



**ZÁPADOČESKÁ
UNIVERZITA
V PLZNI**

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Alexandra Lochová

Bakalářská práce

**Analýza numerických modelů
transportních procesů**

Vedoucí práce: Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.

Obor: Matematika pro přírodní vědy

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vytvořila samostatně s použitím literatury, kterou uvádím v seznamu.

V Hostomicích pod Brdy dne 10. 10. 2012

podpis

Děkuji panu Doc. Ing. Marku Brandnerovi, Ph.D. za obětavé vedení bakalářské práce a poskytnutou literaturu, dále za možnost konzultací a osobních setkání za účelem diskuze o řešeném problému. Ráda bych také poděkovala své rodině, všem blízkým a přátelům, kteří mě při vytváření této práce podpořili a bez jejich pomoci by nebylo možné práci dokončit.

Obsah

1	Vybrané matematické modely	6
1.1	Matematický model a modelování	6
1.2	Zákony zachování	7
1.3	Transportní rovnice	9
1.4	Difúze a vedení tepla	10
1.5	Vedení tepla ve 3D	11
2	Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic a formulace úloh	14
2.1	Klasifikace PDR	14
2.2	Klasifikace PDR druhého řádu	16
2.3	Okrajové podmínky a jejich rozdělení	17
2.4	Počáteční podmínky	18
2.5	Řešení počátečně-okrajové úlohy	19
3	Numerické metody	20
3.1	Chyby numerických metod, formulace úlohy	20
3.2	Vybrané typové rovnice	22
3.3	Vybrané numerické metody	22
3.3.1	Metoda typu upwind	23
3.3.2	Laxova–Friedrichsova metoda	24
3.3.3	Laxova–Wendroffova metoda	25
3.3.4	Metoda typu flux–limiter	26
4	Numerické experimenty	29
4.1	Vlastnosti analytického řešení	29
4.2	Numerické řešení	30
4.3	Výsledky numerických experimentů	34
4.4	Odhad řádu numerické metody	35
4.4.1	Konstrukce algoritmu pro odhad řádu numerické metody	35

Název práce: Analýza numerických modelů transportních procesů

Autor: Alexandra Lochová

Katedra: Katedra matematiky

Vedoucí bakalářské práce: Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.

Abstrakt: Tato práce se zabývá návrhem metodiky pro odhad řádu chyby některých diskrétních aproximací zákonů zachování prvního řádu. Pozornost je věnována základním metodám konečných diferencí a metodám s vysokým rozlišením. Práce je doplněna řadou numerických experimentů. Získané postupy lze zobecnit na případ nelineárních soustav parciálních diferenciálních rovnic. Záměrem bylo připravit takovou techniku, kterou lze použít i pro případ zobecněných řešení.

Klíčová slova: Parciální diferenciální rovnice; Numerické metody; Formulace úloh; Laxova-Friedrichsova metoda; metoda typu upwind; Laxova-Wendroffova metoda; metoda typu flux-limiter.

Title: Analysis of numerical models of transport processes

Author: Alexandra Lochová

Department: Department of Mathematics

Supervisor: Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.

Abstract: This work is devoted to techniques to estimate the order of discrete approximations of the first order conservation laws. The attention is paid to basic finite difference methods and to the high-resolution schemes. Numerical experiments are presented. It is possible to use the obtained procedures for analysis of nonlinear systems of partial differential equations. The goal was to prepare such a technique which is also suitable in the case of generalized solutions.

Keywords: Partial differential equations, Numerical methods, Formulation of problems, Lax–Friedrichs method, Upwind method, Lax–Wendroff method, Flux-limiter method.

Úvod

Cílem této bakalářské práce je vytvořit metodiku pro experimentální měření chyb přibližných řešení úloh s nehladkým řešením. V první kapitole se budeme zabývat některými matematickými modely, které jsou založeny na parciálních diferenciálních rovnicích. Teorie parciálních diferenciálních rovnic tvoří základ celé problematiky matematického modelování a je úzce spjatá s fyzikálními vědami a se snahou popsat jazykem matematiky co možná nej přesněji (zároveň však relativně jednoduše) některé fyzikální děje a jevy. Ve druhé kapitole tedy stručně popíšeme princip a rozdělení parciálních diferenciálních rovnic. Dále se pokusíme vysvětlit, jak důležitou roli hraje správná formulace úlohy, která popisuje zkoumaný fyzikální proces nebo problém. V další kapitole si uvedeme několik numerických metod, zejména Laxovou-Friedrichsovu metodu a metodu typu upwind, které jsou základním stavebním prvkem pro řešení parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu. Jedná se o numerické metody prvního řádu. Dále popíšeme Laxovu-Wendroffovu metodu a metodu typu flux-limiter, což jsou numerické metody vyššího řádu. Vysvětlíme a popíšeme si jednotlivé základní techniky měření a provedeme několik numerických experimentů pro typové rovnice. Budeme zde využívat nabídky systému *Matlab*, což je systém zahrnující nástroje pro převážně numerické výpočty. Na závěr provedeme vyhodnocení jednotlivých experimentů.

Kapitola 1

Vybrané matematické modely

Rozsáhlost a složitost problematiky parciálních diferenciálních rovnic v návaznosti na složitost různých zkoumaných problémů dala vzniknout novému odvětví: *matematickému modelování*. Teorie parciálních diferenciálních rovnic se vyčlenila v jeho rámci jako samostatná vědní disciplína. Přesto však studium parciálních diferenciálních rovnic zůstává těsně svázáno s popisem – *modelováním* – fyzikálních či jiných jevů. Matematické modelování se, zejména v posledních dvaceti letech, široce používá v přírodních i technických vědách. Matematické modely bývají komplikované povahy. Obvykle jsou formulovány pomocí algebraických nebo diferenciálních rovnic. Jedním ze základních prostředků řešení těchto modelů na počítači jsou numerické metody. Pro výpočet jednotlivých standardních úloh existují již předem vytvořené balíky programů, komerční i nekomerční. Při používání těchto balíčků je ale nutná orientace v jednotlivých použitých numerických metodách.

1.1 Matematický model a modelování

V této kapitole se seznámíme s obecnou představou pojmu matematické modelování, co tento pojem představuje a jaké jsou jeho základní principy. Ukážeme si zde několik vybraných matematických modelů. Vysvětlíme si základní předpoklady, které jsou nevyhnutelné při konstrukci jednotlivých modelů, ale také zásady, které nesmíme opomenout. Dříve než se pustíme do samotného modelování, si zde vysvětlíme pár obecných pojmů, bez kterých by žádný matematický model nemohl vzniknout.

Matematické modelování hraje velkou úlohu v popisu jevů, se kterými se setkáváme v aplikovaných vědách a v různých oblastech technických a průmyslových aplikací [viz 3]. Matematickým modelem máme na mysli soustavu rovnic anebo jiných matematických vztahů zachycujících podstatné

vlastnosti komplexních, přirozených nebo uměle vytvořených systémů za účelem jejich popisu, případně předpovědi jejich chování a řízení jejich časového vývoje. V minulosti byla tato oblast nazývána rovnicemi matematické fyziky, avšak v současné době už zdaleka není zúžena pouze na fyziku a chemii, ale hluboce zasahuje i do oblastí, jako jsou finance, biologie, ekologie, medicína, sociologie a jiné. V průmyslových oblastech (jako jsou například vesmírné nebo námořní projekty, jaderné reaktory, problémy spalování, výroba a distribuce elektrické energie, řízení dopravy atd.), se stalo matematické modelování následované numerickými simulacemi a posléze experimentálními testy, obecným přístupem zcela nutným pro rozvoj inovací a v neposlední řadě motivovaným ekonomickými faktory. Je zcela zřejmé, že bez současné výkonné výpočetní techniky by toto bylo zcela nemožné.

Obecně je konstrukce matematických modelů založena na dvou základních přístupech, kterými jsou *obecné zákony a konstitutivní vztahy*. Obecné zákony vycházejí převážně z mechaniky kontinua a jsou reprezentovány zákony zachování či rovnováhy, jako jsou například hmoty, energie, hmotnosti, hybnosti, lineárního momentu atd. Tyto zákony si podrobněji popíšeme v následující kapitole.

Konstitutivní vztahy jsou původem experimentální povahy a jsou silně závislé na okolnostech jejich získání, zejména na vlastnostech zkoumaného systému (materiálu). Příklady mohou být Fourierův zákon pro vedení tepla, Fickův zákon pro difuzi substance v médiu a nebo například i rychlost auta, závislá na hustotě dopravního toku před ním.

Výsledkem kombinace obou přístupů jsou obyčejně parciální diferenciální rovnice a nebo jejich systém. Vzhledem k tomu, že je nutné ještě respektovat prostředí, ve kterém modelování provádíme, musíme ještě k parciálním diferenciálním rovnicím zahrnout okrajové podmínky, které popisují chování modelu na hranici oblasti, ve které modelovaný proces probíhá, případně i časové počáteční podmínky, které reprezentují počáteční stav, ze kterého se model začal vyvíjet v případě, že jde o proces nestacionární.

V této práci budeme pojmem *matematický model* rozumět matematickou úlohu, jejíž řešení popisuje chování zkoumaného jevu nebo systému. Budeme se zabývat modely popsanými parciálními diferenciálními rovnicemi, tj. diferenciálními rovnicemi se dvěma a více nezávislými proměnnými.

1.2 Zákony zachování

Jak jsme již uvedli dříve, velká část matematických modelů vychází ze základních zákonů zachování jako jsou zákony zachování energie, hmotnosti, hybnosti atd. [viz 10]. Tyto zákony obecně popisují skutečnost, že změna

určité veličiny v dané oblasti musí být rovna toku veličiny přes hranici oblasti a přírůstku (resp. úbytku) veličiny uvnitř oblasti. Ještě jednou uvedeme označení pro časovou proměnnou t a prostorovou proměnnou x . Symbolem $u(x, t)$ označíme hustotu zkoumané veličiny v bodě x a čase t a $\phi = \phi(x, t)$ označíme tok této veličiny bodem x v čase t , který definujeme jako kladný při pohybu ve směru kladné poloosy x , tj. doprava při běžné orientaci souřadného systému (x, t) . Poslední funkcí je $f = f(x, t)$, která představuje vliv zdrojů v bodě x a čase t .

Zákon zachování vyjadřuje vazbu mezi u, ϕ, f . V jednodimenzionálním případě uvažujeme například trubici s průřezem A a na ní libovolný, avšak pevný úsek $a \leq x \leq b$. Zákon zachování říká, že změna celkového množství veličiny u v dané oblasti musí být rovna toku ϕ v bodě $x = a$ zmenšenému o tok ϕ v bodě $x = b$ a celkové bilanci zdrojů v oblasti $a \leq x \leq b$, tj.

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) A dx = A\phi(a, t) - A\phi(b, t) + \int_a^b f(x, t) A dx \quad (1.1)$$

Tato rovnice představuje základní zákon zachování v jeho integrální podobě. Pokud uvažujeme trubici s konstantním průřezem A , lze jej z rovnice vyloučit. Navíc pokud jsou uvažované funkce u a ϕ dostatečně hladké¹, můžeme přejít k diferenciálnímu vyjádření.

Konkrétně, pokud u má spojitě parciální derivace, lze zaměnit pořadí integrace a derivace na levé straně rovnice (1.1), tj.

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \int_a^b u_t(x, t) dx.$$

Je-li ϕ rovněž jedenkrát spojitě diferencovatelná, lze první dva členy na pravé straně rovnice (1.1) vyjádřit následujícím způsobem

$$\phi(a, t) - \phi(b, t) = \int_a^b \phi_x(x, t) dx.$$

Rovnice (1.1) tedy přejde do tvaru

$$\int_a^b [u_t(x, t) + \phi_x(x, t) - f(x, t)] dx = 0.$$

Protože jsme interval (a, b) volili naprosto libovolně, musí být integrand identicky roven nule, tedy

¹Funkci f nazveme hladká na otevřené množině U , pokud má všechny (parciální pro funkci více proměnných) derivace všech řádů. Značíme: $f \in C^\infty(U) = \bigcap_k C^k(U)$

$$u_t(x, t) + \phi_x(x, t) = f(x, t) \quad (1.2)$$

Rovnice (1.2) je lokální verze rovnice (1.1) a vyjadřuje základní zákon zachování v diferenciálním tvaru. Jedná se o rovnici pro dvě neznámé funkce u a ϕ . Zdroje f jsou zadány, mohou však záviset na x, t prostřednictvím hustoty u , tj. může být $f = f(u)$. Při vytváření matematického modelu tedy samotný zákon zachování nestačí. Je nutné jej doplnit tzv. *konstitutivními vztahy*, které svazují dohromady veličiny u a ϕ .

1.3 Transportní rovnice

Model, ve kterém je tok přímo úměrný hustotě, tedy

$$\phi = cu$$

kde c je konstanta, popisuje například unášení látky v trubici s proudící tekutinou. Veličina u zde představuje koncentraci unášené látky a parametr c odpovídá rychlosti proudění. Do modelu není zahrnuta difúze. Dosadíme-li takto vyjádřený tok do základního zákona zachování (1.2) a budeme-li uvažovat, že rychlost proudění $c > 0$ je konstantní a zdroje f nulové, dostáváme tzv. *transportní rovnici*

$$u_t + cu_x = 0 \quad (1.3)$$

Řešením této rovnice je funkce

$$u(x, t) = F(x - ct) \quad (1.4)$$

kde F je libovolná diferencovatelná funkce.

Pokud je tok ϕ nelineární funkcí hustoty u , pak dostává zákon zachování (pro $f = 0$) podobu

$$u_t + (\phi(u))_x = u_t + \phi'(u)u_x = 0 \quad (1.5)$$

Tento vztah modeluje nelineární transport, který je ovšem z hlediska další analýzy mnohem komplikovanější.

1.4 Difúze a vedení tepla

Difúze. Difúze je samovolný proces, během kterého jsou částice jedné látky rozptýlovány v rozpouštědle. Pohyb jedné částice je v zásadě náhodný, ale v průměru dochází k přesunu látky z míst s vyšší koncentrací do míst s nižší koncentrací. Rychlost šíření částic je ovlivněna velikostí částic, teplotou i vlastnostmi prostředí. Výsledkem difúze, pokud do hry nevstupují další faktory, je rovnoměrné rozptýlení rozpuštěné látky v rozpouštědle. Matematicky popisují difúzi Fickovy zákony. V našem případě budeme znovu vycházet ze základního zákona zachování (1.2) prozatím bez zdrojů ($f = 0$), tj.

$$u_t + \phi_x = 0$$

Veličinou u nyní může být například koncentrace plynu v jednodimenzionální trubici. Na základě pozorování lze usoudit, že:

1. molekuly plynu se pohybují z míst s vyšší koncentrací do míst s nižší koncentrací
2. čím větší je gradient koncentrace, tím větší je tok.

Nejjednodušší vztah, který těmto předpokladům odpovídá, je lineární závislost

$$\phi = -ku_x \tag{1.6}$$

kde k je konstanta úměrnosti. Znaménko mínus zaručuje, že pokud je $u_x < 0$, pak ϕ je kladné a tok směřuje doprava. Vztah (1.7) se nazývá *Fickův zákon* a konstanta k *difúzní konstantou*. Dosadíme-li (1.7) do základního zákona zachování, dostáváme tzv. jednodimenzionální *difúzní rovnici*

$$u_t - ku_{xx} = 0 \tag{1.7}$$

Vedení tepla. Budeme uvažovat jednorozměrnou tyč s konstantní hustotou ρ a konstantní měrnou tepelnou kapacitou c . Označíme-li teplotu v bodě x a čase t funkcí $T = T(x, t)$, pak $u(x, t) = \rho \cdot c \cdot T(x, t)$ je hustota tepelné energie. Konstitutivním vztahem, který svazuje tok ϕ a hustotu u , zde bude *Fourierův tepelný zákon*, který říká, že tok je přímo úměrný gradientu teploty se zápornou konstantou úměrnosti, tedy

$$\phi = -KT_x$$

Konstanta K zde představuje tepelnou vodivost. Fourierův zákon je obdobou Fickova zákona: teplo proudí z teplejších oblastí do chladnějších. Dosa-díme-li výše uvedené vztahy do základního zákona zachování (1.2), dostá-váme

$$T_t - kT_{xx} = 0, \quad k = \frac{K}{\rho c} \quad (1.8)$$

což je opět difuzní rovnice v jedné dimenzi. Oba jevy, vedení tepla i difúzi, lze tedy modelovat stejnou rovnicí.

Proudění s difúzí. Pokud chceme vytvořit tzv. kombinovaný model, tj. do modelu chceme zahrnout proudění i difuzi, pak musí pro tok platit

$$\phi = cu - ku_x$$

a ze zákona zachování dostáváme rovnici

$$u_t + cu_x - ku_{xx} = 0 \quad (1.9)$$

Takto lze popsat např. rozložení hustoty chemikálie, která je unášena proudící tekutinou s rychlostí c a zároveň do této tekutiny difunduje s difuzní konstantou k .

1.5 Vedení tepla ve 3D

Většina fyzikálních jevů se odehrává v rovině, případně v prostoru, proto bychom neměli opomenout také odvození například rovnice vedení tepla (di-fuzní rovnici) i ve více dimenzích.

Hlavní myšlenka je naprosto stejná jako v jedné dimenzi. Opět můžeme formulovat zákon zachování v integrální podobě. Nechť Ω je prostorová oblast a $u = u(x, y, z, t)$ značí teplotu v čase t a bodě $(x, y, z) \in \Omega$. Předpokládejme, že materiál, který zaujímá danou oblast, je homogenní a charakterizovaný hustotou ρ a měrnou tepelnou kapacitou c . Nechť B je libovolná koule ob-sažená v Ω . Na tuto kouli nyní aplikujeme zákon zachování tepelné energie, který říká, že změna celkového množství energie obsažené v B musí být rovna součtu toku energie přes hranici ∂B a energie pocházející ze zdrojů uvnitř B . Celkové množství energie v objemovém elementu $dV = dx dy dz$ je $c\rho u dV$ a tedy celkové množství energie v kouli B je dáno trojným integrálem

$$\iiint_B c\rho u(x, y, z, t) dV$$

Označme $f = f(x, y, z, t)$ funkci, která popisuje tepelné zdroje v dané oblasti, pak $\iiint_B f dV$ je celkový příspěvek zdrojů v kouli B . Dále zavedme vektor tepelného toku $\phi = \phi(x, y, z, t)$ o složkách ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 . Tok plošným elementem dA s jednotkovým vektorem vnější normály \mathbf{n} je pak dán vztahem

$$\phi \cdot \mathbf{n} dA$$

Odtud dostáváme, že tok celou hranicí koule B je dán plošným integrálem

$$\iint_{\partial B} \phi \cdot \mathbf{n} dA$$

Nyní již můžeme formulovat zákon zachování tepelné energie v jeho integrální podobě

$$\frac{d}{dt} \iiint_B c \rho u dV = - \iint_{\partial B} \phi \cdot \mathbf{n} dA + \iiint_B f dV \quad (1.10)$$

Znaménko mínus před plošným integrálem na pravé straně odpovídá konvenci, že tok je kladný směrem ven z koule B . Chceme-li přejít k diferenciálnímu vyjádření, použijeme *Gaussovu-Ostrogradského větu*², která za jistých požadavků na diferencovatelnost převádí plošný integrál přes hranici dané oblasti na integrál objemový. V našem případě tedy

$$\iint_{\partial B} \phi \cdot \mathbf{n} dA = \iiint_B \operatorname{div} \phi dV$$

²Budiž V měřitelná omezená oblast na \mathbb{R}^3 a $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ je spojitě diferencovatelné vektorové pole, definované na oblasti $V \cup \partial V$, kde ∂V je hranice oblasti V . Dále budiž $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ uzavřená jednoduchá hladká plocha jejichž geometrický obraz $\langle \sigma \rangle$ je totožný s ∂V . Pak platí $\iint_{\sigma} \mathbf{A} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz$. Symbolem div označujeme vektorový diferenciální operátor divergence. Divergence vektorové funkce ϕ je skalární funkce: $\operatorname{div} \phi = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_3}{\partial z}$. Plocha σ je uzavřená a při výpočtu používáme jednotkové vektory vnější normály.

Pokud máme zajištěnou spojitou diferencovatelnost veličin u a ϕ , můžeme rovnici (1.10) přepsat do ekvivalentního tvaru

$$\iiint_B c\rho u_t dV = - \iiint_B \operatorname{div}\phi dV + \iiint_B f dV$$

Jelikož jsme kouli B volili uvnitř Ω naprosto libovolně, dostáváme konstitutivní zákon, kterým je v případě rovnice vedení tepla trojrozměrná verze Fourierova tepelného zákona a sice

$$\phi = -K \operatorname{grad} u$$

Uvědomíme-li si navíc, že platí

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot \nabla u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

kde Δ značí Laplaceův operátor, dostáváme konečnou podobu rovnice vedení tepla ve třech dimenzích

$$u_t - k\Delta u = \frac{1}{c\rho} f \tag{1.11}$$

kde $k = \frac{K}{c\rho}$. Tato rovnice rovněž vystihuje chování difundující látky v trojrozměrné oblasti, proto ji budeme opět nazývat *difuzní rovnicí*. Analogicky bychom dostali stejné vyjádření i v případě dvoudimenzionálního problému. Laplaceův operátor by pak měl podobu $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$.

Kapitola 2

Klasifikace parciálních diferenciálních rovnic a formulace úloh

Jak jsme se již zmínili dříve, v teorii parciálních diferenciálních rovnic (PDR) jde většinou o vztah mezi neznámými funkcemi více nezávisle proměnných z rovnosti, ve které vystupuje tato funkce spolu se svými parciálními derivacemi. Budeme se držet následující konvence: t budeme označovat časovou proměnnou a x, y, z, \dots prostorové proměnné. Obecný zápis pro PDR ve 3D pak vypadá následovně:

$$F(x, y, z, t, u, u_x, u_y, u_z, u_t, u_{xy}, u_{xt}, \dots) = 0,$$

přičemž $(x, y, z) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $t \in I$, kde Ω je zadaná oblast v \mathbb{R}^3 a $I \subset \mathbb{R}$ je časový interval. Je-li \mathbf{F} vektorová funkce, tj. $\mathbf{F} = (F_1, \dots, F_m)$, a neznámých funkcí, které hledáme, je více: $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, \dots , pak

$$\mathbf{F}(x, y, z, t, u, u_x, \dots, v, v_x, \dots) = 0$$

je tzv. systém PDR. Tyto vztahy jsou obecně velmi komplikované, a matematická teorie v současné době je schopná řešit pouze některé speciální typy. Proto je důležité jednotlivé typy rozeznat a od sebe vzájemně odlišit [podrobněji – viz 10].

2.1 Klasifikace PDR

Parciální diferenciální rovnice je možné dělit z několika hledisek [viz 10]. Je-li čas t jednou z nezávisle proměnných, hovoříme o *evolučních rovnicích*. V

opačném případě, kdy v rovnici vystupují pouze prostorové nezávislé proměnné, hovoříme o *stacionárních rovnicích*. Nejvyšší řád derivace hledané funkce v rovnici se vyskytující určuje *řád rovnice*. Je-li vztah mezi u a jejími derivacemi lineární (například neobsahuje součiny typu uu_x, u_xu_{xy} atd.) hovoříme o *lineární rovnici*. V opačném případě jde o *nelineární rovnici*. Lineární rovnici můžeme symbolicky zapsat pomocí tzv. lineárního diferenciálního operátoru L^1 . Potom rovnici ve tvaru

$$L\mathbf{u} = 0$$

budeme nazývat *homogenní rovnicí* a rovnici ve tvaru

$$L\mathbf{u} = f$$

kde f je zadaná funkce budeme nazývat *nehomogenní rovnicí*. Funkci f nazveme „pravou stranou“ rovnice. Na základě těchto hledisek pak můžeme PDR klasifikovat následovně:

1. Transportní rovnice v jedné prostorové proměnné:

$$u_t + u_x = 0$$

je evoluční, prvního řádu, lineární, homogenní.

2. Laplaceova rovnice ve třech prostorových proměnných:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$$

je stacionární, druhého řádu, lineární, homogenní.

3. Poissonova rovnice ve dvou prostorových proměnných:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$$

kde $f = f(x, y)$ je zadaná funkce, je stacionární, druhého řádu, lineární, nehomogenní.

4. Vlnová rovnice v jedné prostorové proměnné. Například:

$$u_{tt} - u_{xx} + u^3 = 0$$

je evoluční, druhého řádu, nelineární.

¹Levá strana homogenní i nehomogenní lineární diferenciální rovnice n – tého řádu s konstantními koeficienty se nazývá *lineární diferenciální operátor n – tého řádu* a značíme jej $L_n(y)$

5. Difuzní rovnice v jedné prostorové proměnné:

$$u_t - u_{xx} = f(x, t)$$

je evoluční, druhého řádu, lineární, nehomogenní.

6. Rovnice vibrujícího nosníku:

$$u_{tt} + u_{xxxx} = 0$$

je evoluční, čtvrtého řádu, lineární, homogenní.

7. *Schrödingerova* rovnice (speciální případ):

$$u_t - iu_{xx} = 0$$

je evoluční, druhého řádu, lineární, homogenní. Zde i je imaginární jednotka: $i^2 = -1$.

8. Rovnice disperzní vlny:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

je evoluční, třetího řádu, nelineární.

2.2 Klasifikace PDR druhého řádu

V praktických modelech se velice často vyskytují parciální diferenciální rovnice druhého řádu, proto si zde uvedeme základní typy těchto rovnic a jejich příklady [viz 10]. Obecný tvar lineární homogenní parciální diferenciální rovnice druhého řádu je následující:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1u_x + a_2u_y + a_0u = 0$$

Důležitou roli zde hraje čtvercová matice \mathbf{A}

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

která je tvořena koeficienty u parciálních derivací druhého řádu. Můžou nastat tyto případy:

1. *Eliptický tvar*: pokud

$$\det \mathbf{A} > 0 \implies u_{xx} + u_{yy} + \dots = 0$$

kde tři tečky reprezentují členy s derivacemi nižších řádů.

2. *Hyperbolický tvar*: pokud

$$\det \mathbf{A} < 0 \implies u_{xx} - u_{yy} + \dots = 0$$

3. *Parabolický tvar*: pokud

$$\det \mathbf{A} = 0 \implies u_{xx} + \dots = 0$$

pokud není $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$

Na základě těchto kritérií pak lineární parciální diferenciální rovnice druhého řádu dělíme na tyto základní typy:

1. *Eliptický typ*, kterého příkladem je *Laplaceova rovnice* ve tvaru

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

2. *Hyperbolický typ*, kterého příkladem je *vlnová rovnice* v jedné prostorové proměnné ve tvaru

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad (c = 1)$$

Konstanta $c > 0$ vystihuje rychlost šíření vlny.

3. *Parabolický typ*, který reprezentuje například *difuzní rovnice* ve tvaru

$$u_t - k u_{xx} = 0 \quad (k = 1)$$

Zde k představuje konstantu úměrnosti.

2.3 Okrajové podmínky a jejich rozdělení

Při řešení problémů reálného světa nám však samotná parciální diferenciální rovnice nestačí. O chování se zkoumaného fyzikálního jevu nám neposkytuje dostatečně dost potřebných informací, a tudíž nejsme schopni jednoznačně určit řešení. K tomu, aby toto řešení bylo určeno jednoznačně ještě potřebujeme další informace, které nazýváme **okrajové podmínky** a které spolu s rovnicí tvoří tzv. *okrajovou úlohu*. Obecně řečeno, pokud Ω je omezená oblast v \mathbb{R}^3 , rozlišujeme následující základní typy okrajových podmínek [viz 10]:

1. *Dirichletova okrajová podmínka*:

$$u(x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega$$

2. Neumannova okrajová podmínka:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega$$

3. Newtonova (někdy také Robinova) okrajová podmínka:

$$A \frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) + Bu(x, y, z) = g(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial\Omega$$

kde $\frac{\partial u}{\partial n}$ značí derivaci podle vnější normály k hranici oblasti Ω , A, B , pro které platí $A^2 + B^2 \neq 0$, jsou dané konstanty. Pokud jsou na různých částech hranice $\partial\Omega$ zadány různé typy okrajových podmínek, jedná se o úlohu se smíšenými okrajovými podmínkami. V případě, že $g \equiv 0$, hovoříme o *homogenních okrajových podmínkách*, v opačném případě o *nehomogenních okrajových podmínkách*.

2.4 Počáteční podmínky

Tato bakalářská práce se zabývá převážně evolučními rovnicemi, ve kterých máme obvykle kromě okrajových podmínek ještě další informace, které nazýváme **počáteční podmínky**, a které spolu s okrajovými podmínkami tvoří tzv. *počátečně-okrajovou úlohu*. Počátečními podmínkami určujeme, jak má vypadat funkce, případně její derivace v určitém časovém okamžiku na celé oblasti, na níž diferenciální rovnici řešíme. Řešení rovnic s počátečními podmínkami označujeme jako Cauchyovy úlohy (problémy). Pro parciální diferenciální rovnice je Cauchyho problémem úloha najít řešení parciální diferenciální rovnice, které splňuje určité počáteční podmínky, např. pro rovnici

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(t, x, y, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2})$$

s počátečními podmínkami

$$y(t_0, x) = f_0(x)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t_0, x) = f_1(x)$$

kde f_0 a f_1 jsou libovolné (ideálně dostatečně hladké) funkce.

Okrajové a počáteční podmínky musí splňovat tzv. *podmínky kompatibility*.

2.5 Řešení počátečně–okrajové úlohy

Za klasické řešení počátečně–okrajové úlohy považujeme funkci, která po dosazení do naší původní rovnice splňuje jak okrajové tak i počáteční podmínky v každém bodě. To znamená, že to řešení musí mít derivace až do řádu rovnice. Dalším důležitým pojmem je tzv. *korektnost* úlohy. Úlohu budeme nazývat korektní, jestliže splňuje následující podmínky:

1. řešení úlohy *existuje*;
2. řešení úlohy je určeno *jednoznačně*;
3. řešení úlohy je *stabilní vůči vstupním datům* = „velmi malá změna“ počátečních či okrajových podmínek, pravé strany atd. vyvolá pouze „malou změnu“ řešení.

Vstupní data nikdy nelze naměřit s absolutní přesností. Stabilita tedy obecně řečeno znamená, že řešení, začínající „blízko“ x_0 zůstane „blízko“ x_0 pro všechna $t \geq 0$.

Kapitola 3

Numerické metody

S rozvojem počítačů vzrostl význam numerických metod. Algoritmů metod pro numerické řešení nejrůznějších matematických problémů je pochopitelně mnoho. U čtenáře tohoto textu se předpokládá nutná znalost základních pojmů z lineární algebry a matematické analýzy. Faktem je, že lineární algebra a matematická analýza umožňují v řadě případů rozhodnout o existenci a jednoznačnosti řešení nějakého problému, ale pouze v některých případech dávají konkrétní návod, jak tyto problémy řešit. Někdy zase je způsob řešení znám, ale z hlediska realizace výpočtu nemusí být zrovna optimální. Cílem numerických hodnot je proto vytvořit efektivní algoritmy pro řešení nejrůznějších matematických problémů. Formulace úloh a způsob jejich řešení je závislý na skutečnosti, že pracujeme s počítačem. Práce na počítači vyžaduje, abychom zadali na vstup konečný počet číselných údajů a postup, prostřednictvím kterého po konečném počtu kroků dojdeme k výsledku. Ten je dán opět konečným počtem výstupních číselných údajů. Jinými slovy, našim cílem je pomocí vhodného algoritmu vyřešit numerickou úlohu, která představuje jednoznačný funkční popis vztahu mezi konečným počtem vstupních a konečným počtem výstupních dat. Algoritmus v tomto ponětí je tedy jednoznačně zadaná konečná posloupnost operací, která $n - tici$ přípustných vstupních dat přiřadí $m - tici$ dat výstupních. Neřeší však jenom jedinou speciální úlohu, ale poskytuje řešení pro celou skupinu úloh téhož typu.

3.1 Chyby numerických metod, formulace úlohy

Ne vždy nám dostupná metoda je schopná poskytnout přesný výsledek. Navíc jsou odchylky od přesného řešení někdy až příliš velké. Takové rozdíly jsou charakteristické pro řadu numerických výpočtů. Některé numerické metody,

pokud zanedbáme vliv zaokrouhlovacích chyb, sice umožňují dojít po konečném počtu kroků k přesnému řešení (např. Gaussova eliminace), ale velká část numerických řešení má pouze aproximativní charakter. Z toho vyplývá nutnost zabývat se takovými otázkami, jako je odhad chyby, podmíněnost úlohy či její stabilita, kterou jsme již zmiňovali dříve. Navíc v souvislosti s matematickým modelováním dochází při vytváření matematického modelu i při jeho řešení k celé řadě dalších nepřesností. Zdrojem chyb mohou být:

1. chyby vzniklé při vytváření modelu, protože:

- naměřená data díky přístroji nemusí být přesná
- matematický model je zjednodušením už zjednodušeného fyzikálního modelu a neodpovídá přesně realitě
- úloha je špatně podmíněná
- chyba numerického modelu
- chyba zvolené metody

2. chyby vzniklé při zpracování úlohy na počítači, protože:

- čísla se zobrazují v počítači v semilogaritmickém tvaru a celá mantisa se nemusí vždy do počítače vejít. Navíc množina počítačových čísel není vzhledem k algebraickým operacím uzavřená, což může způsobit další kumulování chyb
- algoritmus je nestabilní

Budeme hovořit, že úloha je dobře podmíněná, když je korektní a číslo podmíněnosti

$$c_p = \frac{\text{relativní chyba na výstupu}}{\text{relativní chyba na vstupu}}$$

má hodnotu blízkou 1. Pokud $c_p \approx 1$, znamená to, že malá změna na vstupu vyvolá pouze malou změnu na výstupu.

Velmi důležitou roli zde hraje správná formulace konkrétní úlohy. Před samotným řešením numerické úlohy bychom měli provést analýzu konkrétní úlohy, zamyslet se na reálných chováních se daného fyzikálního jevu nebo problému. Ke sledovanému problému musíme přiřadit odpovídající matematický model. To znamená zadat jednoznačný a srozumitelný funkční vztah mezi zadanými a hledanými matematickými objekty (čísla, maticemi, funkcemi, křivkami). Zde právě neodmyslitelně patří okrajové a počáteční podmínky, o kterých jsme již hovořili dříve.

Úspěch numerického řešení problému také závisí na volbě algoritmu. Pokud malá nepřesnost ve vstupních datech začne generovat velké chyby během

výpočtu, nepovede zvolený postup ke správnému výsledku. Zda určitý algoritmus je vhodný pro daný problém či ne, souvisí s otázkou stability algoritmu. Algoritmus je stabilní, když je málo citlivý na poruchy v datech a na vliv zakrouhlovacích chyb během výpočtu. Stabilitu algoritmu lze právě studovat pomocí numerických experimentů, o kterých budeme hovořit v následující kapitole.

3.2 Vybrané typové rovnice

Naše experimenty budeme provádět na těchto vybraných typových rovnicích:

1. Transportní (difúzní) rovnice ve tvaru $q_t + a q_x = 0$ - lineární případ
2. Burgersova rovnice ve tvaru $q_t + f(q)_x = 0$, kde $f(q) = \frac{1}{2}q^2$ - nelineární případ
3. Rovnice ve tvaru $q_t + f(q)_x = 0$, kde $f(q) = \frac{1}{3}q^3$ - nelineární případ

Podrobný postup a konstrukci analytického řešení, včetně zadání okrajových a počátečních podmínek uvádíme v kapitole (4.1) - Vlastnosti analytického řešení.

3.3 Vybrané numerické metody

V této práci si ukážeme chování některých vybraných numerických metod a jejich schopnost aproximovat řešení zvolených typových rovnic. Není zde prostor pro rozbor všech numerických metod. Proto jsme si k provedení našich experimentů a pozorování vybrali následující numerické metody:

1. Metoda typu upwind
2. Laxova-Friedrichsova metoda
3. Laxova-Wendroffova metoda
4. Metoda typu flux-limiter

Stručně si popíšeme charakter jednotlivých metod [viz 1, 11] .

3.3.1 Metoda typu upwind

Tato metoda je v podstatě nejjednodušší metodou ze všech, kterými se naše práce zabývá. Při řešení lineární skalární úlohy typu

$$q_t + aq_x = 0 \quad (3.1)$$

touto metodou je důležité znaménko konstanty a (vyjadřující rychlost veličiny), která určuje směrnici charakteristik, což jsou vlastně přímky, procházející každým bodem intervalu, podél kterých obtéká zkoumaná veličina. Na těchto přímkách je řešení dané úlohy konstantní. V případě, že $a < 0$, je směrnice záporná, charakteristiky směřují doleva a zde využijeme diskretizaci úlohy pomocí dopředných diferencí. V případě, že $a > 0$, je situace opačná a využíváme zpětné prostorové difference. Zavedeme si následující označení:

$$a^+ = \max\{a, 0\} \quad a^- = \min\{a, 0\}$$

Pro *lineární úlohu* můžeme schéma metody upwind zapsat následujícím předpisem:

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (a^+(Q_j^n - Q_{j-1}^n) + a^-(Q_{j+1}^n - Q_j^n)) \quad (3.2)$$

Pro *nelineární úlohu* je situace poněkud složitější. Vzhledem k tomu, že by tato práce měla čtenáři poskytnout i poněkud univerzálnější schéma, než je uvedeno výše, uvedeme zde formulaci metody typu upwind i pro nelineární případ. Potom tuto metodu můžeme psát v tzv. divergentním tvaru, který vypadá následovně:

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) \quad (3.3)$$

kde $F_{j+1/2}^n$ nazýváme *numerické toky*. Diferenciální rovnici (3.1) můžeme přepsat do kvazilineárního tvaru

$$q_t + f'(q)q_x = 0 \quad (3.4)$$

Hodnotu směrnice charakteristiky procházející bodem $x_{j+1/2}^n$ aproximujeme výrazem

$$a_{j+1/2}^n = \frac{f(Q_{j+1}^n) - f(Q_j^n)}{Q_{j+1}^n - Q_j^n} \quad (3.5)$$

Na základě znaménka pak volíme numerické toky

$$F_{j+1/2}^n = \begin{cases} f(Q_j^n), & \text{když } a_{j+1/2}^n \geq 0 \\ f(Q_{j+1}^n), & \text{když } a_{j+1/2}^n < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Takto zvolený numerický tok lze přepsat do následující podoby

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [f(Q_j^n) + f(Q_{j+1}^n)] - \frac{1}{2} |a_{j+1/2}^n| (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (3.7)$$

Dosažením těchto hodnot numerických toků (3.7) do metody (3.3) získáme metodu typu upwind pro nelineární skalární úlohy. K tomu, aby tato metoda byla stabilní je potřeba, aby byla splněna podmínka stability pro lineární případ ve tvaru

$$0 \leq \frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (3.8)$$

V případě, že $\frac{a\Delta t}{\Delta x} = 1$, dostaneme přesné řešení naší úlohy. Podmínka stability pro nelineární případ je

$$\max |f'(q)| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.9)$$

3.3.2 Laxova–Friedrichsova metoda

Jedná se o tzv. centrální metodu. Již sám název napovídá, že se k aproximacím prostorových derivací využívají centrální diference. U této metody aproximujeme derivaci neznámé funkce v bodě x_j a v čase t_n výrazem

$$q_x(x_j, t_n) \approx \frac{1}{2\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n)$$

Zároveň ve smyslu této aproximace nahrazujeme i hodnotu neznámé funkce v bodě x_j a v čase t_n výrazem

$$q(x_j, t_n) \approx \frac{1}{2} (Q_{j-1}^n + Q_{j+1}^n)$$

Těchto hodnot využijeme při stanovení aproximace časové derivace neznámé funkce a to ve tvaru

$$q_t(x_j, t_n) \approx \frac{1}{\Delta t} (q(x_j, t_{n+1}) - q(x_j, t_n)) \approx \frac{1}{\Delta t} \left(Q_j^{n+1} - \frac{1}{2} (Q_{j-1}^n + Q_{j+1}^n) \right)$$

Pro *lineární úlohu* můžeme schéma Laxovy-Friedrichsovy metody zapsat následujícím předpisem:

$$Q_j^{n+1} = \frac{1}{2} (Q_{j-1}^n + Q_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} a (Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n) \quad (3.10)$$

Při konstrukci schématu Laxovy–Friedrichsovy metody můžeme využít tokové funkce, a pak zápis schématu vypadá následovně:

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) \quad (3.11)$$

kde

$$F_{j+1/2}^n = a \frac{1}{2} (Q_j^n + Q_{j+1}^n) - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (3.12)$$

V případě *nelineární úlohy* je tvar tokové funkce následující

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [f(Q_j^n) + f(Q_{j+1}^n)] - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (3.13)$$

Podmínka stability Laxovy–Friedrichsovy metody pro lineární úlohu má následující podobu

$$|a| \frac{\Delta x}{\Delta t} \leq 1 \quad (3.14)$$

Podmínka stability pro nelineární případ je

$$\max |f'(q)| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.15)$$

3.3.3 Laxova–Wendroffova metoda

Tato metoda je metodou druhého řádu přesnosti v prostoru i čase. Při její konstrukci využijeme více členů Taylorova rozvoje než tomu bylo u Laxovy–Friedrichsovy metody a tím docílíme vyšší přesnosti aproximace. Budeme předpokládat, že existují veškeré derivace, se kterými pracujeme. Na základě Taylorova rozvoje aproximujeme hodnotu $q(x_j, t_{n+1})$ následujícím předpisem

$$q(x_j, t_{n+1}) \approx q(x_j, t_n) + \frac{\partial q}{\partial t}(x_j, t_n) \Delta t + \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}(x_j, t_n) \frac{\Delta t^2}{2} \quad (3.16)$$

V *lineárním případě* má Laxova–Wendroffova metoda následující podobu

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - a \frac{\Delta t}{2\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_{j-1}^n) + \frac{a^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (Q_{j+1}^n - 2Q_j^n + Q_{j-1}^n) \quad (3.17)$$

Analogicky, jako v případě Laxovy–Friedrichsovy metody můžeme schéma zapsat pomocí tokových funkcí ve tvaru

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) \quad (3.18)$$

kde

$$F_{j+1/2}^n = a \frac{1}{2} (Q_j^n + Q_{j+1}^n) - a^2 \frac{\Delta t}{2\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (3.19)$$

V případě *nelineární úlohy* budeme opět aproximovat hodnotu $q(x_j, t_n)$ vztahem (3.13) a využitím aproximací neznámé funkce a jejich poměrných diferencí získáme schéma Laxovy–Wendroffovy metody pro nelineární úlohu ve tvaru

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n) \quad (3.20)$$

kde

$$F_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} [f(Q_j^n) + f(Q_{j+1}^n)] - (a_{j+1/2}^n)^2 \frac{\Delta x}{2\Delta t} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) \quad (3.21)$$

přičemž

$$a_{j+1/2}^n = \begin{cases} \frac{f(Q_{j+1}^n) - f(Q_j^n)}{(Q_{j+1}^n - Q_j^n)}, & \text{když } Q_j^n \neq Q_{j+1}^n \\ f'(Q_j^n), & \text{když } Q_j^n = Q_{j+1}^n \end{cases} \quad (3.22)$$

Podmínky stability Laxovy–Wendroffovy metody jsou stejné jako Laxovy–Friedrichsovy metody.

3.3.4 Metoda typu flux–limiter

Metoda typu flux–limiter patří k tzv. metodám s vysokým rozlišením. Jenom pro přiblížení: *metody s vysokým rozlišením* jsou metody, které splňují tyto základní vlastnosti:

1. v místech, kde je řešení hladké, je metoda řádu vyššího
2. tyto metody velmi dobře aproximují i nespojitosti přesného řešení
3. negenerují nežádoucí oscilace, které se u přesného řešení nevyskytují

Tato metoda je vlastně zobecněním a zpřesněním Laxovy–Wendroffovy metody a můžeme ji nazvat jinými slovy jako metoda omezeného toku. Pro $a > 0$ vypadá schéma metody typu flux–limiter následovně:

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_j^n - Q_{j-1}^n) - \quad (3.23)$$

$$-\frac{1}{2}a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \left[\phi(\theta_{j+1/2}^n)(Q_{j+1}^n - Q_j^n) - \phi(\theta_{j-1/2}^n)(Q_j^n - Q_{j-1}^n)\right]$$

Z tohoto schématu je patrné, že tokové funkce vynásobíme vhodně zvoleným limiterem, což je vlastně funkce ve tvaru

$$\phi(\theta_{j+1/2}^n) = \frac{\theta_{j+1/2}^n + |\theta_{j+1/2}^n|}{1 + |\theta_{j+1/2}^n|} \quad (3.24)$$

kde pro $a > 0$ je

$$Q_j^{n+1} = Q_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (Q_{j+1}^n - Q_j^n) + \quad (3.25)$$

$$+\frac{1}{2}a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(1 + a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \left[\phi(\theta_{j+1/2}^n)(Q_{j+1}^n - Q_j^n) - \phi(\theta_{j-1/2}^n)(Q_j^n - Q_{j-1}^n)\right]$$

a také diferenční podíl

$$\theta_{j+1/2}^n = \frac{Q_{j+2}^n - Q_{j+1}^n}{Q_{j+1}^n - Q_j^n} \quad (3.26)$$

Tento diferenční podíl můžeme obecně chápat i jako poměr plynulosti, nebo lokální hladkosti řešení v okolí bodu $x_{j+1/2}$.

Na chvíli se ještě zastavíme při funkci $\phi(\theta_{j+1/2}^n)$. Jak jsme se již dříve zmínili, je to vlastně funkce, která představuje lokální míru hladkosti řešení. Obecně musí limiter splňovat následující vlastnosti:

1. $0 \leq \phi(\theta) \leq 2 \in \mathbb{R}^+$
2. $\phi(\theta) = 0$ pro $\theta < 0$

Limiterů existuje několik druhů. Uvedme si zde několik příkladů:

1. $\phi(\theta) = \frac{\theta^2 + \theta}{\theta^2 + 1}$ - van Albada
2. $\phi(\theta) = \frac{\theta + |\theta|}{1 + |\theta|}$ - van Leer
3. $\phi(\theta) = \max(0, \min(1, \theta))$ - minmod

Pro naši práci jsme zvolili limiter typu van Leer. Z našich experimentů se můžeme přesvědčit, že volba limiteru může značně ovlivnit tvar metody. V případě, že $\phi(\theta_j^n) = 0 \forall j$, se vynuluje celý korekční člen a z metody z vysokým rozlišením dostáváme metodu prvního řádu, konkrétně metodu typu

upwind. Pokud $\phi(\theta_j^n) = 1 \ \forall j$, z metody druhého řádu zbude pouze numerický tok a tím se z ní stává Laxova–Wendroffova metoda. Tyto informace jsou užitečné v mnoha aplikacích. Stačí totiž pouze vyrobit metodu s limitem a následně měnit pouze jeho tvar pomocí vhodně zvolených parametrů. Podrobný popis nelineárního tvaru metody typu flux–limiter nalezne čtenář v publikaci [1].

Kapitola 4

Numerické experimenty

V této kapitole si ukážeme konkrétní charakter jednotlivých vybraných numerických metod, které jsme popisovali v předchozí kapitole. Dříve ale, než se pustíme do samotných numerických experimentů a testování jednotlivých metod, bychom si měli nastínit princip analytického řešení typových rovnic, na kterých budeme naše experimenty provádět.

4.1 Vlastnosti analytického řešení

Budeme uvažovat lineární skalární úlohu

$$q_t + a q_x = 0 \quad x \in \langle 0, 1 \rangle \quad t \in \langle 0, \infty \rangle$$

s počáteční podmínkou $q(x, 0) = q_0(x)$, kde funkce $q(x, t)$ představuje neznámou veličinu v bodě x a čase t . Výsledky našich experimentů pak budou záviset na zvolené počáteční podmínce q_0 , přesněji na její „hladkosti“. Funkce $a = a(x)$, $a \in \mathbb{R}$ reprezentuje rychlost toku. O významu kladného, případně záporného znaménka v souvislosti s touto rychlostí jsme se již zmínili dříve (viz metoda typu upwind 3.3.1). Jak je již patrné ze zadání, úloha je řešena na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, proto je nutno zadat ještě tzv. okrajové podmínky, které jsou charakteristické pro každý zkoumaný fyzikální jev nebo problém spíše individuálně, a které závisí také na typu úlohy, kterou chceme modelovat. Pro naši úlohu jsem zavedli následující okrajové podmínky:

$$\text{pokud je } a > 0 \implies q(0, t) = q_L(t) \quad (4.1)$$

$$\text{pokud je } a < 0 \implies q(1, t) = q_R(t) \quad (4.2)$$

kde $q_L(t)$ a $q_R(t)$ jsou hodnoty, které popisují chování na levém, respektive pravém okraji zvoleného intervalu. Přesné řešení této rovnice je ve tvaru

$$q(x, t) = q_0(x - at) \quad (4.3)$$

I přes to, že jsme schopni v případě lineárních dat určit analyticky přesné řešení transportní, nebo-li advekční rovnice, toto řešení není vůbec jednoduché. Jedná se totiž o parciální diferenciální rovnici a proto se rovnice tohoto typu řeší spíše numericky. Samozřejmě, v tomto případě se jedná o zobecněné řešení. V případě více dimenzí a přítomnosti zdrojového členu je situace mnohem složitější.

Pro další experimenty jsme si zvolili i nelineární případ, kde nám funkci rychlosti zde nahrazuje funkce $f(q)$, konkrétně se tedy jedná o rovnici ve tvaru

$$q_t + f(q)_x = 0 \quad (4.4)$$

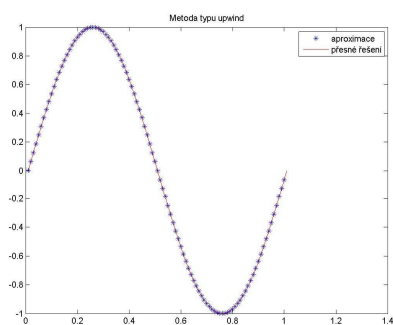
pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, která je známá jako Burgersova rovnice a také $f(q) = \frac{1}{3}q^3$, aby výsledky našich experimentů byli různorodé a zajímavé. Počáteční a okrajové podmínky jsme ponechali pro všechny případy stejné.

4.2 Numerické řešení

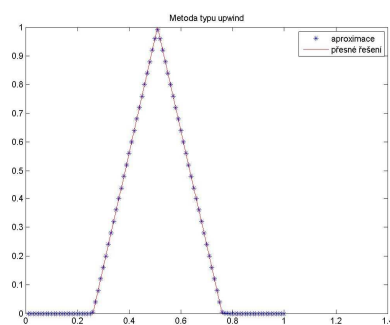
V této části si konkrétně ukážeme jak a za jakých podmínek se jednotlivé, výše zmiňované vybrané numerické metody chovají. Jenom pro připomenutí řekněme, že metoda typu upwind a Laxova–Friedrichsova metoda jsou metody prvního řádu, kdežto metoda Laxova–Wendroffova a metoda typu flux–limiter jsou metody řádu druhého. Tento poznatek se nám totiž bude hodit při obecném zkoumání řádu metody bez toho, aniž bychom tento řád předem znali. Budeme totiž schopni pomocí vhodně zvoleného algoritmu tento řád přibližně odhadnout. Vraťme se ale nejdříve k našemu numerickému řešení. Následující obrázky nám poskytnou názorný přehled o průběhu a funkčnosti jednotlivých numerických metod, které jsme již dříve popisovali. Parametry, které jsme při testování použili jsou následující (v případě změny jsou komentovány u každého obrázku samostatně):

1. rychlost, která je buď konstantní $a = a(q) = 1$ nebo v nelineárním případě) je funkcí ve tvaru $f(q) = \frac{1}{2}q^2$ a $f(q) = \frac{1}{3}q^3$
2. N - počet časových kroků (volitelný parametr)
3. $M = 1000$ - počet prostorových kroků (pevný parametr)
4. $\Delta t = 0.0001$ - představuje velikost časového kroku (v nelineárním případě je parametr nastavený na $\Delta t = 0.00001$)
5. $\Delta x = 0.001$ - představuje velikost prostorového kroku (pro naše experimenty zvolený pevně).

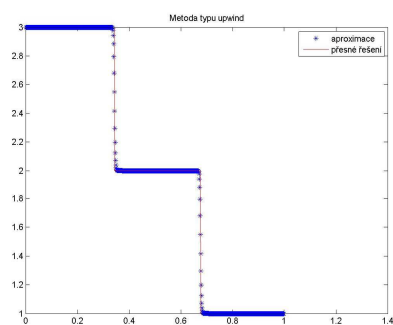
Uvedeme si zde jenom několik příkladů, které popisují chování metody typu upwind pro různé počáteční podmínky. Podrobněji budou jednotlivé experimenty uvedeny a popsány v části Přílohy.



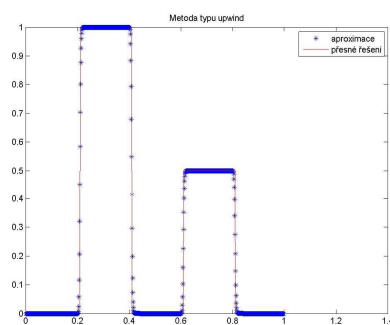
Obrázek 4.1: Aproximace přesného řešení rovnice metodou typu upwind pro $a = 1$, $N = 100$



Obrázek 4.2: Aproximace přesného řešení rovnice metodou typu upwind pro $a = 1$, $N = 100$

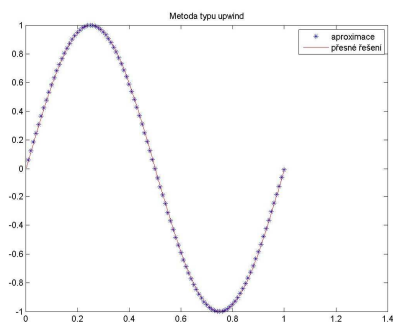


Obrázek 4.3: Aproximace přesného řešení rovnice metodou typu upwind pro $a = 1$, $N = 100$

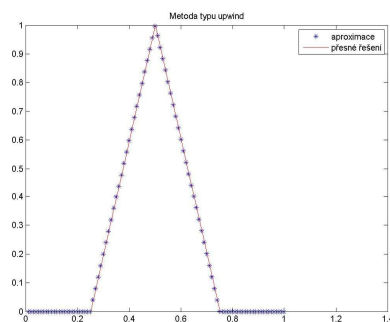


Obrázek 4.4: Aproximace přesného řešení rovnice metodou typu upwind pro $a = 1$, $N = 100$

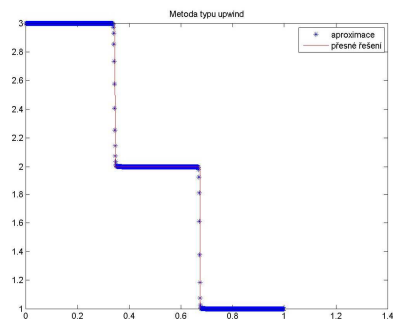
Zde uvádíme příklad aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice metodou typu upwind. Pro dosažení přesnější aproximace jsme zvolili parametr $\Delta t = 0.00001$. Stejně, jako v předchozím případě jsou další provedené experimenty uvedené v části Přílohy.



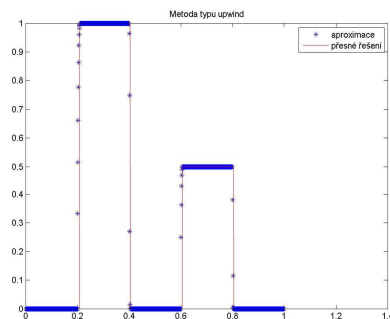
Obrázek 4.5: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice metodou typu upwind pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 100$



Obrázek 4.6: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice metodou typu upwind pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 100$

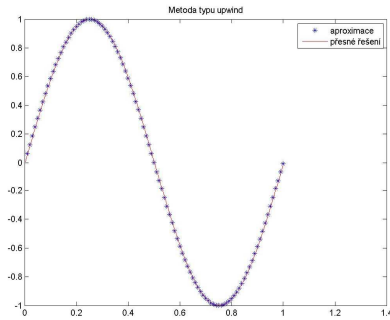


Obrázek 4.7: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice metodou typu upwind pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 400$

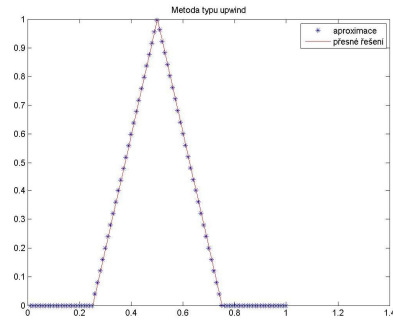


Obrázek 4.8: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice metodou typu upwind pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 400$

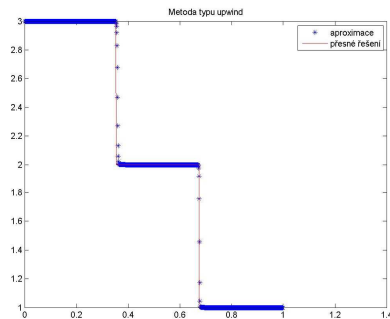
Pochopitelně, tímto způsobem bychom mohli testovat a zkoumat chování různých dalších transportních rovnic. Z důvodu prostorového omezení zde uvedeme jenom pár příkladů, jak se jednotlivé metody chovají v případě rovnice ve tvaru $q_t + f(q)_x = 0$, znovu pro parametr $\Delta t = 0.00001$, kde $f(q) = \frac{1}{3}q^3$ [podrobněji – viz Přílohy].



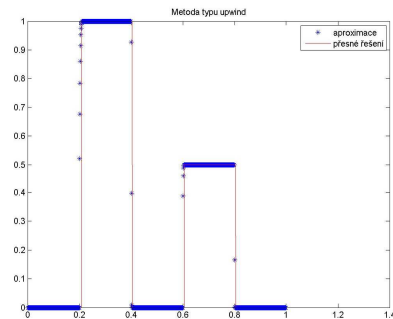
Obrázek 4.9: Aproximace přesného řešení transportní rovnice ve tvaru $f(q) = \frac{1}{3}q^3$ metodou typu upwind pro $N = 100$



Obrázek 4.10: Aproximace přesného řešení transportní rovnice ve tvaru $f(q) = \frac{1}{3}q^3$ metodou typu upwind pro $N = 100$



Obrázek 4.11: Aproximace přesného řešení transportní rovnice metodou typu upwind pro $f(q) = \frac{1}{3}q^3$, $N = 400$



Obrázek 4.12: Aproximace přesného řešení transportní rovnice metodou typu upwind pro $f(q) = \frac{1}{3}q^3$, $N = 400$

4.3 Výsledky numerických experimentů

V této části si zhodnotíme jednotlivé numerické experimenty. Metody prvního řádu mají výhodu v jednodušší implementaci a také v tom, že zachovávají monotonii řešení a neprodukují další lokální extrémy oproti přesnému řešení. Nevýhodou je pochopitelně samotný nízký řád přesnosti. Jak jsme se již zmiňovali dříve, metoda typu upwind a Laxova–Fridrichsova metoda jsou metody prvního řádu a jejich implementace je velice vhodná pro řešení rovnic s hladkými počátečními daty. Z obrázků (4.1) až (4.4) a také v části *Přílohy* z obrázků (4.13) až (4.16) je patrné, že při hladkých vstupních datech nám numerická metoda téměř přesně aproximuje přesné řešení, kdežto u řešení, které obsahuje skoky má numerická metoda tendenci tyto skoky vyhlazovat a řešení zaobluje. Vznikají nám tím určité nepřesnosti a také je možné pozorovat tzv. fázový posun¹ nebo jakési zpoždění numerického řešení. Laxova–Wendroffova metoda nám při konstantní rychlosti v místech, kde se vyskytují skoky nebo jiné nespojitosti, vytváří oscilace. Stejně tak je tomu i u metody typu flux–limiter. Zde také můžeme pozorovat fázový posun.

Další obrázky obsahují experimenty, provedené při aproximacích přesného řešení Burgersovy rovnice a rovnice ve tvaru $q_t + f(q)_x = 0$ pro $f(q) = \frac{1}{3}q^3$. Uvádíme zde aproximace vybranými metodami pro čtyři různá přesná řešení námi zvolených typových rovnic v nelineárním tvaru (viz Kapitola 3.2). Metody druhého řádu se vyznačují vyšší přesností v místech, kde je řešení hladké. V případě nespojitého řešení však tyto metody produkují umělé oscilace, které přesné řešení neobsahuje. Při zvětšení časové diskretizace je zřejmý fázový posun, který má tendenci přesné řešení vzhledem k časové diskretizaci formálně zkracovat. Pro nehladká data je velice vhodná metoda typu flux–limiter. Na obrázcích (4.37 - 4.38) je vidět, jakým způsobem s poměrně velkou přesností nám metoda aproximuje přesné řešení Burgersovy rovnice. Z těchto experimentů lze vyvodit jednoznačný závěr, že chyba se blíží k nule za předpokladu vhodně zvolené časové diskretizace.

¹Fáze vlny je bezrozměrná veličina, která určuje vztah charakteristické veličiny vlny (například výchylky, akustického tlaku nebo magnetické indukce) k danému místu a času a ke stavu charakteristické veličiny vlny v časovém a prostorovém počátku. Závislost charakteristické veličiny na fázi určuje "tvar" vlny bez ohledu na její šíření. Fáze je parametrem, na kterém závisí časový průběh charakteristické veličiny v pevně daném místě, kterým vlna prochází, resp. prostorové pole charakteristické veličiny pro pevný časový okamžik. O fázi se hovoří nejen v případě vlnění, ale i při kmitání, kde má tato veličina podobný význam, ale bez prostorové závislosti

Jinými slovy, v případě nelineární rovnice a nehladkých vstupních dat je aproximace přesného řešení transportní rovnice tím přesnější, čím je menší Δt .

4.4 Odhad řádu numerické metody

Vzhledem k tomu, že tato práce má metodický charakter, ukážeme si zde postup konstrukce algoritmu, určeného k tomu, abychom byli schopni testovat i různé další, třeba i méně známé numerické metody. Z tohoto důvodu jsme také všechny zdrojové kódy upravovali již předem pro potřeby spíše univerzální, abychom mohli využít jak lineární tak i nelineární vstupní data. Na základě následujícího algoritmu budeme umět odhadnout řád metody, který se nám v určitých momentech v průběhu aproximace může měnit.

4.4.1 Konstrukce algoritmu pro odhad řádu numerické metody

V tomto případě je vhodnější hovořit o formálním řádu metody. Budeme řešit otázku, jak se změní řád metody hlavně v případě nehladkých dat. V jednoduchých případech lze tento problém řešit analyticky. Ve složitějších případech lze řád metody odhadnout pomocí numerických experimentů. Následující algoritmus je výsledkem práce S.K.Godunova [viz 2]. Pokud chceme měřit řád numerické metody, existují zde dvě možnosti:

1. zvolíme si rovnici, jejíž řešení již předem známe. Tato možnost je použitelná pouze v případě některých diferenciálních rovnic, nemá univerzální charakter a tudíž ji nemůžeme použít pro všechny numerické metody (nebudeme dále rozvádět).
2. zvolíme metodu experimentálního přístupu, kde řešení neznáme, ale můžeme si ho teoreticky zvolit a označit.

Označme tedy přesné řešení rovnice $q_t + [f(q)]_x = 0$ ve tvaru

$$q = q(t, x) \tag{4.5}$$

Toto řešení integrujeme v každém časovém kroku, tedy

$$Q^a(T, x) = \int_a^x q(T, y) dy \tag{4.6}$$

Zvolíme si numerickou metodu, pomocí které chceme přesné řešení aproximovat a toto přibližné řešení označíme v_j^n . Jedná se o řešení, které známe bodově. Budeme předpokládat, že přibližné řešení je v podstatě aproximací integrovatelné funkce, takže dostáváme tvar obdobný jako u přesného řešení

$$V^a(T, x) = \int_a^x v_j^n(T, y) dy \quad (4.7)$$

Použitím časové diskretizace můžeme tento vztah přepsat

$$V_{\Delta x}^a(T, x) = \int_a^x v_{\Delta x}(T, y) dy \quad (4.8)$$

Každý z integrálů je závislý na parametru Δx a my budeme předpokládat, že podíl $\frac{\Delta t}{\Delta x} = \text{konstanta}$. Jelikož se jedná o metodu r -tého řádu, platí následující vztah

$$V_{\Delta x}^a(T, x) - Q^a(T, x) = C \cdot \Delta x^r + o(\Delta x^r) \quad (4.9)$$

kde $o(\Delta x^r)$ představuje chybu numerické metody. Do nějakého času T , jinými slovy pro $t \in \langle 0, T \rangle$ si napočteme přibližná řešení. T volíme dostatečně velké tak, aby tam byl zřetelný fázový posun. Pro testování jsme si zvolili tyto diskretizační kroky

1. $\Delta x_1 = \Delta x$
2. $\Delta x_2 = \frac{\Delta x}{2}$
3. $\Delta x_3 = \frac{\Delta x}{4}$

Pro každý krok je splněna vlastnost (4.9) a tedy zavedeme rozdíl ve tvaru

$$\delta V_i = |V_{\Delta x_i}^a - V_{\Delta x_{i+1}}^a| = |C| \cdot (\Delta x_i - \Delta x_{i+1}) + o(\Delta x^r) \quad (4.10)$$

pro $i = 1, 2$.

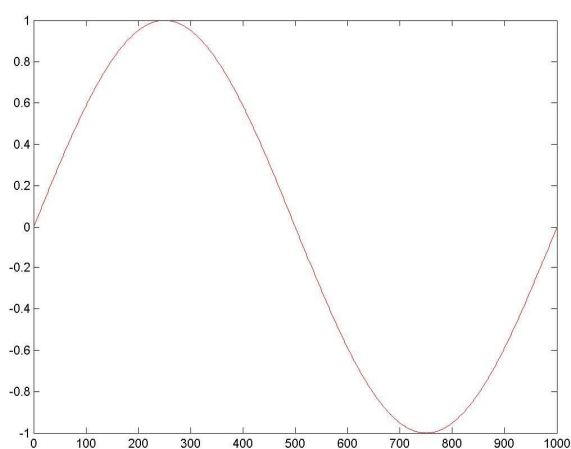
a vytvoříme podíl

$$\frac{\delta V_1}{\delta V_2} \approx \frac{\Delta x_1^r - \Delta x_2^r}{\Delta x_2^r - \Delta x_3^r} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^r}{(\frac{1}{2})^r - (\frac{1}{4})^r} = 2^r \quad (4.11)$$

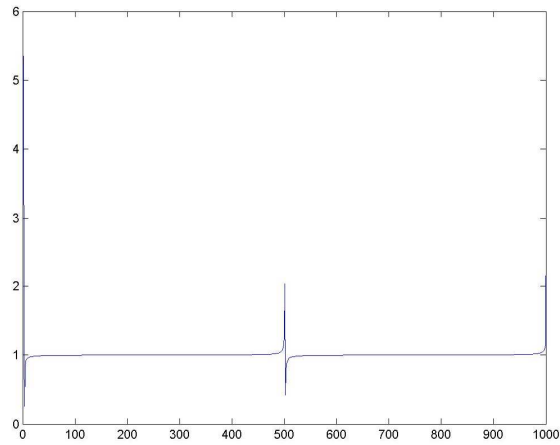
z čehož pak dostáváme

$$r \approx \log_2 \frac{\delta V_1}{\delta V_2} \quad (4.12)$$

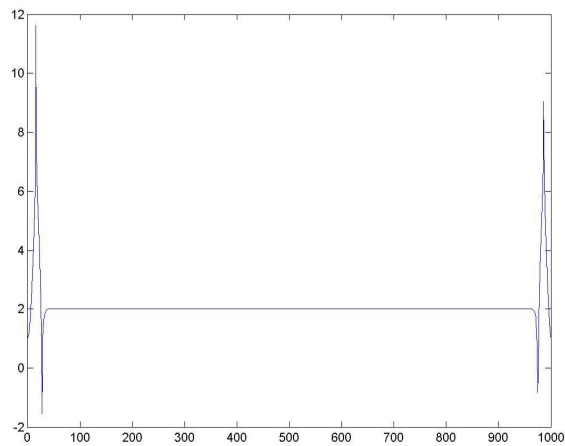
kde r představuje řád dané metody. Pomocí uvedeného algoritmu tedy nemusíme předem znát řád zvolené metody, jsme schopni ho přibližně určit. Následující obrázky nám poskytnou představu o tom, jakým způsobem se dokáže měnit řád vybrané numerické metody vzhledem k velikosti časové diskretizace a vzhledem k zvolenému časovému kroku.



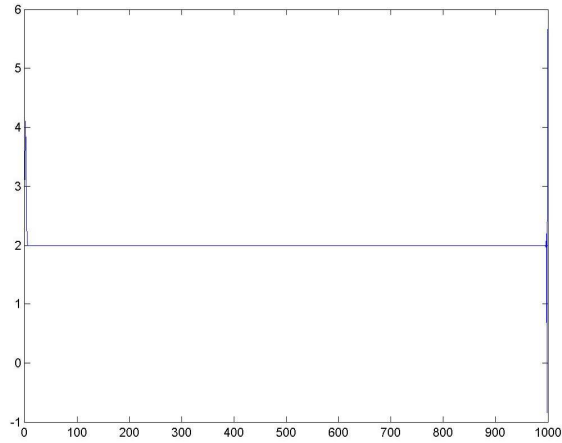
Obrázek 4.13: Přesné řešení transportní (difúzní) rovnice pro $a = 1, t = 0$



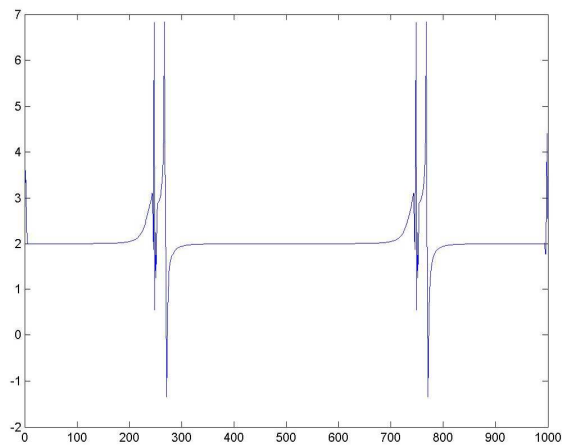
Obrázek 4.14: Odhad řádu metody typu upwind pro počáteční podmínku z obr. (4.13) $r = 1$. Drobné zakolísání řádu při přechodu funkce z konkávní v konvexní.



Obrázek 4.15: Odhad řádu Laxovy–Friedrichsovy metody pro počáteční podmínku z obr. (4.13) $r = 1$. Řád metody se poruší na začátku a na konci intervalu.

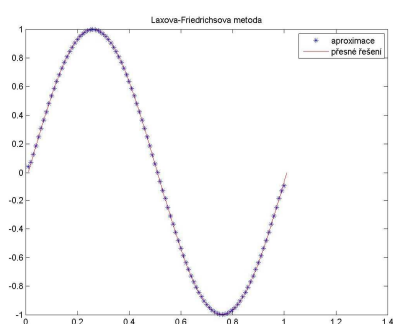


Obrázek 4.16: Odhad řádu Laxovy–Wendroffovy metody pro počáteční podmínku z obr. (4.13) $r = 2$. Tato metoda nám poměrně přesně aproximuje hladká data, její řád téměř neosciluje. V případě hladké počáteční podmínky je chyba aproximace minimální.

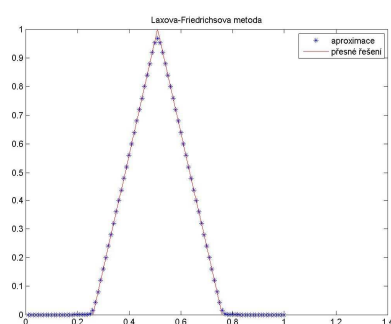


Obrázek 4.17: Odhad řádu metody typu flux-limiter pro počáteční podmínku z obr. (4.13) $r = 2$. Metoda je vhodná pro aproximace nehladkých dat.

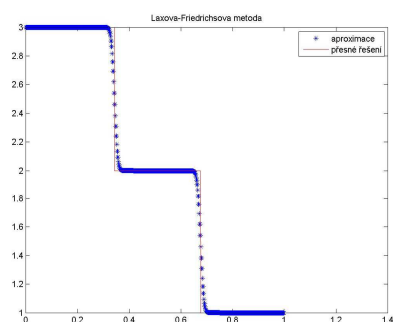
Přílohy



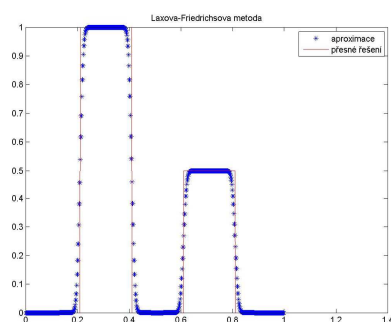
Obrázek 4.18: Aproximace přesného řešení rovnice Laxovou-Friedrichsovou metodou pro $a = 1$, $N = 100$, $\Delta t = 0.0001$



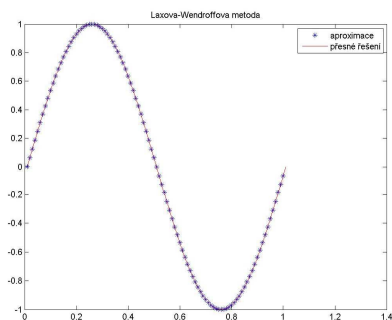
Obrázek 4.19: Aproximace přesného řešení rovnice Laxovou-Friedrichsovou metodou pro $a = 1$, $N = 100$, $\Delta t = 0.0001$



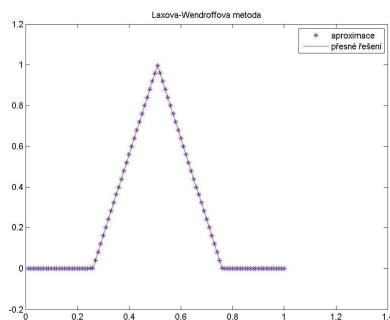
Obrázek 4.20: Aproximace přesného řešení rovnice Laxovou-Friedrichsovou metodou pro $a = 1$, $N = 100$, $\Delta t = 0.0001$



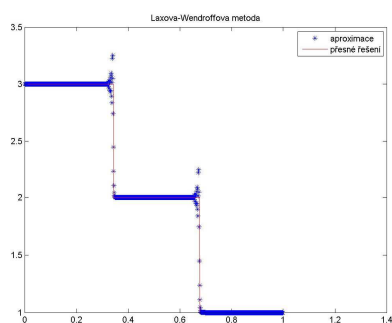
Obrázek 4.21: Aproximace přesného řešení rovnice Laxovou-Friedrichsovou metodou pro $a = 1$, $N = 100$, $\Delta t = 0.0001$



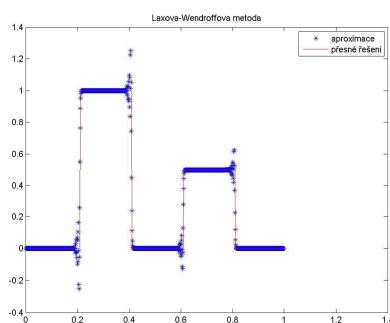
Obrázek 4.22: Aproximace přesného řešení rovnice Laxovou-Wendroffovou metodou pro $a = 1, N = 100, \Delta t = 0.0001$



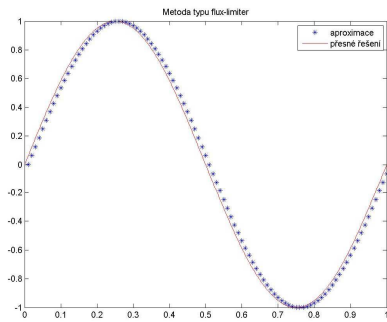
Obrázek 4.23: Aproximace přesného řešení rovnice Laxovou-Wendroffovou metodou pro $a = 1, N = 100, \Delta t = 0.0001$



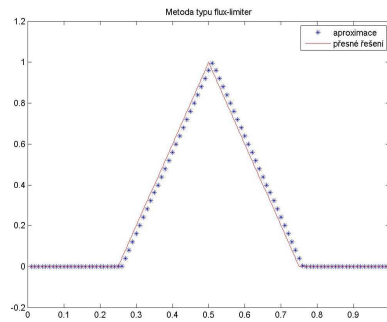
Obrázek 4.24: Aproximace přesného řešení rovnice Laxovou-Wendroffovou metodou pro $a = 1, N = 100, \Delta t = 0.0001$



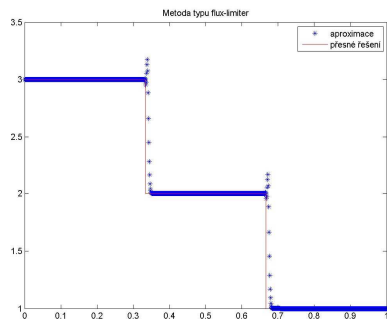
Obrázek 4.25: Aproximace přesného řešení rovnice Laxovou-Wendroffovou metodou pro $a = 1, N = 100, \Delta t = 0.0001$



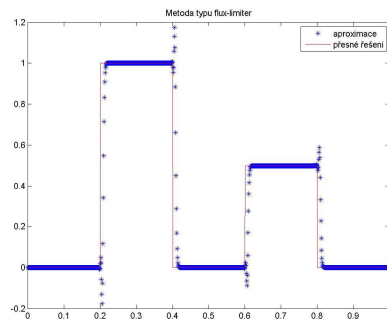
Obrázek 4.26: Aproximace přesného řešení rovnice metodou typu flux-limiter pro $a = 1, N = 100, \Delta t = 0.0001$



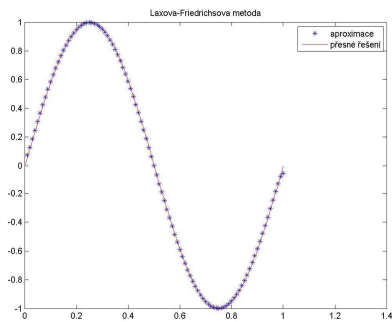
Obrázek 4.27: Aproximace přesného řešení rovnice metodou typu flux-limiter pro $a = 1, N = 100, \Delta t = 0.0001$



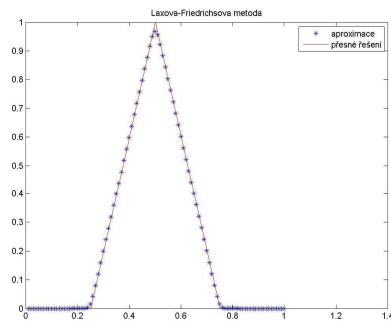
Obrázek 4.28: Aproximace přesného řešení rovnice metodou typu flux-limiter pro $a = 1, N = 100, \Delta t = 0.0001$



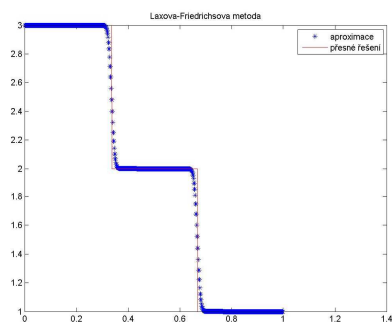
Obrázek 4.29: Aproximace přesného řešení rovnice metodou typu flux-limiter pro $a = 1, N = 100, \Delta t = 0.0001$



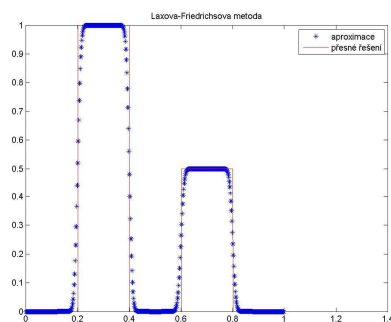
Obrázek 4.30: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice Laxovou-Friedrichsovou metodou pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



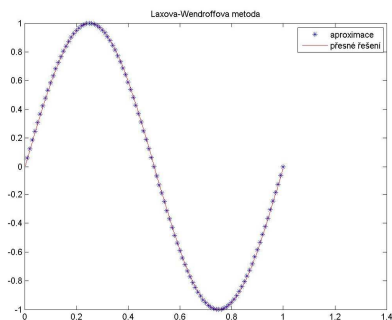
Obrázek 4.31: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice Laxovou-Friedrichsovou metodou pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



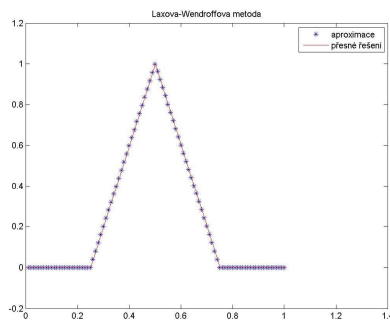
Obrázek 4.32: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice Laxovou-Friedrichsovou metodou pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



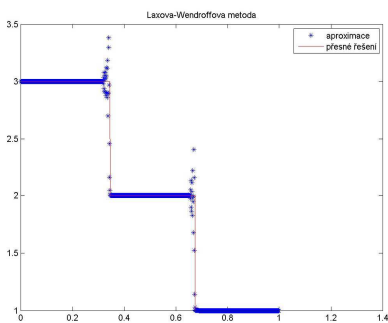
Obrázek 4.33: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice Laxovou-Friedrichsovou metodou pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



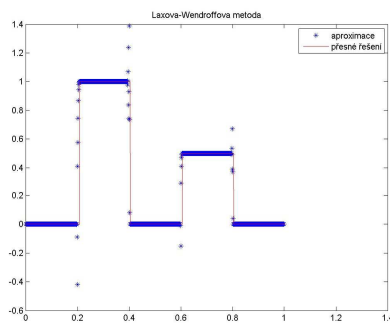
Obrázek 4.34: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice Laxovou-Wendroffovou pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



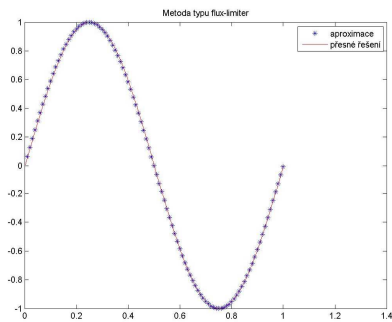
Obrázek 4.35: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice Laxovou-Wendroffovou metodou pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



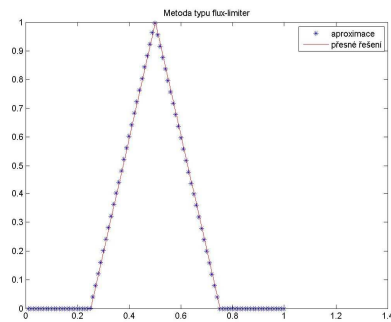
Obrázek 4.36: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice Laxovou-Wendroffovou metodou pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 400$, $\Delta t = 0.00001$



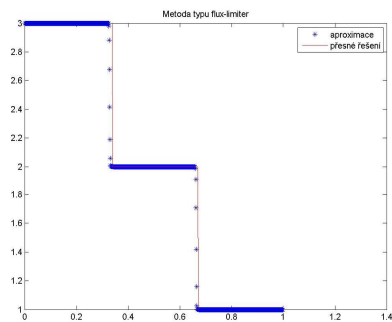
Obrázek 4.37: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice Laxovou-Wendroffovou metodou pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 400$, $\Delta t = 0.00001$



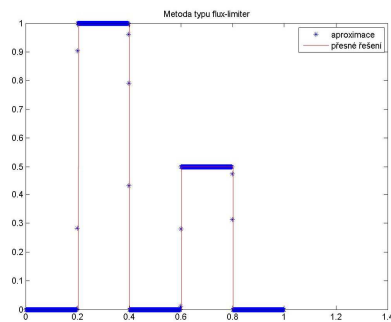
Obrázek 4.38: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice metodou typu flux-limiter pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



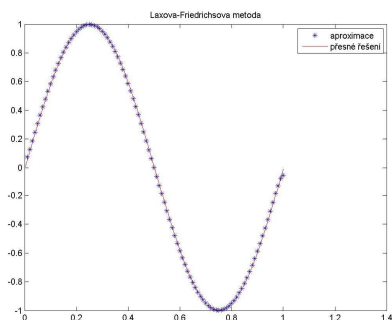
Obrázek 4.39: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice metodou typu flux-limiter pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



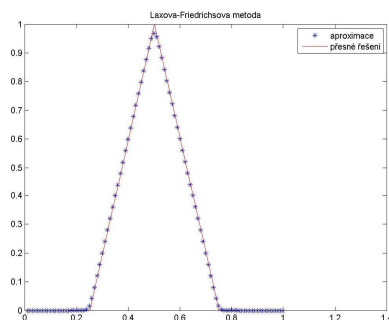
Obrázek 4.40: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice metodou typu flux-limiter pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 200$, $\Delta t = 0.00001$



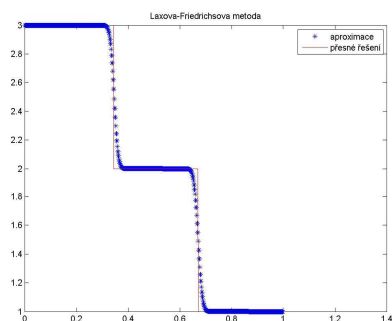
Obrázek 4.41: Aproximace přesného řešení Burgersovy rovnice metodou typu flux-limiter pro $f(q) = \frac{1}{2}q^2$, $N = 200$, $\Delta t = 0.00001$



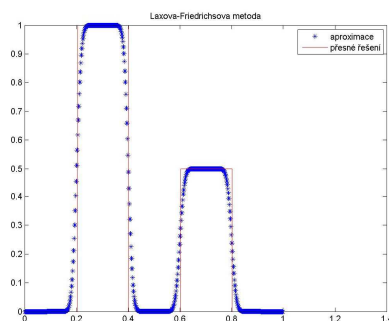
Obrázek 4.42: Aproximace přesného řešení transportní rovnice ve tvaru $f(q) = \frac{1}{3}q^3$ Laxovou-Friedrichsovou metodou pro $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



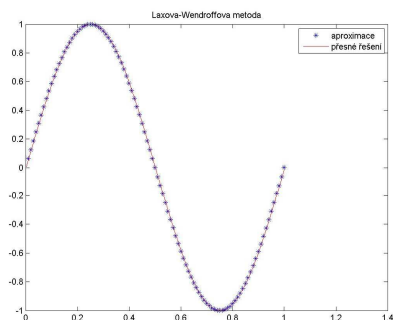
Obrázek 4.43: Aproximace přesného řešení transportní rovnice ve tvaru $f(q) = \frac{1}{3}q^3$ Laxovou-Friedrichsovou metodou pro $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



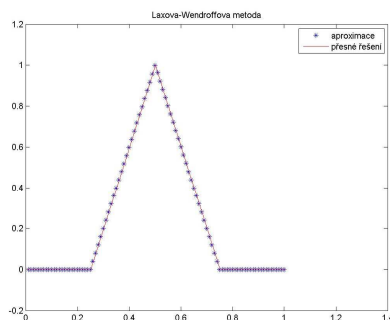
Obrázek 4.44: Aproximace přesného řešení transportní rovnice ve tvaru $f(q) = \frac{1}{3}q^3$ Laxovou-Friedrichsovou metodou pro $N = 200$, $\Delta t = 0.00001$



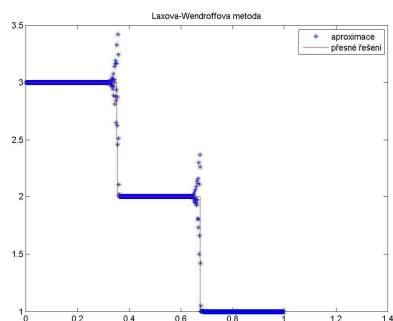
Obrázek 4.45: Aproximace přesného řešení transportní rovnice ve tvaru $f(q) = \frac{1}{3}q^3$ Laxovou-Friedrichsovou metodou pro $N = 200$, $\Delta t = 0.00001$



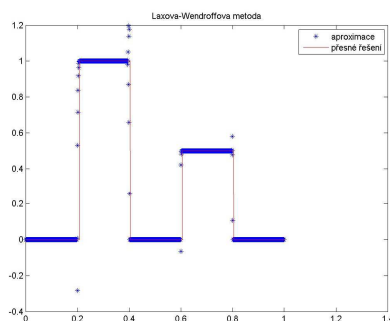
Obrázek 4.46: Aproximace přesného řešení transportní rovnice ve tvaru $f(q) = \frac{1}{3}q^3$ Laxovou-Wendroffovou metodou pro $N = 200$, $\Delta t = 0.00001$



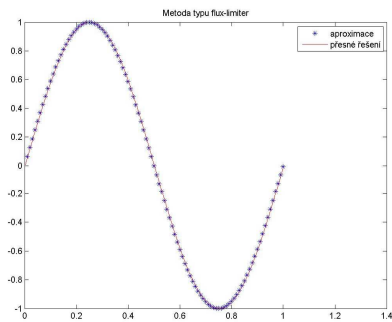
Obrázek 4.47: Aproximace přesného řešení transportní rovnice ve tvaru $f(q) = \frac{1}{3}q^3$ Laxovou-Wendroffovou metodou pro $N = 200$, $\Delta t = 0.00001$



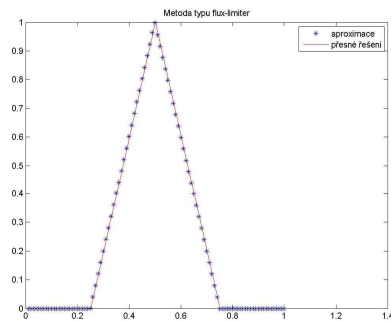
Obrázek 4.48: Aproximace přesného řešení transportní rovnice ve tvaru $f(q) = \frac{1}{3}q^3$ Laxovou-Wendroffovou metodou pro $N = 400$, $\Delta t = 0.00001$



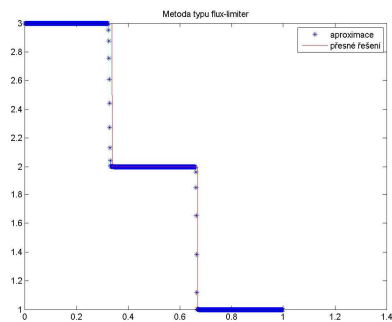
Obrázek 4.49: Aproximace přesného řešení transportní rovnice ve tvaru $f(q) = \frac{1}{3}q^3$ Laxovou-Wendroffovou metodou pro $N = 400$, $\Delta t = 0.00001$



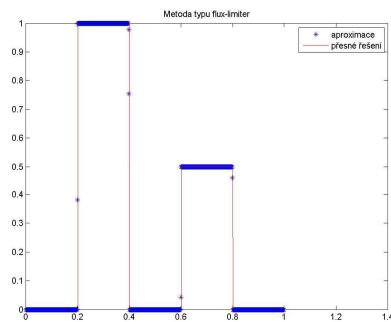
Obrázek 4.50: Aproximace přesného řešení transportní rovnice metodou typu flux-limiter pro $f(q) = \frac{1}{3}q^3$, $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



Obrázek 4.51: Aproximace přesného řešení transportní rovnice metodou typu flux-limiter pro $f(q) = \frac{1}{3}q^3$, $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



Obrázek 4.52: Aproximace přesného řešení transportní rovnice metodou typu flux-limiter pro $f(q) = \frac{1}{3}q^3$, $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$



Obrázek 4.53: Aproximace přesného řešení transportní rovnice metodou typu flux-limiter pro $f(q) = \frac{1}{3}q^3$, $N = 100$, $\Delta t = 0.00001$

Závěr

Cílem této bakalářské práce zdaleka není podat vyčerpávající obraz o metodách numerického řešení úloh, ale přiblížit problematiku numerických metod pro studenty a čtenáře, kteří se s danou problematikou doposud nesetkali. Jde pouze o seznámení s některými z metod a jejich praktických aplikací. Všechny experimenty a výsledky těchto experimentů jsou popsány spíše v obecnější formě a při aplikaci na konkrétní reálný fyzikální či jiný problém by jistě bylo potřeba do jednotlivých vztahů vložit co možná nejpřesněji i vlastnosti a zákonitosti fyzikální podstaty daného problému. Osvojení si efektivních postupů by však mělo jít ruku v ruce se snahou proniknout do podstaty studované problematiky. Jedině ten, kdo si dokáže uvědomit úskalí, se kterými se může v průběhu výpočtu setkat, dokáže také efektivně využívat softwarové produkty, které jsou v současné době k dispozici.

Literatura

- [1] Randall J. Leveque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, Cambridge.: 2004
- [2] S.K.Godunov, *Reminiscences about numerical schemes*. Rusko.: INRIA Sophia Antipolis 1997
- [3] Zdeněk Beran, *Parciální diferenciální rovnice a jejich význam pro aplikace*. Brno.: VUT Brno 2011
- [4] Jaroslav Tůma, *Numerické modelování dopravního proudu*. BP, Plzeň.: ZCU Plzeň 2011
- [5] Zdeňka Baxová, *Numerické metody pro advekční rovnici*. BP, Plzeň.: ZCU Plzeň 2012
- [6] Randall J. Leveque, *Finite Difference Methods for Differential Equations*. University of Washington, Winter/Spring Quarters.: 1998
- [7] Michal Křížek, *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*. Matematický ústav, Akademie věd ČR, Praha.: 2005
- [8] Milan Hokr, *Transportní procesy*. Fakulta mechatroniky a mezioborových inženýrských studií, Technická univerzita v Liberci, Liberec.: 2005
- [9] Martin Janoušek, *Základní pojmy numerických algoritmů, lekce L4*. ČHMÚ/ONPP: [online]
- [10] P.Drábek - G.Holubová, *Parciální diferenciální rovnice, Úvod do klasické teorie*. ZCU Plzeň: 2001
- [11] M.Brandner, J.Egermaier, H.Kopincová, *Numerické metody pro řešení evolučních parciálních diferenciálních rovnic*. ZCU Plzeň: 2012
- [12] Grétar Tryggvason, *Numerical Methods for Hyperbolic Equations I*. Worcester Polytechnic Institute: Spring 2009

- [13] Milan Kubíček, Miroslava Dubcová, Drahoslava Janovská, *Numerické metody a algoritmy*. Vysoká škola chemicko–technologická v Praze: VŠCHT Praha 2005
- [14] M.Brandner, J.Egermaier, H.Kopincová, *Numerické metody v hydrologii*. ZCU Plzeň–Vysoká škola báňská, Technická univerzita Ostrava: ISBN 2011
- [15] Radek Kučera, *Numerické metody a statistika*. Vysoká škola báňská, Technická univerzita Ostrava: 2011–2012
- [16] František Ježek, *Parciální diferenciální rovnice*. KMA/NGM–ZCU Plzeň: [online]
- [17] Radek Kučera, *Numerické metody*. Vysoká škola báňská, Technická univerzita Ostrava: ISBN 80-248-1198-7
- [18] S.Míka, M.Brandner, P.Přikryl, *Numerické metody řešení okrajových úloh pro diferenciální rovnice*. SNM/ZCU Plzeň: 2006, ISBN 80-86843-13-0
- [19] Štěpán Dyk, *Řešení Burgersovy rovnice a transportní rovnice v 1D pomocí základních numerických schémat*. SP, VMT/KME Plzeň: ZCU Plzeň 2012
- [20] Jan Vimmr, *Proudění stlačitelných tekutin – aplikace ve vnitřní aerodynamice*. Přednáška č. 11, UMM Plzeň: ZCU Plzeň [online]