady využívají Greenovu funkci.

DEFINICE 4.3 (Greenova funkce [1]). Uvažujme okrajovou úlohu

$$\begin{cases} -y''(x) = f(x) & \text{pro } x \in (0, \pi), \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Greenovou funkcí příslušnou okrajové úloze (4.10) rozumíme funkci $G(x, s) := \langle 0, \pi \rangle \times \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$, která pro libovolné $s_0 \in (0, \pi)$ splňuje následující:

1. $G(x, s_0) \in C^1(\langle 0, \pi \rangle)$ a $G(x, s_0) \in C^2(0, s_0) \cap C^2(s_0, \pi)$,
2. $\frac{\partial}{\partial x} G(s_0^+, s_0) - \frac{\partial}{\partial x} G(s_0^-, s_0) = 1$,
3. $G(0, s_0) = G(\pi, s_0) = 0$,
4. $\frac{\partial^2}{\partial x^2} G(x, s_0) = 0 \quad \forall x \in (0, \pi) \setminus \{s_0\}$.

Lze ukázat, že Greenovu funkci příslušnou úloze (1.2) lze zapsat ve tvaru

$$G(x, s) = \begin{cases} \frac{s(\pi - x)}{\pi} & \text{pro } s \in (0, x), \\ \frac{x(\pi - s)}{\pi} & \text{pro } s \in (x, \pi). \end{cases} \quad (4.11)$$

Využití Greenovy funkce dokládá například následující známé tvrzení, které uvedeme i s důkazem.

VĚTA 4.4. *Nechť $f \in C(0, \pi)$ a $y \in C^2(0, \pi)$. Pak y řeší okrajovou úlohu (4.10) právě tehdy, když*

$$y(x) = \int_0^\pi G(x, s) f(s) ds \quad \forall x \in (0, \pi).$$

Důkaz. Ekvivalenci dokážeme ve dvou implikacích.

1. (\Rightarrow)

Předpokládejme, že $y(x)$ je řešením okrajové úlohy (4.10). Úlohu lze řešit metodou variace konstant a dojít k řešení ve tvaru

$$y(x) = A + Bx - \int_0^x (x - s) f(s) ds.$$

Z okrajových podmínek dostaneme, že $A = 0$ a $B = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - s) f(s) ds$. Řešení tedy můžeme zapsat ve tvaru

$$y(x) = \frac{x}{\pi} \int_0^\pi (\pi - s)f(s) ds - \int_0^x (x - s)f(s) ds.$$

Po jednoduché úpravě dostáváme

$$y(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x s(\pi - x)f(s) ds + \frac{1}{\pi} \int_x^\pi x(\pi - s)f(s) ds,$$

což lze zapsat jako

$$y(x) = \int_0^\pi G(x, s)f(s) ds,$$

kde $G(x, s)$ je dáno vztahem (4.11).

2. (\Leftarrow)

Předpokládejme, že $y(x) = \int_0^\pi G(x, s)f(s) ds$, $\forall x \in \langle 0, \pi \rangle$. Rovnost zderivujeme podle nezávislé proměnné x

$$y'(x) = \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x} G(x, s)f(s) ds.$$

Nyní integrál na pravé straně rozdělíme na dva integrály

$$y'(x) = \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} G(x, s)f(s) ds + \int_x^\pi \frac{\partial}{\partial x} G(x, s)f(s) ds$$

a znovu zderivujeme podle x

$$y''(x) = \int_0^x G_{xx}(x, s)f(s) ds + \int_x^\pi G_{xx}(x, s)f(s) ds + G_x(x, x^-)f(x^-) - G_x(x, x^+)f(x^+).$$

Z podmínek na Greenovu funkci $G(x, s)$ a na spojitost funkce $f(x)$ dostáváme

$$y''(x) = -f(x),$$

a tedy i

$$-y''(x) = f(x) \quad \forall x \in (0, \pi).$$

Ověření okrajových podmínek $y(0) = y(\pi) = 0$ dostaneme jednoduše dosazením

$$y(0) = \int_0^\pi G(0, s)f(s) ds = 0,$$

$$y(\pi) = \int_0^\pi G(\pi, s)f(s) ds = 0.$$

Celkově jsme tedy dostali, že y řeší okrajovou úlohu (4.10). □

Lze ukázat, že předpoklady věty (4.4) lze zeslabit.

Nyní pomocí Greenovy funkce $G(x, s)$ přepíšeme úlohu (1.2) do tvaru

$$y(x) = \lambda \int_0^\pi G(x, s)r(s)y(s) ds, \quad \forall x \in \langle 0, \pi \rangle. \quad (4.12)$$

Operátor na pravé straně rovnosti (4.12) označíme L , tedy $L : C(0, \pi) \rightarrow C(0, \pi)$

$$L(y)(x) := \int_0^\pi G(x, s)r(s)y(s) ds. \quad (4.13)$$

Mějme libovolné funkce $f(x)$ a $h(x)$ takové, že:

$$\forall x \in \langle 0; \pi \rangle : \quad h(x) \leq \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1\|_\infty} \leq f(x), \quad (4.14)$$

kde $\varphi_1(x)$ je vlastní funkce příslušná k vlastnímu číslu λ_1 a $\|\cdot\|_\infty$ značí maximovou normu. Zavedeme dvě funkční posloupnosti

$$\theta_n(x) := L\theta_{n-1}(x) \quad \text{a} \quad \sigma_n(x) := L\sigma_{n-1}(x),$$

kde $\theta_0 = h(x)$, $\sigma_0 = f(x)$ a L je operátor definovaný v (4.13).

Dále zavedeme dvě číselné posloupnosti $(m_n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(M_n)_{n=1}^{+\infty}$ dané předpisem

$$m_n = \left(\sup_{0 \leq x \leq \pi} \theta_n \right)^{-\frac{1}{n}}, \quad (4.15)$$

$$M_n = \left(\sup_{0 \leq x \leq \pi} \sigma_n \right)^{-\frac{1}{n}}. \quad (4.16)$$

Pak platí následující věta:

VĚTA 4.5 (Yang [6], Webb [4]). *Mějme operátor L a posloupnosti $(m_n)_{n=1}^{+\infty}$ a $(M_n)_{n=1}^{+\infty}$ definované výše. Pak platí, že $(m_n)_{n=1}^{+\infty}$ je rostoucí posloupnost a $(M_n)_{n=1}^{+\infty}$ je klesající posloupnost. Dále pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$m_n \leq \lambda_1 \leq M_n,$$

kde λ_1 je principiální vlastní číslo úlohy (1.2).

Věta 4 dává návod, jak postupně získat dolní a horní odhad prvního vlastního čísla. Příslušnou softwareovou implementaci můžeme zapsat pomocí následujícího pseudokódu.

- zvolíme $f(x)$ a $h(x)$ splňující (4.14) a nastavíme $\theta_0 = h(x)$ a $\sigma_0 = f(x)$
- zvolíme n =počet iterací
- Pro $k = 1, \dots, n$
 - θ_k získáme aplikací operátoru L na θ_{k-1}
 - σ_k získáme aplikací operátoru L na σ_{k-1}
 - vypočítáme M_k a m_k ze vztahů (4.16) a (4.15)

Jelikož hledáme vlastní číslo λ_1 , tak neznáme ani vlastní funkci $\varphi_1(x)$. Triviálně ale můžeme zvolit $f(x) \equiv 1$. Volba funkce $h(x)$ již není tak zřejmá. Platí však následující tvrzení.

LEMMA 4.6. Funkci $h(x)$ z věty 4 je možné pro úlohu (1.2) volit ve tvaru

$$h(x) = \frac{x(\pi - x)}{\pi^2}.$$

Důkaz. Z článku [4] plyne, že pokud existují funkce $h(x)$ a $\Phi(s)$ takové, že

$$h(x)\Phi(s) \leq r(s)G(x, s) \leq \Phi(s), \quad \forall x, s \in \langle 0, \pi \rangle,$$

pak pro první vlastní funkci $\varphi_1(x)$ platí

$$h(x) \leq \frac{\varphi_1(x)}{\|\varphi_1\|}.$$

Očividně pro $0 \leq x \leq \pi$ platí, že

$$G(x, s) \leq \frac{1}{\pi}s(\pi - s), \quad \forall s \in (0, \pi).$$

Jelikož je $r(x)$ nezáporná na intervalu $\langle 0; \pi \rangle$, tak platí

$$G(x, s)r(s) \leq r(s)\frac{1}{\pi}s(\pi - s) =: \Phi(s).$$

Nyní funkci $G(x, s)$ odhadneme zdola.

1) Nechť $0 < x < s < \pi$.

Funkce $G(x, s)$ vypadá takto

$$G(x, s) = \frac{x(\pi - s)}{\pi}.$$

Nyní využijeme faktů, že $\frac{\pi-x}{\pi} < 1$ a $\frac{s}{\pi} < 1$ a dostaneme následující nerovnost

$$G(x, s) \geq x \frac{(\pi - x)}{\pi} \frac{s}{\pi} \frac{(\pi - s)}{\pi}.$$

Opět vynásobíme funkcí $r(x)$ a dosadíme zadanou funkci $\Phi(s)$

$$G(x, s)r(x) \geq \Phi(s) \frac{x(\pi - x)}{\pi^2}.$$

2) Nechť $0 < s < x < \pi$.

Funkce $G(x, s)$ vypadá takto

$$G(x, s) = \frac{s(\pi - x)}{\pi}.$$

Opět využijeme faktů, že $\frac{\pi-s}{\pi} < 1$ a $\frac{x}{\pi} < 1$ a dostaneme stejnou nerovnost jako v předchozím případě

$$G(x, s) \geq x \frac{(\pi - x)}{\pi} \frac{s}{\pi} \frac{(\pi - s)}{\pi}.$$

Po násobení funkcí $r(x)$ dostaneme znovu nerovnost

$$G(x, s)r(x) \geq \Phi(s) \frac{x(\pi - x)}{\pi^2}.$$

Celkově tedy platí

$$\Phi(s) \frac{x(\pi-x)}{\pi^2} \leq G(x,s)r(s) \leq \Phi(s)$$

a funkci $h(x)$, splňující (4.14), můžeme volit jako $\frac{x(\pi-x)}{\pi^2}$. □

4.5 Druhý iterační odhad pomocí Collatzových-Wielandtových čísel

Druhý iterační odhad vychází z článku [4], kde autor využívá Collatzova-Wielandtova čísla.

DEFINICE 4.7. (Collatzova-Wielandtova čísla) Collatzovými-Wielandtovými čísly (dále jen C-W čísla) příslušnými operátoru L a funkci y rozumíme čísla $\underline{r}(L, y)$ a $\bar{r}(L, y)$ definovaná jako

$$\underline{r}(L, y) := \sup\{\rho \in \mathbb{R} : Ly \geq \rho y\},$$

$$\bar{r}(L, y) := \inf\{\epsilon \in \mathbb{R} : Ly \leq \epsilon y\}.$$

Číslo $\underline{r}(L, y)$ se nazývá dolní C-W číslo a $\bar{r}(L, y)$ se nazývá horní C-W číslo.

Pomocí horního a dolního C-W čísla určíme odhad principiálního vlastního čísla λ_1 . Využijeme postup popsaný v [4].

Mějme libovolné funkce $f(x) \geq 0$ a $h(x) \geq 0$ takové, že platí

$$\exists \mu, \nu > 0 : \begin{cases} \mu h(x) \leq Lh(x), \\ \nu f(x) \geq Lf(x). \end{cases} \quad (4.17)$$

Nyní zavedeme dvě funkční posloupnosti $(v_n(x))_{n=1}^{\infty}$ a $(w_n(x))_{n=1}^{\infty}$ jako

$$v_n(x) = Lv_{n-1}(x),$$

$$w_n(x) = Lw_{n-1}(x),$$

kde $v_0(x) = h(x)$ a $w_0(x) = f(x)$.

Dále mějme dvě číselné posloupnosti $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ definované jako

$$r_n := \underline{r}(L, v_n), \quad (4.18)$$

$$R_n := \bar{r}(L, w_n). \quad (4.19)$$

Pak platí následující věta.

VĚTA 4.8 (Webb [4]). Mějme operátor L definovaný v (4.13) a hodnoty r_n a R_n definované výše. Pak platí, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{r_n} \leq \lambda_1 \leq \frac{1}{R_n},$$

kde λ_1 je principiální vlastní číslo úlohy (1.2).

Odhad je opět vhodné implementovat ve vhodném softwaru. Implementaci lze zapsat v následujícím pseudokódu

- zvolíme nezáporné funkce $f(x)$ a $h(x)$ a nastavíme $v_0 = h(x)$ a $w_0 = f(x)$
- zvolíme $n =$ počet iterací
- Pro $k = 1, \dots, n$
 - v_k získáme aplikací operátoru L na v_{k-1}
 - w_k získáme aplikací operátoru L na w_{k-1}
 - vypočítáme R_k a r_k ze vztahů (4.19) a (4.18)

Volba $f(x)$ může být stejná jako v případě věty 4. Tedy $f(x) \equiv 1$. Triviálně platí

$$L(f)(x) = \int_0^\pi r(s)G(x,s) ds \leq \int_0^\pi 1 ds \leq \pi,$$

tedy podmínka (4.17) pro volbu $v = \pi$ je splněna. Funkci $h(x)$ budeme v následující sekci volit ve stejném tvaru jako v sekci o Webbově metodě odhadu, to je $h(x) = \frac{x(\pi-x)}{\pi^2}$. Ověření podmínky (4.17) pro funkci $h(x)$ provedeme vždy u konkrétní volby váhové funkce $r(x)$.

4.6 Porovnání odhadů

Konkrétní výsledky demonstrujeme na několika váhových funkcích. K výpočtu jsme využili numerický software Matlab a symbolický software Wolfram Mathematica. Pro každou váhovou funkci spočteme odhad (4.8) pomocí Morreyovy nerovnosti a dále iterační odhady z vět 4.5 a 4.8, u kterých určíme vždy první, třetí a pátou iteraci. Hodnoty budou zaokrouhleny na tři desetinná místa.

Všechny váhové funkce $r(x)$ jsme volili tak, aby $\max_{x \in (0;\pi)} r(x) = 1$. Můžeme tedy rovnou určit odhad pomocí Poincarého nerovnosti (4.4), že všechna vlastní čísla jsou větší než 1.

4.6.1 Konstantní váhová funkce $r(x) \equiv 1$

Pro konstantní váhovou funkci $r(x) \equiv 1$ jsou vlastní čísla druhé mocniny přirozených čísel, tedy pro první vlastní číslo λ_1 platí: $\lambda_1 = 1$.

Pomocí Morreyho nerovnosti dostáváme následující odhad

$$\lambda \geq \frac{4}{\pi \int_0^\pi dx} = \frac{4}{\pi^2} \approx 0.405.$$

Za funkci volíme $f(x) \equiv 1$ a za $h(x) = \frac{x(\pi-x)}{\pi^2}$ v obou iteračních metodách. Ověříme, že tato volba $h(x)$ splňuje podmínku (4.17), tedy že

$$\exists \mu > 0: \quad \mu h(x) \leq Lh(x).$$

Na funkci aplikujeme operátor L

$$L\left(\frac{x(\pi-x)}{\pi^2}\right) = \frac{\pi^3x - 2\pi x^3 + x^4}{12\pi^2}. \quad (4.20)$$

Výsledek je opět polynom, tedy musí existovat konstanta μ , pro kterou bude podmínka splněna. Iterační odhady vycházejí následovně:

Metoda	Webbova metoda				C-W metoda			
	Matlab		Mathematica		Matlab		Mathematica	
Mez	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní
1. iterace	0.811	3.891	0.811	3.891	0.972	1.031	0.973	1.031
3. iterace	0.923	1.571	0.923	1.571	0.997	1.001	1.000	1.001
5. iterace	0.953	1.311	0.953	1.311	1.000	1.001	1.000	1.000

Odhad pomocí Morreyho nerovnosti vychází v tomto případě nejhůř. Poincarého nerovnost nám dává konkrétní hodnotu vlastního čísla $\lambda_1 = 1$. Webbova metoda nám už u první iterace vychází dvakrát lépe než Morreyho nerovnost, ale horní hranice dává mnohonásobně horší odhad než dolní. Tento rozdíl se zlepšuje s dalšími iteracemi. Výpočet v numerickém softwaru Matlab je proveden tak, že interval je navzorkován na 1000 hodnot. V každém bodě je spočten jednorozměrný integrál, kde je do dvourozměrné Greenovy funkce dosazena konkrétní hodnota jedné proměnné a podle druhé je provedena integrace. Všechny tyto hodnoty jsou ukládány a po dokončení výpočtu na celém intervalu je nalezena nová funkce tak, že interpolujeme získané hodnoty pomocí spline křivek tak, aby výsledná funkce byla třídy $C^2(I)$. V softwaru Mathematica se tento postup nemusí řešit a software si s integrálem poradí symbolicky. Je tedy zřejmé, že postup v Mathematice bude přesnější a vyvarujeme se aproximačním chybám ve vzorkování a interpolaci. Ve Webbově metodě se tento rozdílný postup neprojevuje a oba softwary konvergují stejně rychle a už u páté iterace dostáváme relativně dobrý odhad na první vlastní číslo. Druhá C-W metoda vychází mnohem lépe než Webbova a už u páté iterace dostáváme konkrétní hodnotu vlastního čísla na námi zvolená tři desetinná místa. Postupy v Matlabu a v Mathematice zde vycházejí opět téměř identicky až na malé zaokrouhlovací odchylky.

Iterace lze zlepšit, pokud v C-W metodě vybereme vhodnější funkci $f(x)$. Z výsledku v rovnosti (4.20) vidíme, že volba $f(x) = \frac{x(\pi-x)}{\pi^2}$ by také splnila podmínku (4.17) a existuje konstanta ν z podmínky (4.17), taková, že $\nu f(x) \geq Lf(x)$. Pro tuto volbu odhady vycházejí takto:

Metoda	Webbova metoda				C-W metoda			
	Matlab		Mathematica		Matlab		Mathematica	
Mez	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní
1. iterace	0.811	3.891	0.811	3.891	0.972	1.216	0.973	1.216
3. iterace	0.923	1.571	0.923	1.571	0.997	1.001	1.000	1.001
5. iterace	0.953	1.311	0.953	1.311	1.000	1.001	1.000	1.000

Na červeně vyznačených hodnotách je vidět, že se C-W metoda nezlepšila a změna je patrná jen na první iteraci. Pro další váhové funkce budeme volit $f(x) \equiv 1$ pro lepší srovnatelnost iteračních odhadů.

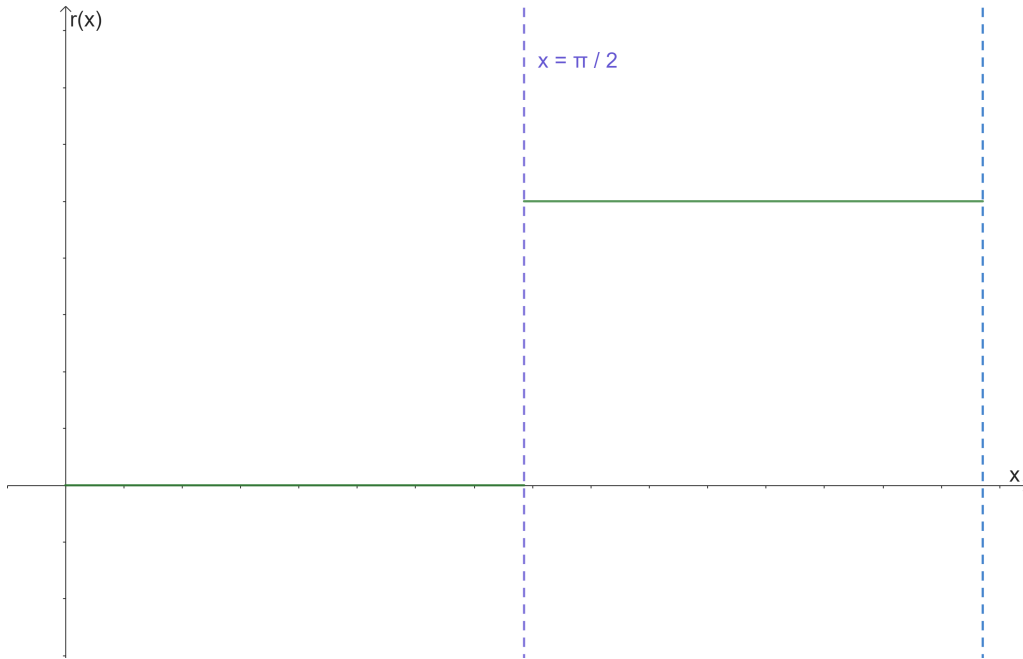
4.6.2 Po částech konstantní váhová funkce $r(x)$

Pro po částech konstantní váhovou funkci

$$r(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0; \frac{\pi}{2}), \\ 1, & x \in (\frac{\pi}{2}; \pi), \end{cases}$$

jsme spočetli vlastní čísla v kapitole 2, to je $\lambda_1 \approx 1.67$. Pomocí Morreyovy nerovnosti dostáváme následující odhad

$$\lambda \geq \frac{4}{\pi \int_0^\pi r(x) dx} = \frac{4}{\frac{\pi}{2}} \approx 0.811.$$



Obrázek 4.1: Váhová funkce $r(x) = \begin{cases} 0, & x \in (0; \frac{\pi}{2}), \\ 1, & x \in (\frac{\pi}{2}; \pi). \end{cases}$

Iterační odhady, pro stejnou volbu funkcí jako v kapitole 4.6.1, vycházejí následovně:

Metoda	Webbova metoda				C-W metoda			
	Matlab		Mathematica		Matlab		Mathematica	
Mez	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní
1. iterace	0.878	9.119	0.878	9.119	0.878	9.119	0.878	9.119
3. iterace	1.337	2.277	1.337	2.277	1.625	3.882	1.625	3.881
5. iterace	1.461	2.011	1.461	2.011	1.659	1.672	1.660	1.672

Opět lze ověřit, že funkci $h(x)$ můžeme v obou iteračních metodách volit stejně. Morreyho nerovnost opět vychází hůř než pomocí Poincarého nerovnosti. První iterace obou metod jsou srovnatelné s výsledkem Morreyho nerovnosti, ale horší než výsledek z Poincarého nerovnosti. Třetí

iterace je u obou metod lepší než oba neiterační odhady. Odhad pomocí C-W čísel dává už při třetí iteraci odhad přesný na jedno desetinné místo. Pátá iterace u první metody vychází hůř, než třetí iterace u druhé metody. Pátá iterace u metody pomocí C-W čísel se opět velmi blíží skutečné hodnotě vlastního čísla.

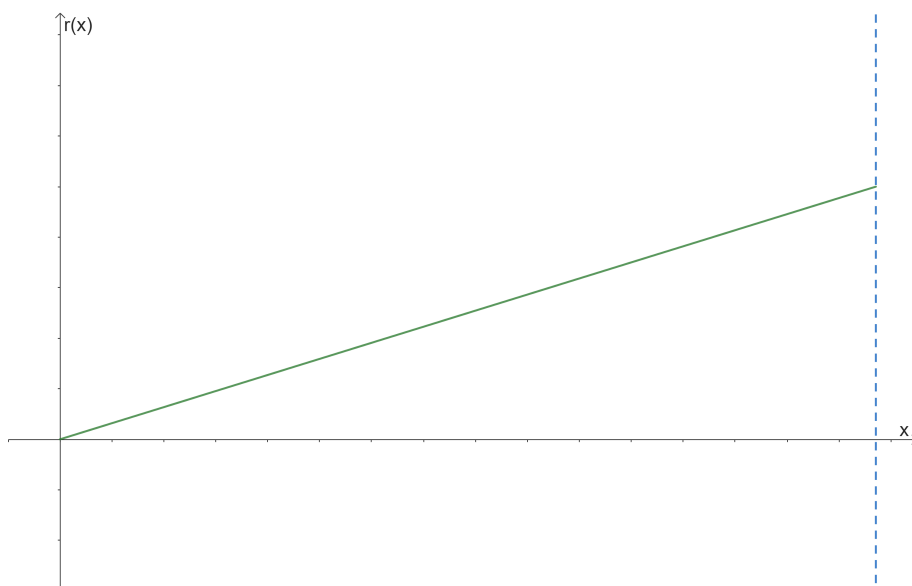
4.6.3 Lineární váhová funkce $r(x) = \frac{x}{\pi}$

Lineární váhová funkce je vynormovaná tak, aby

$$\max_{x \in (0; \pi)} r(x) = 1.$$

Morreyova nerovnost vychází stejně jako v předchozím případě

$$\lambda \geq \frac{4}{\pi \int_0^\pi r(x) dx} = \frac{4}{\frac{\pi}{2}} \approx 0.811.$$



Obrázek 4.2: Váhová funkce $r(x) = \frac{x}{\pi}$

Iterační metody proběhly ve stejném nastavení jako v kapitole 4.6.1 a vycházejí následovně. Ověření podmínek (4.17) je obdobné jako u konstantní váhové funkce.

Metoda	Webbova metoda				C-W metoda			
	Matlab		Mathematica		Matlab		Mathematica	
Mez	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní
1. iterace	1.579	7.661	1.579	7.661	1.810	3.040	1.811	3.110
3. iterace	1.781	3.0476	1.781	3.0476	1.911	2.432	1.861	2.433
5. iterace	1.836	2.534	1.836	2.534	1.920	1.964	1.917	1.964

Morreyho nerovnost opět vychází hůř než Poincarého nerovnost, ale iterační metody vycházejí už při první iteraci lépe než obě nerovnosti. C-W metoda zde konverguje výrazně rychleji. Jsou

zde také patrnější rozdíly v symbolickém a numerickém integrování. Tyto rozdíly jsou způsobené výraznější aproximací v Matlabu, kterou jsme popsali u první váhové funkce. Pátá iterace u C-W nám dává velmi dobrou představu o principiálním vlastním čísle.

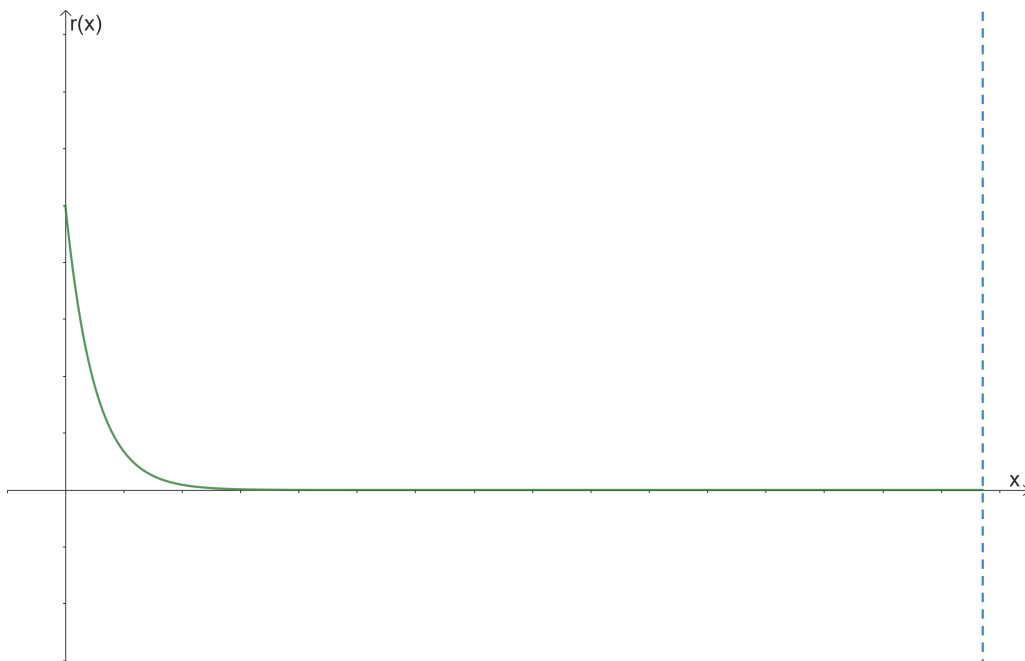
4.6.4 Exponenciální váhová funkce $r(x) = e^{-10x}$

Tuto váhovou funkci jsme volili tak, aby byla koncentrovaná na levém okraji intervalu. I zde lze ověřit volba funkce $h(x)$ pro C-W metodu. Platí

$$\int_0^\pi e^{-10x} dx = \frac{1}{10}(1 - e^{-10\pi}),$$

a tedy

$$\lambda \geq \frac{\frac{4}{\pi}}{\frac{\pi}{10}(1 - e^{-10\pi})} \approx 12.732.$$



Obrázek 4.3: Exponenciální váhová funkce $r(x) = e^{-10x}$

Metoda	Webbova metoda				C-W metoda			
	Matlab		Mathematica		Matlab		Mathematica	
Mez	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní
1. iterace	116.491	2102.9	135.266	2351.53	113.638	1.7e3	1.216	5e13
3. iterace	138.280	384.909	147.781	318.911	154.555	216.803	144.314	223.402
5. iterace	145.462	269.223	133.553	188.694	152.138	158.204	154.278	163.311

Morreyova nerovnost vychází v tomto případě mnohem lépe než Poincarého nerovnost, která nám dává velmi vzdálený odhad od reálné hodnoty principiálního vlastního čísla. Zde je zřejmý

rozdíl mezi výsledky ze softwaru Mathematica a Matlab. Ty jsou opět nejspíše způsobeny apro-
ximací funkce při numerickém integrování. U první iterace v druhé metodě horní odhad nabývá
relativně vysokých hodnot, což je nejspíš způsobeno téměř nulovou derivací na pravém okraji
intervalu. Zajímavé je také, že u metody C-W čísel dává Matlab mnohem lepší výsledky, což ale
může být i chyba, která v tomto případě přispěla k lepšímu výsledku. Toto chování by mohlo být
prošetřeno v navazujících pracích.

4.6.5 Exponenciální váhová funkce $r(x) = e^{10(x-\pi)}$

Tato váhová funkce se chová stejně jako ta v předchozím příkladu, jen je koncentrována na
pravém okraji intervalu. Všechny odhady vycházejí stejně.



Obrázek 4.4: Exponenciální váhová funkce $r(x) = e^{10(x-\pi)}$

Metoda	Webbova metoda				C-W metoda			
	Matlab		Mathematica		Matlab		Mathematica	
Mez	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní
1. iterace	116.491	2102.9	135.266	2351.53	113.638	1.7e3	1.216	5e13
3. iterace	138.280	384.909	147.781	318.911	154.555	216.803	144.314	223.402
5. iterace	145.462	269.223	133.553	188.694	152.138	158.204	154.278	163.311

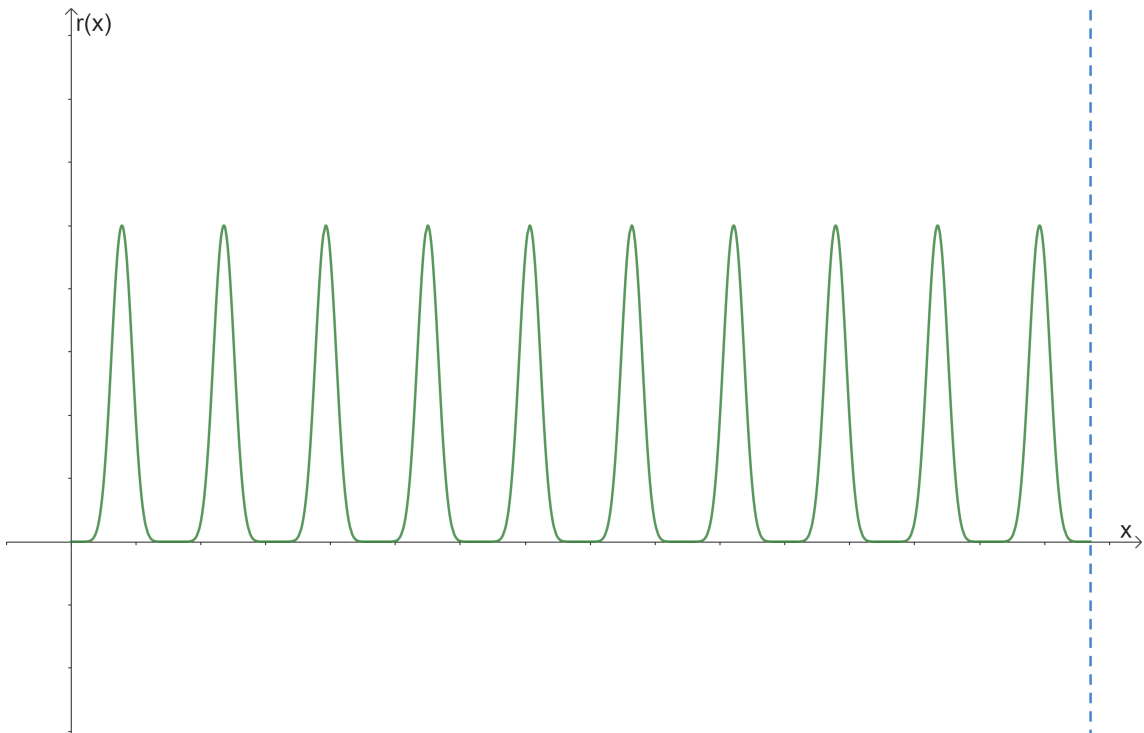
4.6.6 Periodická váhová funkce $r(x) = \sin^{10}(10x)$

Tato váhová funkce by mohla například do jisté míry simulovat diskrétní rozdělení. Morreyova nerovnost vychází následovně. Platí

$$\int_0^\pi \sin^{10}(10x) dx = \frac{63\pi}{256},$$

a tedy

$$\lambda \geq \frac{\frac{4}{\pi}}{\frac{63\pi}{256}} \approx 0.984.$$



Obrázek 4.5: Váhová funkce $r(x) = \sin^{10}(10x)$

Iterační metody byly spuštěny se stejnou volbou funkcí jako v předchozích kapitolách. I zde lze ověřit, že tato volba vyhovuje podmínce (4.17).

Metoda	Webbova metoda				C-W metoda			
	Matlab		Mathematica		Matlab		Mathematica	
Mez	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní
1. iterace	1.621	7.800	1.621	7.801	1.849	4.919	1.849	4.920
3. iterace	2.203	3.754	2.401	3.700	2.544	3.699	2.521	3.557
5. iterace	2.355	3.243	2.412	3.179	2.587	2.625	2.599	2.613

Morreyho a Poincarého nerovnost dávají velmi podobný výsledek, přičemž Poincarého nerovnost si vede o trochu lépe. Symbolický software Mathematica si zde nebyl schopný s integrováním

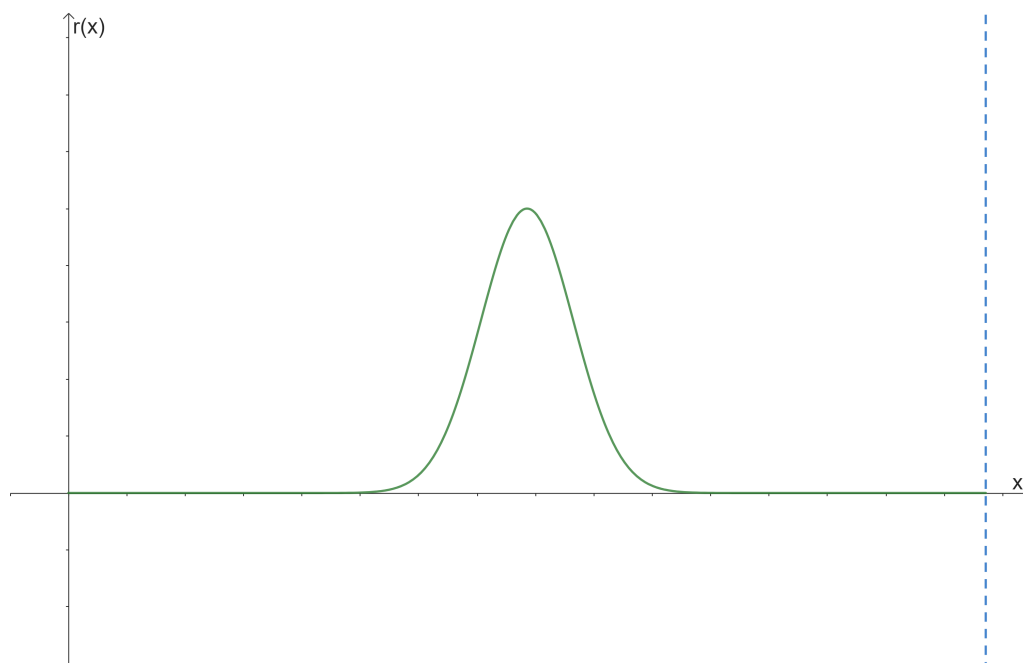
poradit. Proto jsme i v něm volili numerické integrování. I přesto, že v obou softwarech bylo integrování provedeno numericky, tak software Mathematica je schopný celý proces integrace provést sám a není nutné výslednou funkci interpolovat a aproximovat. Proto se dá očekávat, že bude poskytovat přesnější výsledky, což je vidět u páté iterace v metodě C-W čísel. Ta nám dává relativně přesný odhad principiálního vlastního čísla.

4.6.7 Gaussova váhová funkce $r(x) = e^{-20(x-\frac{\pi}{2})^2}$

Tato váhová funkce představuje funkci normálního rozdělení se střední hodnotou ve středu intervalu. Morreyova nerovnost vychází následovně. Platí

$$\int_0^{\pi} e^{-20(x-\frac{\pi}{2})^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{5}} \operatorname{erf}(\sqrt{5}\pi),$$

kde $\operatorname{erf}(x)$ vyjadřuje chybovou funkci. Celkově tedy platí $\lambda \geq 3.213$.



Obrázek 4.6: Váhová funkce $r(x) = e^{-20(x-\frac{\pi}{2})^2}$

Iterační metody vycházejí následovně. Počáteční volba funkcí $f(x)$ a $h(x)$ byla stejná jako v předchozích případech.

Metoda	Webbova metoda				C-W metoda			
	Matlab		Mathematica		Matlab		Mathematica	
Mez	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní	Dolní	Horní
1. iterace	3.493	14.103	3.493	14.103	3.526	6.491	3.526	6.492
3. iterace	3.574	5.691	3.590	5.521	3.616	3.621	3.617	3.621
5. iterace	3.591	4.747	3.600	4.704	3.617	3.617	3.617	3.617

Odhad pomocí Morreyovy nerovnosti zde poskytuje relativně blízkou dolní hranici. U této váhové funkce byla i v Mathematica volena numerická integrace. Iterační odhad pomocí C-W čísel konverguje téměř okamžitě k přesné hodnotě principiálního vlastního čísla.

Závěr 5

V této bakalářské práci jsme se zabývali variantou Sturmovy-Liouvilleovy úlohy na vlastní čísla. Uvažovali jsme operátor $-y''(x)$ a homogenní Dirichletovy okrajové podmínky. Nejprve jsme spočetli vlastní čísla a vlastní funkce úlohy pro po částech konstantní váhovou funkci $r(x)$ a určili vlastní čísla a vlastní funkce v závislosti na parametru ϵ . Dalším krokem bylo přidání dalšího parametru ζ a určení vlastních čísel a vlastních funkcí. V poslední části jsme určili dva odhady principiálního vlastního čísla založené na známých nerovnostech z funkcionální analýzy a dva iterační odhady založené na výsledcích z článků [4] a [6]. Tyto odhady jsme porovnali v případě několika váhových funkcí. Při této příležitosti jsme též porovnali symbolické integrování v softwaru Wolfram Mathematica s numerickým integrováním v softwaru Matlab. Z experimentů jsme zjistili, že neiterační odhady pomocí Poincarého a Morreyovy nerovnosti si vedly srovnatelně a u každé váhové funkce vycházel lépe jiný. Naopak u iteračních odhadů pomocí Webbovy metody a metody C-W čísel si téměř vždy vedla lépe metoda C-W čísel, která konvergovala k principiálnímu vlastnímu číslu rychleji, než Webbova metoda.

Během numerických experimentů jsme narazili na několik zajímavých výsledků, jako jsou například velmi vysoké první iterace u exponenciálních váhových funkcí, nebo zdánlivě přesnější výsledky v softwaru Matlab, kde byla použita aproximace funkcí. Vysvětlení těchto jevů by mohlo být předmětem budoucích prací. Dalším možným rozšířením by mohlo být provedení analýzy závislosti vlastních čísel na parametrech v kapitole 3, nebo analýza vlastních čísel jiného lineárního diferenciálního operátoru.

Literatura

- [1] A. Cabada and A. Cabada. *Green's functions in the theory of ordinary differential equations*. Springer, 2014.
- [2] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, 2022.
- [3] G. Hardy, J. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1952.
- [4] J. Webb. Estimates of eigenvalues of linear operators associated with nonlinear boundary value problems. *Dyn. Syst. Appl.*, 23:415–430, 2014.
- [5] J. R. L. Webb and K. Q. Lan. Eigenvalue criteria for existence of multiple positive solutions of nonlinear boundary value problems of local and nonlocal type. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 27(1):91 – 115, 2006.
- [6] B. Yang. Positive solutions of the $(n-1, 1)$ conjugate boundary value problem. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, (53):1–13, 2010.