Ondřej Chvojka

Za horizont eukleidovského geometrického názoru

Abstract

In the article we have mentioned questions, which are connected with the notion of "parallel straight lines" and with Euclid's postulate about them. These problems arise in ancient geometrical world, which contains only those objects, which are placed in front of geometer's horizon. Vopěnka's Alternative set theory (or namely its application to the geometrical world, introduced in Calculus infinitesimalis pars prima[1]*) is suitable for modeling of this ancient geometrical approach. There the properties "to be finite" or "to be finitely far" are mathematically exactly defined.*

Many attempts to solve the problem of parallel straight lines had been failing since Euclid until Gauss. This history is briefly mentioned in the second section.

The solution of the problem of parallel straight lines came with Riemann's lecture Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, *where the context, showing the existence of non-Euclidean geometry in an obvious way, was introduced. This context consists in the notion of the multiply extended manifoldness, which contains not only the Euclidean but also the curved one. And the curved one is similarly obvious like the geometry on the sphere.*

Finally, thanks to Vopěnka's conception of "horizon", in the last section here is also shown, which relation may have the Riemann's curved space and the classical euclidean one.

Problém Eukleidova postulátu o rovnoběžkách

Klasická, takzvaná eukleidovská geometrie se zrodila a vyvíjela dávno v antice v hlavách různých učenců (Pythagoras, Thales, a jiní). Její základní pojmy, postupy a výsledky uzrály během několika staletí do podoby, kterou ve 4. století před Kristem sepsal (a pravděpodobně podstatně dotvořil) Eukleides z Alexandrie ve věhlasném spisu *Stoicheia* (česky *Základy*).[2]

1) *VOPĚNKA, Petr, 2010.*

2) *EUKLEIDES, 2008.*

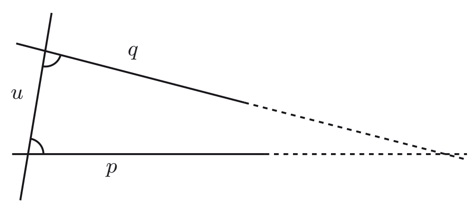
Byly tak ustaveny 1) *základní pojmy*, jejichž definice slouží *pouze* k názornému poukazu, na to, co si lze pod používanými pojmy představit, a dávají tak každému tvrzení konkrétní geometrický význam; k samotnému dokazování tvrzení však nejsou vůbec použity, z čistě logického hlediska je tedy lze odmyslet (i zde se najde výjimka – například a především definice rovnoběžek – viz následující odstavec); 2) *postuláty*, neboli úlohy prvotné, tedy pokyny k elementárním konstrukčním úkonům, které v důkazech slouží jako prostředky pro přivedení pravdivosti tvrzení k bezprostřednímu geometrickému názoru (opět nikoli bezvýhradně – viz níže); 3) *axiomy*, neboli pokyny k evidencím, které v důkazech reprezentují to, co je zřejmě (názorně) platné, evidentní, nebo to, co stojí za to, aby bylo evidováno.

Výše zmíněná výjimka z definic a z postulátů se týká rovnoběžek.

Jednak na definici rovnoběžek se některé důkazy odvolávají (to ovšem není nic zvláštního s ohledem na to, že ta tvrzení se k rovnoběžkám vztahují). Definice rovnoběžek má však jeden (z pohledu antického geometra) zásadní nedostatek. Představa rovnoběžek totiž není bezprostředně názorná – ani s ohledem na definici použitou v Eukleidových *Základech*: *„Rovnoběžky jsou takové úsečky, které leží v téže rovině a jejichž jakákoliv prodloužení se neprotínají.*“[3] Snadno lze přivést k evidenci dvě úsečky, jejichž prodloužení se neprotnou v předem dané, před naším obzorem ležící oblasti. O tom, zda se tyto úsečky protnou někde mimo tuto oblast, již náš názor mnohdy nemůže přesvědčivě vypovídat.

Také *postulát o rovnoběžkách* je výjimečný tím, že jeho pravdivost nelze snadno evidovat:

„Nechť úsečka u protíná úsečky p, q tak, že na jedné straně úsečky u je součet vnitřních úhlů α, β, které svírají úsečky p, q s úsečkou u, menší než dva pravé úhly (viz obrázek). Potom na této straně jest úsečky p, q prodloužit tak, aby se tato jejich prodloužení protla.“[4]



Obrázek 1. Postulát o rovnoběžkách nás vyzývá, abychom úsečky p a q prodloužili natolik, aby se jejich prodloužení protla.

Tento postulát je pro antického geometra, který je zvyklý pracovat pouze v *omezených* oblastech, problematický z toho důvodu, že v každé omezené oblasti najdeme dvě úsečky, které splňují podmínku požadovanou postulátem o rovnoběžkách a jejichž prodloužení se v dané oblasti neprotnou. Proto uskutečnění postulátu o rovnoběžkách (v takových případech) vyžaduje překročit předem dané meze. Za těmi se ale (pro antického geometra) může stát všelicos.[5]

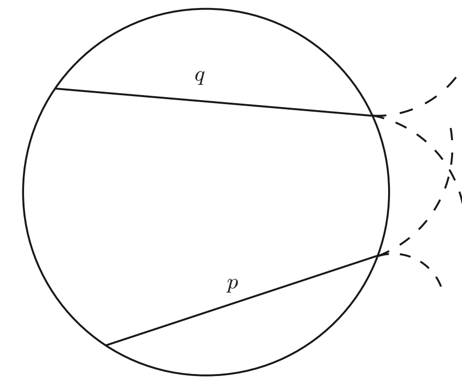
V předem dané oblasti – na obrázku 2 nějaká oblast uvnitř oblasti znázorněné kruhem – může antický geometr evidovat, že je nějaká čára v této oblasti skutečně přímá

3) *Tamtéž, 44.*

4) *Tamtéž, 66.*

5) *Více o antické geometrii viz VOPĚNKA, Petr, 2004, 19–312.*

(tedy že je tato čára úsečkou). Díky schopnostem Diovým evidovat přímost úseček *delších a delších*,[6] je pak možno tuto oblast stále více rozšiřovat. Ovšem o tom, zda existuje nějaká oblast – na obrázku znázorněná jako vnějšek kruhu – kde již přímost dané čáry není principiálně evidovatelná ani pro Dia, se můžeme pouze dohadovat. Pokud taková oblast existuje, pak je otázkou, jak v ní bude „vypadat“ přímá čára. Jelikož vlastnost „přímost čáry“ není jinak ověřitelná, než bezprostřední evidencí (ať již antickým geometrem, nebo Diem), nemáme jediný argument, proč by přímá čára vně kruhu (tam, kde ani Zeus není schopen ověřit přímost) nemohla „vypadat“ například jedním ze dvou způsobů, ukázaných na obrázku 2.



Obrázek 2. Uvnitř oblasti Diem přehlédnutelné (na obrázku znázorněna kruhem) máme zaručenu (díky Diovým schopnostem) přímost čar. Mimo tuto oblast již není možno situaci evidovat, a to, jak zde „vypadá“ prodloužení úsečky, je tedy čirou spekulací (na obrázku čárkovaná prodloužení).

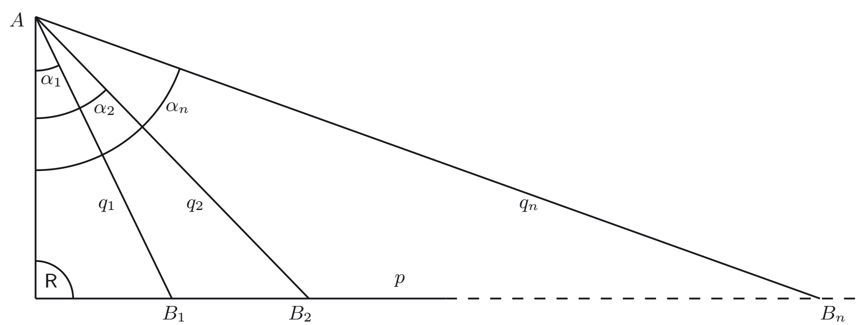
Pozoruhodná je ta skutečnost, že vlastnost „přímost čáry“ nelze v Eukleidově geometrii ověřit jinak než bezprostřední evidencí této vlastnosti. V *Základech* není totiž uveden, ani skrytě předpokládán jiný prostředek, než geometrický názor, který by rozhodoval o tom, zda je, či není nějaká čára přímá.

Dále je důležité zmínit, že v žádném důkazu jakéhokoli tvrzení o úsečkách v Eukleidových *Základech* není odkazováno na vlastnost „přímost čáry“. Ačkoli v době Eukleidově asi nebylo myslitelné si pod pojmem „úsečka“ představit něco jiného než přímou čáru, jsou tato tvrzení platná (z čistě logického hlediska), i pokud si pod pojmem „úsečka“ představíme jakékoli jiné objekty, pro něž platí požadované axiomy a postuláty. Toho bylo později využito při modelování neeukleidovských geometrií. Tyto modely spočívají v tom, že si pod pojmem „úsečka“ představíme čáru zakřivenou (například křivky hyperbolické). Takto modelované neeukleidovské geometrie ale postrádají onen antický ideál přímosti, a zdají se proto jaksi „pokřivené“. Ačkoli většinu úvah o úsečkách neeukleidovských geometrií, které byly a budou v tomto článku provedeny, by bylo možno takto zobecnit i pro „podivné zakřivené úsečky“, nebudeme pro zachování dobré geometrické názornosti v antickém slova smyslu tento výklad

6) *Tamtéž.*

používat. Jinými slovy, budeme pracovat s přímými čarami v ideální rovině.[7] Pokud na nějakém obrázku nějakou přímou čáru „zakřivíme“, učiníme tak buď pro důkaz sporem, nebo bude „zakřivení“ ležet až v oblasti, ve které již ani Zeus není schopen evidovat přímost dané čáry; za předpokladu, že taková oblast existuje. O takovém zakřivení ale nebudeme nikdy uvažovat jako o jediném nutném, ale pouze jako o jednom z více možných, neboli vždy budeme připouštět, že předložený obrázek může v oblasti, kde již Zeus neeviduje přímost, vypadat i jinak (pokud nepovede ke sporu s axiomy).

Pojďme nyní postulát o rovnoběžkách prozkoumat pomocí novějších matematických prostředků – posloupností. Ukáže se nám tak souvislost s otázkami o struktuře nekonečných čísel. Podívejme se na obrázek 3. Písmeno R bude nadále značit pravý úhel.



Obrázek 3. Posloupnost bodů B_i na prodloužené úsečce p a posloupnost úseček q_i, které protínají p v bodech B_i.

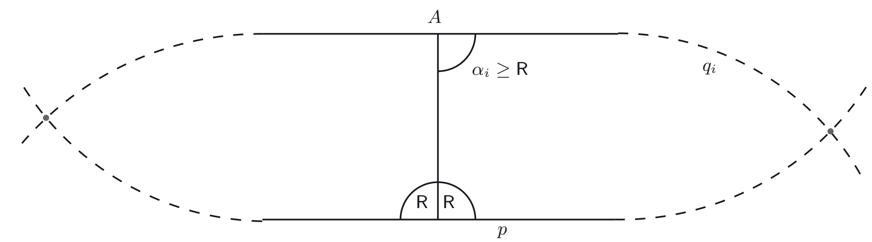
Na prodloužené úsečce p mějme posloupnost bodů $\{B_1, B_2, \ldots\}$ takovou, že $B_2 - B_1 = B_{i+1} - B_i$ pro libovolné i. Každá z úseček q_i, spojující bod A s libovolným bodem B_i, se s prodlouženou úsečkou p tedy protne v bodě B_i. Příslušná posloupnost úhlů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ je zřejmě rostoucí (viz 3. axiom: *„celek je větší než díl“*[8]).

Nyní dokážeme, že $\alpha_i < \mathrm{R}$. Pro důkaz sporem si představme (na obrázku 4), že některé α_i je větší nebo rovno R (pravému úhlu) a příslušná úsečka q_i protíná konečné

[7] *Je třeba ještě zdůraznit, že přímostí rozumíme vlastnost, kterou vidíme toliko naším intuitivním geometrickým zrakem a nemáme žádný jiný formální prostředek, jak ji ověřit. Podobně chápeme ideální rovinu. Ačkoli by někdo mohl namítnout, že ideální rovinu poznáme tak, že v ní platí postulát o rovnoběžkách, neboli že lze sestrojit čtverec, je tato námitka lichá, jelikož platnost postulátu o rovnoběžkách neumíme ověřit (nevidíme nekonečně daleko viz výše), stejně jako nelze ověřit, že čtverec je skutečně čtvercem (nevidíme nekonečně „hluboko“, a nemůžeme tedy ověřit, že domnělý pravý úhel je pravým úhlem apod.). Pod pojmem rovina si tedy budeme spíše představovat rovnou plochu, kterou již nějak „a priori“ vidíme oním intuitivním geometrickým zrakem. Platnost postulátu o rovnoběžkách předpokládat nebudeme.*

[8] *EUKLEIDES, 2008, 45.*

prodloužení úsečky p. Pak ale vzhledem k symetrii úlohy také prodloužení úsečky q_i musí na druhé straně (nalevo) protnout prodloužení úsečky p. A dva body (pravý i levý průsečík) lze spojit dvěma úsečkami (prodlouženími úseček p a q_i), což je spor s 10. axiomem: *„Dvě samotné úsečky žádné místo neohraničují.“*[9]



Obrázek 4. Důkaz sporem. Žádné konečné prodloužení úsečky q_i nemůže na vpravo protnout prodloužení úsečky p.

Takto je tedy zřejmé, že každému bodu B_i přísluší úhel $\alpha_i < \mathrm{R}$, přičemž posloupnost $\{\alpha_i\}$ je rostoucí. Ovšem to, zda neexistuje $\mathrm{R}^* < \mathrm{R}$ takové, že pro každé i platí $\alpha_i < \mathrm{R}^*$, již na základě ostatních Eukleidových axiomů rozhodnout nemůžeme, podobně jako v Cantorově teorii množin nemůžeme rozhodnout, zda existuje mohutnost vyšší než spočetná a nižší než mohutnost kontinua.[10]

Nyní ale opusťme posloupnosti a vraťme se ke geometrii a k postulátu o rovnoběžkách. Dalšímu zkoumání podrobíme jeho ekvivalentní formulaci: *K dané úsečce p lze daným bodem A, neležícím na žádném jejím prodloužení, vést právě jednu rovnoběžku q.*[11]

Tato formulace, jak vidno, pozbyla charakter postulátu, tedy prvotné konstrukční úlohy (jak tomu bylo v předcházející formulaci, kdy jsme měli prodloužit dvě úsečky, aby se prodloužení protla) a vzala na sebe spíše podobu axiomu, tedy výzvy k evidenci. Tato evidence ale není tak samozřejmá, jako evidence axiomů ostatních – vždyť abychom ověřili, že ta jediná rovnoběžka q je skutečně jedinou rovnoběžkou, museli bychom ji vidět prodlouženou až do nekonečna, a teprve potom bychom evidovali, že se s přímkou p skutečně neprotíná. Navíc

[9] *Tamtéž.*

[10] *Celá analogie v teorii množin lze shrnout takto. Mějme rostoucí posloupnost spočetných ordinálních čísel (analogie s $\{B_i\}$). Každému z nich přísluší číslo kardinální (analogie s α_i), nižší než je mohutnost kontinua (analogie s R). O tom, zda neexistuje kardinální číslo vyšší než spočetné a nižší než mohutnost kontinua, nelze na základě ostatních axiomů teorie množin rozhodnout – jak dokázal Gödel (1940 relativní bezespornost hypotézy kontinua – HK) a Cohen (1963 relativní bezespornost negace HK). Více o problému HK viz BALCAR, Bohuslav a Petr ŠTĚPÁNEK, 2001, nebo VOPĚNKA, Petr, 2004.*

[11] *Viz komentář Petra Vopěnky v knize EUKLEIDES, 2008, 68;* „K danému bodu, jenž neleží na dané přímce, existuje toliko jediná přímka, která danou přímku neprotíná.“.

bychom museli vidět všechny ostatní úsečky q_i procházející bodem A a jejich protnutí přímky p, což nám lidem, kteří mohou za evidentní považovat jen to, co leží před jejich obzorem (konečná množství a konečné vzdálenosti), není dáno.

Zdá se, že problém tkví v neschopnosti naší konečné mysli přivést k názoru nekonečné délky a nekonečná množství.

Problematika chápání nekonečna konečným pozorovatelem je důkladně zpracována v knihách Petra Vopěnky: *Calculus infinitesimalis pars prima*[12] a *Pojednání o jevech povstávajících na množstvích.*[13] Toto pojetí nám umožňuje matematicky popsat to, co bylo v antice myšleno slovy: „*Rovnoběžky jsou takové úsečky, (...) jejichž jakákoliv prodloužení se neprotínají.*“[14] V antice bylo zvykem (jak již bylo zmíněno) pracovat s objekty, nacházejícími se před obzorem, které jsou ve Vopěnkově pojetí dobře popsatelné jakožto „objekty *konečně* vzdálené“.

Díky tomu můžeme definici rovnoběžek tak, jak byla chápána v antice, matematicky precizně formulovat takto: *Rovnoběžky jsou takové úsečky, (...) jejichž jakákoliv* konečná *prodloužení se neprotínají.*

Na základě Vopěnkova *čtvrtého zákona expanze*[15] pak existuje *nekonečně* velká vzdálenost, ve které se rovnoběžky neprotnou. Existuje ale nekonečná vzdálenost, kde se rovnoběžky protnou? Odpověď na tuto otázku nelze jednoznačně určit, neboť za horizontem je možné všelicos a principiálně nelze dění za horizontem předvídat. V zásadě jsou možné dva případy.

1) Existuje nekonečná vzdálenost, v níž se předem dané rovnoběžky protnou.

2) Pro každou nekonečnou vzdálenost platí, ze se v ní rovnoběžky neprotnou.

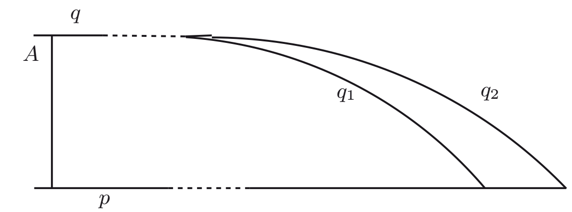
Nejdříve rozeberme první možnost. Nechť existuje nekonečná vzdálenost, v níž se rovnoběžky protnou. Pak ale každá přímka procházející bodem A a protínající přímku p v libovolné větší nekonečné vzdálenosti je rovnoběžkou. Zdá se tedy, že existuje nekonečně mnoho rovnoběžek (a máme hyperbolickou geometrii). Jenže to, zda tyto rovnoběžky jsou různé, je patrné až za obzorem (nekonečně daleko). Otázkou je, zda jsou nutně různé i před obzorem. Pokud ne, jsou před obzorem všechny tyto rovnoběžky rovnoběžkou jedinou (pak bychom měli před obzorem klasickou geometrii eukleidovskou). Viz obrázek 5.

[12]) *VOPĚNKA, Petr, 2010.*

[13]) *VOPĚNKA, Petr, 2009.*

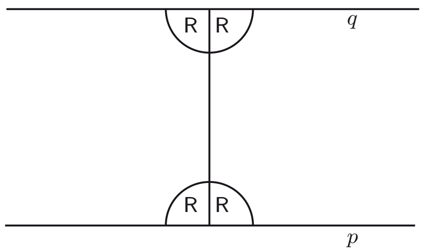
[14]) *EUKLEIDES, 2008, 44.*

[15]) *Takzvaný* čtvrtý zákon expanze *zatím nebyl publikován, ale již je zformulován v připravované knize P. Vopěnky* Calculus infinitesimalis pars secunda. *Tento zákon expanze má také obdobu ve Vopěnkově alternativní teorii množin –* axiom prodloužení, *viz VOPĚNKA, Petr, 2009, 59. Mezi důležité důsledky čtvrtého zákona expanze patří tvrzení, že* pokud mají všechna konečně velká čísla (nebo vzdálenosti) nějakou ostře vymezenou vlastnost, pak existuje nekonečně velké číslo (nebo vzdálenost), které tuto vlastnost má též. *V alternativní teorii množin má toto tvrzení také obdobu viz VOPĚNKA, Petr, 2009, 61.*



Obrázek 5. To, že q_1, q_2 jsou různé, je patrné za obzorem. To, zda jsou různé i před obzorem, již jednoznačně zřejmé není.

Nyní se vraťme k možnosti druhé; viz 2). Nechť se žádné rovnoběžky v žádné nekonečné vzdálenosti neprotnou. Existují pak vůbec nějaké dvě rovnoběžky? Nejvhodnější „adeptkou“ na rovnoběžku úsečky p je úsečka q zobrazená na obrázku 6.



Obrázek 6. Takto zkonstruované dvě úsečky p, q se jistě neprotnou v žádné *konečné* vzdálenosti. Vzhledem k tomu, že jsme (viz 2)) přijali definici rovnoběžek jakožto úseček, jejichž žádná, ani *nekonečná*, prodloužení se neprotínají, není jisté, zda p, q jsou rovnoběžky.

Ta nemůže v konečné vzdálenosti prodloužení úsečky p protnout, neboť pak by musela protnout v konečné vzdálenosti (vzhledem k symetrii úlohy) i prodloužení na druhé straně a dva různé body by byly spojeny dvěma úsečkami (úvahy o tom, že by oba body mohly být bodem týmž nechme stranou). V zásadě jsou tedy opět dvě možnosti, jak se nekonečná prodloužení obou úseček budou „chovat“ – nebo jak si definujeme, že se budou chovat. Prodloužení úseček p, q z obrázku 6 se:

a) protnou v nějaké nekonečné vzdálenosti;

b) neprotnou v žádné nekonečné vzdálenosti.

Nejdříve prozkoumáme první možnost; viz a). Pokud se prodloužení úseček p, q protnou v nekonečné vzdálenosti, pak se protnou i v nekonečné vzdálenosti na druhé straně. Avšak to, zda dva *nekonečně* vzdálené body je možno spojit pouze jednou úsečkou není evidentní (oproti případu dvou konečně vzdálených bodů, o němž vypovídá 10. Eukleidův axiom). Nechť se tedy prodloužení p, q z obrázku 6 protnou v nekonečné vzdálenosti. Pak nejsou tyto úsečky rovnoběžné, neboť jsme přijali definici rovnoběžek 2). (A máme obdobu eliptické geometrie.)

Nyní předpokládejme, že prodloužení úseček p, q, zkonstruovaných podle obrázku 6, se neprotnou ani v žádné nekonečné vzdálenosti; viz b). Pak jde o rovnoběžky; viz 2). Existuje tedy alespoň jedna rovnoběžka, přímka q. O tom, za jich neexistuje víc opět nemůžeme rozhodnout. To, že existuje právě jedna, je tedy možné, nikoliv nutné.

Odpověď na otázku, kolik v daném bodě existuje rovnoběžek k dané úsečce, leží tedy vždy za naším obzorem. Rozhoduje o ní struktura nekonečna,[16] *kterou se rozhodneme přijmout, popřípadě to, jak si na této struktuře definujeme základní pojmy.*

Stručná historie objevování neeukleidovských geometrií

Výše uvedené úvahy ovšem používají celkem moderní terminologii a postupy (množinové), které v dobách od Eukleida až po Bolzana (polovina 19. století) nebyly rozvinuty. Procitání do neeukleidovských geometrií tehdy tedy probíhalo zcela jiným způsobem – pomalu, nejistě a s rizikem, že neeukleidovské úvahy vedou ke sporu, ačkoli bezespornost eukleidovské geometrie nebyla dokázána (byla totiž považována za samozřejmou), a šlo tedy spíše o to najít odvahu vydat se nekonvenčním směrem, který tehdejší vědecká společnost neuznávala. Není proto asi náhodou, že k rozvinutí neeukleidovských geometrií došlo na periferiích evropské vědy (Lobačevskij v ruské Kazani a Bolyai v Uhersku).

Jak již bylo řečeno již od antiky byl postulát o rovnoběžkách považován za nedostatečně názorně ospravedlnitelný, a byly proto činěny pokusy buď o jeho dokázání z ostatních axiomů a postulátů, nebo alespoň o jeho nahrazení nějakým jiným názorem ospravedlnitelným axiomem, či postulátem.

Jednou cestou, jak dokázat platnost postulátu o rovnoběžkách je důkaz sporem. To znamená předpokládat negaci postulátu o rovnoběžkách a mezi důsledky jejími a ostatních axiomů hledat spor s těmito předpoklady, nebo alespoň spor s geometrickým názorem, nepředpokládajícím platnost postulátu o rovnoběžkách.

Asi nejdále se v těchto úvahách dostal mnich G. Saccheri (1667–1733), který záměrně rozvíjel důkaz sporem v přesvědčení, že spor musí chtě nechtě časem přijít. Neodradily jej proto neúspěchy hned v začátcích a důsledky negace postulátu o rovnoběžkách rozvedl do důkladné šíře. Spor však nenalezl, respektive nakonec prohlásil jeden důsledek za spor s geometrickým názorem. To, že jde o názor, který je důsledkem podvědomého přijetí postulátu o rovnoběžkách, již nenahlédl. Nicméně takto jako první rozvedl základní důležité poznatky neeukleidovských geometrií – leč nevědomě.

Zda byl prvním matematikem, vědomě připouštějícím a rozvíjejícím neeukleidovské geometrie, Gauss, Bolyai, nebo Lobačevskij, nechme stranou. Faktem je, že tyto úvahy jako první publikoval N. I. Lobačevskij (1829),[17] jako druhý János Bolyai (1832),[18] zatímco Gauss (1777–1855) nikdy nic na toto téma nezveřejnil (nicméně na základě některých Gaussových výroků a činů lze usuzovat, že možná právě on pronikl do neeukleidovského světa jako první).

Téma „objevování neeukleidovských geometrií“ (jak z matematického, tak z historického hlediska) je důsledně zpracováno v knize: *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci.*[19]

16) *Strukturou nekonečna rozumíme definované vlastnosti a uspořádání nekonečných čísel a vzdáleností.*

17) *LOBAČEVSKIJ, Nikolaj Ivanovič, 1829.*

18) *BOLYAI, János, 1832.*

19) *VOPĚNKA, Petr, 2003, 829–905.*

Podrobně je také vývoj problému rovnoběžek v dobách od Eukleida po Gausse popsán v knize *Die theorie der parallellinien von Euklid bis auf Gauss.*[20]

Riemannovo pojetí prostoru

Za definitivní uzavření otázky, zda je možná jiná, než Eukleidova geometrie, ve které neplatí postulát o rovnoběžkách, je považována Riemannova habilitační přednáška, přednesená v Göttingen roku 1854, nazvaná *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.*[21]

Riemannovo převratné uchopení prostoru spočívá v jeho ztotožnění s vícenásobně rozprostřenou veličinou, neboli varietou, na níž zavádí proces „měření“:

„Měření spočívá v položení srovnávaných prostorů na sebe, k měření je tedy zapotřebí prostředku, který nese velikost jako měřítko pro ostatní. Jestliže tento prostředek chybí, pak lze dva prostory srovnávat pouze tehdy, pokud je jeden částí druhého, a také potom lze rozhodnout jenom, je-li prostoru ‚více‘, či ‚méně‘, nikoliv ‚kolik‘.“[22]

Zde můžeme najít asi hlavní důvod toho, proč Riemannův koncept prostoru je obecnější než koncept prostoru chápaného v duchu klasické eukleidovské geometrie. Riemann zde tvrdí (a nedokládá), že pro určení „kolik“ je prostoru (pro určení velikosti libovolné jeho části, například úsečky) nám nestačí prostor sám o sobě, ale je pro to třeba měřítka, které není prostorem samotným určeno. Měřítko tedy přichází zvenčí prostoru – nezávisle na něm. Naproti tomu v Eukleidově geometrii bylo měřítko pevně určeno samotným prostorem předpokládajícím platnost postulátu o rovnoběžkách (Pythagorova věta). Když budeme předpokládat, že o platnosti postulátu o rovnoběžkách (a tedy i o měřítku prostoru) nerozhoduje prostor sám[23] (což připustili Bolyai, Lobačevskij a možná Gauss), otevřeme tak cestu legitimním úvahám o neeukleidovských geometriích. Ve výše uvedeném úryvku toto Riemann bez zdůvodnění učinil. Vždyť kdyby měřítko (neboli „kolik“ je prostoru) bylo určeno samotným prostorem, bylo by možné poměřovat jakékoli dva různé prostory, a nikoli jen ty dva, z nichž jeden je částí druhého, což by byl spor s výše uvedeným Riemannovým tvrzením. Úspěšnost Riemannova objasnění možnosti neeukleidovských geometrií tedy netkví v tom, že by dokázal jejich bezespornost. Tkví v tom, že Riemann předložil jejich srozumitelnou a názornou interpretaci – vícenásobně rozprostřenou veličinu, kterou si je možno představit zakřivenou – například jako povrch koule.

Dále budeme předpokládat, že každý bod variety je jednoznačně určen pomocí n veličin, které můžeme označit $x_1, \dots, x_n$ (říkáme, že je tato varieta n-rozměrná). Libovolná čára v této varietě je pak určena také těmito veličinami, které jsou funkcí jedné proměnné: $x_1(t), \dots, x_n(t)$. S takto pojatým „prostorem“ jakožto n-rozměrnou varietou se pak Riemann pouští do matematizace jejich metrických vztahů:

„(...) a úkol pak spočívá v tom pro každý bod sestavit obecný výraz pro element čáry $\mathrm{d}s$*, který tímto bodem prochází, přičemž tento výraz bude obsahovat veličiny* x *a* $\mathrm{d}x$*.“*[24]

20) *STÄCKEL, Paul a Friedrich ENGEL, 1895.*

21) *RIEMANN, Bernhard, 1999.*

22) *Tamtéž, 5.*

23) *Výše jsme ukázali, že přijetí, či odmítnutí postulátu o rovnoběžkách lze přirovnat k výběru struktury nekonečna. Ta je však z principu nepoznatelná. Ani v klasické teorii množin není možné rozhodnout, jakou strukturu nekonečno má.*

24) *Tamtéž, 8.*

Tento Riemannem hledaný výraz zapíšeme symbolicky:

$$\mathrm{d}s = f(x_1 \ldots, x_n, \mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_n).$$

Pokud se nám podaří určit funkci f, budeme moci v každém bodě $x_1 \ldots, x_n$ jakékoliv čáry (i úsečky) určit přírůstek její velikosti $\mathrm{d}s$ mezi body $x_1 \ldots, x_n$ a $x_1 \ldots, x_n + \mathrm{d}x_1 \ldots, \mathrm{d}x_n$.[25] Takto tedy každou čáru můžeme *změřit*, když ji „poskládáme" z nekonečně malých přírůstků, které sečteme.

Jelikož Riemann pro své úvahy používal „rutinně" infinitesimální kalkulus objevený Leibnizem a Newtonem, který byl později matematiky 20. století zavržen a upadal tak v zapomnění, zdají se další Riemannovy úvahy nesrozumitelnými a poněkud nepřesnými. Díky rehabilitaci infinitesimálního kalkulu, ke které došlo se vznikem Robinsonovy nestandardní analýzy[26] v 60. letech 20. století a pozdějšího Vopěnkova infinitesimálního kalkulu[27] je možné k těmto úvahám přistoupit jakožto k matematicky plnohodnotným. Přesné tlumočení Riemannova textu do matematického jazyka infinitesimálního kalkulu však necháme na jindy (jelikož se k problematice, jíž věnujeme tento článek, příliš nevztahuje) a rovnou převezmeme závěr těchto „infinitesimálních úvah".

„(...) a je tedy $\mathrm{d}s$ rovno druhé odmocnině ze vždy kladné polynomické homogenní funkce druhého stupně veličin $\mathrm{d}x$, jejíž koeficienty jsou spojité funkce veličin x."[28]

Neboli

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j}, \tag{1}$$

kde $g_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)$ jsou spojité funkce takové, že $g_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)$ je pro každé $(x_1, \ldots, x_n)$ pozitivně definitní.

Nasnadě je, že pro eukleidovský prostor existuje $g_{i,j}$ takové, že platí rovnice (1):

„Pro prostor platí, vyjádříme-li polohu bodu pomocí pravoúhlých souřadnic, $\mathrm{d}s = \sqrt{\sum(\mathrm{d}x)^2}$; prostor je tedy obsažen v tomto nejjednodušším případě."[29]

Pokud zavedeme $n(n+1)/2$ funkcí $\tilde{g}_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)$, kde $i \leq j$ pomocí předpisu: $\tilde{g}_{i,j} = g_{i,j} + g_{j,i}$ pro $i < j$ a $\tilde{g}_{i,i} = g_{i,i}$, můžeme rovnici (1) zapsat:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \tilde{g}_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)\,\mathrm{d}x_i\,\mathrm{d}x_j}. \tag{2}$$

„Takový výraz můžeme transformovat do nějakého jiného podobného, přičemž za n nezávislých proměnných dosadíme funkce n nových nezávislých proměnných. Tímto způsobem ale nemůžeme každý výraz transformovat do každého, neboť výraz obsahuje $n(n+1)/2$

[25] *Tato čára prochází bodem x a bodem $x_1 \ldots, x_n + \mathrm{d}x_1 \ldots, \mathrm{d}x_n$. Jaký je ale v tomto úseku přírůstek její délky $\mathrm{d}s$ není jednoznačné – v Eukleidově geometrii je $\mathrm{d}s = \sqrt{\sum_i x_i^2}$, ale podle Riemanna není pro obecnou varietu tento vztah nutný. Hledáme tedy obecný tvar funkce f.*

[26] *ROBINSON, Abraham, 1979.*

[27] *VOPĚNKA, Petr, 2010.*

[28] *RIEMANN, Bernhard, 1999, 8.*

[29] *Tamtéž.*

koeficientů, které jsou libovolnými funkcemi nezávislých proměnných. Na zavedení nových proměnných bude stačit ale jen n vztahů, a tedy můžeme porovnat pouze n koeficientů daných veličin. Ostatní $n(n-1)/2$ koeficienty jsou povahou vyšetřovaných variet již úplně určeny a k určení vztahů míry v těchto varietách je tedy zapotřebí $n(n-1)/2$ funkcí místa. Variety, ve kterých můžeme, jako v rovině a v prostoru, element čáry převést na tvar $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2}$, tvoří potom pouze zvláštní případ zde zkoumaných variet."[30]

Jinými slovy, případná transformace veličin v dané n-rozměrné varietě je jednoznačně určena pomocí n funkcí $x_1 = f_1(x'_1, \ldots, x'_n), \ldots, x_n = f_n(x'_1, \ldots, x'_n)$. Na druhou stranu metrický vztah (2) dané variety pro dané veličiny je jednoznačně určen pomocí $n(n+1)/2$ nezávislých funkcí $\tilde{g}_{i,j}(x_1, \ldots, x_n)$, kde $i \leq j$. Transformací veličin v dané varietě můžeme tak v obecném případě změnit pouze n z těchto $n(n+1)/2$ funkcí $\tilde{g}$. Zbylých $n(n-1)/2$ funkcí $\tilde{g}$ je tedy určeno samotnou varietou.

Takto tedy Riemann dochází k závěru, že eukleidovský prostor je pouze jednou z možných variet, tedy že existují i variety jiné, s metrickými vztahy, které není možno žádnou transformací veličin x převést na metrické vztahy eukleidovského prostoru.

Například geometrický prostor, v němž neexistuje k žádné přímce žádná rovnoběžka (a ve kterém neplatí 10. Eukleidův axiom) je též varietou, jejíž metrické vztahy jsou určeny formulí (1), či (2).

Nebo geometrický prostor, v němž k dané přímce existuje více rovnoběžek procházejících týmž bodem je opět varietou, jejíž metrické vztahy jsou určeny formulí (1), či (2), v nichž ale $g_{i,j}$ není pozitivně definitní.

Dále již nebudeme Riemannův výklad sledovat. To podstatné, týkající se Riemannova řešení problému postulátu o rovnoběžkách, jsme již bylo výše uvedeno. Přesto jsou další Riemannovy úvahy pozoruhodné a bylo by zajisté přínosné rozebrat i je. To je ovšem nad možnostmi tohoto článku.

Eukleidovský prostor ukrytý uvnitř zakřiveného prostoru Riemannova

Jedním z důležitých Riemannových předpokladů (které sice v našem článku nebyly uvedeny, ani podrobněji rozvedeny) je tvrzení, že v nekonečně malém okolí libovolného bodu je metrika určena vztahem $\mathrm{d}s = \sqrt{\sum g_{i,j}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j}$, kde $g_{i,j}$ je pozitivně definitní, což je ekvivalentní tvrzení, že daná varieta je v lokálním okolí každého bodu eukleidovská (veličiny lze transformovat tak, že $\mathrm{d}s = \sqrt{\sum(\mathrm{d}x_i^*)^2}$).

Zde se nabízí rozvést podobnost s našimi úvahami o rovnoběžkách z prvního oddílu našeho článku. V souladu s Vopěnkovým pojetím horizontu, oddělujícího dva různé světy[31] si představme tyto dva světy, z nichž jeden je schován hluboko uvnitř toho druhého. Tento vnitřní svět obsahuje všechny nekonečně malé geometrické vzdálenosti. Za horizontem tohoto „světa nekonečně malých" vzdáleností pak povstává „svět všech konečně velkých". Pro snadné předvedení následující úvahy ještě doplňme tyto dva světy o dva pozorovatele, z nichž ten první obývá svět nekonečně malých a ten druhý svět konečně velkých. Jejich role bude spočívat v tom, že budou reprezentovat možnost pohlédnout do tohoto „dvojsvětí" ze dvou různých perspektiv, které odrážejí dvě dosti rozdílné vidění tamních objektů i jejich vlastností.

Jak již bylo uvedeno, Riemann předpokládá, že každá varieta je lokálně eukleidovská (eukleidovská pro pozorovatele ve světě nekonečně malých). Jak ukázal Riemann, pro pozoro-

[30] *Tamtéž, 8–9.*

[31] *Viz VOPĚNKA Petr, 2009 nebo VOPĚNKA Petr, 2010.*

vatele ve světě konečně velkých vzdáleností ale tato varieta nutně eukleidovskou není, ačkoli hluboko pod horizontem jeho konečného pohledu – ve světě nekonečně malých – eukleidovskou je. Její potenciální „globální" neeukleidovské vlastnosti povstávají až ve světě konečně velkých vzdáleností.

Pro pozorovatele, který se pohybuje ve světě nekonečně malých vzdáleností, je tedy Riemannova varieta eukleidovská – v jeho světě existuje právě jedna rovnoběžka daným bodem. Za jeho horizontem směrem ke konečně velkému pak již tato varieta eukleidovská nutně není – za jeho horizontem mohou rovnoběžky „vypadat" různě; mohou se protínat, nebo se mohou „rozvětvit" do mnoha různých rovnoběžek.[32]

Důležitým rozdílem v této analogii ale zůstává to, že pozorovatel ve světě nekonečně malých pracuje s úsečkami, které jsou přímé, a zachovává si tak původní antický geometrický názor. Zato pozorovatel ve světě konečně velkých již musí za úsečky prohlašovat čáry, které jsou křivé, což má od antických názorných představ úseček dosti daleko.

Jinými slovy, pro pozorovatele ve světě nekonečně malých je geometricky názorné (v antickém slova smyslu) to, co leží před jeho obzorem, a to, co je za ním, již názorné být nemusí, ani nemůže, vzhledem k tomu, že to, co leží za horizontem, principiálně nazřít nelze; naproti tomu druhému pozorovateli (ve světě konečně velkých) se geometrický názorný svět propadl pod obzor (do nekonečně malého), zatímco před obzorem zůstal jakýsi „pokřivený" svět.

Shrnutí

V článku jsme nejdříve ukázali, jaké otázky otevírá pojem „rovnoběžek" a postulát o nich pro antického geometra, který pracuje pouze s objekty ležícími před obzorem. Tento obzor lze přiléhavě modelovat pomocí horizontu, který je formálně matematicky zaveden v Alternativní teorii množin[33] Petra Vopěnky, respektive v její aplikaci na geometrický svět, která je představena v knize *Calculus infinitesimalis pars prima*.[34] Zde je matematicky korektně definována vlastnost „býti konečným" nebo „býti konečně vzdáleným". Antická geometrie se pak zaobírá pouze geometrickými objekty, které tuto vlastnost mají. Postulát o rovnoběžkách vyžaduje překračování jakýchkoli konečných mezí, a je zde (v antické geometrii) proto cizorodým (byť nezastupitelně důležitým) prvkem, jehož potvrzení, či vyvrácení leží za horizontem konečně vzdáleného.

Ovšem to, že se za tímto horizontem rovnoběžky (respektive úsečky, jejichž prodloužení se v žádné konečné vzdálenosti neprotnou) mohou „chovat" lecjak, nebylo po dlouhá staletí odhaleno a tehdejší případné připuštění takové možnosti vyžadovalo velmi originální, nekonvenční myšlení a také odvahu vystavit se kritice hlavního proudu. O objevitelích neeukleidovských geometrií jsme se stručně zmínili ve 2. oddílu.

Přelom ve vývoji neeukleidovských geometrií přišel až s převratnou Riemannovou habilitační přednáškou *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*.[35] Ta sice nedokázala bezespornost neeukleidovských geometrií, našla ale kontext, ve kterém je jejich existence zjevná – kontext vícenásobně rozprostřené veličiny, který snadno přivede k evidenci zakřivenou varietu, v níž neplatí eukleidovské metrické vztahy – například geometrie na povrchu koule. Riemann takto představil eukleidovský prostor, jakožto pouhou jednu z mnoha možných variet.

Ve 4. oddílu jsme nakonec pomocí Vopěnkova pojetí „horizontu" načrtli, v jakém vztahu může být Riemannův zakřivený prostor k prostoru klasickému, eukleidovskému. A zde se dostáváme k našemu hlavnímu sdělení. Riemannovo názorné ospravedlnění neeukledovských geometrií, které používá představy *zakřivených* úseček a prostorů, může být zastoupeno, díky Vopěnkovu pojetí horizontu, představou úseček a prostorů *ideálně přímých před obzorem*; případné neeukleidovské vlastnosti tohoto prostoru pak povstávají až za tímto horizontem. Díky tomu si můžeme, jsouce v neeukleidovském geometrickém světě, zachovat původní antický geometrický názor, podle nějž jsou úsečky před obzorem přímé.

32) *Případ, že se rovnoběžky za horizontem „rozvětví" je v Riemannově pojetí poněkud komplikovaný, jelikož příslušná hyperbolická Riemannova varieta není lokálně eukleidovská ($g_{i,j}$ není pozitivně definitní). Tato problematika ale překračuje rozsah našeho článku.*

33) *VOPĚNKA, Petr, 2009, nebo VOPĚNKA, Petr, 1989, nebo VOPĚNKA, Petr, 1979.*

34) *VOPĚNKA, Petr, 2010.*

35) *RIEMANN, Bernhard, 1999.*

Literatura

BALCAR, Bohuslav a Petr ŠTĚPÁNEK (2001): *Teorie množin*, Praha: Academia.

BOLYAI, János (1832): *Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens* – dodatek ke knize Farkaše Bolyaie.

EUKLEIDES (2008): *Základy. Knihy I–IV*. Nymburk: OPS.

LOBAČEVSKIJ, Nikolaj Ivanovič, (1829): Sui principi della Geometria, in *Věstník Kazaňské univerzity*.

RIEMANN, Bernhard (1999): *O hypotézách, které leží v základech geometrie*. Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně; [z německého originálu přeložil Petr Rys; originál dostupný na http://gdz.sub.uni-goettingen.de/ dne 10. 6. 2010].

ROBINSON, Abraham (1979): *Nonstandard Analysis and Philosophy*. Amsterdam: North-Holland.

STÄCKEL, Paul a Friedrich ENGEL (1895): *Die theorie der parallellinien von Euklid bis auf Gauss; eine urkundensammlung zur vorgeschichte der nichteuklidischen geometrie*. Leipzig: B. G. Teubner.
Dostupné z http://www.archive.org/details/theoriederparall00stac dne 9. 6. 2010.

VOPĚNKA, Petr (1979): *Mathematics in the Alternative Set Theory*. Leipzig: Teubner.

VOPĚNKA, Petr (1989): *Úvod do matematiky v alternatívnej teórii množín*. Bratislava: Alfa.

VOPĚNKA, Petr (2003): *Úhelný kámen evropské vzdělanosti a moci*. Praha: Práh.

VOPĚNKA, Petr (2004): *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky*. Praha: Práh.

VOPĚNKA, Petr (2009): *Pojednání o jevech povstávajících na množstvích*. Plzeň a Nymburk: OPS.

VOPĚNKA, Petr (2010): *Calculus infinitesimalis pars prima*. Kanina: OPS.