

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce
**Reprezentace křivek s pythagorejským
hodografem v Cliffordově algebře**

Autor: Martin Ryšavý
Vedoucí práce: Doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.

vložte zadání práce

Prohlášení

Prohlašuji, že jsou svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Nýřanech dne

.....

Martin Ryšavý

Poděkování

Děkuji Doc. RNDr. Miroslavu Lávičkovi, Ph.D. za vedení mé bakalářské práce, poskytnuté konzultace a trpělivost. Dále děkuji Mgr. Jaroslavu Hrdinovi, Ph.D. z FSI VUT v Brně za cenné podněty a doporučenou literaturu ke kapitole o Cliffordových algebrách a Mgr. Janu Vrškovi, Ph.D. za věcné připomínky k některým formulacím.

Moje týdenní stáž na VUT v Brně byla podpořena z projektu A-Math-Net - síť pro transfer znalostí v aplikované matematice (č. projektu CZ.1.07/2.4.00/17.0100). Tento projekt je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.

Název práce:

Reprezentace křivek s pythagorejským hodografem v Cliffordově algebře

Autor: Martin Ryšavý

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.
Katedra Matematiky

Abstrakt: Tato práce uvádí jednotný formalismus pro popis rovinných a prostorových PH a MPH křivek v bézierovské reprezentaci s využitím komplexních čísel, kvaternionů a Cliffordových algeber. Jsou zde formulovány základy teorie kvaternionů, Minkowského prostorů a Cliffordových algeber, dále jsou odvozeny jednotné předpisy pro PH a MPH křivky v prostorech \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , $\mathbb{R}^{1,1}$ a $\mathbb{R}^{2,1}$ a jsou uvedeny vybrané metody pro hermitovské interpolace pomocí těchto křivek, doplněné odkazy.

Klíčová slova: pythagorejský hodograf, PH křivka, MPH křivka, kvaternion, Cliffordova algebra, hermitovská interpolace

Title:

Representation of Pythagorean-hodograph curves using Clifford algebra

Author: Martin Ryšavý

Supervisor: Doc. RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.
Katedra Matematiky

Abstract: The thesis presents a unified formalism for the description of planar and spatial PH and MPH curves in Bézier form using complex numbers, quaternions and Clifford algebras. Fundamentals of quaternions, Minkowski spaces and Clifford algebras are introduced, followed by formulation of unified forms for PH and MPH curves in \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , $\mathbb{R}^{1,1}$ and $\mathbb{R}^{2,1}$ spaces. The thesis also contains a presentation of selected Hermite interpolation methods using these curves, completed with several references.

Keywords: pythagorean hodograph, PH curve, MPH curve, quaternion, Clifford algebra, Hermite interpolation

Obsah

1	Úvod	8
2	Základní pojmy	10
2.1	Kvaterniony	10
2.2	Kvadratické a Minkowského prostory	14
2.3	Cliffordovy algebry	16
2.4	Diferenciální geometrie a geometrické modelování	25
3	PH křivky v rovině a prostoru	30
3.1	Zavedení PH křivek	30
3.2	Popis rovinných PH křivek s využitím komplexních čísel	34
3.3	Popis prostorových PH křivek s využitím kvaternionů	36
4	Reprezentace MPH křivek pomocí Cliffordovy algebry	40
4.1	Střední osa a MAT	40
4.2	MPH křivky v $\mathbb{R}^{1,1}$	41
4.3	MPH křivky v $\mathbb{R}^{2,1}$	45
5	Vybrané modelovací techniky	50
5.1	Hermitovská interpolace v \mathbb{R}^2 pomocí PH křivek	51
5.2	Hermitovská interpolace v \mathbb{R}^3 pomocí PH křivek	51
5.3	Hermitovská interpolace pomocí MPH křivek	52
6	Závěr	53
	Literatura	55

Přehled použitého značení

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$	kvaterniony
\mathbb{H}	množina všech kvaternionů
i, j, k, n, m, r, s	přirozená čísla
$a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$	skaláry, reálná čísla
\mathbb{R}	množina všech reálných čísel
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	kvaternionové jednotky
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$	vektory, komplexní čísla
\mathbb{R}^n	n -dimenzionální reálný vektorový prostor
$ \mathbf{a} $	velikost vektoru \mathbf{a}
θ, φ	úhly
$ \mathcal{A} $	velikost kvaternionu \mathcal{A}
\mathcal{A}^*	kvaternion sdružený s kvaternionem \mathcal{A}
\mathcal{A}^{-1}	inverzní kvaternion ke kvaternionu \mathcal{A}
\mathcal{C}	obecná Cliffordova algebra
\mathcal{C}^r	podprostor všech r -vektorů obecné Cliffordovy algebry
\mathcal{C}_n	Cliffordova subalgebra nad vektorovým prostorem dimenze n
\mathcal{C}_n^r	podprostor všech r -vektorů Cliffordovy subalgebry
A, B, C	multivektory
$\langle A \rangle_n, A_{\bar{n}}$	část multivektoru A stupně n
$\langle A \rangle$	skalární část multivektoru A
A_r	homogenní r -vektor, r -blade
A^\dagger	převrácený multivektor A
$ A $	velikost multivektoru A
A^{-1}	inverzní multivektor k A
χ	zobrazení z \mathbb{R}^n do \mathcal{C}_n^1
$\overline{\mathbb{R}^n}$	kanonická ortonormální báze vektorového prostoru \mathbb{R}^n
\mathbb{I}	indexová množina
$\mathbf{e}_{\mathbb{I}}$	bázový blade stupně $ \mathbb{I} $
$\overline{\mathcal{C}^n}$	množina kanonických bázových bladů stupně nejvýše n
\mathbb{E}_n	eukleidovský prostor dimenze n
\mathcal{K}	křivka
\mathcal{I}	interval
t, \hat{t}, τ	parametr křivky
$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)$	vektorová funkce, parametrická reprezentace křivky
$u(t), v(t), p(t), q(t)$	reálné funkce jedné proměnné, složky vektorové funkce
$\mathbf{x}'(t)$	derivace vektorové funkce, hodograf funkce
s	oblouk křivky
$\dot{\mathbf{x}}$	derivace podle oblouku

d	délka křivky
$b_k^n(t)$	k -tý Bernsteinův polynom stupně n
$\Re(\mathbf{w})$	reálná část komplexního čísla \mathbf{w}
$\Im(\mathbf{w})$	imaginární část komplexního čísla \mathbf{w}

Kapitola 1

Úvod

Pokud bychom měli stručně shrnout obsah disciplíny *geometrického modelování* (anglicky *computer aided geometric design*), jedním z možných popisů by bylo, že se toto odvětví geometrie zabývá zkoumáním *křivek, ploch a těles* s důrazem na možnost efektivní reprezentace a snadného zpracování v prostředí výpočetní techniky. *Křivky s pythagorejským hodografem* neboli *PH křivky* jsou typickým reprezentantem témat, kterými se geometrické modelování zabývá, neboť v sobě spojují antickou problematiku *pythagorejských n -tic*, otázky algeber vícedimenzionálních čísel, kterými se zabývali matematici 19. století, jako jsou *komplexní čísla, kvaterniony* a *Cliffordovy algebry*, a nakonec otázky formy vhodné pro počítačové zpracování, které nás přivádí k *Bernsteinovým polynomům* a *Bézierovým křivkám*.

PH křivky poprvé zavedli *Rida T. Farouki* a *Takis Sakkalis* v roce 1990 ([15]) jako rovinné polynomiální křivky, následovala rozšíření na racionální křivky ([18]), prostorové křivky ([16]) a na křivky v Minkowského prostoru neboli MPH křivky ([17]). Motivací k zavedení těchto křivek je problematika určení délky oblouku křivky. Tato hodnota je daná vzorcem

$$d = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t)} dt.$$

Zatímco u obecné křivky je třeba se vypořádat s integrálem z odmocniny, definující vlastností PH křivek je, že jsou to *polynomiální křivky*, pro které navíc platí

$$\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t) = \sigma^2(t),$$

kde $\sigma(t)$ je polynom, což výpočet délky oblouku podstatně ulehčuje. PH křivky se dále vyznačují tím, že jejich *offset* neboli křivka s konstantní vzdáleností od výchozí křivky (*ekvidistantní křivka*) je vždy racionální.

Cílem této práce je prozkoumat polynomiální PH křivky v rovině \mathbb{R}^2 a prostoru \mathbb{R}^3 a MPH křivky v Minkowského rovině $\mathbb{R}^{1,1}$ a prostoru $\mathbb{R}^{2,1}$, dále pak najít jednotný formalismus pro vyjádření těchto křivek v Bernsteinově bázi.

V kapitole 2 uvedeme základy *kvaternionů* a *Cliffordových algeber*, které použijeme k popisu prostorových a MPH křivek. Dále zde uvedeme základy teorie *Minkowského prostorů*, stručný úvod do diferenciální geometrie a základní metodu vyjádření křivek pro potřeby geometrického modelování.

V kapitole 3 zavedeme PH křivky v klasické eukleidovské rovině a prostoru, následně pak uvedeme jejich elegantní a zestručňující reprezentaci pomocí komplexních čísel a kvaternionů. V kapitole 4 zavedeme MPH křivky neboli PH křivky v Minkowského prostorech a uvedeme jejich zápis pomocí Cliffordových algeber vybudovaných nad těmito prostory. Na závěr v kapitole 5 uvedeme vybrané postup pro Hermitovu interpolaci pomocí PH a MPH křivek nízkého stupně a uvedeme různé další možnosti aplikací uvedených křivek.

Kapitola 2

Základní pojmy

Nejdříve definujeme základní pojmy, se kterými se budeme v práci setkávat.

2.1 Kvaterniony

Kvaterniony můžeme chápat jako výsledek snahy rozšířit pojem komplexních čísel na prostory s dimenzí vyšší než dva. Při zpracování této kapitoly bylo především čerpáno z [1] a [10].

2.1.1 Historie a motivace

Objevitelem kvaternionů je irský matematik a fyzik Sir William Rowan Hamilton (1805–1865), který o nich sepsal díla *Lectures on Quaternions* (1853) a *Elements of Quaternions* (posmrtně 1866). Hamilton se pokoušel o širokou aplikaci kvaternionů v tehdejší bouřlivě se rozvíjející fyzice, nicméně tento systém se ukázal jako příliš komplikovaný. Místo něj se ujaly metody a operátory vektorové analýzy v \mathbb{R}^3 , které prosazovali James C. Maxwell, Josiah W. Gibbs a Oliver Heaviside. Nutno však podotknout, že tyto nástroje z teorie kvaternionů přímo vychází.

Při práci s komplexními čísly snadno nahlédneme, že s reálnými čísly sdílí podstatné algebraické vlastnosti, jmenovitě:

- Komutativita

$$\forall a, b \in \mathbb{C} \quad a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a.$$

- Asociativita

$$\forall a, b, c \in \mathbb{C} \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

- Distributivita

$$\forall a, b, c \in \mathbb{C} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Lze snadno ukázat [1, s. 64], že nemůže existovat třídímní číslo (s algebraickým tvarem $a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j}$), které by tyto vlastnosti splňovalo. Sir Hamilton ovšem při hledání takového čísla objevil právě kvaterniony, čtyřdímní čísla, která dodržují asociativitu a i distributivní zákon, avšak je třeba vzdát se požadavku na komutativitu násobení (i tento fakt však má své opodstatnění, pokud pomocí kvaternionů popíšeme rotace v \mathbb{R}^3).

2.1.2 Zavedení kvaternionů

Definice 2.1. *Kvaternion* je uspořádaná čtveřice reálných čísel

$$\mathcal{A} = [a, a_x, a_y, a_z].$$

Číslo a nazýváme *skalární část kvaternionu*, uspořádanou trojici čísel $[a_x, a_y, a_z]$ nazýváme *vektorová část kvaternionu*. Kvaternion ve tvaru $[a, 0, 0, 0]$ nazýváme *ryzí skalár*, $[0, a_x, a_y, a_z]$ nazýváme *ryzí kvaternion*. *Rovnost dvou kvaternionů* nastává, pokud se rovnají jejich skalární i vektorové části. Množinu všech kvaternionů označujeme \mathbb{H} . Kvaternion $[0, 0, 0, 0]$ nazýváme *nulový kvaternion*.

Definice 2.2. *Součet kvaternionů* $\mathcal{A} = [a, a_x, a_y, a_z]$ a $\mathcal{B} = [b, b_x, b_y, b_z]$ je takový kvaternion $\mathcal{C} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, pro který platí

$$\mathcal{C} = [a + b, a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z]. \quad (2.1.1)$$

Definice 2.3. *Součin kvaternionů* $\mathcal{A} = [a, a_x, a_y, a_z]$ a $\mathcal{B} = [b, b_x, b_y, b_z]$ je takový kvaternion $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$, pro který platí

$$\begin{aligned} \mathcal{C} = [& ab - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z, \\ & ab_x + ba_x + a_y b_z - a_z b_y, \\ & ab_y + ba_y + a_z b_x - a_x b_z, \\ & ab_z + ba_z + a_x b_y - a_y b_x]. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Poznámka 2.1. Součin dvou kvaternionů je asociativní, není však obecně komutativní, např. pro $\mathbf{i} = [0, 1, 0, 0]$ a $\mathbf{j} = [0, 0, 1, 0]$ platí $\mathbf{ij} = [0, 0, 0, 1] = -\mathbf{ji}$.

Poznámka 2.2. Násobení kvaternionu číslem $k \in \mathbb{R}$ je ekvivalentní násobení kvaternionem ve tvaru $[k, 0, 0, 0]$ a je komutativní operací.

Věta 2.1 (Algebraický tvar kvaternionu). *Každý kvaternion lze vyjádřit ve tvaru*

$$\mathcal{A} = a + a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k},$$

kde $\mathbf{i} = [0, 1, 0, 0]$, $\mathbf{j} = [0, 0, 1, 0]$, $\mathbf{k} = [0, 0, 0, 1]$ a platí

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1. \quad (2.1.3)$$

Důkaz. Stačí ověřit, že takto zadaný objekt splňuje definice 2.2 a 2.3. \square

Poznámka 2.3. Někdy je užitečné zapisovat kvaternion ve tvaru $\mathcal{A} = [a, \mathbf{a}]$ jako složení skalární části a a vektorové části ve formě $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$. Součet a součin kvaternionů poté mají tvar:

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = [a + b, \mathbf{a} + \mathbf{b}], \quad (2.1.4)$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = [ab - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{b}], \quad (2.1.5)$$

kde \cdot je standardní skalární součin a \times vektorový součin definovaný na prostoru \mathbb{R}^3 .

Poznámka 2.4. Další možností zápisu kvaternionu je *maticový tvar*:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & -a_x & -a_y & -a_z \\ a_x & a & -a_z & a_y \\ a_y & a_z & a & -a_x \\ a_z & -a_y & a_x & a \end{bmatrix}.$$

Snadno bychom dokázali, že platí:

Věta 2.2. *Prvky 1, \mathbf{i} , \mathbf{j} a \mathbf{k} tvoří bázi prostoru \mathbb{H} .* \square

Věta 2.3. *Pro součin bázových prvků platí následující vztahy:*

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j} = -\mathbf{ki}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}.$$

Důkaz. Důkaz provedeme snadno s využitím vztahu (2.1.3). \square

Definice 2.4. *Sdružený kvaternion ke kvaternionu $\mathcal{A} = [a, a_x, a_y, a_z]$ je kvaternion*

$$\mathcal{A}^* = [a, -a_x, -a_y, -a_z] = [a, -\mathbf{a}]. \quad (2.1.6)$$

Definice 2.5. *Velikost kvaternionu je takové číslo $|\mathcal{A}| \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, které splňuje vztah*

$$|\mathcal{A}|^2 = \mathcal{A}^* \mathcal{A} = \mathcal{A} \mathcal{A}^* = a^2 + |\mathbf{a}|^2. \quad (2.1.7)$$

Kvaternion, pro který platí $|\mathcal{A}| = 1$, nazýváme *jednotkový kvaternion* a podle vztahu (2.1.7) pro něj musí platit:

$$\mathcal{A} = \left[\cos\left(\frac{1}{2}\theta\right), \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \mathbf{a} \right], \quad \theta \in \langle 0, 2\pi \rangle, \quad |\mathbf{a}| = 1. \quad (2.1.8)$$

Věta 2.4. *Pro kvaternion v maticovém tvaru platí:*

$$\det(\mathcal{A}) = |\mathcal{A}|^4. \quad (2.1.9)$$

Důkaz. Vztah dokážeme přímým výpočtem determinantu. \square

Definice 2.6. *Inverzní kvaternion* k nenulovému kvaternionu \mathcal{A} je kvaternion \mathcal{A}^{-1} , který splňuje vztah

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = 1. \quad (2.1.10)$$

Snadno ukážeme, že takový kvaternion musí být ve tvaru

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{\mathcal{A}^*}{|\mathcal{A}|}. \quad (2.1.11)$$

2.1.3 Kvaterniony a rotace v \mathbb{R}^3

Jednotkové kvaterniony ($|\mathcal{A}| = 1$) poskytují alternativu k transformačním maticím 3×3 popisujícím rotace kolem osy v \mathbb{R}^3 . Výchozím poznatkem je platnost dvou následujících vět:

Věta 2.5. *Jednotkové kvaterniony tvoří spolu s operací násobení grupu.*

Důkaz. Důkaz asociativity je zřejmý, stejně tak existence neutrálního $([1, 0, 0, 0])$ a inverzního prvku (podle vztahu (2.1.11) $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$). Uzavřenost operace nejnáze dokážeme s využitím maticového tvaru kvaternionu, pro který podle věty 2.4 platí $\det(\mathcal{A}) = 1$ a tedy i pro součin jednotkových kvaternionů \mathcal{A} a \mathcal{B} platí $\det(\mathcal{A}\mathcal{B}) = \det(\mathcal{A})\det(\mathcal{B}) = 1$. \square

Věta 2.6. *Nechť je \mathcal{A} ryzí kvaternion, poté je kvaternion $\mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}^*$ také ryzí kvaternion pro libovolný kvaternion $\mathcal{B} \in \mathbb{H}$.*

Důkaz. Přímým výpočtem. \square

Vraťme se nyní ke vztahům (2.1.7) a (2.1.8). Uvažujme nyní nenulový vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ reprezentovaný kvaternionem $\mathcal{V} = [0, \mathbf{v}]$. Ukážeme nyní, že výsledek

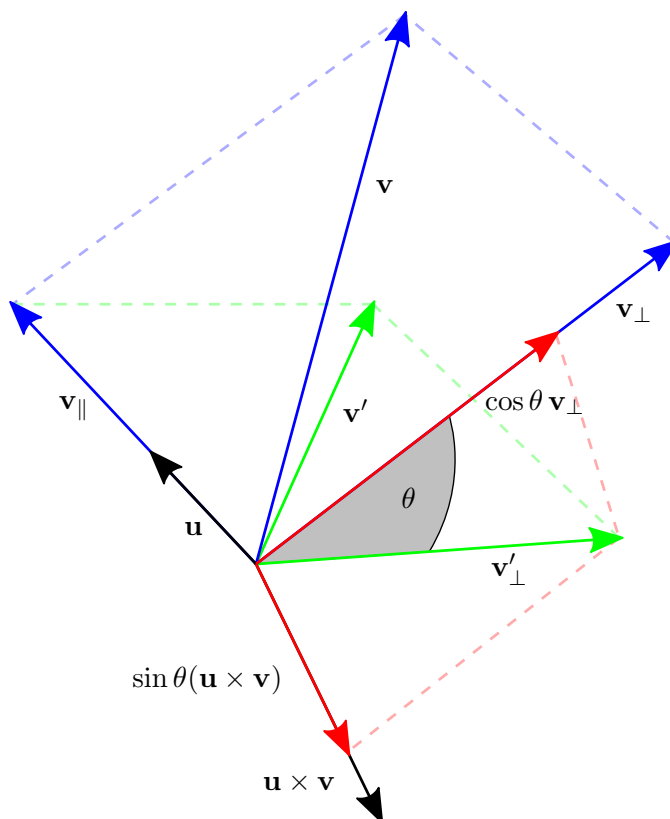
součinu $\mathcal{W} = \mathcal{U}\mathcal{V}\mathcal{U}^*$, kde \mathcal{U} má tvar (2.1.8), dává vektor \mathbf{v} otočený o úhel θ kolem osy určené vektorem \mathbf{u} . Nejprve rozložíme vektor \mathbf{v} na složku rovnoběžnou s \mathbf{u} a kolmou na \mathbf{u} :

$$\mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}.$$

Provedením součinu dostaneme:

$$\mathcal{W} = [0, (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} + \sin \theta \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \cos \theta (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}],$$

z čehož je patrné, že složka rovnoběžná s vektorem \mathbf{u} zůstala nepozměněná. Ilustrace jednotlivých složek výsledného vektoru se nachází na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Ilustrace rotace vektoru pomocí kvaternionu rozložením na složky.

2.2 Kvadratické a Minkowského prostory

Metriku jako způsob měření vzdálenosti dvou prvků vektorového prostoru zavádíme pomocí jisté *kvadratické formy* a s ní asociované *bilinéární formy*, kombinaci prostoru a kvadratické formy pak nazýváme *kvadratický prostor*. Použitím speciální metriky získáme *Minkowského prostor*; takový prostor připouští

i záporné hodnoty jako *normy vektorů* nebo záporné vzdálenosti mezi dvěma body, fyzikální interpretace takové metriky souvisí s kauzalitou událostí v časoprostoru. Při zpracování této podkapitoly bylo čerpáno z [8] a [14].

2.2.1 Kvadratická forma a kvadratický prostor

Nejprve připomeneme základy teorie kvadratických prostorů.

Definice 2.7. Buď V vektorový prostor nad tělesem \mathbb{F} . *Bilineární forma* je zobrazení $B : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$, pro které platí:

1. $B(\mathbf{u}, \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \beta B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.
2. $B(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \alpha B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \beta B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

Definice 2.8. Buď V vektorový prostor nad tělesem \mathbb{F} , pro které platí $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$. *Kvadratická forma* je zobrazení $Q : V \rightarrow \mathbb{F}$, pro které platí:

1. $Q(\lambda\mathbf{u}) = \lambda^2 Q(\mathbf{u}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{F}, \quad \forall \mathbf{u} \in V$.
2. Zobrazení $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$, $\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (Q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - Q(\mathbf{u}) - Q(\mathbf{v}))$ je bilineární forma.

Zobrazení φ se nazývá *bilineární forma asociovaná s kvadratickou formou* Q a mezi těmito zobrazeními existuje jednoznačné přiřazení $Q(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Následující věta nám umožní definovat významnou vlastnost bilineárních a potažmo tedy i kvadratických forem. Její důkaz lze nalézt v [3].

Věta 2.7. *Buď V vektorový prostor dimenze n a φ bilineární forma na tomto vektorovém prostoru. Pak existuje báze e_1, e_2, \dots, e_n a k ní jednoznačně určená trojice čísel $p, r, q \in \mathbb{N}$ taková, že platí:*

1. $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pro $i \neq j$.
- 2.

$$\varphi(e_i, e_i) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 1 \leq i \leq p, \\ 0 & \text{pro } p + 1 \leq i \leq p + r, \\ -1 & \text{pro } p + r + 1 \leq i \leq p + r + q. \end{cases}$$

□

Definice 2.9. Uspořádaná trojice čísel (p, q, r) splňující větu 2.7 se nazývá *signatura bilineární formy*.

Definice 2.10. Buď V vektorový prostor konečné dimenze a Q kvadratická forma na tomto prostoru. Struktura (V, Q) se nazývá *kvadratický prostor*.

Poznámka 2.5. Snadno ověříme, že standardní skalární součin je pozitivně definitní bilineární forma, eukleidovský prostor je tedy případem kvadratického prostoru.

2.2.2 Minkowského prostor

Nyní máme zavedeny základní pojmy týkající se metriky a můžeme se věnovat Minkowského prostorům, které vznikají speciální volbou této metriky.

Definice 2.11. Jako *Minkowskéhoho* prostor označujeme reálný kvadratický prostor se signaturou typu $(n, 0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$; označujeme ho $\mathbb{R}^{n,1}$. Na tomto prostoru je definována bilineární forma φ určená maticí G :

$$G = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ prvků}}, -1). \quad (2.2.1)$$

Hodnotu této bilineární formy pro dva (sloupcové) vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n,1}$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1})^T$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1})^T$ definujeme vztahem

$$\varphi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T G \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n - u_{n+1} v_{n+1}. \quad (2.2.2)$$

Bilineární forma φ se nazývá *Minkowskéhoho (skalární¹) součin*. Normu vektoru na tomto prostoru definujeme vztahem

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \varphi(\mathbf{u}, \mathbf{u}). \quad (2.2.3)$$

Pokud je výraz $\|\mathbf{u}\|^2 > 0$, nazýváme tento vektor *pozitivní* (angl. *space-like*), pokud $\|\mathbf{u}\|^2 < 0$, nazýváme ho *negativní* (*time-like*). Pokud je $\|\mathbf{u}\|^2 = 0$, hovoříme o *neutrálním* nebo *izotropickém* (angl. *light-like*) vektoru².

V této práci budeme pracovat konkrétně s prostory $\mathbb{R}^{1,1}$ a $\mathbb{R}^{2,1}$.

2.3 Cliffordovy algebry

Cliffordovy (nebo také *geometrické*) *algebry* jsou nástrojem zobecňujícím vícedimenzionální čísla typu komplexních čísel nebo kvaternionů do vyšších dimenzí. Pokud hovoříme o Cliffordových algebrách sestavených nad vektorovým prostorem nad tělesem reálných čísel, umožňují nám tyto algebry reprezentaci geometrických transformací ve formě algebraických operací, odtud zmíněný název geometrické algebry. V literatuře lze nalézt mnoho různých způsobů, jak tyto algebry zavést (viz např. [2]), my jsme využili způsob užitý v [4], a to pro jeho deduktivní přístup.

¹Zde se jedná o pouhé označení, Minkowskéhoho součin *nesplňuje* požadavky kladené na skalární součin.

²Tyto pojmy pochází z teorie relativity, která pracuje s Minkowského prostorem $\mathbb{R}^{3,1}$; dvě události se mohou navzájem ovlivnit pouze tehdy, je-li jejich vzdálenost časová ([1, s. 80]).

2.3.1 Historie

Základy pro Cliffordovy algebry položil v r. 1844 německý matematik Hermann Günther Grassmann definicí *vnitřního* a *vnějšího součinu*, jejichž výsledkem je objekt nižšího, resp. vyššího *stupně*, což nám otevírá cestu k pojmu *multivektoru*. Samotný pojem *geometrického součinu* a algebry na něm založené je pak objevem anglického matematika Williama Kingdona Clifforda, který v r. 1876 shrnul poznatky Hamiltona a Grassmanna [5, s. 59].

2.3.2 Axiomy a základní vztahy

Základní prvky Cliffordovy algebry \mathcal{C} budeme nazývat *multivektory*, základními operacemi jsou *geometrický součet* (+) a *geometrický součin* (značený juxtapozicí multivektorů), které jsou algebraicky uzavřené (jejich výsledkem je jednoznačně určený multivektor z \mathcal{C}) a které se řídí následujícími axiomy:

(A1) Součet je komutativní:

$$A + B = B + A.$$

(A2) Součet i součin jsou asociativní:

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$
$$(AB)C = A(BC).$$

(A3) Součin je distributivní vůči součtu:

$$A(B + C) = AB + AC,$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

(A4) Existují jednoznačně určené neutrální prvky vůči součtu i součinu:

$$A + 0 = A,$$
$$1A = A1 = A.$$

(A5) Ke každému multivektoru A existuje jeho jednoznačně určený opačný multivektor vzhledem k součtu $-A$:

$$A + (-A) = 0.$$

Multivektory v Cliffordově algebře jsou *stupňované* neboli tvořené kvalitativně odlišnými složkami, multivektor $\langle A \rangle_r$ nazýváme *r-vektorová část multivektoru* A . Pokud pro nějaké $r \in \mathbb{N}$ platí $A = \langle A \rangle_r$, nazýváme jej *homogenní multivektor stupně r* nebo *r-vektor*. Namísto názvů 0-vektor, 1-vektor, 2-vektor a

3-vektor budeme používat běžnější názvy *skalár*, *vektor*, *bivektor* a *trivektor*. V následujícím textu budou, nebude-li řečeno jinak, symboly A_r , B_s nebo C_t označovat homogenní r -, s - nebo t -vektory. Budeme-li naopak chtít označit r -vektorovou část obecného multivektoru, použijeme čárku nad požadovaným stupněm: $\langle A \rangle_r = A_r$. Pro označení skalární části multivektoru zjednodušující značení $\langle A \rangle_0 = \langle A \rangle$. Operátor $\langle \cdot \rangle_r$ má tyto vlastnosti:

$$(A6) \quad A = \langle A \rangle_0 + \langle A \rangle_1 + \langle A \rangle_2 + \cdots = \sum_r \langle A \rangle_r.$$

$$(A7) \quad \langle A + B \rangle_r = \langle A \rangle_r + \langle B \rangle_r.$$

$$(A8) \quad \langle \lambda A \rangle_r = \lambda \langle A \rangle_r \text{ pokud } \lambda = \langle \lambda \rangle_0.$$

Věta 2.8. *Cliffordova algebra \mathcal{C} je lineární prostor a prostory všech r -vektorů \mathcal{C}^r jsou jeho lineární podprostory.*

Důkaz. Na základě axiomů (A6), (A7) a (A8). □

Prostor všech skalárů \mathcal{C}^0 budeme považovat za totožný s množinou \mathbb{R} .

(A9) Ke každému nenulovému vektoru $\mathbf{a} = \langle \mathbf{a} \rangle_1$ existuje jednoznačně určený skalár $\|\mathbf{a}\|^2$ takový, že platí $\mathbf{a}\mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = \langle \mathbf{a}^2 \rangle_0 = \|\mathbf{a}\|^2$. Pokud existuje číslo $\|\mathbf{a}\|$, nazýváme ho *velikost vektoru \mathbf{a}* .

Definice 2.12. Multivektor A_r se nazývá *r -blade*, pokud ho lze rozložit na geometrický součin r antikomutujících vektorů, neboli:

$$A_r = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_r \text{ a současně } \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k = -\mathbf{a}_k \mathbf{a}_j \text{ pro } j, k = 1, 2, \dots, r \text{ a } j \neq k.$$

Nyní již můžeme vyslovit poslední dva axiomy:

(A10) Každý r -vektor A_r lze pro $r > 0$ vyjádřit jako součet r -bladů.

(A11) Ke každému nenulovému r -bladu A_r existuje nenulový vektor $\mathbf{a} \in \mathcal{C}$ takový, že $A_r \mathbf{a}$ je blade stupně $(r + 1)$.

Nyní zavedeme tři významné operace nad multivektory.

Definice 2.13. Operace $\dagger : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ se nazývá *převrácení* a je definována následujícími vlastnostmi:

1. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$.
2. $(A + B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger$.
3. $\langle A^\dagger \rangle = \langle A \rangle$.
4. $\mathbf{a}^\dagger = \mathbf{a}$ pro $\mathbf{a} = \langle \mathbf{a} \rangle_1$.

Důsledkem této definice je užitečný vztah pro součin vektorů:

$$(\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_r)^\dagger = \mathbf{a}_r \mathbf{a}_{r-1} \dots \mathbf{a}_1. \quad (2.3.1)$$

V případě, že vektory ve vztahu (2.3.1) navíc antikomutují a tvoří tedy podle definice 2.12 r -blade, pak změnami v pořadí vektorů snadno ověříme, že platí:

$$\langle A^\dagger \rangle_r = (-1)^{r(r-1)/2} \langle A \rangle_r. \quad (2.3.2)$$

Definice 2.14. Operace $\cdot : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ se nazývá *vnitřní součin* a je definována

1. pro homogenní multivektory předpisem

$$A_r \cdot B_s = \begin{cases} \langle A_r B_s \rangle_{|r-s|} & \text{pro } r, s > 0 \\ 0 & \text{pro } r = 0 \text{ nebo } s = 0 \end{cases} \quad (2.3.3)$$

2. a pro obecné multivektory jako součet

$$A \cdot B = \sum_r A_{\bar{r}} \cdot B = \sum_s A \cdot B_{\bar{s}} = \sum_r \sum_s A_{\bar{r}} \cdot B_{\bar{s}}. \quad (2.3.4)$$

Definice 2.15. Operace $\wedge : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ se nazývá *vnější součin* a je definována

1. pro homogenní multivektory předpisem

$$A_r \wedge B_s = \langle A_r B_s \rangle_{r+s} \quad (2.3.5)$$

2. a pro obecné multivektory jako součet

$$A \wedge B = \sum_r A_{\bar{r}} \wedge B = \sum_s A \wedge B_{\bar{s}} = \sum_r \sum_s A_{\bar{r}} \wedge B_{\bar{s}}. \quad (2.3.6)$$

Na tomto místě zavedeme dvě úmluvy za účelem redukce počtu závorek.

Úmluva 2.1. Vnitřní i vnější součin mají přednost před geometrickým součinem.

$$\begin{aligned} (A \cdot B)C &= A \cdot BC \neq A \cdot (BC), \\ (A \wedge B)C &= A \wedge BC \neq A \wedge (BC). \end{aligned}$$

Úmluva 2.2. Vnější součin má přednost před vnitřním součinem.

$$(A \wedge B) \cdot C = A \wedge B \cdot C \neq A \wedge (B \cdot C).$$

Dále ještě zavedeme zkrácené značení pro geometrický a vnější součin všech prvků z indexované množiny.

Úmluva 2.3.

$$A_1 A_2 \cdots A_n = \prod_{i=1}^n A_i.$$

Úmluva 2.4.

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n = \bigwedge_{i=1}^n A_i.$$

Pro vnitřní i vnější součin lze odvodit mnoho vlastností a vztahů, které lze nalézt např. v [4, s. 8–12], pro naše potřeby však postačí tento poznatek a dva jeho přímé důsledky:

Věta 2.9. *Vnější součin je antisymetrický při záměně libovolných dvou vektorů:*

$$\mathbf{a} \wedge A \wedge \mathbf{b} \wedge B = -\mathbf{b} \wedge A \wedge \mathbf{a} \wedge B \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, A, B \in \mathcal{C}. \quad (2.3.7)$$

Důkaz. K důkazu jsou třeba pravidla pro změnu pořadí činitelů v součinu, tyto vztahy lze nalézt v [4, s. 6,7]; zbytek důkazu je prosté rozepsání. \square

Důsledek 2.1. Pro libovolné $\mathbf{a}, A, B \in \mathcal{C}$ platí

$$\mathbf{a} \wedge A \wedge \mathbf{a} \wedge B = 0. \quad (2.3.8)$$

Důsledek 2.2. Nechtě jsou $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ lineárně nezávislé nenulové vektory a nechtě vektor $\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$, potom na základě distributivity geometrického (a po-
tažmo tedy i vnějšího) součinu vůči součtu platí:

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i \right) \wedge \bigwedge_{j=1}^n \mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \mathbf{a}_i \wedge \bigwedge_{j=1}^n \mathbf{a}_j \right) = 0. \quad (2.3.9)$$

Následující fundamentální věta nám dává vztah mezi geometrickým, vnitřním a vnějším součinem.

Věta 2.10. *Mezi vnitřním, vnějším a geometrickým součinem mezi vektorem \mathbf{a} a homogenním r -vektorem A_r platí následující vztahy:*

$$\mathbf{a} \cdot A_r = \langle \mathbf{a} A_r \rangle_{r-1} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} A_r - (-1)^r A_r \mathbf{a}), \quad (2.3.10a)$$

$$\mathbf{a} \wedge A_r = \langle \mathbf{a} A_r \rangle_{r+1} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} A_r + (-1)^r A_r \mathbf{a}), \quad (2.3.10b)$$

$$\mathbf{a} A_r = \mathbf{a} \cdot A_r + \mathbf{a} \wedge A_r = \langle \mathbf{a} A_r \rangle_{r-1} + \langle \mathbf{a} A_r \rangle_{r+1}. \quad (2.3.10c)$$

Důkaz. Platnost libovolných dvou tvrzení implikuje tvrzení třetí, kompletní důkaz všech tří tvrzení lze nalézt v [4, s. 8–10]. \square

Pokud ve větě 2.10 uvažujeme součiny dvou vektorů (tzn. $r = 1$ a můžeme přeznačit $A_r = \mathbf{b}$), vztahy (2.3.10a) a (2.3.10b) dostanou tvar

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \mathbf{b} + \mathbf{b} \mathbf{a}), \quad (2.3.11a)$$

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{a} \mathbf{b} - \mathbf{b} \mathbf{a}). \quad (2.3.11b)$$

Dalším užitečným vztahem pro práci s vnějším a vnitřním součinem vektorů je následující:

Věta 2.11. *Bud' $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektory, potom:*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{bc} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{cb}. \quad (2.3.12)$$

Důkaz. [4, s. 9–11]. □

Věta 2.10 nám umožňuje snadno ověřit podstatnou vlastnost r -bladů.

Věta 2.12. *Každý r -blade je homogenní r -vektor.*

Důkaz. Důkaz provedeme matematickou indukcí pro všechna $r > 0$.

1. Pro $r = 1$ je $A_r = \mathbf{a}_1$, což je homogenní 1-vektor, tvrzení tedy platí.
2. Předpokládejme, že $A_r = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_r$ je homogenní r -vektor. Chceme ukázat, že $(r + 1)$ -blade $A_r \mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_r \mathbf{a}$ je homogenní $(r + 1)$ -vektor pro nějaký vektor \mathbf{a} , antikomutující se všemi vektory \mathbf{a}_k , neboli že platí $A_r \mathbf{a} = \langle A_r \mathbf{a} \rangle_{r+1}$. Užitím vztahu (2.3.2) dostaneme

$$\langle A_r \mathbf{a} \rangle_{r+1} = (-1)^{r(r+1)/2} \langle \mathbf{a} A_r^\dagger \rangle_{r+1}$$

a díky axiomu (A8) nám stačí ověřit stupeň převráceného tvaru. Užijeme-li na něj rozklad podle vztahu (2.3.10c) a následně definici vnějšího součinu, získáme

$$\mathbf{a} A_r^\dagger = \mathbf{a} \cdot A_r^\dagger + \mathbf{a} \wedge A_r^\dagger = \mathbf{a} \cdot A_r^\dagger + \langle \mathbf{a} A_r^\dagger \rangle_{r+1},$$

stačí nám tedy ukázat, že platí $\mathbf{a} \cdot A_r^\dagger = 0$. Rozložením tohoto vnitřního součinu podle vztahu (2.3.10a) dostaneme:

$$\mathbf{a} \cdot A_r^\dagger = \frac{1}{2} (\mathbf{a} A_r^\dagger - (-1)^r A_r^\dagger \mathbf{a}).$$

Aby se tento výraz vynuloval, je třeba, aby pro všechna sudá r platilo $\mathbf{a} A_r^\dagger = A_r^\dagger \mathbf{a}$ a pro lichá r naopak $\mathbf{a} A_r^\dagger = -A_r^\dagger \mathbf{a}$. Protože ale vektory v tomto vztahu antikomutují, lze mezi výrazy přecházet pomocí právě r výměn sousedních vektorů, které způsobí r změn znaménka, čímž je důkaz hotov. □

Důsledek 2.3. Pro libovolné antikomutující vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{C}$ platí

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}. \quad (2.3.13)$$

Definice 2.16. Operace $*$: $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ se nazývá *skalární součin* a je definována vztahem

$$A * B = \langle AB \rangle.$$

Pro r -vektory plyne z definice 2.14:

$$A_r * B_s = 0 \quad \text{pro } r \neq s, \quad (2.3.14)$$

$$A_r * B_r = A_r \cdot B_r = B_r * A_r \quad \text{pro } r > 0. \quad (2.3.15)$$

Pro skaláry je pak třeba ještě dodatečně stanovit vztah

$$A_0 * B_0 = AB = \langle A \rangle \langle B \rangle. \quad (2.3.16)$$

Z axiomu (A6) pak snadno odvodíme definici skalárního součinu pro obecné multivektory jako

$$A * B = \langle A \rangle \langle B \rangle + \sum_r A_{\bar{r}} \cdot B_{\bar{r}}. \quad (2.3.17)$$

Definice 2.17. Dva multivektory nazýváme *kolmé* právě tehdy, když je jejich skalární součin roven nule.

Vrátíme-li se nyní ke vztahu (2.3.11a), pozorujeme, že pravá strana rovnosti je podle definice 2.14 skalár; vnitřní součin dvou vektorů je zřejmě komutativní; asociativitu a distributivitu ověříme snadno výpočtem. Pokud v axiomu (A9) připustíme pouze kladné normy vektorů, pak také platí, že $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$, vnitřní součin dvou vektorů tedy splňuje vlastnosti skalárního součinu v reálném vektorovém prostoru; v sekci 4.3 však budeme budovat Cliffordovu algebru nad Minkowského prostorem, ve kterém obecně *neplatí* $\|\mathbf{a}\|^2 \geq 0$. Přímou pak tento vztah splňuje i definici 2.16 pro skalární součin v Cliffordově algebře. Kombinací těchto tvrzení se vztahem (2.3.10c) a větou 2.9 získáme důkaz následující věty:

Věta 2.13. *Každé dva na sebe kolmé vektory antikomutují.* □

Definice 2.18. Ke každému multivektoru A definujeme jeho *velikost* $\|A\|$ pomocí vztahu:

$$\|A\|^2 = A^\dagger * A = \sum_r \|A_{\bar{r}}\|^2.$$

Díky linearitě nám stačí specifikovat velikost pouze pro blady:

$$\|A_r\|^2 = A_r^\dagger A_r = (\mathbf{a}_n \cdots \mathbf{a}_1)(\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n) = \|\mathbf{a}_1\|^2 \cdots \|\mathbf{a}_n\|^2.$$

Definice 2.19. Ke každému nenulovému r -bladu definujeme *inverzní blade* A_r^{-1} pomocí vztahu:

$$A_r^{-1} = \|A_r\|^{-2} A_r^\dagger.$$

2.3.3 Vztah s reálnými vektorovými prostory

Nyní máme zavedena základní pravidla a vztahy pro práci s multivektory. V této podkapitole zavedeme zobrazení, které přiřadí vektoru z $\mathbb{R}^{p,q}$ vektor v \mathcal{C} a tím nám tyto doposud oddělené světy formálně propojí. Pro prostor $\mathbb{R}^{p,q}$ předpokládáme, že je na něm zavedena kvadratická forma \mathbf{Q} a s ní asociovaná bilineární forma φ , které indukují standardní pojmy kolmosti a normy vektoru. Následně formulujeme postupy pro *reflexi* a *rotaci* vektoru z $\mathbb{R}^{p,q}$ ve formě algebraických operací s obrazem tohoto vektoru v \mathcal{C} . Část definic a tvrzení v této podkapitole byla převzata z [1, kap. 6] a [6].

Definice 2.20. Uvažujme n libovolných lineárně nezávislých nenulových vektorů $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathcal{C}^1$. Jako prostor $\mathcal{C}_n^1 \subset \mathcal{C}^1$ budeme označovat lineární obal těchto vektorů.

Definice 2.21. Definujme *bijektivní zobrazení* $\chi : \mathbb{R}^{p,q} \rightarrow \mathcal{C}_n^1$, $p+q=n$, které splňuje následující vlastnosti $\forall \vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k, \vec{y} \in \mathbb{R}^{p,q}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, k \leq n$:

$$1. \chi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\chi(\vec{x}) + \beta\chi(\vec{y}). \quad (2.3.18)$$

$$2. \chi(\vec{x}) \cdot \chi(\vec{y}) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 0. \quad (2.3.19)$$

$$3. \chi(\vec{x})^2 = \|\chi(\vec{x})\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \Leftrightarrow \mathbf{Q}(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2. \quad (2.3.20)$$

$$4. \chi(\vec{y}) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^k \chi(\vec{x}_i) \right) = 0 \Leftrightarrow \vec{y} \in \text{span}(\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}). \quad (2.3.21)$$

\mathbf{Q} je kvadratická forma na $\mathbb{R}^{p,q}$ a φ je s ní asociovaná bilineární forma. Stejně požadavky automaticky klademe i na inverzní zobrazení $\chi^{-1} : \mathcal{C}_n^1 \rightarrow \mathbb{R}^{p,q}$.

Poznamenejme, že vlastnost (2.3.21) bychom mohli dokázat jako důsledek linearit χ a vztahu (2.3.8), nicméně ji zde uvádíme v této formě pro její význam při určování dimenze konkrétní Cliffordovy algebry budované nad $\mathbb{R}^{p,q}$. Zobrazení χ samotné budeme v tomto textu chápat jako identitu, na základě toho budeme jak vektory v $\mathbb{R}^{p,q}$, tak v \mathcal{C} značit shodně malými tučnými písmeny. Jiné volby pro zobrazení χ by nám umožňovaly využít nástroje Cliffordovy algebry např. pro projektivní nebo jiné geometrie (viz např. [6]).

Definice 2.22. Nechť je $\overline{\mathbb{R}^{p,q}} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ *ortonormální báze* prostoru $\mathbb{R}^{p,q}$, výraz $\overline{\mathbb{R}^{p,q}}[k]$ označuje k -tý prvek této báze a nechť je $\mathbb{I} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ a $\mathbb{I}[j]$ je j -tý prvek množiny \mathbb{I} . Výsledek geometrického součinu daného vztahem

$$\mathbf{e}_{\mathbb{I}} = \prod_i^{\mathbb{I}} \overline{\mathbb{R}^{p,q}}[\mathbb{I}[i]] \quad (2.3.22)$$

se nazývá *bázový blade stupně* $|\mathbb{I}|$. Máme-li například množinu $\mathbb{I} = \{2, 3, 1\}$, pak $\mathbf{e}_{\mathbb{I}} = \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$.

Protože vektory \mathbf{e}_k antikomutují, lze počet bázových bladů zredukovat, přijmeme-li konvenci ohledně pořadí vektorů v bladech:

Úmluva 2.5. Jako *kanonický bázový blade* budeme označovat blade, který je tvořen součinem vektorů v lexikografickém pořadí. Výše zmíněný blade $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1$ převedeme na kanonický tvar dvěma výměnami sousedních vektorů, tedy $\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = (-1)^2\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$.

Věta 2.14. *Nechť je $\overline{\mathbb{R}^{p,q}}$ kanonická ortonormální báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^{p,q}$, $p + q = n$ a $\overline{\mathcal{C}}_n$ je množina všech kanonických bázových bladů stupně nejvýše n . Prvky $\overline{\mathcal{C}}_n \cup \{1\}$ tvoří bázi Cliffordovy algebry $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}$. Dimenze Cliffordovy algebry je $|\overline{\mathcal{C}}_n| = 2^n$.*

Důkaz. Uvažujme obecný multivektor A s nejvyšším stupněm n . Na základě axiomu (A6) jej můžeme rozložit na součet homogenních r -vektorů ($r = 1, \dots, n$), ty můžeme na základě (A10) rozložit na součet r -bladů ve tvaru $A_r = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 \cdots \mathbf{a}_r$. Zobrazíme li vektory \mathbf{a}_k pomocí χ^{-1} do $\mathbb{R}^{p,q}$, můžeme je vyjádřit v bázi $\overline{\mathbb{R}^{p,q}}$ jako $\mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i$ a následně je zobrazit zpět do \mathcal{C}^1 . Na základě linearitu χ , distributivity geometrického součinu vůči součtu a anti-komutativity získáme lineární kombinaci bázových r -bladů. Počet kanonických bázových bladů odpovídá počtu možných kombinací k vektorů z n možných, kde $k = 0, 1, \dots, n$, přičemž případu $k = 0$ odpovídá bázový prvek 1:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n. \quad (2.3.23)$$

□

Libovolný multivektor (a tím pádem i libovolný vektor) lze nyní zapsat jako prvek 2^n -dimenzionálního prostoru, ve kterém můžeme stanovit konkrétní pravidla pro výpočet geometrického, vnitřního a vnějšího součinu ve formě elementárních operací s koeficienty báze $\overline{\mathcal{C}}_n$. V obecné formě pak můžeme velmi snadno odvodit mnoho geometrických operací a transformací, které bychom standardně realizovali s využitím matic typu $n \times n$.

Definice 2.23. Jako *sudou Cliffordovu subalgebru* $\mathcal{C}_n^+ \subset \mathcal{C}_n$ označíme subalgebru, jejíž bázi tvoří pouze bázové blade sudého stupně.

Taková subalgebra existuje a snadno ukážeme, že je uzavřená. Sudé subalgebry jsou nejčastěji používány, pokud je třeba nalézt Cliffordovu algebru izomorfní k prostoru \mathbb{C} nebo \mathbb{H} .

Věta 2.15. *Nechť jsou \mathbf{a} obecný a \mathbf{n} jednotkový vektor z $\mathbb{R}^{p,q}$. Výraz \mathbf{nan} je vektor vzniklý reflexí vektoru \mathbf{a} podle vektoru \mathbf{n} .*

Důkaz. Označme \mathbf{a}_{\parallel} složku \mathbf{a} rovnoběžnou s \mathbf{n} a \mathbf{a}_{\perp} složku kolmou na \mathbf{n} , pak $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$. Rozepíšeme li součin podle (2.3.10c), dostaneme:

$$\mathbf{nan} = \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{n}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{n} + \mathbf{n} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{n}.$$

Výraz $\mathbf{n} \wedge \mathbf{a} \wedge \mathbf{n} = 0$ podle (2.3.8) a $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ je složka \mathbf{a}_{\parallel} , zbývá tedy ukázat, že $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{n} = -\mathbf{a}_{\perp}$. Rozepíšeme li však tento vztah pomocí 2.3.12, dostaneme

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} \wedge \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{a})\mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} - \mathbf{a} = -\mathbf{a}_{\perp}.$$

□

Na základě věty 2.15 lze reprezentovat *rotaci* vektoru v prostoru libovolné dimenze, v rovině určené bivektorem $\mathbf{m} \wedge \mathbf{n}$ o úhel 2φ , $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ daný vztahem $\cos \varphi = \mathbf{m} \cdot \mathbf{n}$, jako složení dvou reflexí podle jednotkových vektorů \mathbf{m} a \mathbf{n} , viz [1, s. 85 a 86] a např. [20, s. 105 a 106].

2.4 Diferenciální geometrie a geometrické modelování

V této sekci zmíníme základy diferenciální geometrie křivek a geometrického modelování. Při zpracování bylo čerpáno z [9], [11] a [1, kap. 8, 11 a 13].

2.4.1 Úvod do diferenciální geometrie křivek

Definice 2.24. *Jednoduchá křivka v \mathbb{E}_n* je množina $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}_n$, ke které existuje vektorová funkce $\mathbf{x}(t)$, $t \in \mathcal{I}$, taková, že:

1. \mathcal{I} je interval.
2. \mathbf{x} je spojitá na \mathcal{I} .
3. \mathbf{x} je prostá na vnitřku \mathcal{I} .

Pokud navíc platí, že:

- $\mathbf{x} \in C^n$, pak nazýváme \mathcal{K} *křivkou třídy C^n* .
- $\mathcal{I} = \langle t_1, t_2 \rangle$ a $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_2)$, pak nazýváme \mathcal{K} *uzavřenou křivkou*.
- $\forall t \in \mathcal{I} : \|\mathbf{x}'(t)\| \neq 0$, pak nazýváme \mathcal{K} *regulární křivkou*.

Křivka je po částech regulární jednoduchá křivka třídy C^1 . Proměnnou $t \in \mathcal{I}$ nazýváme *parametrem křivky \mathcal{K}* , vektor \mathbf{x} nazýváme *průvodičem bodu křivky* a vektorovou funkci $\mathbf{x}(t)$ *parametrickou reprezentací křivky \mathcal{K}* . Bod $\mathbf{x}(t_0)$, ve kterém je $|\mathbf{x}'(t_0)| = 0$, nazýváme *singulárním bodem křivky*.

Poznámka 2.6. Derivaci vektorové funkce $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ rozumíme jako vektor derivací složek této funkce:

$$\mathbf{x}'(t) = (x'_1(t), x'_2(t), \dots, x'_n(t)). \quad (2.4.1)$$

Definice 2.25. Nechť je \mathcal{K} křivka parametrizovaná funkcí $\mathbf{x}(t)$. Výraz $\mathbf{x}'(t)$ nazýváme *tečný vektor křivky \mathcal{K}* . Přímkou $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{x}(t_0) + \tau\mathbf{x}'(t_0)$ nazýváme

tečna ke křivce \mathcal{K} v bodě $\mathbf{x}(t_0)$. Zapišeme-li tečný vektor jako

$$\mathbf{x}'(t) = \sigma(t)\mathbf{t}(t), \quad (2.4.2)$$

kde

$$\sigma(t) = \|\mathbf{x}'(t)\| = \sqrt{x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + \dots + x_n'^2(t)} \quad (2.4.3)$$

a

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}'(t)\|}, \quad (2.4.4)$$

pak skalární funkci $\sigma(t)$ nazýváme *parametrická rychlost křivky \mathcal{K}* a $\mathbf{t}(t)$ je *jednotkový tečný vektor*.

Definice 2.26. Buď $\mathbf{x}(t), t \in (t_1, t_2)$ parametrizací regulární křivky \mathcal{K} . Křivku s parametrizací $\mathbf{x}'(t), t \in (t_1, t_2)$ nazýváme *hodograf křivky \mathcal{K}* .

Zkoumáním hodografu křivky můžeme získat jisté informace o vlastnostech křivky původní, často analogicky k vlastnostem, které nám o funkci prozradí její derivace. Například pokud hodograf pro nějakou hodnotu parametru t_0 prochází počátkem, pak na výsledné křivce této hodnotě odpovídá singulární bod. Pokud je hodograf tvořen jedním bodem, výsledná křivka je uniformně parametrizovaná přímka nebo její část.

Definice 2.27. Nechť je \mathcal{K} regulární křivka popsána vektorovou funkcí $\mathbf{x}(t), t \in (t_1, t_2)$. Hodnota d se nazývá *délka oblouku křivky \mathcal{K}* a je dána vztahem

$$d = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\mathbf{x}'(t) \cdot \mathbf{x}'(t)} dt. \quad (2.4.5)$$

Poznamenejme, že tuto definici je možné uvést i jako větu a dokázat ji s využitím nástrojů integrálního počtu.

Poznámka 2.7. Symbol \cdot značí standardní skalární součin aplikovaný na vektorovou funkci:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \cdot (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \\ &= (x_1(t)y_1(t), x_2(t)y_2(t), \dots, x_n(t)y_n(t)). \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Připomeňme, že díky ekvivalenci s vnitřním součinem v \mathcal{C} nejsme ve sporu se značením.

Definice 2.28. Nechť je \mathcal{K} regulární křivka popsána vektorovou funkcí $\mathbf{x}(t), t \in (t_1, t_2)$. Položme

$$s(t) = \int_{t_1}^t \sqrt{\mathbf{x}'(\hat{t}) \cdot \mathbf{x}'(\hat{t})} d\hat{t} \quad (2.4.7)$$

a inverzní funkci k $s(t)$ označme $t(s)$. Vektorová funkce $\mathbf{x}(t(s))$ se nazývá *parametrizace křivky \mathcal{K} obloukem* a nový parametr $s \in \langle 0, d \rangle$ se nazývá *oblouk křivky \mathcal{K}* . Derivaci podle oblouku značíme tečkou:

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \dot{\mathbf{x}}(s).$$

Parametrizace obloukem má mnoho výhod, hodnota parametru s nám současně dává i délku křivky a vzorce popisující vlastnosti křivky dostanou při parametrizaci obloukem triviální formu. Naneštěstí však nelze i pro ty nejjednodušší typy křivek určit jejich parametrizaci obloukem v rámci elementárních funkcí.

2.4.2 Geometrické modelování

PH křivky jsou součástí rozsáhlé teorie geometrického modelování, odvětví matematiky, které se začalo rozvíjet v 70. letech minulého století (ačkoliv čerpá i z podstatně starších poznatků) a jeho počátky jsou spjaty se jménem Pierra Béziera, konstruktéra a návrháře firmy Renault. Beziérové křivky jsou dnes standardním nástrojem pro modelování tvarově složitých objektů výpočtově nenáročným způsobem a také PH křivky budeme chápat jako speciální případ těchto křivek.

Základem teorie Bézierových křivek je *Bernsteinova báze* prostoru polynomů.

Definice 2.29. $n + 1$ polynomů ve tvaru

$$b_k^n(t) = \binom{n}{k} (1-t)^{n-k} t^k, \quad k = 0, 1, \dots, n; \quad (2.4.8)$$

nazýváme *Bernsteinovy bázové polynomy stupně n* . Tyto polynomy jsou lineárně nezávislé a tvoří tedy bázi prostoru polynomů n -tého stupně ve tvaru

$$f(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k b_k^n(t). \quad (2.4.9)$$

Reálná čísla α_k nazýváme *Bernsteinovy koeficienty*.

Pro součet a součin dvou polynomů v Bernsteinově bázi platí následující pravidla:

Věta 2.16. *Nechť $f(t) = \sum_{i=0}^m \alpha_i b_i^m$ a $g(t) = \sum_{j=0}^n \beta_j b_j^n$, kde $n \leq m$. Pak pro Bernsteinovy koeficienty γ_k součtu $f(t) + g(t) = \sum_{k=0}^m \gamma_k b_k^m$ a koeficienty δ_k*

součinu $f(t)g(t) = \sum_{k=0}^{m+n} \delta_k b_k^{m+n}$ platí:

$$\gamma_k = \begin{cases} \alpha_k + \beta_k & \text{pro } n = m, \\ \alpha_k + \sum_{j=\max(0, k-m+n)}^{\min(n, k)} \frac{\binom{m-n}{k-j} \binom{n}{j}}{\binom{m}{k}} \beta_j & \text{pro } n < m, \end{cases} \quad k = 0, \dots, m, \quad (2.4.10)$$

$$\delta_k = \sum_{j=\max(0, k-n)}^{\min(m, k)} \frac{\binom{m}{j} \binom{n}{k-j}}{\binom{m+n}{k}} \alpha_j \beta_{k-j}, \quad k = 0, \dots, m+n. \quad (2.4.11)$$

Důkaz. Důkaz je založen na vzorcích pro vyjádření báze pomocí funkcí vyššího stupně, viz [12]. \square

Vztahy pro derivaci a integrál polynomu vyjádřeného v Bernsteinově bázi můžeme na základě vlastností této báze ([1, s. 252 a 253]) stanovit takto:

Věta 2.17. *Bud' $f(t)$ polynom ve tvaru (2.4.9), pak jeho derivace a neurčitý integrál mají tvar:*

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} n(\alpha_{k+1} - \alpha_k) b_k^{n-1}(t), \quad (2.4.12)$$

$$\int f(t) dt = \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j \right) b_k^{n+1}(t) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (2.4.13)$$

\square

Bézierovu křivku vytvoříme tak, že ve vztahu (2.4.9) zaměníme reálné koeficienty za body vektorového prostoru:

Definice 2.30. Křivku ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{k=0}^n \mathbf{p}_k b_k^n, \quad t \in \langle 0, 1 \rangle, \quad (2.4.14)$$

kde \mathbf{p}_k jsou polohové vektory bodů v rovině nebo prostoru³, nazýváme *Bézierova křivka stupně n* . Lomená čára určená body \mathbf{p}_k se nazývá *řídící polygon Bézierovy křivky*.

Můžeme učinit několik jednoduchých pozorování. Pro hodnotu $t = 0$ snadno ověříme, že funkční hodnota Bernsteinových polynomů je 0 pro všechna $k \neq 0$,

³Obecně je samozřejmě možné zavést tyto křivky v prostoru libovolné dimenze.

počátečním bodem Bézierovy křivky je tedy vrchol řídicího polygonu \mathbf{p}_0 . Podobně můžeme ověřit i to, že koncovým bodem je bod \mathbf{p}_n a že strany řídicího polygonu $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_{n-1}\mathbf{p}_n$ jsou tečny k Bézierově křivce v bodech \mathbf{p}_0 a \mathbf{p}_n . Také si všimněme, že stupeň křivky roste s počtem vrcholů řídicího polygonu a že změna polohy libovolného vrcholu má globální vliv na tvar křivky.

Kapitola 3

PH křivky v rovině a prostoru

V této kapitole zavedeme PH křivky pro případy reálné eukleidovské roviny a eukleidovského prostoru. V rovinném případě uvedeme elegantní zápis pomocí komplexních čísel, v prostorovém případě pak analogický popis s využitím kvaternionů. Při zpracování této kapitoly bylo čerpáno především z [1, kap. 17–19, 21 a 22].

3.1 Zavedení PH křivek

Motivací k zavedení a zkoumání křivek s pythagorejským hodografem je forma vztahu pro výpočet délky oblouku (2.4.5), která není pro obecnou křivku vhodná pro analytický výpočet. Pro křivku parametrizovanou obloukem lze snadno ukázat, že $|\dot{\mathbf{x}}| = 1$ (a také že parametr je obloukem pokud je velikost derivace jednotková), což koresponduje s již zmíněnou vlastností, že hodnota parametru vyjadřuje i délku oblouku. Protože je však parametrizace obloukem většinou nedosažitelná, další možností je za složky funkce \mathbf{x} volit takové funkce, jejichž derivace tvoří s nějakou další funkcí $\sigma(t)$ *pythagorejskou* $(n + 1)$ -tici, neboli:

$$x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + \cdots + x_n'^2(t) = \sigma^2(t). \quad (3.1.1)$$

Pokud je navíc funkce $\sigma(t)$ dobře numericky integrovatelná, získáme křivku reprezentovanou ve velmi efektivním tvaru s mnoha dalšími výhodnými vlastnostmi. Z těchto důvodů uvažujeme křivky polynomiální. V literatuře lze narazit i na racionální hodografy, práci s nimi ale komplikuje skutečnost, že integrací racionálního hodografu může vzniknout transcendentní křivka.

Definice 3.1. Křivku $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}_n$ označujeme jako *křivku s pythagorejským hodografem* neboli *PH křivku*, pokud jsou složky její parametrické reprezentace

polynomiální funkce a pokud existuje funkce $\sigma(t)$ taková, že s derivacemi těchto složek tvoří pythagorejskou $n + 1$ -tici ve tvaru (3.1.1).

Naším cílem je stanovit podmínky pro složky křivky \mathcal{K} tak, aby byl její hodograf pythagorejský. V následujících sekcích se budeme zabývat těmito podmínkami a jejich důsledky v rovině a v prostoru.

3.1.1 PH křivky v rovině

Pro rovinné PH křivky lze vyslovit tuto fundamentální větu, kterou lze včetně důkazu najít v [1, s. 382]:

Věta 3.1. *Nechť jsou $a(t), b(t)$ a $c(t)$ polynomy. Pythagorejská podmínka*

$$a^2(t) + b^2(t) = c^2(t) \quad (3.1.2)$$

je splněna právě tehdy, když lze tyto polynomy vyjádřit pomocí jiných polynomů $u(t), v(t)$ a $w(t)$ ve formě:

$$a(t) = [u^2(t) - v^2(t)]w(t), \quad (3.1.3a)$$

$$b(t) = 2u(t)v(t)w(t), \quad (3.1.3b)$$

$$c(t) = [u^2(t) + v^2(t)]w(t). \quad (3.1.3c)$$

Důkaz. Implikaci zprava doleva lze dokázat snadno přímým dosazením. Implikaci zleva doprava dokážeme tak, že zvolíme $w(t)$ jako největší společný dělitel trojice $a(t), b(t), c(t)$ a označíme:

$$\tilde{a}(t) = \frac{a(t)}{w(t)}, \quad \tilde{b}(t) = \frac{b(t)}{w(t)}, \quad \tilde{c}(t) = \frac{c(t)}{w(t)}.$$

Polynomy $\tilde{a}(t), \tilde{b}(t)$ a $\tilde{c}(t)$ také tvoří pythagorejskou trojici, takže můžeme provést rozklad

$$\tilde{b}^2(t) = \tilde{c}^2(t) - \tilde{a}^2(t) = [\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t)][\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t)].$$

$\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t)$ a $\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t)$ nemají žádný společný faktor (jinak by ho měly i $\tilde{a}(t), \tilde{b}(t), \tilde{c}(t)$, které jsme ovšem definovali jako nesoudělné). Potom je ovšem *každý* kořen polynomu $\tilde{b}^2(t)$ buď kořenem $\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t)$ nebo $\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t)$ a má sudou násobnost, můžeme tedy psát¹

$$\tilde{c}(t) + \tilde{a}(t) = 2u^2(t),$$

$$\tilde{c}(t) - \tilde{a}(t) = 2v^2(t),$$

$$\tilde{b}^2(t) = 4u^2(t)v^2(t),$$

¹Koeficient 2 lze přidat bez újmy na obecnosti, neboť nemá žádný vliv na kořeny.

pro nesoudělné polynomy $u(t)$ a $v(t)$. Sečtením prvních dvou vztahů dostaneme $\tilde{c}(t) = u^2(t) + v^2(t)$, odečtením $\tilde{a}(t) = u^2(t) - v^2(t)$, ze třetího vztahu plyne $\tilde{b}(t) = 2u(t)v(t)$. Přenásobením polynomem $w(t)$ dostaneme tvrzení věty. \square

Významné místo mezi pythagorejskými trojicemi polynomů zaujímají *základní pythagorejské trojice*:

Definice 3.2. Pythagorejskou n -tici polynomů nazýváme *základní pythagorejská n -tice*, pokud jsou tyto polynomy navzájem nesoudělné, neboli jejich největší společný dělitel je konstanta.

Snadno ověříme, že základní pythagorejskou trojici ve větě 3.1 vytvoříme tak, že polynom $w(t)$ zvolíme jako konstantní a polynomy $u(t)$ a $v(t)$ nesoudělné.

Předpis pro rovinnou PH křivku tedy obdržíme tak, že dosadíme za $x'(t) = a(t)$ a $y'(t) = b(t)$ z věty 3.1 a tyto vztahy zintegrujeme. Abychom se vyhnuli případům degenerovaných PH křivek², je třeba volit polynomy $u(t)$, $v(t)$ a $w(t)$ nenulové a alespoň jeden z dvojice $u(t)$, $v(t)$ jako nekonstantní. Abychom dále zajistili regularitu výsledné PH křivky, budeme volit $w(t) \equiv 1$ (nekonstantní polynom může způsobit vznik singulárního bodu na křivce, pokud je daná hodnota parametru jeho reálný kořen). Volbou základní pythagorejské trojice polynomů a dodržením těchto omezení máme zaručenou nenulovost hodografu a tím pádem *regularitu výsledné PH křivky*.

Nejjednodušší volbou pro rovinnou PH křivku jsou tedy dva lineární polynomy, které vyjádříme v Bernsteinově bázi:

$$u(t) = u_0 b_0^1(t) + u_1 b_1^1(t) = u_0(1-t) + u_1 t, \quad (3.1.4a)$$

$$v(t) = v_0 b_0^1(t) + v_1 b_1^1(t) = v_0(1-t) + v_1 t. \quad (3.1.4b)$$

Dosazením do hodografu (násobení provedeme podle vztahu (2.4.11)) dostaneme

$$\begin{aligned} x'(t) &= u^2(t) - v^2(t) \\ &= (u_0^2 - v_0^2) b_0^2(t) + (u_0 u_1 - v_0 v_1) b_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2) b_2^2(t) \end{aligned} \quad (3.1.5a)$$

$$\begin{aligned} &= (u_0^2 - v_0^2) (1-t)^2 + (u_0 u_1 - v_0 v_1) 2(1-t)t + (u_1^2 - v_1^2) t^2, \\ y'(t) &= 2u(t)v(t) = 2u_0 v_0 b_0^2(t) + (u_0 u_1 + v_0 v_1) b_1^2(t) + 2u_1 v_1 b_2^2(t). \end{aligned} \quad (3.1.5b)$$

Integrací složek hodografu podle (2.4.13) dostaneme Bézierovu křivku, kde vrcholy jejího řídicího polygonu dostaneme seskupením koeficientů u jednotlivých

²Tyto případy zahrnují jeden izolovaný bod a dále rovnoměrné i nerovnoměrné parametrizace úseček, viz [1, s. 383].

bázových funkcí do vektorů:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3} (u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3} (u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3} (u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1).\end{aligned}\tag{3.1.6}$$

Bod \mathbf{p}_0 vznikne jako vektor integračních konstant, lze ho tedy zvolit libovolně. Řídicí polygon má 4 vrcholy, tato křivka je tedy řádu 3 (*kubika*). Důkazy následujících tvrzení pro PH kubiky lze nalézt v [1, s. 400–403]:

Tvrzení 3.1. *Rovinná bézierovská kubika s řídicím polygonem $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ je PH kubikou právě tehdy, když jsou trojúhelníky $\triangle\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ a $\triangle\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ podobné.* \square

Tvrzení 3.2. *Ke každé rovinné PH kubice existuje taková volba souřadnic, že je tato kubika částí Tschirnhausovy kubiky*

$$x(t) = \lambda(t^2 - 1), \quad y(t) = \frac{\pm\lambda}{\sqrt{3}}t(t^2 - 1), \quad \lambda > 0.\tag{3.1.7}$$

\square

Důsledkem tvrzení 3.2 je, že PH kubiky mají pouze jeden volitelný parametr λ , ten však odpovídá *uniformnímu škálování*, praktické využití těchto křivek je tedy omezené.

Pokud za výchozí polynomy $u(t)$ a $v(t)$ zvolíme kvadratické polynomy

$$u(t) = u_0 b_0^2(t) + u_1 b_1^2(t) + u_2 b_2^2(t),\tag{3.1.8a}$$

$$v(t) = v_0 b_0^2(t) + v_1 b_1^2(t) + v_2 b_2^2(t),\tag{3.1.8b}$$

pak analogickým dosazením a integrací dostaneme bézierovskou křivku danou body

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5} (u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0), \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5} (u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0), \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{2}{15} \left(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1 \right) + \frac{1}{15} (u_0u_2 - v_0v_2, u_0v_2 + u_2v_0), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5} (u_1u_2 - v_1v_2, u_1v_2 + u_2v_1), \\ \mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5} (u_2^2 - v_2^2, 2u_2v_2).\end{aligned}\tag{3.1.9}$$

Řídicí polygon má 6 vrcholů, křivka je tedy stupně 5 (*kvintika*).

3.1.2 PH křivky v prostoru

Rozšíření PH křivek do třídimenzionálního prostoru začneme formulací nutné a postačující podmínky, analogické k podmínce 3.1:

Věta 3.2. *Nechť jsou $a(t), b(t), c(t)$ a $d(t)$ polynomy. Pythagorejská podmínka*

$$a^2(t) + b^2(t) + c^2(t) = d^2(t) \quad (3.1.10)$$

je splněna právě tehdy, když lze tyto polynomy vyjádřit pomocí jiných polynomů $u(t), v(t), p(t)$ a $q(t)$ ve formě:

$$a(t) = u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t), \quad (3.1.11a)$$

$$b(t) = 2[u(t)q(t) + v(t)p(t)], \quad (3.1.11b)$$

$$c(t) = 2[v(t)q(t) - u(t)p(t)], \quad (3.1.11c)$$

$$d(t) = u^2(t) + v^2(t) + p^2(t) + q^2(t). \quad (3.1.11d)$$

Důkaz. Implikaci zprava doleva lze dokázat snadno přímým dosazením. Implikaci zleva doprava se dokazuje faktorizací podobně jako ve větě 3.1, konkrétní postup lze nalézt v [1, s. 463]. \square

Rozdílem oproti rovinným PH křivkám je skutečnost, že u hodografu, který vznikne dosazením $x' = a(t)$, $y' = b(t)$ a $z' = c(t)$ z věty 3.2, nezaručuje volba polynomů $u(t), v(t), p(t), q(t)$ jako nesoudělných, že výsledná pythagorejská čtveřice bude základní, lze však ukázat, že společný dělitel složek hodografu má pouze komplexně sdružené kořeny a nezpůsobí tedy reálnou singularitu na výsledné křivce.

Popsat prostorovou PH křivku jako Bézierovu je možné analogicky k rovinnému případu, nicméně výsledné vztahy jsou v této formě velmi komplikované. To je motivací k zavedení *kvaternionového popisu* těchto křivek, který rozebereme v podkapitole 3.3.

3.2 Popis rovinných PH křivek s využitím komplexních čísel

Komplexní čísla a nástroje komplexní analýzy poskytují elegantní reprezentaci rovinných PH křivek. Uvažujme komplexní polynom ve tvaru

$$\mathbf{w}(t) = u(t) + v(t) \mathbf{i}, \quad (3.2.1)$$

kde $u(t)$ a $v(t)$ jsou reálné polynomy. Pokud nyní na Gaussovu rovinu, ve které se nachází tento polynom, použijeme konformní zobrazení $\mathbf{w} \mapsto \mathbf{w}^2$, dostaneme

$$\widehat{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{w}^2(t) = u^2(t) - v^2(t) + 2u(t)v(t) \mathbf{i}. \quad (3.2.2)$$

Zřejmě tedy můžeme v souladu s větou 3.1 zapsat složky hodografu jako

$$x'(t) = \Re(\widehat{\mathbf{w}}(t)), \quad (3.2.3a)$$

$$y'(t) = \Im(\widehat{\mathbf{w}}(t)). \quad (3.2.3b)$$

Ve zbytku této sekce budeme označovat hodograf křivky jako komplexní polynom $\mathbf{x}'(t) = \widehat{\mathbf{w}}(t)$. Křivku $\mathbf{w}(t)$ nazýváme *předobraz PH křivky*. Zvolíme-li za předobraz lineární polynom

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_0 b_0^1(t) + \mathbf{w}_1 b_1^1(t) = \mathbf{w}_0 (1-t) + \mathbf{w}_1 t, \quad (3.2.4)$$

kde $\mathbf{w}_r = u_r + v_r \mathbf{i}$, $r = 0, 1$, pak podle vztahu (2.4.11) pro součin dvou polynomů v Bernsteinově bázi dostaneme hodograf ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{w}_0^2 b_0^2(t) + \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 b_1^2(t) + \mathbf{w}_1^2 b_2^2(t) \\ &= \mathbf{w}_0^2 (1-t)^2 + \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 2(1-t)t + \mathbf{w}_1^2 t^2. \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

Tento polynom má v proměnné t stupeň 2, jeho integrací podle vztahu (2.4.13) tedy v souladu se vztahem (3.1.6) dostaneme Bézierovskou kubiku, jejíž řídicí polygon tvoří vrcholy reprezentované body v Gaussově rovině dané těmito předpisy:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3} \mathbf{w}_0^2, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3} \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1, \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{w}_1^2. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Bod \mathbf{p}_0 odpovídá integračním konstantám. Snadno roznásobením a oddělením reálných a imaginárních částí ověříme, že toto vyjádření je shodné s tím ve vztahu (3.1.6). Volbou kvadratického polynomu

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_0 b_0^2(t) + \mathbf{w}_1 b_1^2(t) + \mathbf{w}_2 b_2^2(t), \quad (3.2.7)$$

kde $\mathbf{w}_r = u_r + v_r \mathbf{i}$, $r = 0, 1, 2$, dostaneme po umocnění hodograf s předpisem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{w}_0^2 b_0^4(t) + \mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 b_1^4(t) + \frac{1}{3} (\mathbf{w}_0 \mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_1^2) b_2^4(t) \\ &\quad + \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 b_3^4(t) + \mathbf{w}_2^2 b_4^4(t) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

a integrací tohoto hodografu získáme bézierovskou kvintiku, kde vrcholy jejího řídicího polygonu mají předpis

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}\mathbf{w}_0^2, \\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}\mathbf{w}_0\mathbf{w}_1, \\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{15}(\mathbf{w}_0\mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_1^2), \\
\mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}\mathbf{w}_1\mathbf{w}_2, \\
\mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}\mathbf{w}_2^2.
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Vrchol \mathbf{p}_0 opět volíme libovolně jako integrační konstantu. I zde snadno ověříme shodu s popisem uvedeným ve vztahu (3.1.9).

3.3 Popis prostorových PH křivek s využitím kvaternionů

Kvaternionový popis prostorových PH křivek je analogií k popisu rovinných PH křivek pomocí komplexních čísel.

3.3.1 Základy kvaternionového popisu PH křivek

Nejprve zavedeme speciální operaci nad kvaterniony, která nám umožní zjednodušit některé zápisy.

Definice 3.3. Operace $\star : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ se nazývá *symetrický součin* a je definována vztahem

$$\mathcal{A} \star \mathcal{B} = \frac{1}{2}(\mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{B}^* + \mathcal{B}\mathbf{i}\mathcal{A}^*), \tag{3.3.1}$$

kde $*$ označuje sdružený kvaternion (viz definice 2.4). Výraz $\mathcal{A} \star \mathcal{A}$ budeme zkráceně zapisovat jako $\mathcal{A}^{2\star}$.

Tato operace je zřejmě komutativní a snadno dokážeme následující vlastnost:

Věta 3.3. *Výsledkem symetrického součinu dvou kvaternionů je vždy ryzí kvaternion.*

Důkaz. Uvažujme kvaterniony $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{H}$, $\mathcal{A} = a_0 + a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ a $\mathcal{B} = b_0 + b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, vynásobením $\mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{B}^*$ a seskupením odpovídajících slo-

žek dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{B}^* &= ab_x - a_x b - a_y b_z + a_z b_y \\ &\quad + (ab + a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z) \mathbf{i} \\ &\quad + (ab_z + a_z b + a_x b_y + a_y b_x) \mathbf{j} \\ &\quad + (-ab_y - a_y b + a_x b_z + a_z b_x) \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Snadno nahlédneme, že skalární část je rovna nule, pokud $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, dále že $\mathcal{A}\star\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{A}^*$ a že skalární část $\mathcal{A}\mathbf{i}\mathcal{B}^*$ je opačná ke skalární části výrazu $\mathcal{B}\mathbf{i}\mathcal{A}^*$, pokud $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ (stačí zaměnit $a \rightarrow b$, $a_x \rightarrow b_x$ atd.). Z těchto pozorování plyne tvrzení věty. \square

Uvažujme kvaternionový polynom ve tvaru

$$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t)\mathbf{i} + p(t)\mathbf{j} + q(t)\mathbf{k}, \quad (3.3.2)$$

kde $u(t), v(t), p(t)$ a $q(t)$ jsou reálné polynomy, a polynom k němu sdružený

$$\mathcal{A}^*(t) = u(t) - v(t)\mathbf{i} - p(t)\mathbf{j} - q(t)\mathbf{k}. \quad (3.3.3)$$

Pythagorejský hodograf má pak v tomto vyjádření ([13]) tvar:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) = \mathcal{A}(t)\mathbf{i}\mathcal{A}^*(t) &= \mathcal{A}^{2*}(t) = [u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)]\mathbf{i} \\ &\quad + 2[u(t)q(t) + v(t)p(t)]\mathbf{j} \\ &\quad + 2[v(t)q(t) - u(t)p(t)]\mathbf{k}.\end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Polynom $\mathcal{A}(t)$ se nazývá *předobraz PH křivky*. Zapišeme-li kvaternion $\mathcal{A}(t)$ ve tvaru $\mathcal{A}(t) = |\mathcal{A}(t)|\mathcal{U}(t)$, kde $\mathcal{U}(t) = [\cos(\frac{1}{2}\theta(t)), \sin(\frac{1}{2}\theta(t))\mathbf{n}(t)]$, pozorujeme, že hodograf $\mathbf{x}'(t)$ vzniká rotací (viz sekce 2.1.3) vektoru \mathbf{i} kolem osy určené vektorem $\mathbf{n}(t)$ o úhel $\theta(t)$ a změnou jeho velikosti danou číslem $|\mathcal{A}(t)|^2$. Volba výchozího vektoru \mathbf{i} je pouze otázkou konvence, neboť lze ukázat, že takto definovaný hodograf je *invariantní vůči rotaci* ([1, s. 476-480]).

Nejjednodušší volbou předobrazu $\mathcal{A}(t)$ je opět lineární polynom

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0 b_0^1(t) + \mathcal{A}_1 b_1^1(t) = \mathcal{A}_0 (1 - t) + \mathcal{A}_1 t, \quad (3.3.5)$$

kde $\mathcal{A}_r = u_r + v_r\mathbf{i} + p_r\mathbf{j} + q_r\mathbf{k}$, $r = 0, 1$. Dosazením do (3.3.4) a vynásobením podle (2.4.11) dostaneme hodograf ve tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_0^* b_0^2(t) + \frac{1}{2}(\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*) b_1^2(t) + \mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_1^* b_2^2(t) \\ &= \mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_0^* (1 - t)^2 + \frac{1}{2}(\mathcal{A}_0\mathbf{i}\mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_0^*) 2(1 - t)t + \mathcal{A}_1\mathbf{i}\mathcal{A}_1^* t^2.\end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Integrací hodografu (3.3.4) (po složkách) a užitím operace \star dostaneme bázierovskou kubiku s řídicím polygonem daným body

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3}\mathcal{A}_0^{2\star}, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3}\mathcal{A}_0 \star \mathcal{A}_1, \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3}\mathcal{A}_1^{2\star}.\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

Volbou kvadratického polynomu

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}_0 b_0^2(t) + \mathcal{A}_1 b_1^2(t) + \mathcal{A}_2 b_2^2(t),\tag{3.3.8}$$

kde $A_r = u_r + v_r \mathbf{i} + p_r \mathbf{j} + q_r \mathbf{k}$, $r = 0, 1, 2$, získáme po dosazení do (3.3.4) hodograf s předpisem

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^* b_0^4(t) + \frac{1}{2} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* + \mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*) b_1^4(t) \\ &+ \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (\mathcal{A}_0 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_0^*) + 2\mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^* \right) b_2^4(t) \\ &+ \frac{1}{2} (\mathcal{A}_1 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_1^*) b_3^4 + \mathcal{A}_2 \mathbf{i} \mathcal{A}_2^* b_4^4(t)\end{aligned}\tag{3.3.9}$$

a jeho integrací spolu s užitím zápisu pomocí \star bázierovskou kvintiku danou vrcholy

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}\mathcal{A}_0^{2\star}, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}\mathcal{A}_0 \star \mathcal{A}_1, \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{15} (\mathcal{A}_0 \star \mathcal{A}_2 + 2\mathcal{A}_1^{2\star}), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}\mathcal{A}_1 \star \mathcal{A}_2, \\ \mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}\mathcal{A}_2^{2\star}.\end{aligned}\tag{3.3.10}$$

3.3.2 Reprezentace rovinných PH křivek pomocí kvaternionů

Přirozeně se nabízí otázka, zdali při volbě vhodného rovinného předobrazu dostaneme vztahy pro PH křivky vyjádřené pomocí komplexních čísel ze sekce 3.2. První otázkou je existence komutativní subalgebry kvaternionů. Jak je ukázáno v [21, s. 11], tato subalgebra je tvořená komplexními jednotkami \mathbf{i} a \mathbf{j}

spolu s operací symetrického součinu; uvažujme $\mathcal{A} = \alpha_0 \mathbf{i} + \alpha_1 \mathbf{j}$ a $\mathcal{B} = \beta_0 \mathbf{i} + \beta_1 \mathbf{j}$, pak

$$\mathcal{A} \star \mathcal{B} = (\alpha_0 \beta_0 - \alpha_1 \beta_1) \mathbf{i} + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0) \mathbf{j}, \quad (3.3.11)$$

což odpovídá součinu dvou komplexních čísel $\mathbf{a} = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{i}$ a $\mathbf{b} = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{i}$; dále výraz $\mathcal{A}^{2\star}$ je ekvivalentní k \mathbf{a}^2 , zvolíme-li tedy předobraz PH křivky ve tvaru

$$\mathcal{A}(t) = u(t) \mathbf{i} + v(t) \mathbf{j}, \quad (3.3.12)$$

kde $u(t)$ a $v(t)$ jsou reálné polynomy, pak dosazením do (3.3.4) dostaneme hodograf ekvivalentní k (3.2.2).

Kapitola 4

Reprezentace MPH křivek pomocí Cliffordovy algebry

Tato kapitola naznačuje další možné rozšíření teorie PH křivek. Zkratka MPH označuje PH křivky v *Minkowského prostoru*, tyto křivky popíšeme na prostorech $\mathbb{R}^{1,1}$ a $\mathbb{R}^{2,1}$ s využitím Cliffordových algeber nad těmito prostory. Při zpracování této kapitoly bylo čerpáno z [1, kap. 24], [14] a [19].

4.1 Střední osa a MAT

Přestože teorie Minkowského prostorů (zejména pak prostoru $\mathbb{R}^{3,1}$) pochází z fyziky, v současnosti nachází uplatnění i v geometrickém modelování.

Definice 4.1. *Střední osa* neboli *MA* (z anglického *medial axis*) uzavřené rovinné oblasti je množina středů všech kružnic oblasti vepsaných (tedy dotýkajících se hranice této oblasti v alespoň dvou bodech).

Medial Axis Transform neboli *MAT*¹ je struktura skládající se ze střední osy $\mathbf{x}(t)$ a funkce $r(t)$, která vyjadřuje poloměry kružnic, jejichž středy leží na $\mathbf{x}(t)$ ve smyslu definice 4.1. V tomto pojetí je hranice oblasti *obalová křivka* systému kružnic daného MAT. Uvažujme tedy následující systém kružnic:

$$\mathbf{r}(t) = (x(t) + r(t) \cos \varphi, y(t) + r(t) \sin \varphi), \quad t \in (0, 1), \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle. \quad (4.1.1)$$

Lze ukázat ([1, s. 511 a 512]), že obalová křivka $\mathbf{e}(t) = (x_e(t), y_e(t))$ tohoto

¹Tento pojem se obvykle do češtiny nepřekládá.

systému je dána vztahy

$$x_e(t) = x(t) - r(t) \frac{r'(t)x'(t) \pm \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) - r'^2(t)}y'(t)}{x'^2(t) + y'^2(t)}, \quad (4.1.2a)$$

$$y_e(t) = y(t) - r(t) \frac{r'(t)y'(t) \mp \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) - r'^2(t)}x'(t)}{x'^2(t) + y'^2(t)}. \quad (4.1.2b)$$

V podkapitole 4.3 zavedeme MPH křivky v Minkowského prostoru $\mathbb{R}^{2,1}$ ve tvaru $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), r(t))$, pro něž platí

$$x'^2(t) + y'^2(t) - r'^2 = \sigma^2(t),$$

díky čemuž lze ve vztahu (4.1.2) odstranit odmocninu a výsledná obalová křivka je *racionální*.

4.2 MPH křivky v $\mathbb{R}^{1,1}$

Jako první rozebereme jednodušší případ MPH křivek v Minkowského rovině $\mathbb{R}^{1,1}$. Nad tímto prostorem vybudujeme jeho Cliffordovu algebru, zformulujeme pythagorejskou podmínku a nalezneme formu vyjádření křivky, která tuto podmínku splňuje.

4.2.1 Cliffordova algebra $\mathcal{A}_{1,1}$

Bázi prostoru $\mathbb{R}^{1,1}$ tvoří vektory $\mathbf{e}_1 = (1, 0)^T$ a $\mathbf{e}_2 = (0, 1)^T$, pro které podle vztahu (2.2.3) platí

$$\|\mathbf{e}_1\|^2 = 1 = -\|\mathbf{e}_2\|^2. \quad (4.2.1)$$

Podle definice 2.21 a věty 2.14 má Cliffordova algebra nad tímto prostorem dimenzi $2^2 = 4$ a její bázi tvoří tyto bázové blady:

$$1, \quad \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2. \quad (4.2.2)$$

Dále pro blady \mathbf{e}_1 a \mathbf{e}_2 platí

$$\mathbf{e}_1^2 = 1 = -\mathbf{e}_2^2. \quad (4.2.3)$$

Obecný multivektor $A \in \mathcal{A}_{1,1}$ můžeme tedy popsat pomocí souřadnicového vektoru z \mathbb{R}^4 jako

$$\begin{aligned} A &= [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

V $\mathcal{C}_{1,1}$ existuje *sudá subalgebra* $\mathcal{C}_{1,1}^+$ (viz definice 2.23), prvek $A \in \mathcal{C}_{1,1}^+$ má souřadnice ve tvaru

$$A = [\alpha_0, 0, 0, \alpha_3] = \alpha_0 + \alpha_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2. \quad (4.2.5)$$

Aplikujeme-li na multivektor $A \in \mathcal{C}_{1,1}^+$ operaci *převrácení* (viz definice 2.13), dostaneme:

$$A^\dagger = \alpha_0 + \alpha_3 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^\dagger = \alpha_0 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 = \alpha_0 - \alpha_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2. \quad (4.2.6)$$

Také v Cliffordově algebře můžeme definovat *symetrický součin* zcela analogicky k symetrickému součinu v \mathbb{H} , viz definice 3.3.

Definice 4.2. Operace $\star : \mathcal{C}_{1,1}^+ \times \mathcal{C}_{1,1}^+ \rightarrow \mathcal{C}_{1,1}$ se nazývá *symetrický součin* a je definována vztahem

$$A \star B = \frac{1}{2} (A \mathbf{e}_1 B^\dagger + B \mathbf{e}_1 A^\dagger). \quad (4.2.7)$$

Výraz $A \star A$ budeme zkráceně zapisovat jako $A^{2\star}$.

Tento součin je zřejmě komutativní a i zde platí tvrzení analogické k větě 3.3:

Věta 4.1. *Výsledkem symetrického součinu dvou multivektorů $A, B \in \mathcal{C}_{1,1}^+$ je vždy homogenní vektor.*

Důkaz. Uvažujme multivektory $A = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ a $B = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$, vynásobením $A \mathbf{e}_1 B^\dagger$ a seskupením odpovídajících složek dostaneme

$$A \mathbf{e}_1 B^\dagger = (\alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1) \mathbf{e}_1 - (\alpha_1 \beta_0 + \alpha_0 \beta_1) \mathbf{e}_2,$$

výsledek tedy nemá žádnou skalární ani bivektorovou složku. □

Současně jsme dokázali, že $\forall A, B \in \mathcal{C}_{1,1}^+ : A \mathbf{e}_1 B^\dagger = B \mathbf{e}_1 A^\dagger$ (stačí formálně zaměnit $\alpha_0 \rightarrow \beta_0$ a $\alpha_1 \rightarrow \beta_1$), platí tedy

Důsledek 4.1.

$$\forall A, B \in \mathcal{C}_{2,1}^+ : A \star B = A \mathbf{e}_1 B^\dagger. \quad (4.2.8)$$

□

4.2.2 Pythagorejská podmínka v $\mathbb{R}^{1,1}$

Věta 4.2. *Nechť jsou $a(t), b(t)$ a $c(t)$ polynomy. Pythagorejská podmínka*

$$a^2(t) - b^2(t) = c^2(t) \quad (4.2.9)$$

je splněna právě tehdy, když lze tyto polynomy vyjádřit pomocí jiných polynomů $u(t)$, $v(t)$ a $w(t)$ ve formě:

$$a(t) = [u^2(t) + v^2(t)]w(t), \quad (4.2.10a)$$

$$b(t) = 2u(t)v(t)w(t), \quad (4.2.10b)$$

$$c(t) = [u^2(t) - v^2(t)]w(t). \quad (4.2.10c)$$

Důkaz. Implikaci zprava doleva lze dokázat snadno přímým dosazením. Implikaci zleva doprava dokážeme tak, že zvolíme $w(t)$ jako největší společný dělitel trojice $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ a označíme:

$$\tilde{a}(t) = \frac{a(t)}{w(t)}, \quad \tilde{b}(t) = \frac{b(t)}{w(t)}, \quad \tilde{c}(t) = \frac{c(t)}{w(t)}.$$

Polynomy $\tilde{a}(t)$, $\tilde{b}(t)$ a $\tilde{c}(t)$ také tvoří pythagorejskou trojici, takže můžeme provést rozklad

$$\tilde{b}^2(t) = \tilde{a}^2(t) - \tilde{c}^2(t) = [\tilde{a}(t) + \tilde{c}(t)][\tilde{a}(t) - \tilde{c}(t)].$$

$\tilde{a}(t) + \tilde{c}(t)$ a $\tilde{a}(t) - \tilde{c}(t)$ nemají žádný společný faktor (jinak by ho měly i $\tilde{a}(t)$, $\tilde{b}(t)$, $\tilde{c}(t)$, které jsme ovšem definovali jako nesoudělné). Potom je ovšem *každý* kořen polynomu $\tilde{b}^2(t)$ buď kořenem $\tilde{a}(t) + \tilde{c}(t)$ nebo $\tilde{a}(t) - \tilde{c}(t)$ a má sudou násobnost, můžeme tedy psát²

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t) + \tilde{c}(t) &= 2u^2(t), \\ \tilde{a}(t) - \tilde{c}(t) &= 2v^2(t), \\ \tilde{b}^2(t) &= 4u^2(t)v^2(t), \end{aligned}$$

pro nesoudělné polynomy $u(t)$ a $v(t)$. Sečtením prvních dvou vztahů dostaneme $\tilde{a}(t) = u^2(t) + v^2(t)$, odečtením $\tilde{c}(t) = u^2(t) - v^2(t)$, ze třetího vztahu plyne $\tilde{b}(t) = 2u(t)v(t)$. Přenásobením polynomem $w(t)$ dostaneme tvrzení věty. \square

V následujícím textu předpokládáme, že $w(t) \equiv 1$, výsledná pythagorejská trojice tedy bude *základní*. Uvažujme nyní polynom v sudé subalgebře $\mathcal{C}_{1,1}^+$

$$P(t) = u(t) - v(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2, \quad (4.2.11)$$

kde $u(t)$ a $v(t)$ jsou reálné polynomy. Aplikujeme-li na tento polynom operaci převrácení, dostaneme

$$P^\dagger(t) = u(t) + v(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2. \quad (4.2.12)$$

²Koeficient 2 lze přidat bez újmy na obecnosti, neboť nemá žádný vliv na kořeny.

Pythagorejský hodograf pak lze vyjádřit jako geometrický součin

$$\mathbf{x}'(t) = P(t)\mathbf{e}_1 P^\dagger(t) = P^{2\star}(t) = [u^2(t) + v^2(t)]\mathbf{e}_1 + 2u(t)v(t)\mathbf{e}_2. \quad (4.2.13)$$

Nejjednodušší volba předobrazu $P(t)$ je lineární polynom:

$$P(t) = P_0 b_0^1(t) + P_1 b_1^1(t) = P_0(1-t) + P_1 t, \quad (4.2.14)$$

kde $P_r = u_r - v_r \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$, $r = 0, 1$. Dosazením do (4.2.13) dostaneme hodograf s předpisem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \left(P_0 \mathbf{e}_1 b_0^1(t) + P_1 \mathbf{e}_1 b_1^1(t) \right) \left(P_0^\dagger b_0^1(t) + P_1^\dagger b_1^1(t) \right) \\ &= P_0 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger b_0^2(t) + \frac{1}{2} \left(P_0 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger + P_1 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger \right) b_1^2(t) + P_1 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger b_2^2(t) \\ &= P_0 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger (1-t)^2 + \frac{1}{2} \left(P_0 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger + P_1 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger \right) 2(1-t)t + P_1 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger t^2, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

Integrací (4.2.15) podle vztahu (2.4.13) a zápisem pomocí operace \star dostaneme tyto předpisy pro vrcholy řídicího polygonu:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3} P_0^{2\star}, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3} P_0 \star P_1, \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3} P_1^{2\star}. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Bod \mathbf{p}_0 volíme libovolně jako integrační konstantu. Řídicí polygon má 4 vrcholy, výsledná MPH křivka je tedy bézierovská kubika.

Další možnou volbou předobrazu je kvadratický polynom

$$P(t) = P_0 b_0^2(t) + P_1 b_1^2(t) + P_2 b_2^2(t), \quad (4.2.17)$$

kde $P_r = u_r - v_r \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$, $r = 0, 1, 2$. Dosazením do (4.2.13) dostaneme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= P_0 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger b_0^4(t) + \frac{1}{2} \left(P_0 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger + P_1 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger \right) b_1^4(t) \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(P_0 \mathbf{e}_1 P_2^\dagger + P_2 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger + 4P_1 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger \right) b_2^4(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(P_1 \mathbf{e}_1 P_2^\dagger + P_2 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger \right) b_3^4(t) + P_2 \mathbf{e}_1 P_2^\dagger b_4^4(t) \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Integrací (4.2.18) podle vztahu (2.4.13) a zápisem dostaneme tyto předpisy pro vrcholy řídicího polygonu:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5}P_0^{2\star}, \\
\mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5}P_0 \star P_1, \\
\mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{15}(P_0 \star P_2 + 2P_1^{2\star}), \\
\mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5}P_1 \star P_2, \\
\mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5}P_2^{2\star}.
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Bod \mathbf{p}_0 volíme libovolně jako integrační konstantu. Řídicí polygon má 6 vrcholů, výsledná MPH křivka je tedy bézierovská kvintika.

4.3 MPH křivky v $\mathbb{R}^{2,1}$

V této sekci popíšeme MPH křivky v prostoru $\mathbb{R}^{2,1}$ pomocí Cliffordovy algebry $\mathcal{A}_{2,1}$.

4.3.1 Cliffordova algebra $\mathcal{A}_{2,1}$

Uvažujme bázi prostoru $\mathbb{R}^{2,1}$:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T, \quad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T. \tag{4.3.1}$$

Podle vztahu (2.2.3) platí

$$\|\mathbf{e}_1\|^2 = \|\mathbf{e}_2\|^2 = 1 = -\|\mathbf{e}_3\|^2. \tag{4.3.2}$$

Podle definice 2.21 a věty 2.14 má Cliffordova algebra nad tímto prostorem dimenzi $2^3 = 8$ a její bázi tvoří tyto bazové blady:

$$1, \quad \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3. \tag{4.3.3}$$

Dále pro blady $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ a \mathbf{e}_3 platí

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2 = 1 = -\mathbf{e}_3^2. \tag{4.3.4}$$

Obecný multivektor $A \in \mathcal{C}_{2,1}$ můžeme tedy popsat pomocí souřadnicového vektoru z \mathbb{R}^8 jako

$$\begin{aligned} A &= [\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3 + \alpha_4 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \alpha_5 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \alpha_6 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 + \alpha_7 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

V $\mathcal{C}_{2,1}$ dále existuje *sudá subalgebra* $\mathcal{C}_{2,1}^+$, multivektor $A \in \mathcal{C}_{2,1}^+$ má souřadnice ve tvaru

$$\begin{aligned} A &= [\alpha_0, 0, 0, 0, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0] \\ &= \alpha_0 + \alpha_4 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \alpha_5 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \alpha_6 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Aplikujeme-li na multivektor $A \in \mathcal{C}_{2,1}^+$ operaci *převrácení*, dostaneme:

$$\begin{aligned} A^\dagger &= \alpha_0 + \alpha_4 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)^\dagger + \alpha_5 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3)^\dagger + \alpha_6 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3)^\dagger \\ &= \alpha_0 + \alpha_4 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \alpha_5 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 + \alpha_6 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2 \\ &= \alpha_0 - \alpha_4 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - \alpha_5 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - \alpha_6 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Analogicky k definicím 3.3 a 4.2 i v $\mathcal{C}_{2,1}^+$ definujeme *symetrický součin*:

Definice 4.3. Operace $\star : \mathcal{C}_{2,1}^+ \times \mathcal{C}_{2,1}^+ \rightarrow \mathcal{C}_{2,1}$ se nazývá *symetrický součin* a je definována vztahem

$$A \star B = \frac{1}{2} (A \mathbf{e}_1 B^\dagger + B \mathbf{e}_1 A^\dagger), \quad (4.3.8)$$

Výraz $A \star A$ budeme zkráceně zapisovat jako $A^{2\star}$.

Tento součin je zřejmě komutativní a i zde platí tvrzení analogické k větám 3.3 a 4.1

Věta 4.3. *Výsledkem symetrického součinu dvou multivektorů $A, B \in \mathcal{C}_{2,1}^+$ je vždy homogenní vektor.*

Důkaz. Uvažujme multivektory $A = \alpha_0 + \alpha_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \alpha_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \alpha_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ a $B = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \beta_2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \beta_3 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$, vynásobením $A \mathbf{e}_1 B^\dagger$ a seskupením odpovídajících složek dostaneme

$$\begin{aligned} A \mathbf{e}_1 B^\dagger &= (\alpha_0 \beta_0 + \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_3) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (\alpha_0 \beta_2 + \alpha_2 \beta_0 - \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (\alpha_0 \beta_1 + \alpha_1 \beta_0 - \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \mathbf{e}_3 \\ &\quad + (-\alpha_0 \beta_3 + \alpha_3 \beta_0 + \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Zaměníme-li $\alpha_0 \rightarrow \beta_0$, $\alpha_1 \rightarrow \beta_1$ atd., dokážeme, že

$$\langle A\mathbf{e}_1 B^\dagger \rangle_3 = -\langle B\mathbf{e}_1 A^\dagger \rangle_3,$$

trivektorová složka $A\mathbf{e}_1 B^\dagger + B\mathbf{e}_1 A^\dagger$ je tedy vždy nulová a skalární ani bivektorová složka nejsou přítomny, z čehož plyne tvrzení věty. \square

4.3.2 Pythagorejská podmínka v $\mathbb{R}^{2,1}$

Věta 4.4. *Nechť jsou $a(t), b(t), c(t)$ a $d(t)$ polynomy. Pythagorejská podmínka*

$$a^2(t) + b^2(t) - c^2(t) = d^2(t) \quad (4.3.9)$$

je splněna právě tehdy, když lze tyto polynomy vyjádřit pomocí jiných polynomů $u(t), v(t), p(t)$ a $q(t)$ ve formě:

$$a(t) = u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t), \quad (4.3.10a)$$

$$b(t) = 2[u(t)p(t) - v(t)q(t)], \quad (4.3.10b)$$

$$c(t) = 2[u(t)v(t) - p(t)q(t)], \quad (4.3.10c)$$

$$d(t) = u^2(t) - v^2(t) + p^2(t) - q^2(t). \quad (4.3.10d)$$

Důkaz. Implikaci zprava doleva lze dokázat snadno přímým dosazením. Implikaci zleva doprava se znovu dokazuje faktorizací a zkoumáním vlastností kořenů, podobně jako ve větě 3.2. Konkrétní postup lze nalézt v [1, s. 513]. \square

Uvažujme nyní polynom v sudé subalgebře $\mathcal{C}_{2,1}^+$:

$$P(t) = u(t) - p(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - v(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + q(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3, \quad (4.3.11)$$

kde $u(t), v(t), p(t)$ a $q(t)$ jsou reálné polynomy. Aplikujeme-li na tento polynom operaci převrácení, dostaneme

$$P^\dagger(t) = u(t) + p(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + v(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - q(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3. \quad (4.3.12)$$

Pythagorejský hodograf pak lze vyjádřit jako geometrický součin

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) = P(t)\mathbf{e}_1 P^\dagger(t) = P^{2^*}(t) &= [u^2(t) + v^2(t) - p^2(t) - q^2(t)]\mathbf{e}_1 \\ &+ 2[u(t)p(t) - v(t)q(t)]\mathbf{e}_2 \\ &+ 2[u(t)v(t) - p(t)q(t)]\mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Polynom $P(t)$ se nazývá *předobraz MPH křivky*. Volbou předobrazu jako lineárního polynomu

$$P(t) = P_0 b_0^1(t) + P_1 b_1^1(t) = P_0 (1 - t) + P_1 t, \quad (4.3.14)$$

kde $P_r = u_r - p_r \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - v_r \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + q_r \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$, $r = 0, 1$, hodograf křivky bude mít podle (4.3.13) a (2.4.11) předpis

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \left(P_0 \mathbf{e}_1 b_0^1(t) + P_1 \mathbf{e}_1 b_1^1(t) \right) \left(P_0^\dagger b_0^1(t) + P_1^\dagger b_1^1(t) \right) \\ &= P_0 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger b_0^2(t) + \frac{1}{2} \left(P_0 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger + P_1 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger \right) b_1^2(t) + P_1 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger b_2^2(t) \\ &= P_0 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger (1-t)^2 + \frac{1}{2} \left(P_0 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger + P_1 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger \right) 2(1-t)t + P_1 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger t^2, \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

Integrací hodografu (4.3.15) a zápisem s využitím operace \star dostaneme pro vrcholy řídicího polygonu výsledné křivky vztahy

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{3} P_0^{2\star}, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{3} P_0 \star P_1, \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{3} P_1^{2\star}. \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

Bod \mathbf{p}_0 volíme libovolně jako integrační konstantu. Řídicí polygon má 4 vrcholy, výsledná MPH křivka je tedy bézierovská kubika.

Volbou předobrazu jako kvadratického polynomu

$$P(t) = P_0 b_0^2(t) + P_1 b_1^2(t) + P_2 b_2^2(t), \quad (4.3.17)$$

kde $P_r = u_r - p_r \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - v_r \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + q_r \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$, $r = 0, 1, 2$ dostaneme hodograf

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= P_0 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger b_0^4(t) + \frac{1}{2} \left(P_0 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger + P_1 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger \right) b_1^4(t) \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(P_0 \mathbf{e}_1 P_2^\dagger + P_2 \mathbf{e}_1 P_0^\dagger + 4P_1 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger \right) b_2^4(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(P_1 \mathbf{e}_1 P_2^\dagger + P_2 \mathbf{e}_1 P_1^\dagger \right) b_3^4(t) + P_2 \mathbf{e}_1 P_2^\dagger b_4^4(t) \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

a jeho integrací tyto předpisy pro vrcholy řídicího polygonu výsledné křivky

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{p}_0 + \frac{1}{5} P_0^{2\star}, \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}_1 + \frac{1}{5} P_0 \star P_1, \\ \mathbf{p}_3 &= \mathbf{p}_2 + \frac{1}{15} \left(P_0 \star P_2 + 2P_1^{2\star} \right), \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{p}_3 + \frac{1}{5} P_1 \star P_2, \\ \mathbf{p}_5 &= \mathbf{p}_4 + \frac{1}{5} P_2^{2\star}. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Bod \mathbf{p}_0 volíme libovolně jako integrační konstantu. Řídící polygon má 6 vrcholů, výsledná MPH křivka je tedy bézierovská kvintika.

4.3.3 Reprezentace rovinných MPH křivek v $\mathcal{C}_{2,1}$

Odborně jako v sekci 3.3.2 i u MPH křivek lze studovat, zdali zůstanou v platnosti vztahy uvedené v podkapitole 4.2, omezíme-li se na rovinné předobrazy v $\mathcal{C}_{2,1}^+$.

Oproti přechodu mezi kvaterniony a komplexními čísly máme situaci ulehčenou skutečností, že $\mathcal{C}_{1,1}$ i $\mathcal{C}_{2,1}$ jsou z definice nekomutativní algebry, navíc dvojice vztahů (4.2.15), (4.3.15) a (4.2.18), (4.3.18) jsou zcela identické.

Tvrzení 4.1. *Cliffordova algebra $\mathcal{C}_{1,1}^+$ je uzavřenou subalgebrou $\mathcal{C}_{2,1}^+$.*

Důkaz. Důkaz provedeme prostým ověřením vztahů pro součet a součin dvou prvků z $\mathcal{C}_{2,1}^+$ ve tvaru $A_r = [\alpha_{0,r}, 0, 0, 0, 0, \alpha_{5,r}, 0, 0]$, $r = 1, 2$. \square

Díky tomu volbou předobrazu jako polynomu

$$P(t) = u(t) - v(t)\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3, \quad (4.3.20)$$

dostaneme dosazením do (4.3.13) a formálním přeznačením $\mathbf{e}_3 \rightarrow \mathbf{e}_2$ hodograf přesně ve tvaru (4.2.13).

Kapitola 5

Vybrané modelovací techniky

V této závěrečné kapitole uvedeme různé možnosti aplikací PH a MPH křivek a naznačíme postupy pro hermitovskou interpolaci těmito křivkami. Shrňme nejprve některé z hlavních výhod PH a MPH křivek, které přispěly k obrovskému zájmu o jejich rozvoj:

- *Parametrická rychlost křivky* (definice 2.25) je (po částech) polynomiální (popř. racionální) funkce, což umožňuje její rychlý a přesný výpočet, což dále usnadňuje výpočet délky oblouku u reálné křivky nebo obalové křivky MAT.
- Rovinné PH křivky mají racionální *tečnu, normálu, první křivost a ofset* (*ekvidistantní křivku*, viz [1, s. 388 a 389]).
- Prostorové PH křivky mají racionální *repér minimalizující rotaci* ([1, kap. 30]).
- MAT reprezentované pomocí MPH křivek v $\mathbb{R}^{2,1}$ mají racionální hranice a ofsety.

Obecně lze říci, že formulace vztahů pro PH křivky pomocí komplexních čísel v rovinném případě, pomocí kvaternionů v případě prostorovém a užití Cliffordových algeber pro MPH křivky převádí interpolační problém na otázku nalezení vhodného *předobrazu* interpolující křivky. To s sebou přináší otázky řešení a řešitelnosti lineárních, kvadratických a kvartických rovnic a jejich soustav v těchto algebrách. V následujících podkapitolách zmíníme vybrané metody interpolací, které využívají studovaný popis křivek; další články pojednávající o těchto tématech lze nalézt např. v časopise CAGD¹.

¹<http://www.journals.elsevier.com/computer-aided-geometric-design/>

5.1 Hermitovská interpolace v \mathbb{R}^2 pomocí PH křivek

Nejjednodušším interpolačním problémem je geometrická (G^1) interpolace pomocí PH kubik, kdy vstupem jsou dva body $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$ a jednotkové tečné vektory $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$ v zadaných bodech; po interpolantu $\mathbf{x}(t), t \in \langle 0, 1 \rangle$ požadujeme, aby $\mathbf{x}(0) = \mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0$ (jak bylo ukázáno v sekcích 3.1.1 a 3.2, tato podmínka je splněna automaticky vhodnou volbou integračních konstant), dále $\mathbf{x}(1) = \mathbf{p}_3 = \mathbf{q}_1$, $\mathbf{x}'(0) = a\mathbf{t}_0$ a $\mathbf{x}'(1) = b\mathbf{t}_1$, kde $a, b \in \mathbb{R}$. Bylo ukázáno ([26],[27]), že tato úloha vede na kvadratickou rovnici a má alespoň jedno řešení, přičemž v [27] jsou formulovány podmínky, při jejichž splnění neobsahuje výsledná křivka samoprůnik.

Dalším zkoumaným problémem je C^1 Hermitovská interpolace pomocí PH kvintik; vstupem jsou opět body $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1$ a tečné vektory $\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1$, výstupem křivka $\mathbf{x}(t), t \in \langle 0, 1 \rangle$, splňující interpolační podmínky mají tvar $\mathbf{x}(0) = \mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{p}_5 = \mathbf{q}_1$ a $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{t}_0$, $\mathbf{x}'(1) = \mathbf{t}_1$. Tento problém byl řešen s využitím komplexní reprezentace v [28] a [29]; vede na soustavu tří kvadratických rovnic pro tři neznámé $\mathbf{w}_r \in \mathbb{C}$, $r = 0, 1, 2$ (viz (3.2.7)), tato soustava má 8 řešení, která však určují pouze 4 jedinečné křivky, z nichž se nejvhodnější interpolant vybírá na základě minimální křivosti.

V odborné literatuře lze nalézt mnoho dalších metod pro interpolace, pouze formou odkazu uvedme ještě např. G^2 interpolace křivkami stupně 7 [30] a C^1 interpolace pomocí dvou spojených kubických interpolantů třídy C^1 [31].

5.2 Hermitovská interpolace v \mathbb{R}^3 pomocí PH křivek

Také v prostorovém případě je nejjednodušší interpolační úlohou G^1 interpolace pomocí PH kubiky. Interpolační podmínky jsou identické jako u rovinného případu $\mathbf{x}(0) = \mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0$, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{p}_3 = \mathbf{q}_1$, $\mathbf{x}'(0) = a\mathbf{t}_0$ a $\mathbf{x}'(1) = b\mathbf{t}_1$, $a, b \in \mathbb{R}$ (v [24] je druhá podmínka uvedena v alternativní formě $\mathbf{x}(1) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$). Úloha vede na soustavu tří kvadratických rovnic v kvaternionech a může mít žádné, jedno nebo dvě řešení. V případě dvou řešení se vhodný interpolant vybírá na základě křivosti. Tato tematika je zpracována např. v [23],[24] a [32].

Úloha C^1 interpolace PH kvintikou má v prostorovém případě interpolační podmínky (při shodném označení jako v předchozích odstavcích) $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{t}_0$, $\mathbf{x}'(1) = \mathbf{t}_1$ a $\frac{1}{5} \sum_{i=0}^4 \mathbf{h}_i = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$, kde \mathbf{h}_i jsou vrcholy řídicího polygonu hodografu $\mathbf{x}'(t)$ ve formě bézierovské křivky. Úloha vede na soustavu tří kvadratických rovnic v kvaternionech, která má dvouparametrický systém řešení. Tato úloha je rozebrána např. v článcích [21] a [33].

Také pro prostorové interpolace bychom mohli zmínit mnoho dalších prací, uveďme např. [34], pojednávající o C^2 interpolaci PH křivkami stupně 9.

5.3 Hermitovská interpolace pomocí MPH křivek

Jelikož hlavní aplikační potenciál spočívá v reprezentaci MAT v prostoru $\mathbb{R}^{2,1}$, omezíme se pouze na tento případ. I zde je nejjednodušší úlohou G^1 interpolace pomocí MPH kubik, interpolační podmínky mají tvar $\mathbf{x}(1) = \mathbf{p}_3 = \mathbf{q}_1$, $\mathbf{x}'(0) = a\mathbf{t}_0$ a $\mathbf{x}'(1) = b\mathbf{t}_1$, $a, b \in \mathbb{R}$. Úloha vede na soustavu dvou kvadratických rovnic obsahujících *Minkowského součin* (definice 2.11) a má 4 řešení ([25]). Jsou popsány i způsoby G^1 , $C^{1/2}$ a C^1 interpolace pomocí MPH kvartik ([35]), G^1 interpolace pomocí MPH kvintik ([36]) a dále C^1 a C^2 interpolací křivkami stupňů 5 a 9, využívajících Cliffordovu algebru $\mathcal{C}_{2,1}$ ([14],[22]). Poznamenejme však, že oproti PH křivkám je v současnosti problematika MPH křivek prozkoumána značně méně a že zmíněné (a pokud je nám známo, tak ani žádné další) práce nevyužívají formalismus, který jsme zavedli v kapitole 4.

Kapitola 6

Závěr

PH a MPH křivky jsou tématem, které vzbuzuje velký zájem již od jejich zavedení v roce 1990. Tento zájem je motivován především velkým množstvím jejich aplikačních vlastností. Cílem práce bylo uvést jednotný formalismus vyjádření PH a MPH křivek v rovině a prostoru a naznačení možností aplikace těchto křivek, zejména hermitovských interpolací pomocí MPH křivek nízkého stupně. Vlastním přínosem práce jsou tyto body:

- Axiomatické zavedení Cliffordových algeber (podkapitola 2.3) a formulace vztahu mezi nimi a reálnými prostory (definice 2.21).
- Nalezení shodných předpisů pro řídicí polygony MPH křivek v $\mathbb{R}^{1,1}$ a $\mathbb{R}^{2,1}$ (kap. 4).
- Sjednocení vztahů pro hodografy a řídicí polygony PH a MPH křivek s využitím operace symetrického součinu (tabulka 6.1). Ačkoliv jsme explicitně uvedli pouze předpisy pro křivky stupňů 3 a 5, rozšíření na křivky vyšších stupňů by bylo triviální záležitostí v libovolném ze zkoumaných případů.

V další práci bychom se rádi věnovali zkoumání možností využití formalismu pro MPH křivky v Cliffordově algebře, zejména řešení rovnic typu $X^{2^*} = \mathbf{c}$ a $X_1 \star X_2 = \mathbf{c}$ a jejich soustav, které vznikají při řešení interpolačních úloh.

Typ křivky	Prostor předobrazu	Předobraz a hodograf
PH v \mathbb{R}^2	\mathbb{C}	$\mathbf{w}(t) = u(t) + v(t) \mathbf{i}$ $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{w}^2(t)$
PH v \mathbb{R}^3	\mathbb{H}	$\mathcal{A}(t) = u(t) + v(t) \mathbf{i} + p(t) \mathbf{j} + q(t) \mathbf{k}$ $\mathbf{x}'(t) = \mathcal{A}(t) \mathbf{i} \mathcal{A}^*(t) = \mathcal{A}^{2*}(t)$
MPH v $\mathbb{R}^{1,1}$	$\mathcal{C}_{1,1}$	$P(t) = u(t) - v(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2$ $\mathbf{x}'(t) = P(t) \mathbf{e}_1 P^\dagger(t) = P^{2*}(t)$
MPH v $\mathbb{R}^{2,1}$	$\mathcal{C}_{2,1}$	$P(t) = u(t) - p(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 - v(t) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + q(t) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ $\mathbf{x}'(t) = P(t) \mathbf{e}_1 P^\dagger(t) = P^{2*}(t)$

Tabulka 6.1: Shrnutí formalismu pro PH a MPH křivky.

Literatura

- [1] FAROUKI, Rida T. *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*. New York: Springer, 2008. Geometry and Computing. ISBN 978-354-0733-973.
- [2] LUONESTO, Pertti. *Clifford Algebras and Spinors*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001. ISBN 978-0-521-00551-5.
- [3] COHN, P. *Basic Algebra: Groups, Rings and Fields*. 2nd ed. London: Springer, 2005. ISBN 18-523-3587-4.
- [4] HESTENES, David a Garret SOBCZYK. *Clifford Algebra to Geometric Calculus: A Unified Language for Mathematics and Physics*. Dordrecht: D. Reidel, 1984. Fundamental Theories of Physics. ISBN 90-277-2561-6.
- [5] HESTENES, David. *New Foundations for Classical Mechanics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. Fundamental Theories of Physics. ISBN 0-7923-5514-8.
- [6] PERWASS, Christian. *Geometric Algebra with Applications in Engineering*. Berlin: Springer, 2009. Geometry and Computing. ISBN 978-3-642-10032-1.
- [7] SELIG, J. M. *Geometric Fundamentals of Robotics*. New York: Springer, 2005. ISBN 978-1-4419-1929-8.
- [8] VRŠEK, Jan. *Studium Lieovy sférické geometrie s využitím geometrické algebry*. Plzeň, 2007. Diplomová práce. Západočeská Univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky. Vedoucí práce RNDr. Miroslav Lávička, Ph.D.
- [9] TOMICZEK, Petr. ZČU. *Matematická analýza 3*. Plzeň, 2011. Dostupné z: <http://home.zcu.cz/~tomiczek/Data/MA3.pdf>
- [10] ŠEDIVÁ, Blanka. ZČU. *Komplexní čísla*. Plzeň, 2013. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~sediva/ma4/01_ma4.pdf
- [11] JEŽEK, František. ZČU. *Diferenciální geometrie: Pomocný učební text*. Plzeň, 2010. Dostupné z: http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/download/508/1437/file/DG_Final-new-10.pdf

- [12] FAROUKI, Rida T. a V.T. RAJAN. Algorithms for polynomials in Bernstein form. *Computer Aided Geometric Design* [online]. 1988, roč. 5, č. 1, s. 1-26 [cit. 2013-04-26]. ISSN 01678396.
- [13] CHOI, Hyeong In, Doo Seok LEE a Hwan Pyo MOON. Clifford Algebra, Spin Representation and Rational Parameterization of Curves and Surfaces. *Advances in Computational Mathematics* [online]. 2002, roč. 17, 1/2, s. 5-48 [cit. 2013-04-26]. ISSN 10197168.
- [14] KOSINKA, Jiří a Bert JÜTTLER. C^1 Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics in Minkowski space. *Advances in Computational Mathematics* [online]. 2009, vol. 30, issue 2, s. 123-140 [cit. 2013-05-14]. DOI: 10.1007/s10444-007-9059-y. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/s10444-007-9059-y>
- [15] FAROUKI, Rida T. a Takis SAKKALIS. Pythagorean hodographs. *IBM Journal of Research and Development* [online]. 1990, vol. 34, issue 5, s. 736-752 [cit. 2013-05-22]. DOI: 10.1147/rd.345.0736. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=5389848>
- [16] FAROUKI, Rida T. a Takis SAKKALIS. Pythagorean-hodograph space curves. *Advances in Computational Mathematics* [online]. 1994, vol. 2, issue 1, s. 41-66 [cit. 2013-05-22]. DOI: 10.1007/BF02519035. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/BF02519035>
- [17] MOON, Hwan Pyo. Minkowski Pythagorean hodographs. *Computer Aided Geometric Design* [online]. 1999, vol. 16, issue 8, s. 739-753 [cit. 2013-05-22]. DOI: 10.1016/S0167-8396(99)00016-3. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167839699000163>
- [18] POTTMANN, Helmut. Rational curves and surfaces with rational offsets. *Computer Aided Geometric Design* [online]. 1995, vol. 12, issue 2, s. 175-192 [cit. 2013-05-22]. DOI: 10.1016/0167-8396(94)00008-G. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/016783969400008G>
- [19] ŠÍR, Zbyněk a Jiří KOSINKA. Low Degree Euclidean and Minkowski Pythagorean Hodograph Curves. In: DÆHLEN, Morten, Michael FLOATER, Tom LYCHE, Jean-Louis MERRIEN, Knut MØRKEN a Larry L. SCHUMAKER. *Mathematical Methods for Curves and Surfaces: 7th International Conference, MMCS 2008, Tønsberg, Norway, June 26-July 1, 2008 : revised selected papers* [online]. Berlin: Springer, 2010, s. 394-418 [cit. 2013-05-28]. Lecture notes in computer science, 5862. ISBN 978-3-642-11620-9. DOI: 10.1007/978-3-642-11620-9_26. Dostupné z: http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-11620-9_26
- [20] LÁVIČKA, Miroslav. ZČU. *Syntetická Geometrie: Pomocný učební text.*

- Plzeň, 2007. Dostupné z: http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/download/506/1432/file/sg_text.pdf
- [21] ŠÍR, Zbyněk a Bert JÜTTLER. Spatial Pythagorean Hodograph Quintics and the Approximation of Pipe Surfaces. In: MARTIN, Ralph, Helmut BEZ a Malcolm SABIN. *Mathematics of Surfaces XI: 11th IMA International Conference, Loughborough, UK, September 5-7, 2005. Proceedings* [online]. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2005, s. 364-380 [cit. 2013-05-28]. Lecture Notes in Computer Science, 3604. ISBN 978-3-540-31835-4. DOI: 10.1007/11537908_22. Dostupné z: http://link.springer.com/chapter/10.1007/11537908_22
- [22] KOSINKA, Jiří a Zbyněk ŠÍR. C^2 Hermite interpolation by Minkowski Pythagorean hodograph curves and medial axis transform approximation. *Computer Aided Geometric Design* [online]. 2010, vol. 27, issue 8, s. 631-643 [cit. 2013-05-28]. DOI: 10.1016/j.cagd.2010.04.005. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167839610000506>
- [23] JÜTTLER, Bert a Christoph MÄURER. Cubic Pythagorean hodograph spline curves and applications to sweep surface modeling. *Computer-Aided Design* [online]. 1999, vol. 31, issue 1, s. 73-83 [cit. 2013-05-29]. DOI: 10.1016/S0010-4485(98)00081-5. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0010448598000815>
- [24] PELOSI, Francesca, Rida T. FAROUKI, Carla MANNI a Alessandra SESTINI. Geometric Hermite interpolation by spatial Pythagorean-hodograph cubics. *Advances in Computational Mathematics* [online]. 2005, vol. 22, issue 4, s. 325-352 [cit. 2013-05-28]. DOI: 10.1007/s10444-003-2599-x. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/s10444-003-2599-x>
- [25] KOSINKA, Jiří a Bert JÜTTLER. G^1 Hermite interpolation by Minkowski Pythagorean hodograph cubics. *Computer Aided Geometric Design* [online]. 2006, vol. 23, issue 5, s. 401-418 [cit. 2013-05-28]. DOI: 10.1016/j.cagd.2006.01.004. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167839606000069>
- [26] MEEK, D.S. a D.J. WALTON. Geometric Hermite interpolation with Tschirnhausen cubics. *Journal of Computational and Applied Mathematics* [online]. 1997, vol. 81, issue 2, s. 299-309 [cit. 2013-05-29]. DOI: 10.1016/S0377-0427(97)00066-6. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377042797000666>
- [27] BYRTUS, Marek a Bohumír BASTL. G^1 Hermite interpolation by PH cubics revisited. *Computer Aided Geometric Design* [online]. 2010, vol. 27, issue 8, s. 622-630 [cit. 2013-05-29]. DOI:

- 10.1016/j.cagd.2010.06.004. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167839610000695>
- [28] FAROUKI, R. T. a C. A. NEFF. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph quintics. *Mathematics of Computation* [online]. 1995, vol. 64, issue 212, s. 1589-1589 [cit. 2013-05-29]. DOI: 10.1090/S0025-5718-1995-1308452-6. Dostupné z: <http://www.ams.org/jourcgi/jour-getitem?pii=S0025-5718-1995-1308452-6>
- [29] MOON, Hwan Pyo, Rida T. FAROUKI a Hyeong In CHOI. Construction and shape analysis of PH quintic Hermite interpolants. *Computer Aided Geometric Design* [online]. 2001, vol. 18, issue 2, s. 93-115 [cit. 2013-05-29]. DOI: 10.1016/S0167-8396(01)00016-4. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167839601000164>
- [30] JÜTTLER, B. Hermite interpolation by Pythagorean hodograph curves of degree seven. *Mathematics of Computation* [online]. 2001-07-01, vol. 70, issue 235, s. 1089-1112 [cit. 2013-05-29]. DOI: 10.1090/S0025-5718-00-01288-6. Dostupné z: <http://www.ams.org/journal-getitem?pii=S0025-5718-00-01288-6>
- [31] BASTL, Bohumír, Kristýna SLABÁ a Marek BYRTUS. Planar C^1 Hermite interpolation with uniform and non-uniform TC-biarcs. *Computer Aided Geometric Design* [online]. 2013, vol. 30, issue 1, s. 58-77 [cit. 2013-05-29]. DOI: 10.1016/j.cagd.2012.07.003. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167839612000921>
- [32] KWON, Song-Hwa. Solvability of Hermite interpolation by spatial Pythagorean-hodograph cubics and its selection scheme. *Computer Aided Geometric Design* [online]. 2010, vol. 27, issue 2, s. 138-149 [cit. 2013-05-29]. DOI: 10.1016/j.cagd.2009.11.002. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167839609001356>
- [33] FAROUKI, Rida T., Carlotta GIANNELLI, Carla MANNI a Alessandra SESTINI. Identification of spatial PH quintic Hermite interpolants with near-optimal shape measures. *Computer Aided Geometric Design* [online]. 2008, vol. 25, 4-5, s. 274-297 [cit. 2013-05-29]. DOI: 10.1016/j.cagd.2007.09.007. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167839607001276>
- [34] ŠÍR, Zbyněk a Bert JÜTTLER. C^2 Hermite interpolation by Pythagorean Hodograph space curves. *Mathematics of Computation* [online]. 2007-07-01, vol. 76, issue 259, s. 1373-1392 [cit. 2013-05-29]. DOI: 10.1090/S0025-5718-07-01925-4. Dostupné z: <http://www.ams.org/journal-getitem?pii=S0025-5718-07-01925-4>
- [35] KIM, Gwang-Il a Min-Ho AHN. C^1 Hermite interpolation using MPH

quartic. *Computer Aided Geometric Design* [online]. 2003, vol. 20, issue 7, s. 469-492 [cit. 2013-05-29]. DOI: 10.1016/j.cagd.2003.06.001. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167839603000979>

- [36] KOSINKA, Jiří a Miroslav LÁVIČKA. A unified Pythagorean hodograph approach to the medial axis transform and offset approximation. *Journal of Computational and Applied Mathematics* [online]. 2011, vol. 235, issue 12, s. 3413-3424 [cit. 2013-05-29]. DOI: 10.1016/j.cam.2011.02.001. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0377042711000744>