

## Matematicko - kartografická analýza rakouských topografických map ze III. vojenského mapování

Monika Čechurová

*mcechuro@kge.zcu.cz*

*Katedra geografie Západočeské univerzity v Plzni, Veveřská 42, 306 19 Plzeň*

**M. Čechurová:** *Mathematical cartography analysis of the Austrian topographic maps from the period of III. Military mapping.* Polyedrical projection of Austrian military topographic maps from mathematical cartography's point of view (projection principle, map sheet geometrical properties, element distortions). Mathematic model of solution and its computer implementation. Numerical results of detailed analysis of the map sheet geometrical properties for the former Czechoslovakia before the World War II are included.

**Key words:** historical military mapping, cartographical projection, element distortions

### Úvod

V letech 1870 – 1883 proběhlo v Rakousko-Uhersku třetí vojenské mapování, jehož výsledkem byly topografické mapy měřítek 1:25 000, 1:75 000 a 1:200 000. Ani dnes nemusíme pohlížet na toto ucelené dílo jen jako na historickou záležitost, ale můžeme jej považovat za cenný zdroj informací při tvorbě modelu změn ve využití krajiny v čase. Dnešní použití těchto map předpokládá znalost užitého způsobu kartografického zobrazení a kartometrických vlastností mapových listů. Článek se zabývá listy speciálních a generálních vojenských topografických map ze třetího rakouského mapování, a to z pohledu matematické kartografie.

Text obsahuje rozbor užitého polyedrického způsobu kartografického zobrazení včetně definice souřadnicového systému a zobrazovacích rovnic. Na základě matematických vztahů pro kartografická zkreslení, odvozených s přihlédnutím ke specifickým uvažovaných map, byl autorkou vytvořen program pro výpočet matematicko-kartografických charakteristik listů speciálních a generálních map. Závěr článku shrnuje vybrané charakteristiky pro mapy z území meziválečné Československé republiky.

### Princip užitého zobrazení

Při zobrazení menší části zemského povrchu lze s určitou přesností považovat tuto zakřivenou plochu o velkém poloměru za rovinu. Vymezí-li se elipsoidická nebo kulová referenční plocha nahrazující reálné zemské těleso takovými rovinnými poli, vznikne mnohostěn neboli polyedr. Polyedrický způsob zobrazení je zobrazení určitého území po vymezených částech. Každá část je zobrazena do roviny samostatně, má vlastní souřadnicovou soustavu a příslušné hodnoty zkreslení. Výhodou tohoto principu je snížení deformací, které vznikají zobrazením zakřiveného povrchu do roviny. Nevýhodou je nemožnost souvislého bezspárového rozvinutí plochy polyedru do roviny.

Pro zobrazení rakouských vojenských topografických map byl jako referenční plocha zvolen Besselův elipsoid z roku 1841. Povrch elipsoidu byl rozdělen na lichoběžníková pole o rozměrech 15' zeměpisné šířky a 30' zeměpisné délky. Jednotlivé elipsoidické lichoběžníky byly zobrazeny do roviny jako rovnoramenné lichoběžníky omezené dvěma přímými a spolu rovnoběžnými obrazy rovnoběžek a přímými obrazy poledníků. Každé

pole tvořilo zobrazovací rovinu pro jeden list speciální mapy v měřítku 1 : 75 000. Postup konstrukce obrazu geografické sítě byl volen tak, že střední poledník listu se zobrazil jako přímý a nezkreslený a v jeho koncových bodech se pak na kolmicích vytýčily v pravé velikosti okrajové rovnoběžky. Obrazy vnitřních rovnoběžek listu jsou přímky rovnoběžné s okrajovými. Nezkreslené krajní rovnoběžky a střední poledník určují konstrukci vnitřních přímých poledníků jako spojnic příslušných dělicích bodů po minutách a desítkách vteřin na okrajových rovnoběžkách.

Samotné mapování proběhlo v měřítku 1 : 25 000. Listy speciálních map byly rozděleny na topografické sekce o rozměrech 7,5' zeměpisné šířky a 15' zeměpisné délky. Každá sekce se dále dělila na čtyři vyměřovací listy, které sloužily jako plní vyměřovací jednotka v tomtéž měřítku. K podrobnému měření se používal měřický stůl pro polohopis, výškoměr a barometr pro výškopis. Originály topografických sekcí byly jedenáctibarevné. Sekce byly dále zmenšeny do měřítku 1 : 75 000 a zasazeny do rámců příslušných listů speciálních map. Z původně měřených map měřítku 1 : 25 000 byly tedy po určité generalizaci fotomechanickou cestou odvozeny tyto mapy:

- mapa speciální v měřítku 1 : 75 000, která vznikla kompozicí čtyř zmenšených sousedních topografických sekcí 1 : 25 000 (ve speciální mapě 1 cm odpovídá délce 750 m v rovině, nebo také 1000 kroků – vojenský krok měří 75 cm);
- mapa generální v měřítku 1 : 200 000, která vznikne kompozicí osmi listů speciálních map;
- mapa přehledná v měřítku 1 : 750 000 (vzhledem k měřítku a současné využitelnosti není předmětem dalšího studia v rámci tohoto článku).

Další úvahy se týkají matematicko-kartografické analýzy listů speciálních a generálních map. Obsahem map, tj. způsobem a přesností jeho tvorby, se nezabývají.

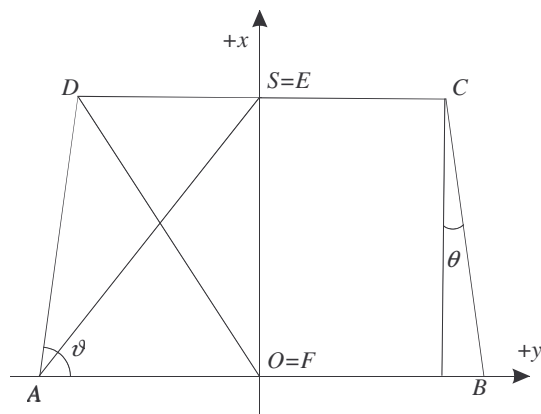
### **Definice souřadnicového systému, zobrazovací rovnice**

Vzhledem k postupu konstrukce listu speciální mapy, uvedeném v předchozím odstavci, nejsou známy exaktní zobrazovací rovnice z elipsoidu do roviny. Pro řadu výpočtů je však nezbytné zobrazovací rovnice znát. KOVAŘÍK (1952) odvodil zobrazovací rovnice z plochy kulové do roviny. Nejdříve se tedy musí v daném případě provést zobrazení elipsoidických zeměpisných souřadnic na sférické.

Nejjednodušší možností je použít zobrazení se zachovanými zeměpisnými souřadnicemi. Tento postup však není uvažován z toho důvodu, že vliv délkových zkreslení by se mohl projevit v měřítku zkoumaných map nad mez grafické přesnosti (0,1 mm). Na příklad při délkovém zkreslení v rovnoběžce  $51^\circ$   $m_r = 0,9985$ , délce 36 km a měřítku speciální mapy se vliv délkového zkreslení projeví hodnotou asi 0,7 mm při zobrazení této délky. Lépe vyhovuje Gaussovo konformní zobrazení elipsoidu na kouli (parametry pro ČSR uvádí např. BUCHAR & HOJVEC (1996). Pro totéž měřítko a délku 36 km je vliv délkového zkreslení řádově statisíciny mm na okraji republiky. Zkreslení, která nastanou při Gaussově konformním zobrazení elipsoidu na kouli, se v měřítku rakouských vojenských topografických map neprojeví.

Každý mapový list speciální mapy tvoří samostatnou jednotku s vlastním souřadnicovým systémem. Je možné jej definovat takto:

Osa  $x$  je v mapě vložena do obrazu středního poledníku (kladně k severu), osa  $y$  do obrazu jižní okrajové rovnoběžky listu (kladně k východu). Počátek  $O$  je volen jako průsečík obrazu středního poledníku a jižní okrajové rovnoběžky (Obr. 1)



**Obr. 1: Rovinný souřadnicový systém speciálních a generálních map**

Zeměpisná šířka a délka  $[U, V]$  jsou nahrazeny redukovanými zeměpisnými souřadnicemi  $[u, v]$ , které jsou vztaženy k počátku  $O[U_0, V_0]$  mapového listu. Mezi nimi platí převodní vztahy

$$u = U - U_0, \quad v = V - V_0. \quad (1)$$

Aby byl splněn požadavek nezkresleného středního poledníku zobrazeného jako přímka, první zobrazovací rovnice nabývá tvar

$$x = R u. \quad (2)$$

Ostatní poledníky se mají zobrazovat jako přímky, tedy úseky obrazů rovnoběžek vydělené přímkovými obrazy poledníků. Pro konstantní  $v$  se mají od jižního k severnímu okraji listu měnit lineárně. Zároveň musí platit, že tyto rovnoběžky se mají zobrazovat jako kolmice na osu  $x$ . Druhá zobrazovací rovnice je tedy

$$y = \left( R \cos U_0 + R \frac{(\cos U_s - \cos U_0)}{U_s - U_0} u \right) v, \quad (3)$$

kde první sčítanec určuje úsek na jižní okrajové rovnoběžce a druhý vyjadřuje jeho lineární změnu podle  $u$ . Označíme-li

$$\frac{(\cos U_s - \cos U_0)}{U_s - U_0} = k, \quad (4)$$

lze druhou zobrazovací rovnici zapsat ve tvaru

$$y = R (\cos U_0 + k u) v. \quad (5)$$

Konstrukce rámu listu mapy generální byla provedena polyedrickým způsobem obdobným jako u mapy speciální. Má však jiný rozměr - jeden list zobrazuje plochu pole geografické sítě o rozměrech  $1^\circ$  zeměpisné délky a  $1^\circ$  zeměpisné šířky, tedy plochu osmi listů speciální mapy. Lze tedy obdobným způsobem definovat souřadnicovou soustavu a k výpočtům použít zobrazovací rovnice (2) a (3), resp. (5). Rovněž zákony zkreslení uvedené v následujícím odstavci jsou platné pro oba typy map.

### Zákony zkreslení

Plocha elipsoidická, popř. kulová, která reprezentuje zemské těleso, a rovina mapy mají rozdílnou křivost. V průběhu zobrazování dochází ke kartografickým zkreslením geometrických prvků. Základní definice zkreslení a další vztahy, užití v rovnicích (6) - (13), jsou uvedeny v PYŠEK (1995), BUCHAR & HOJOVEC (1996), FIALA (1952). Označíme-li zobrazovací rovnice (2) a (5)

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v),$$

jsou jejich parciální derivace podle jednotlivých redukovaných zeměpisných souřadnic

$$\frac{\partial f}{\partial u} = f_u = R, \quad \frac{\partial g}{\partial u} = g_u = R v k, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = f_v = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial v} = g_v = R(\cos U_o + k u).$$

Zkreslení v polednicích lze vyjádřit vztahem

$$m_p^2 = \frac{f_u^2 + g_u^2}{R^2} = \frac{R^2 + R^2 k^2 v^2}{R^2} = 1 + k^2 v^2, \quad (6)$$

kde  $[u, v]$  jsou redukované souřadnice, vztažené k počátku souřadnicového systému mapového listu,  $k$  je dáno rovnicí (4) a poloměr  $R = 6380703,6105$  m (poloměr koule v aplikaci Gaussova konformního zobrazení Besselova elipsoidu na kouli pro území bývalé ČSR). Pro zkreslení v rovnoběžkách  $m_r$  platí

$$m_r^2 = \frac{f_v^2 + g_v^2}{R^2 \cos^2 U} = \frac{R^2 (\cos U_o + k u)^2}{R^2 \cos^2 U} = \frac{(\cos U_o + k u)^2}{\cos^2 U}, \quad (7)$$

kde  $U_o$  je zeměpisná šířka počátku  $O$  mapového listu.

Velikost zkreslení plošného je rovna zkreslení v rovnoběžkách

$$P = \frac{|f_u g_v - f_v g_u|}{R^2 \cos U} = \frac{|R^2 (\cos U_o + k u)|}{R^2 \cos U} = \frac{|(\cos U_o + k u)|}{\cos U} = |m_r|. \quad (8)$$

Na kouli svírají poledníky a rovnoběžky pravý úhel, v obraze svírají úhel  $\vartheta$ . Další úvahy předpokládají úhel  $\vartheta$  ostrý, který je dán vztahem

$$\tan \vartheta = \frac{|f_v g_u - f_u g_v|}{|f_u f_v + g_u g_v|} = \frac{|-R^2 (\cos U_o + k u)|}{|R^2 k v (\cos U_o + k u)|} = \left| -\frac{1}{k v} \right|. \quad (9)$$

Zkreslení úhlu mezi obrazem rovnoběžky a poledníku je podle definice

$$\Theta = 90^\circ - \vartheta \quad (10)$$

Maximální úhlové zkreslení  $\Delta\omega$  je vyjádřeno rovnicí

$$\Delta\omega = 2 \arcsin \frac{|b - a|}{b + a}, \quad (11)$$

kde  $a, b$  jsou extrémní délková zkreslení (tj. zkreslení v hlavních směrech), definovaná následujícími vztahy:

$$a = \frac{c + d}{2}, \quad b = \frac{c - d}{2}, \quad (12)$$

$$c = \sqrt{m_p^2 + m_r^2 + 2m_p m_r \sin \vartheta}, \quad d = \sqrt{m_p^2 + m_r^2 - 2m_p m_r \sin \vartheta}. \quad (13)$$

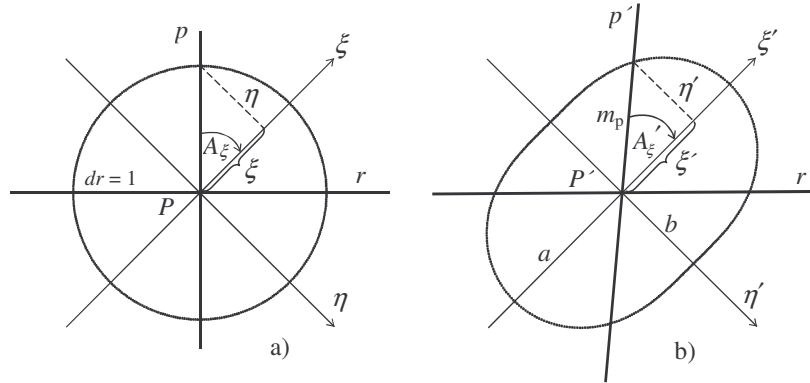
Aby bylo možné provést konstrukci Tissotovy elipsy zkreslení (indikatrix) v okolí vybraných bodů na ploše mapy, je nutné určit orientaci hlavních směrů. Rovnice (23) - (33) a (35) - (44) pro výpočet charakteristických úhlů elipsy vychází ze znalosti azimutu hlavního paprsku ve směru osy  $\xi$  - úhlu  $A_\xi$  - a jeho obrazu  $A'_\xi$ . V tomto azimutu má elipsa orientovanou hlavní poloosu, jejíž velikost je rovna extrémnímu délkovému zkreslení  $a$ . Je vhodné odvodit vztahy pro výpočet  $A_\xi$ ,  $A'_\xi$  v závislosti na zkreslení v poledníku  $m_p$  a rovnoběžce  $m_r$ , jejichž výpočet je dán rovnicemi (6) - (7), a zkreslení v hlavních směrech  $a, b$ , které lze vyčíslit z (12) - (13).

Na referenční ploše (Obr. 2:a) je uvažováno diferenciálně blízké okolí bodu  $P$  reprezentované jednotkovou kružnicí. Osy  $\xi, \eta$  jsou vloženy do hlavních směrů,  $p, r$  jsou směry poledníku a rovnoběžky. Pro azimut hlavního směru  $\xi$  platí

$$\cos A_\xi = \xi, \quad \sin A_\xi = \eta. \quad (14)$$

Obrazem této kružnice je elipsa (Obr. 2:b), obrazem azimutu  $A_\xi$  je úhel  $A'_\xi$ , který lze vyjádřit pomocí zkreslení v poledníku  $m_p$  jako

$$\cos A'_\xi = \frac{\xi'}{m_p}, \quad \sin A'_\xi = \frac{\eta'}{m_p}. \quad (15)$$



**Obr. 2: Tissotova indikatrix**

Vztah mezi souřadnicemi  $\xi, \eta$  na referenční ploše a  $\xi', \eta'$  v obraze se vyjádří pomocí zkreslení v hlavních směrech jako

$$\xi' = a \xi, \quad \eta' = b \eta. \quad (16)$$

Po dosazení (14) - (15) do (16) se získá soustava dvou rovnic

$$m_p \cos A'_\xi = a \cos A_\xi, \quad m_p \sin A'_\xi = b \sin A_\xi, \quad (17)$$

jejichž umocněním a sečtením vznikne

$$m_p^2 = a^2 \cos^2 A_\xi + b^2 \sin^2 A_\xi. \quad (18)$$

Analogicky, s uvážením, že  $A_\eta = A_\xi + 90^\circ$ , se dostane

$$m_r^2 = a^2 \sin^2 A_\xi + b^2 \cos^2 A_\xi. \quad (19)$$

Z rovnic (18) - (19) se po algebraických úpravách vyjádří  $\sin^2 A_\xi$ ,  $\cos^2 A_\xi$  a konečně výsledný vztah pro azimut hlavního směru v závislosti na  $m_p$ ,  $m_r$ ,  $a$ ,  $b$

$$\tan^2 A_\xi = \frac{a^2 - m_p^2}{m_p^2 - b^2} = \frac{m_r^2 - b^2}{a^2 - m_r^2}. \quad (20)$$

Vydělením rovnic soustavy (17) vyjde vztah pro výpočet obrazu  $A'_\xi$ , který po dosazení (20) nabývá tvar

$$\tan^2 A'_\xi = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{a^2 - m_p^2}{m_p^2 - b^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{m_r^2 - b^2}{a^2 - m_r^2}. \quad (21)$$

Rovnice (21) má 4 kořeny. Pro další úvahy je zvolena jedna ze dvou hodnot  $A'_\xi$ , pro kterou hlavní poloosa elipsy zkreslení leží uvnitř ostrého úhlu  $\vartheta$  sevřeného obrazem poledníku a rovnoběžky. Druhá hodnota z intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , splňující tuto podmínku, je větší, resp. menší o  $180^\circ$ , což orientaci elipsy vůči osám  $\xi', \eta'$  neovlivní. Tvar Tissotovy elipsy zkreslení a její orientace se mění v závislosti na poloze bodu vůči souřadnicovým osám  $x, y$ .

1.  $x \geq 0 \wedge y < 0$  (západní polovina mapy)

Azimut hlavního směru  $A_\xi$  leží v 1. kvadrantu (Obr. 3:a), vypočte se podle (20) např. jako

$$A_\xi = \arctan \sqrt{\frac{m_r^2 - b^2}{a^2 - m_r^2}}. \quad (22)$$

Azimut druhého hlavního směru – osy  $\eta$  je

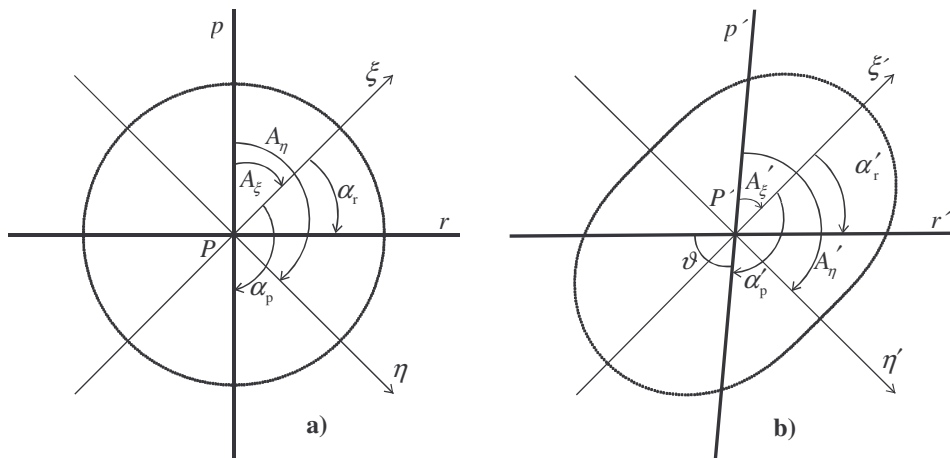
$$A_\eta = A_\xi + \frac{\pi}{2}. \quad (23)$$

Úhel mezi osou  $\xi$  a poledníkem  $p$  je dán vztahem

$$\alpha_p = \pi - A_\xi, \quad (24)$$

pro úhel mezi osou  $\xi$  a rovnoběžkou  $r$  platí

$$\alpha_r = \frac{\pi}{2} - A_\xi. \quad (25)$$



**Obr. 3: Elipsa zkreslení na západní polovině mapy**

Obrazy úhlů získaných rovnicemi (22) - (25) lze vypočítat podle rovnic

$$A'_\xi = \arctan \left( \frac{b}{a} \tan A_\xi \right), \quad (26)$$

$$A'_\eta = \arctan \left( \frac{b}{a} \tan \left( A_\eta - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{2}, \quad (27)$$

$$\alpha'_p = \pi - \arctan \left( \frac{b}{a} \tan (\pi - \alpha_p) \right), \quad (28)$$

$$\alpha'_r = \arctan \left( \frac{b}{a} \tan \alpha_r \right). \quad (29)$$

Jako kontrolní mohou sloužit vztahy odvozené z Obr. 3:b.

$$A'_\eta = A'_\xi + \frac{\pi}{2}, \quad (30)$$

$$\alpha'_p = \pi - A'_\xi, \quad (31)$$

$$A'_\xi + \alpha'_r = \vartheta, \quad (32)$$

$$\vartheta = \pi - \alpha'_p + \alpha'_r. \quad (33)$$

2.  $x \geq 0 \wedge y > 0$  (východní polovina mapy)

Azimut  $A_\xi$  hlavního směru vloženého do osy  $\xi$  leží ve 4. kvadrantu (Obr. 4:a), vypočte se podle (20) např. jako



$$A_{\xi} = \arctan\left(-\sqrt{\frac{m_r^2 - b^2}{a^2 - m_r^2}}\right). \quad (34)$$

Azimut druhého hlavního směru vloženého do osy  $\eta$  je

$$A_{\eta} = A_{\xi} - \frac{\pi}{2}. \quad (35)$$

Úhly  $\alpha_p, \alpha_r$  mezi osou  $\xi$ , poledníkem a rovnoběžkou jsou dány vztahy

$$\alpha_p = 2\pi - A_{\xi}, \quad (36)$$

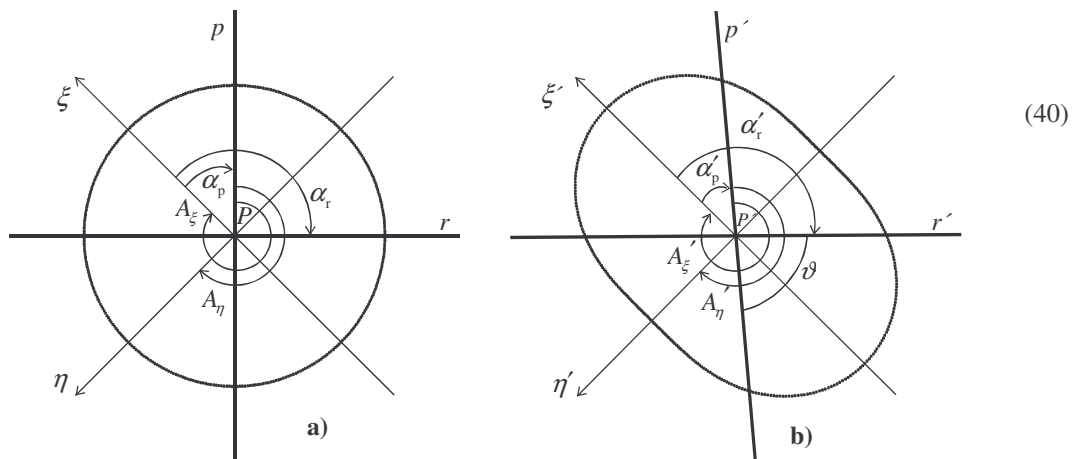
$$\alpha_r = \frac{5\pi}{2} - A_{\xi}. \quad (37)$$

Velikost úhlu  $A_{\xi}'$  se obdrží z rovnice (26) s využitím (34), obrazy dalších úhlů vypočtených podle rovnic (35) - (37) se získají vyčíslením následujících rovnic

$$A_{\eta}' = \frac{3\pi}{2} - \arctan\left(\frac{b}{a} \tan\left(\frac{3\pi}{2} - A_{\eta}\right)\right), \quad (38)$$

$$\alpha_p' = \arctan\left(\frac{b}{a} \tan \alpha_p\right), \quad (39)$$

$$\alpha_r' = \pi - \arctan\left(\frac{b}{a} \tan(\pi - \alpha_r)\right).$$



**Obr. 4: Elipsa zkreslení na východní polovině mapy**

Vypočtené úhly musí splňovat kontrolní rovnice (Obr. 4:b)

$$A_{\eta}' = A_{\xi}' - \frac{\pi}{2}, \quad (41)$$

$$\alpha_p' = 2\pi - A_{\xi}', \quad (42)$$

$$A_{\xi}' + \alpha_r' = 3\pi - \vartheta, \quad (43)$$

$$\vartheta = \pi - \alpha_r' + \alpha_p'. \quad (44)$$

3.  $y = 0$  (obraz středního poledníku)

a)  $x > 0 \wedge x < x_s$

Tento případ zahrnuje vnitřní body středního poledníku ( $S$  je průsečík obrazů severní okrajové rovnoběžky a středního poledníku). Hlavní směry splývají se směry poledníků a rovnoběžek, tedy platí, že  $m_p = a$  a  $m_r = b$ . Protože  $a \neq b$ , je obrazem kružnice na referenční ploše elipsa, jejíž charakteristické úhly nabývají těchto hodnot:

$$A_{\xi} = A'_{\xi} = 0, \quad (45)$$

$$A_{\eta} = A'_{\eta} = \frac{\pi}{2}, \quad (46)$$

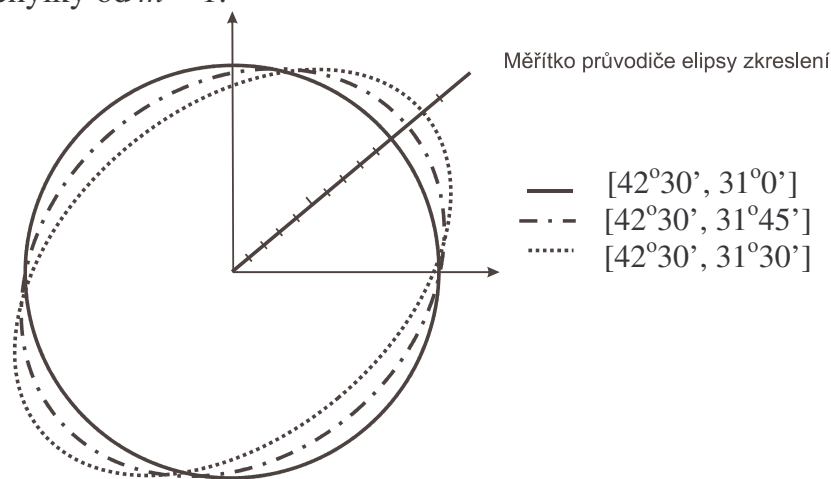
$$\alpha_p = \alpha'_p = \pi, \quad (47)$$

$$\alpha_r = \alpha'_r = \frac{\pi}{2}. \quad (48)$$

b)  $x=0 \vee x=x_s$

Jedná se o speciální body, které jsou průsečíky obrazů okrajových rovnoběžek a obrazu středního poledníku. Hlavní směry opět splývají se směry poledníků a rovnoběžek. Platí podmínky  $m_p = a$ ,  $m_r = b$ , ale navíc i  $a = b$ . Jsou to jediné dva body na mapě, u kterých elipsa zkreslení má tvar kružnice. Charakteristické úhly jsou shodné s (45) - (48).

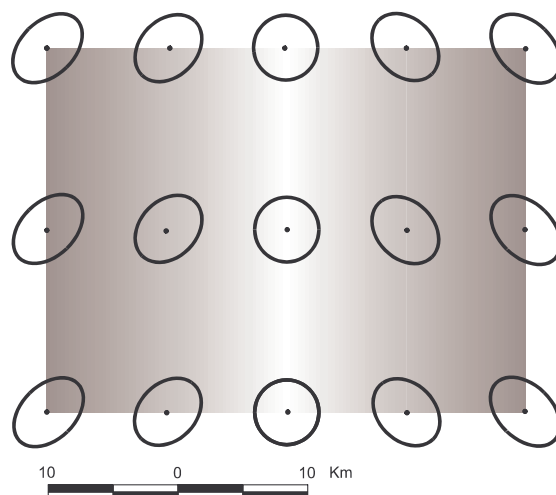
Vývoj tvaru elipsy zkreslení jižní okrajové rovnoběžce západní poloviny listu speciální mapy je zachycen na Obr. 5. Vzhledem k obtížné grafické interpretaci tohoto jevu bylo vypočteno poměrné měřítko elipsy zkreslení vůči jednotkové kružnici. Na příklad průvodič elipsy v rohovém bodě mapy 4150 se pohybuje v intervalu  $\langle 0,9983,1,0017 \rangle$ , na ostatních mapových listech našeho území se jejich numerické hodnoty řádově nemění. Velikost průvodiče elipsy zkreslení byla tedy bodově přepočtena podle vztahu  $m = \frac{(m_{el} - 1) \cdot 1000}{8} + 1$ , kde  $m_{el}$  je původní hodnota a  $m$  je hodnota vhodná pro grafické znázornění. Měřítko průvodičů v elipsách je tedy takové, že jeden dílek na stupnici vyjadřuje  $8 \cdot 10^{-4}$  odchylky od  $m = 1$ .



**Obr. 5: Vývoj tvaru elipsy zkreslení na jižní okrajové rovnoběžce**

Vývoj zkreslení na ploše listu speciální mapy 4250 je uveden na Obr. 6. Šedá škála v pozadí vyjadřuje maximální zkreslení úhlové, které je v intervalu  $\langle 0; 11'23,0874'' \rangle$ . Elipsy zkreslení charakterizují průběh délkového zkreslení ve vybraných bodech mapy. Je zřejmé, že se zeměpisnou délkou je změna zkreslení rychlá, zatímco se zeměpisnou šířkou se téměř nemění. Na okraji mapového listu dochází k velkým délkovým i úhlovým zkreslením, což se projevuje negativně na styku listů. Dochází k lomu kresby zejména při přechodu mezi listy téže vrstvy. Na severních a jižních okrajích listů stejného sloupce je lom kresby minimální.





**Obr. 6: Vývoj zkreslení délkového a úhlového na ploše listu speciální mapy (list KLATOVY 4250)**

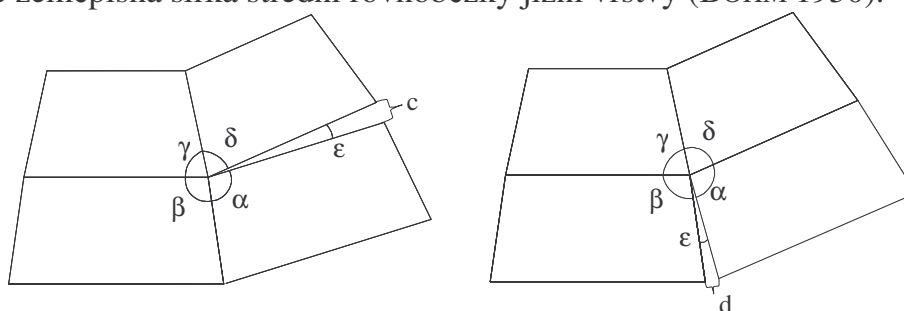
Sestavování map do souvislého plošného celku je spojeno s problémem existence spár mezi rovinnými lichoběžníky. Z principu zobrazení vyplývá, že složíme-li 4 listy do dvou sloupců a dvou vrstev, zákonitě vznikne spára (viz Obr. 7). Úhlová velikost spáry  $\varepsilon$  je přibližně rovna excessu sférického lichoběžníku mapy, který lze vypočítat pomocí úhlů mezi obrazy okrajových poledníků a rovnoběžek

$$\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) - 360^\circ \quad (49)$$

nebo ze vztahu

$$\varepsilon = \cos U_0 \cdot \Delta U \cdot \Delta V, \quad (50)$$

kde  $U_0$  je zeměpisná šířka střední rovnoběžky jižní vrstvy (BÖHM 1950).



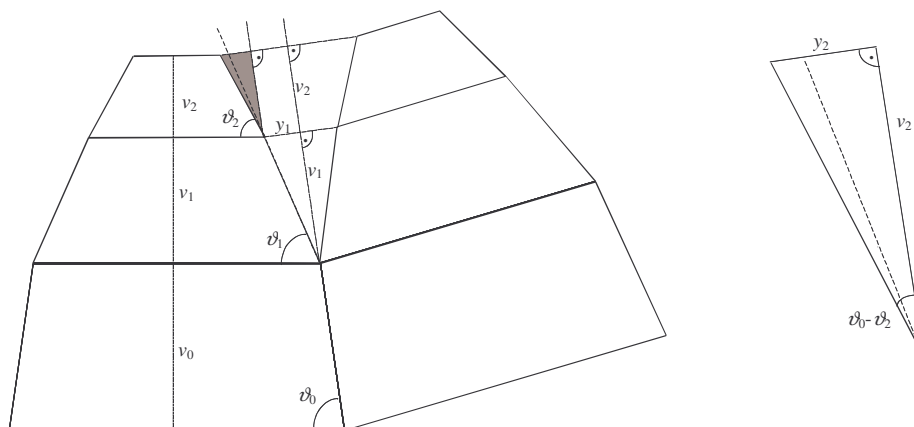
**Obr. 7: Rovinná kompozice čtyř mapových listů**

Přiřazujeme-li k této čtveřici další mapové listy do sloupců a vrstev, spára narůstá. Lineární vzdálenost  $d$  mezi rohovými body je menší, upřednostní-li se souvislé sloupce (způsob b), nežli vzdálenost  $c$  v případě navazujících vrstev (způsob a). Výpočet lineární vzdálenosti lze uskutečnit podle následujícího algoritmu. V každém rovinném pravoúhlém trojúhelníku, jehož přeponu tvoří okrajový poledník mapového listu (viz Obr. 8), platí

$$y_n = \tan(\vartheta_0 - \vartheta_n) \cdot v_n, \quad n=1,2,\dots, \quad (51)$$

kde  $\vartheta_n$  je ostrý úhel mezi obrazy okrajové rovnoběžky a poledníku ( $\vartheta_0$  se vztahuje k základní, souvislé vrstvě),  $v$  je výška listu a  $n$  je index vrstvy. Pro listy ležící na jih od základní vrstvy platí vzorec

$$y_n = \tan(\vartheta_n - \vartheta_0) \cdot v_n, \quad n=1,2,\dots. \quad (52)$$



**Obr. 8: Spára mezi sloupci v rovinné kompozici mapových listů**

Vzhledem k osové symetrii podle okrajového poledníku mapového listu základní vrstvy, je přírůstek velikosti  $n$ -té spáry  $2y_n$  a tvoří přibližně členy aritmetické posloupnosti (první člen je 0,009 mm, diference 0,009 mm). Velikost spáry, tj. lineární vzdálenost okrajových bodů  $n$ -tého listu se postupně vypočte podle vzorce

$$d_n = d_{n-1} + 2y_n \quad (53)$$

### Charakteristika mapových listů z území ČSR

Podle matematického modelu, jehož jádrem jsou rovnice uvedené v (1) – (53), byl autorkou článku vytvořen program pro výpočet charakteristických vlastností listů speciálních a generálních map. Nejdůležitější údaje jsou souhrnným způsobem prezentovány v Tab. 2, Tab. 3 a Tab. 4. Všechny uváděné numerické hodnoty se vztahují k zeměpisným šířkám území meziválečné Československé republiky, tj.  $\langle 47^\circ 30', 51^\circ 15' \rangle$  severní šířky. Mezní hodnoty pro mapy dílčích územních celků podle meziválečného administrativního členění lze v těchto tabulkách nalézt podle okrajových vrstev mapových listů, které jsou uvedeny v Tab. 1. Listy ležící v téže vrstvě a různých sloupcích mají shodné charakteristiky.

**Tab. 1: Dílčí územní celky meziválečné ČSR**

Administrativní členění meziválečné ČSR	Speciální mapy		Generální mapy	
	nejjižnější vrstva	nejsevernější vrstva	nejjižnější vrstva	nejsevernější vrstva
Země Česká	45	35	49°	51°
Země Moravskoslezská	45	38	49°	50°
Země Slovenská	49	41	48°	50°
Země Podkarpatoruská	48	43	48°	49°

Zdroj: vlastní zpracování

Značení listů speciálních map vychází ze způsobu užívaného po r. 1917 (název významného sídla a čtyřmístné číslo, kde první dvě číslice označují vrstvu a druhé dvě sloupec v rámci kladu, např. Praha 3953). Generální mapové listy byly navrženy tak, aby se ve středu každého listu protínaly celé stupně poledníků a rovnoběžek. Jejich zeměpisné souřadnice se spolu s názvem významného sídla staly součástí značení listů, např. 32°50' Praha. Klad mapových listů podrobněji uvádí např. VEVERKA 2001.

Výsledky programu byly využity pro vyčíslení velikosti spáry při sestavení plošné kompozice lichoběžníkových rámců listů speciálních a generálních map. Pomocí úhlu  $\vartheta$  počítaného pro jednotlivé vrstvy map byly získány dílčí přírůstky  $n$ -té spáry  $2y_n$  podle (51), resp. (52) a celková velikost spáry, tj. lineární vzdálenost  $d$  okrajových bodů  $n$ -tého listu, jakožto dílčí částečný součet od zvolené vrstvy (53). Zvolíme-li jako základní souvislou vrstvu speciálních map č. 40, na sever a na jih od této vrstvy území současné České republiky pokrývá 5 vrstev. Z výsledků výpočtů plyne, že spára na okraji páteho listu nad i pod vrstvou 40 dosahuje hodnoty 0,14 mm. Pro kompozici speciálních map území celé meziválečné ČSR, za předpokladu souvislé vrstvy 42, vychází velikost spáry 0,25 až 0,26 mm (vzhledem k nesterélné velikosti listů směrem na sever a na jih od souvislé vrstvy se liší i velikost spáry). Pro generální mapy - vzhledem k menšímu počtu listů ve vrstvách pokrývajících území současné České republiky - je lineární vzdálenost  $d$  (Obr. 7) jen 0,11 mm za předpokladu souvislé vrstvy 50°. Pro celé území meziválečné Československé republiky lze upřednostnit souvislou vrstvu 49°. Za tohoto předpokladu je na severním okraji vrstvy listů 51° velikost spáry 0,33 mm. Z uživatelského hlediska mnohem nepříjemnějším jevem než spáry je srážka papíru, která způsobuje deformace nelineárního charakteru.

**Tab. 2: Vybrané charakteristiky speciálních map pro území meziválečné ČSR (část 1)**

vrstva	z. šířka jižní okrajové rovnoběžky listu	z. šířka severní okrajové rovnoběžky listu	délka jižní okrajové rovnoběžky		délka středního poledníku (výška listu)		rozdíl v délkách úhlopříček $AE-DF$ v rovině	
			na elipsoidu [m]	v mapě [cm]	na elipsoidu [m]	v mapě [cm]	v rovině [m]	v mapě [cm]
35	51° 0'	51° 15'	35094,5546	46,793	27809,4933	37,079	50,3134	0,067
36	50° 45'	51° 0'	35282,8133	47,044	27808,3003	37,078	50,3283	0,067
37	50° 30'	50° 45'	35470,3940	47,294	27807,1051	37,076	50,3394	0,067
38	50° 15'	50° 30'	35657,2932	47,543	27805,9080	37,075	50,3465	0,067
39	50° 0'	50° 15'	35843,5073	47,791	27804,7090	37,073	50,3498	0,067
40	49° 45'	50° 0'	36029,0329	48,039	27803,5082	37,071	50,3493	0,067
41	49° 30'	49° 45'	36213,8664	48,285	27802,3056	37,070	50,3449	0,067
42	49° 15'	49° 30'	36398,0045	48,531	27801,1015	37,068	50,3367	0,067
43	49° 0'	49° 15'	36581,4436	48,775	27799,8958	37,067	50,3248	0,067
44	48° 45'	49° 0'	36764,1803	49,019	27798,6886	37,065	50,3090	0,067
45	48° 30'	48° 45'	36946,2111	49,262	27797,4801	37,063	50,2895	0,067
46	48° 15'	48° 30'	37127,5328	49,503	27796,2704	37,062	50,2663	0,067
47	48° 0'	48° 15'	37308,1417	49,744	27795,0595	37,060	50,2394	0,067
48	47° 45'	48° 0'	37488,0347	49,984	27793,8475	37,058	50,2088	0,067
49	47° 30'	47° 45'	37667,2083	50,223	27792,6346	37,057	50,1745	0,067

Zdroj: vlastní zpracování

**Tab. 3: Vybrané charakteristiky speciálních map pro území meziválečné ČSR (část 2)**

vrstva	délkové zkreslení krajního poledníku	úhel $\theta$ v levém dolním rohu	max. úhlové zkreslení v levém dolním rohu	délkové zkreslení ve směru úhlopříček		extrémní délkové zkreslení v levém dolním rohu mapy		exces sfér. lichoběžníku
				$AE$	$DF$	$a$	$b$	
35	1,00000572	11' 40,6652''	11' 40,6672''	1,00076709	0,99923583	1,00169991	0,99830298	4,9293''
36	1,00000570	11' 38,1930''	11' 38,1950''	1,00076615	0,99923673	1,00169391	0,99830896	4,9560''
37	1,00000567	11' 35,7077''	11' 35,7097''	1,00076515	0,99923768	1,00168787	0,99831497	4,9825''
38	1,00000564	11' 33,2093''	11' 33,2112''	1,00076409	0,99923869	1,00168180	0,99832102	5,0090''
39	1,00000560	11' 30,6978''	11' 30,6997''	1,00076298	0,99923976	1,00167571	0,99832710	5,0353''
40	1,00000556	11' 28,1733''	11' 28,1752''	1,00076181	0,99924088	1,00166958	0,99833321	5,0616''

41	1,00000552	11' 25,6359''	11' 25,6378''	1,00076059	0,99924205	1,00166342	0,99833935	5,0877''
42	1,00000548	11' 23,0855''	11' 23,0874''	1,00075932	0,99924328	1,00165722	0,99834552	5,1138''
43	1,00000544	11' 20,5223''	11' 20,5242''	1,00075799	0,99924456	1,00165100	0,99835172	5,1397''
44	1,00000540	11' 17,9463''	11' 17,9482''	1,00075661	0,99924590	1,00164474	0,99835796	5,1656''
45	1,00000537	11' 15,3576''	11' 15,3594''	1,00075518	0,99924728	1,00163846	0,99836422	5,1914''
46	1,00000534	11' 12,7561''	11' 12,7579''	1,00075370	0,99924872	1,00163214	0,99837052	5,2170''
47	1,00000531	11' 10,1420''	11' 10,1438''	1,00075217	0,99925021	1,00162580	0,99837684	5,2426''
48	1,00000529	11' 7,5153''	11' 7,5170''	1,00075058	0,99925175	1,00161942	0,99838320	5,2681''
49	1,00000527	11' 4,8760''	11' 4,8777''	1,00074895	0,99925334	1,00161301	0,99838959	5,2934''

Zdroj: vlastní zpracování

**Tab. 4: Vybrané charakteristiky generálních map pro území meziválečné ČSR**

vrstva	z. šířka jižní okrajové rovnoběžky listu	z. šířka severní okrajové rovnoběžky listu	délka jižní okrajové rovnoběžky		délka středního poledníku (výška listu)		rozdíl v délkách úhlopříček <i>AE-DF</i> v rovině	
			na elipsoidu [m]	v mapě [cm]	na elipsoidu [m]	v mapě [cm]	v rovině [m]	v mapě [cm]
51°	50° 30'	51° 30'	70940,7880	35,470	111235,5829	55,618	226,9674	0,113
50°	49° 30'	50° 30'	72427,7329	36,214	111216,4308	55,608	228,0504	0,114
49°	48° 30'	49° 30'	73892,4223	36,946	111197,1660	55,599	228,8504	0,114
48°	47° 30'	48° 30'	75334,4165	37,667	111177,8120	55,589	229,3680	0,115

vrstva	délkové zkreslení krajního poledníku	úhel $\theta$ v levém dolním rohu	max. úhlové zkreslení v levém dolním rohu	délkové zkreslení ve směru úhlopříček		extrémní délkové zkreslení v levém dolním rohu mapy		exces sfér. licho- běžníku
				<i>AE</i>	<i>DF</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	
51°	1,00002295	23' 18,8292''	23' 18,8453''	1,00098081	0,99903492	1,00339666	0,99661484	39,5414''
50°	1,00002234	22' 58,8430''	22' 58,8584''	1,00098327	0,99903160	1,00334805	0,99666313	40,3875''
49°	1,00002169	22' 38,4415''	22' 38,4562''	1,00098451	0,99902951	1,00329842	0,99671242	41,2214''
48°	1,00002107	22' 17,6309''	22' 17,6450''	1,00098454	0,99902864	1,00324781	0,99676270	42,0427''

Zdroj: vlastní zpracování

Další řešenou matematicko-kartografickou problematikou vztahující se k rakouským vojenským topografickým mapám byla jejich neortodromičnost. Matematický model výpočtu vzepětí obrazu ortodromy nad příomou spojnicí obrazů koncových bodů byl podrobně uveden ČECHUROVOU (1997). Výsledky pro tyto mapy byly publikovány v práci ČECHUROVÉ (2002). Ukazuje se, že vzepětí ortodromy u speciálních map dosahuje na území ČSR nejvýše 0,404 mm, u generálních map 0,606 mm. Jsou to hodnoty 2x až 3x překračující meze grafické přesnosti map.

## Závěr

Speciální a generální topografické mapy jsou využívány i dnes v řadě aplikací jako cenný zdroj informací o stavu české krajiny nejen v letech 1870 – 1883, kdy mapování proběhlo, ale i po vzniku samostatné Československé republiky, neboť jejich topografická náplň byla po r. 1918 reambulována a revidována. Dnešní použití rakouských vojenských topografických map může vyžadovat znalost deformací plynoucích z užitého způsobu kartografického zobrazení.

Článek je zaměřen na podrobnou analýzu kartometrických vlastností listů speciálních a generálních map. Popsaný matematický model výpočtu kartografických zkreslení se stal podkladem pro počítačovou realizaci, jejímž výstupem je souhrnná charakteristika listů speciálních a generálních map, a to pro celé území bývalé meziválečné Československé republiky.

## Literatura

BÖHM, J. 1950. Matematická kartografie 1,2. Brno : Donátův fond při vysoké škole technické dr. Edvarda Beneše.

BUCHAR, P. & HOJOVEC, V. 1996. Matematická kartografie 10. Praha : ČVUT.

ČECHUROVÁ, M. 1997. Posouzení ortodromičnosti map daného kartografického zobrazení : diplomová práce. Plzeň : ZČU .

ČECHUROVÁ, M. 2002. Výpočty v kladu listů rakouských topografických map ze III. vojenského mapování : doktorská dizertační práce. Praha : ČVUT.

FIALA, F. 1952. Kartografické zobrazování. Praha : SPN.

KOVAŘÍK, J. 1952. Polyedrické zobrazovací soustava topografických map ČSR : Dizertační práce. Praha : ČVUT.

PYŠEK, J. 1995. Matematická kartografie. Plzeň : ZČU.

VEVERKA, B. 2001. Topografická a tematická kartografie. Praha : ČVUT.