Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Antonín Bohata

Bakalářská práce

Matematická analýza a její aplikace v klasické mechanice

Vedoucí práce: RNDr. Petr Tomiczek, CSc.

Obor: Obecná matematika

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury.

V Kostelci nad Černými lesy dne 10. 5. 2012 podpis

Děkuji panu RNDr. Petru Tomiczkovi, CSc za obětavé vedení bakalářské práce.

Obsah

Název práce: Matematická analýza a její aplikace v klasické mechanice
Autor: Antonín Bohata
Katedra: Katedra matematiky
Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Tomiczek, CSc.

Abstrakt: Tato práce pojednává o aplikaci matematické analýzy v klasické mechanice. Zabývá se Newtonovou, Lagrangeovou a Hamiltonovou formulací pohybových rovnic. Na konkrétních fyzikálních problémech je ilustrováno jejich využití.
Klíčová slova: Diferenciální rovnice; Newtonovy rovnice; Lagrangeovy rovnice; Hamiltonovy rovnice.

Title: Mathematical analysis and its applications in classical mechanics
Author: Antonín Bohata
Department: Department of Mathematics
Supervisor: RNDr. Petr Tomiczek, CSc.

Abstract: This thesis deals with applications of mathematical analysis in classical mehcanics. Formulations of Newton, Lagrange, and Hamilton equations of motion are discused. They are applied to concrete physical problems.
Keywords: Differential equations; Newton equations; Lagrange equations; Hamilton equations.

Úvod

V této práci se budeme věnovat nejjednodušším aplikacím klasické matematické analýzy v klasické mechanice. V první kapitole začneme rozborem základních principů klasické mechaniky. Zavedeme základní fyzikální veličiny používané pro popis pohybu hmotného bodu (soustavy hmotných bodů, tuhého tělesa) jako jsou délka a čas. Z těchto veličin konstruujeme další fyzikální veličiny, rychlost a zrychlení. Dále se věnujeme fyzikálním postulátům, které umožňují kompletní popis pohybu hmotných bodů (tuhého tělesa). Prezentujeme Newtonův, Lagrangeův a Hamiltonův formalismus. Všechny tyto způsoby popisu vedou k obyčejným diferenciálním rovnicím. Matematické poučky z nauky o diferenciálních rovnicích nás informují o existenci a jednoznačnosti řešení takových rovnic i o vlastnostech jejich řešeních. Abychom si utvořili alespoň nějakou představu o použití matematických metod v klasické mechanice, tak se zaměříme na studium pohybu částic ve vnějším elektromagnetickém poli. V druhé kapitole proto probereme základní postuláty klasické elektrodynamiky. Dále ilustrujeme (na nejjednodušších možných fyzikálních úlohách) použití Newtonova, Lagrangeova a Hamiltonova formalismu na pohybu nabité částice ve vnějším elektromagnetickém poli.

Kapitola 1

Klasická mechanika

V této kapitole se pokusíme o formulaci základních principů klasické mechaniky. Ukážeme, že se Newtonovské formulaci dá dát velice zajímavé matematické zpracování, které umožňuje řešit elegantně řadu problémů klasické mechaniky.

1.1 Poloha, rychlost a zrychlení

Náplní klasické mechaniky je popis pohybu těles. Tento popis se neobejde bez použití matematiky, především geometrie a (klasické) matematické analýzy. Základní otázky na něž se mechanika pokouší odpovědět jsou kdy? a kde? těleso bylo, je a bude. Z toho usuzujeme, že nejprve musíme umět popsat polohu tělesa v prostoru (na to slouží geometrie) a pak mít vhodné pojmy na popis změny polohy v průběhu času (k tomu používáme matematickou analýzu).

Abychom si popis pohybu tělesa zjednodušili, tak si zavedeme pojem **hmotný bod**. Pod hmotným bodem budeme (fyzikálně) rozumět těleso, jehož rozměry můžeme zanedbat vzhledem ke vzdálenostem na nichž pohyb tělesa studujeme. Například planetu můžeme považovat za hmotný bod při jejím pohybu okolo Slunce. Na druhou stranu při popisu otáčení planety kolem její osy ji za hmotný bod považovat nemůžeme. Vždy musíme zohlednit kontext, ve kterém fyzikální popis provádíme. Když budeme umět popsat pohyb jednoho hmotného bodu, tak lehce zobecníme náš algoritmus na popis většího množství hmotných bodů, tzv. soustava hmotných bodů[1].

Prvním úkolem je určení polohy hmotného bodu v prostoru. Budeme předpokládat, že máme k dispozici metr a hodiny. Pomocí těchto pomůcek

[1]Když budou mít hmotné body ze soustavy hmotných bodů mezi sebou neproměnné vzdálenosti, tak budeme mluvit o (dokonale) tuhém tělese.

budeme měřit vzdálenosti a časové intervaly[2]. Matematicky zachytíme měření vzdáleností zavedením kartézské souřadné soustavy (pevně) spojené s referenčním tělesem[3].

Poloha bodu je (v daný okamžik t) jednoznačně určena **polohovým vektorem**; označujeme $\mathbf{r}(t)$. V konkrétních výpočtech je polohový vektor (často) určen zadáním jeho (kartézských) souřadnic, jejichž hodnoty závisí na čase.

Nyní přistoupíme k popisu změny polohy hmotného bodu za čas. Vektor **rychlosti** v daném čase t definujeme vztahem[4]

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t). \tag{1.1}$$

Když známe (kartézské) souřadnice polohového vektoru, tak snadno spočteme (kartézské) souřadnice vektoru rychlosti.

Dále nás zajímá jak rychle se mění rychlost v daném časovém okamžiku. Tuto situaci vystihuje pojem vektor **zrychlení** definovaný v daném okamžiku t vztahem

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t). \tag{1.2}$$

Když známe (kartézské) souřadnice polohového vektoru, tak snadno spočteme (kartézské) souřadnice vektoru zrychlení.

1.2 Princip setrvačnosti

Jak víme z předešlého paragrafu je poloha, rychlost a zrychlení definováno v nějaké pevně dané (kartézské) souřadné soustavě. V mechanice se, pro formulaci jejích základních principů, nevolí libovolná (kartézská) souřadná soustava, ale jistá privilegovaná třída (kartézských) souřadných soustav. Podrobnější rozbor ukazuje (viz [5]), že je (v klasické mechanice) vhodné předpokládat platnost **principu setrvačnosti**. Princip setrvačnosti tvrdí, že *existuje (kartézská) souřadná soustava, vůči níž se volný hmotný bod*[5] *pohybuje podle rovnice* $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$, *tj. s nulovým zrychlením. Jinak řečeno je vůči takové soustavě v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.*[6]. Souřadnou

[2]Podrobněji v [5].

[3]Např. si jako referenční těleso zvolíme povrch Země.

[4]Derivaci podle času označujeme tečkou, jak je ve fyzice zvykem.

[5]Volný hmotný bod je bod, na který nepůsobí jiné hmotné body (popřípadě lze toto působení zanedbat).

[6]K tomuto postulátu byl přiveden Galileio při svých slavných pokusech. Jednalo se o dalekosáhlé zobecnění, protože experiment, který by ověřil tento postulát je prakticky neproveditelný. V pozemských podmínkách nelze zanedbat vzájemné působení těles (např. tření, gravitační působení Země, ...)

soustavu, vůči níž se volný hmotný bod pohybuje s nulovým zrychlením nazýváme **inerciální** souřadnou soustavou[7]; ostatní[8] souřadné soustavy nazýváme **neinerciální**[9].

Nyní je třeba si položit otázku, zda existuje pouze jedna inerciální souřadná soustava, nebo je jich víc. Lehce nahlédneme, že když se bude (vůči inerciální souřadné soustavě) pohybovat počátek jiné souřadné soustava konstantní rychlostí a osy obou souřadných soustav budou svírat pevné úhly, tak tato souřadná soustava bude také inerciální. Skutečně, uvažujme hmotný bod a označme $\mathbf{r}(t)$ polohový vektor hmotného bodu v inerciální souřadné soustavě, $\mathbf{r}'(t')$ polohový vektor hmotného bodu ve vyšetřované souřadné soustavě, $\mathbf{V}$ (konstantní) rychlost počátku vyšetřované souřadné soustavy vzhledem k inerciální souřadné soustavě, $\mathbf{A}$ matici reprezentující natočení os vyšetřované souřadné soustavy vůči osám inerciální souřadné soustavy[10], $\mathbf{r}(t_0)$ polohový vektor počátku vyšetřované soustavy vůči inerciální souřadné soustavě v počátečním čase t_0 a konečně předpokládejme, že čas plyne v obou soustavách stejně. Pro přepočet polohových vektorů a časů mezi soustavami zřejmě platí vztahy[11] (viz [5])

$$\mathbf{r}'(t') = \mathbf{A}\mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{V}t, \tag{1.3}$$

$$t' = t. \tag{1.4}$$

Jestliže zvolíme bod, který se vůči inerciální souřadné soustavě pohybuje podle rovnice $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$ (tj. je to volný hmotný bod), tak po dvojnásobném zderivování vztahu (1.3) podle času[12] bude jeho zrychlení rovno nule. Podle principu setrvačnosti je vyšetřovaná soustava soustavou inerciální.

Z toho, co bylo řečeno, je již zřejmé, že když existuje jedna inerciální souřadná soustava, pak existuje libovolný počet inerciálních soustav. Jejich počátky se vůči sobě pohybují rovnoměrně přímočaře a osy jedné soustavy svírají s osami ostatních soustav pevné úhly. A konečně jde čas ve všech inerciálních soustavách stejně.

Poznamenejme, že transformace určené vztahy (1.3) a (1.4) se nazývají

[7] Prakticky (pro děje netrvající dlouhou dobu) považujeme za inerciální soustavu kartézskou souřadnou soustavu spojenou s povrchem Země. Podrobněji je realizace inerciálního systému probrána v [5].

[8] Tj. soustavy vůči nimž se volný hmotný pod pohybuje s nenulovým zrychlením.

[9] Striktně vzato je soustava spojená s povrchem Země neinerciální. Tento fakt dokazuje pokus s tzv. Foucaultovým kyvadlem, jehož bylo použito k důkazu otáčení Země kolem zemské osy.

[10] Matice reprezetující natočení souřadných os je ortogonální. Její prvky jsou (pevně daná) reálná čísla.

[11] V těchto vztazích jsou vektory reprezentovány maticemi.

[12] Čas plyne v obou soustavách stejně!

Galileiho transformace[13].

V klasické mechanice se předpokládá, že všechny inerciální souřadné soustavy jsou plně rovnoprávné z hlediska všech zákonů klasické mechaniky, tzv. **Galileiho princip relativity**.

1.3 Pohybové rovnice v Newtonově formalismu

Z logického obrácení principu setrvačnosti plyne, že když na vyšetřovaný hmotný bod působí jiné hmotné body, tak se vyšetřovaný hmotný bod musí pohybovat s nenulovým zrychlením (vůči inerciální souřadné soustavě). Kvantitativně to vystihneme pohybovým zákonem

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{F}((\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), (t)), \tag{1.5}$$

kde m je **setrvačná hmotnost** (stručně hmotnost)[14]; $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ je zrychlení vyšetřovaného hmotného bodu[15]; vektorová funkce $\mathbf{F}((\mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t), (t))$ se nazývá (výsledná) **síla**[16].

Z matematického hlediska je rovnice (1.5) obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci. Jak se můžeme poučit v knihách o diferenciálních rovnicích (např. [12]) musíme k jednoznačnému určení řešení této rovnice zadat ještě tzv. **počáteční podmínky**. Tj. zadat polohový vektor a vektor rychlosti v nějakém (počátečním) čase.

Zadáním polohového vektoru a vektoru rychlosti v nějakém čase určuje tzv. **stav** vyšetřovaného hmotného bodu (v tomto čase)[17].

[13] Dá se ukázat, že Galileiho transformace tvoří (Galileiho) grupu.

[14] Setrvačná hmotnost fyzikálně charakterizuje nechuť hmotného bodu měnit rychlost. Setrvačná hmotnost je pevné kladné reálné číslo (podle experimentů), které je charakteristické pro vyšetřovaný hmotný bod. Setrvačná hmotnost má ve všech inerciálních souřadných soustavách stejnou hodnotu (je to postulát, který je ověřen experimenty).

[15] Podle Galileiho transformace je zrychlení ve všech inerciálních soustavách stejné.

[16] Charakterizuje (celkové) působení hmotných bodů na vyšetřovaný hmotný bod. Tato funkce musí mít v každé inerciální souřadné soustavě stejný tvar, tj. musí splňovat Galileiho princip relativity. Vzájemné působení hmotných bodů totiž nemůže záviset na výběru inerciální souřadné soustavy (to je postulát klasické mechaniky). Podrobněji viz [5]. Dále se předpokládá, že vzájemné působení hmotných bodů je párové a působí po spojnici těchto bodů. Celkové působení (výsledná síla) se získá pomocí principu superpozice pro síly (vektorový součet jednotlivých sil), jehož platnost se předpokládá.

[17] Měřením polohy a rychlosti hmotného bodu v daném čase poskytuje maximální možnou informaci o daném hmotném bodu (předpoklad klasické mechaniky). Pomocí polohy a rychlosti můžeme spočítat hodnotu libovolné mechanické veličiny (tyto veličiny jsou funkcemi polohového vektoru a vektoru rychlosti) a tu srovnat s experimentem. Poznamenejme, že v klasické mechanice jsou libovolné mechanické veličiny (podle zkušenosti) současně měřitelné.

1.4 Pohybové rovnice v Lagrangeově formalismu

V řadě teoretických úvah je výhodné dát pohybové rovnici (1.5) jiný matematický tvar. Abychom si situaci příliš nekomplikovali, uvažujme jednorozměrný případ, řekněme v ose x inerciální souřadné soustavy, rovnice (1.5). Dále předpokládejme, že síla závisí pouze na souřadnici x a lze ji napsat jako záporně vzatou derivaci podle souřadnice x skalární funkce $U(x)$[18], tj. $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$. Pak zřejmě platí

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F_x, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{\partial \dot{x}}\right] &= -\frac{\partial U}{\partial x}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{\partial \dot{x}}\right] + \frac{\partial U}{\partial x} &= 0, \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

Výraz $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ se nazývá **kinetická energie** hmotného bodu vzhledem k dané inerciální souřadné soustavě a funkce U se nazývá **potenciální energie** hmotného bodu[19]. Zavedeme-li funkci $L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)$, tzv. Lagrangeova funkce (Lagrangián), můžeme přepsat rovnici (1.6) na tvar

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \qquad (1.7)
$$

Rovnice (1.7) se nazývá Lagrangeova rovnice.

Tento postup je možno zobecnit na trojrozměrný případ. V tomto případě předpokládáme, že je možno zadat sílu jako záporně vzatý gradient skalární funkce U[20], tj. $\mathbf{F} = -\nabla U$. Pro (kartézské) souřadnice je $F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$. Pohybová rovnice (1.5) po rozepsání do (kartézských) souřadnic dá

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x} &= F_x, \\
m\ddot{y} &= F_y, \\
m\ddot{z} &= F_z.
\end{aligned}
$$

[18] Předpokládáme, že je tato funkce definovaná na nějakém otevřené intervalu.

[19] Mluvíme sice o potenciální energii hmotného bodu, ale ve skutečnosti tato funkce popisuje vzájemné působení dvou hmotných bodů. Jeden bod je zdrojem působení a druhý, jehož pohyb vyšetřujeme, je obětí tohoto působení. Je proto lepší mluvit o funkci U jako o interakční energii.

[20] Předpokládáme, že tato funkce je definovaná na nějaké otevřené množině G, $G \subset \mathbb{R}^3$.

Po úpravách analogických jednorozměrnému případu dostaneme

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right)}{\partial\dot{x}}\right]+\frac{\partial U}{\partial x} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{y}^2\right)}{\partial\dot{y}}\right]+\frac{\partial U}{\partial y} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2\right)}{\partial\dot{z}}\right]+\frac{\partial U}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}
$$

Zavedeme-li funkci[21] $L(x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-U(x,y,z)$, tzv. Lagrangeova funkce (Lagrangián), tak můžeme napsat, že platí

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{y}}\right)-\frac{\partial L}{\partial y} &= 0,\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{z}}\right)-\frac{\partial L}{\partial z} &= 0.
\end{aligned}
$$

Zajímavé na této soustavě rovnic je to, že se nám ji podaří sestavit pomocí *jediné* skalární funkce, která je dána jako rozdíl kinetické a potenciální (interakční) energie vyšetřovaného hmotného bodu. Lze ukázat, viz [1], že místo kartézských souřadnic můžeme použít i jiné druhy souřadnic (např. sférické, válcové, ...) a Lagrangeovy rovnice budou mít stále stejný tvar. Prakticky to znamená, že stačí přepsat do jiných souřadnic pouze Lagrangián. To jsou podstatné výhody proti Newtonovské pohybové rovnici (1.5). V ní musíme vektory síly při výpočtech rozepisovat do (kartézských) souřadnic, což je pracné a pak je teprve transformovat do jiných souřadnic.

Dokonce je možné uvažovat i případy, kdy (některé) síly lze vyjádřit pomocí (skalární) funkce souřadnic, rychlostí a času (zobecněná potenciální energie)[22] a Lagrangián je opět rozdílem kinetické energie a zobecněné potenciální energie a Lagrangeovy rovnice mají opět stejný tvar, viz [1].

Další výhoda Lagrangeovského přístupu se projeví při vyšetřování pohybu hmotného bodu po plochách (např. nakloněné rovině, části kulové plochy, části válcové plochy, ...), v tomto případě mluvíme o pohybu omezeném vazbami; podrobněji v [1].

[21] Předpokládáme, že tato funkce je definována na nějaké otevřené množině v $\mathbb{R}^6$.

[22] Tento případ nastane při vyšetřování pohybu částic v elektromagnetickém poli.

Bude výhodné zavést pojem **počet stupňů volnosti**, tj. počet parametrů (souřadnic), které jednoznačně popisují polohu hmotného bodu (soustavy hmotných bodů). Je intuitivně zřejmé, že pro jeden hmotný bod na nakloněné rovině máme dva stupně volnosti (např. vzdálenosti od hran desky); pro částici pohybující se v prostoru (tj. bez omezení) máme tři stupně volnosti (např. tři kartézské souřadnice); pro bod pohybující se po prostorové křivce (např. přímce) máme jeden stupeň volnosti (je jím např. vzdálenost hmotného bodu od vybraného bodu křivky).

Parametry, které jednoznačně popisují polohu hmotného bodu (obecněji soustavy hmotných bodů) se nazývají **obecné souřadnice**, označují se písmeny q_i, kde i udává počet stupňů volnosti[23].

Protože (fyzikálně) vždy vycházíme z jisté inerciální souřadné soustavy, jsou kartézské souřadnice hmotného bodu (soustavy hmotných bodů) funkcemi obecných souřadnic. Uvažujme situaci, kdy máme n hmotných bodů (odpovídá jim $3n$ kartézských souřadnic) a r rovnic, které popisují vazby[24]. Pak platí mezi kartézskými souřadnicemi a obecnými souřadnicemi vztahy, tzv. vazbové rovnice[25]

$$x_i = f_i(q_1, \ldots, q_{3n-r}), \quad i = 1, \ldots, 3n.$$

Předpokládá se, že tyto rovnice lze rozřešit vzhledem k $(q_1, \ldots, q_{3n-r})$, podmínky jsou uvedeny v [10], [11]. Může nastat situace, že hmotné body nejsou omezeny ve svém pohybu vazbami, tj. $r = 0$. Pak je obecných souřadnic stejně jako kartézských souřadnic. Přesto je výhodné i v případě bez vazeb zavést jiné než kartézské souřadnice, řada problémů se pak zjednoduší.

Jak se dá ukázat, viz [1], Lagrangeovy rovnice můžeme napsat i pro soustavu hmotných bodů o n stupních volnosti[26]. Jestliže předpokládáme, že Lagrangián je funkcí n obecných souřadnic, n zobecněných rychlostí a (popřípadě) času t, tj. je $L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$[27] , tak Lagrangeovy rovnice

[23] Obecných souřadnic je tedy stejně jako stupňů volnosti.

[24] Takové rovnice např. popisují kružnici, kulovou plochu, přímku, ...

[25] Geometricky jde o parametrický popis množiny bodů jež tvoří vazby.

[26] Vychází se z Newtonových rovnic pro pohyb soustavy hmotných bodů v kartézských souřadnicích a tyto rovnice se přepíší do obecných souřadnic. Myšlenka je jednoduchá, ale provedení je trochu techničtější záležitostí.

[27] Často je Lagrangián dán jako rozdíl kinetické energie soustavy hmotných bodů (součet kinetických energií jednotlivých hmotných bodů) a (zobecněné) interakční energie mezi hmotnými body soustavy (součet interakčních energií mezi dvojicemi hmotných bodů soustavy). Není to však podmínkou, příklad „nestandardního“ Lagrangiánu je uveden v [3].

Dále poznamenejme, že v mechanice nepovažujeme čas za dynamickou proměnnou, ale za parametr. Za dynamické proměnné považujeme zobecněné souřadnice a jim příslušné zobecněné rychlosti, určují totiž stav (v Lagrangeovském formalismu) vyšetřované soustavy. V dalším budeme předpokládat (pokud neřekneme jinak), že Lagrangián je funkce definovaná na nějaké otevřené množině v $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, kde n udává počet stupňů volnosti.

jsou

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i} \;=\; 0, \quad i=1,\ldots,n. \tag{1.8}$$

K jejich jednoznačnému řešení je nutno zadat počáteční podmínky, tj. hodnoty zobecněných souřadnic a rychlostí v jistém okamžiku. Lagrangeovy rovnice jsou totiž (nelineární) obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu. To nahlédneme, když je rozepíšeme, máme

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2}\ddot{q}_i+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t}-\frac{\partial L}{\partial q_i} \;=\; 0, \quad i=1,\ldots,n.$$

Předpokládáme přitom, že $\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2}\neq 0$ pro všechny přípustné hodnoty obecných souřadnic, zobecněných rychlostí a času[28].

Při řešení konkrétních problémů často postupujeme při sestrojení Lagrangeových rovnic v následujících krocích:

1. Napíšeme výraz pro kinetickou a (zobecněnou) interakční energii v dané inerciální kartézské souřadné soustavě. Jejich rozdíl je (obvykle) Lagrangeova funkce uvažovaného problému v kartézských souřadnicích.

2. Když je to výhodné zavedeme obecné souřadnice[29] a přetransformujeme Lagrangián do obecných souřadnic.

3. Nakonec sestavíme Lagrangeovy rovnice. Nejprve vypočteme derivaci Lagrangiánu podle i-té zobecněné rychlosti, tento výraz pak derivujeme podle času (obecné souřadnice a rychlosti začneme považovat za funkce času - zapneme čas) a od tohoto výrazu odečteme derivaci Lagrangiánu podle i-té obecné souřadnice.

Právě popsaný postup si ukážeme na jednoduchém příkladu.

Příklad 1.4.1. Sestavte pohybovou rovnici matematického kyvadla. Počáteční podmínky jsou

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(0) &= (x_0,0,z_0),\\ \dot{\mathbf{r}}(0) &= (0,0,0).\end{aligned}$$

Popis řešení proveďte v inerciální souřadné soustavě, kterou pevně zvolíte.

[28] Situacím, kdy tato podmínka není splněna se budeme vyhýbat. Tato podmínka zajistí, že u nejvyšší derivace bude koeficientem číslo jedna (po vydělení výrazem $\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2}\neq 0$) a budeme moci aplikovat běžné věty o existenci a jednoznačnosti řešení soustav obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu.

[29] Jestliže jsou dány vazby, tak zvolíme obecné souřadnice tak, aby obecné souřadnice splňovaly rovnice vazeb.

Řešení: Pod matematickým kyvadlem rozumíme hmotný bod pohybující se na nehmotném a neprotažitelném vlákně. Předpokládejme, že hmotný bod má (setrvačnou) hmotnost m, vlákno délku l a na hmotný bod působí Země[30]. Z fyziky víme, že interakční energie mezi hmotným bodem a Zemí je dána vztahem $-mgz$[31], kde m je hmotnost vyšetřovaného hmotného bodu, g gravitační zrychlení a z je z-ová (kartézská) souřadnice[32] hmotného bodu. Lagrangeova funkce je dána rozdílem kinetické a interakční energie, tj.

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz. \tag{1.9}$$

Kartézské souřadnice hmotného bodu ovšem nejsou navzájem nezávislé, ale platí mezi nimi vztah (vazba)

$$x^2 + y^2 + z^2 = l$$

vyjadřující neprotažitelnost vlákna. Zvolíme následující vztahy mezi kartézskými a obecnými souřadnicemi[33]

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= l \sin \varphi, \\ y(\varphi) &= 0, \\ z(\varphi) &= l \cos \varphi. \end{aligned}$$

Pro rychlosti platí vztahy

$$\begin{aligned} \dot{x}(\varphi) &= l\dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \dot{y}(\varphi) &= 0, \\ \dot{z}(\varphi) &= -l\dot{\varphi} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Dosadíme-li do Lagrangiánu (1.9) vyjádření kartézských souřadnic a kartézských souřadnic rychlostí pomocí obecných souřadnic a zobecněných rychlostí, dostaneme po úpravě Lagrangián v obecných souřadnicích a rychlostech

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi.$$

---

[30] Na hmotný bod samozřejmě působí i vlákno. Velkou výhodou Lagrangeova přístupu je v tom, že vazby (v našem případě vlákno) se neprojeví v interakční energii, podrobněji jsou vazby probrány v [1].

[31] Je důsledkem Newtovova gravitačního zákona specializovaného (pomocí Taylorova rozvoje) pro malé vzdálenosti od povrchu Země.

[32] Předpokládáme, že z-ová souřadnice je kolmá na povrch Země. Počátek kartézské souřadné soustavy je zvolen v místě upevnění vlákna.

[33] Automaticky splníme rovnici vazby; φ je úhel mezi z-ovou osou a vláknem. Uvažujeme, že $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ a $l > 0$.

Lagrangeova rovnice v obecných souřadnicích je

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi \;=\; 0.$$

Počáteční podmínka je dána vztahem $\varphi(0) = \arctan\left(\frac{x_0}{z_0}\right)$. Řešení pohybové rovnice matematického kyvadla není úplně triviální, je podáno (v hlavních rysech) v [3].

■

1.5 Některé triky integrace pohybových rovnic v Lagrangeově formalismu

V předchozím paragrafu jsme dospěli k Lagrangeovým rovnicím. Nyní bychom chtěli najít postupy, jak takovéto rovnice řešit, anebo najít postupy, které by řešení ulehčily. Při analytickém řešení musíme uplatnit řadu poznatků z kurzů matematické analýzy a občas se nám povede řešení sestrojit. Častější je ovšem situace, kdy analytické řešení nedokážeme sestrojit a pak se musíme uchýlit k jiným postupům. V dnešní době máme k dispozici výkonnou výpočetní techniku, vybavenou matematickými programy pro numerické řešení diferenciálních rovnic a těch můžeme využít. Ve fyzice občas nepotřebujeme rozřešit Lagrangeovy rovnice do detailů, ale stačí nám skromnější informace. Zajímají nás totiž zachovávající se veličiny, které představují částečnou integraci Lagrangeových rovnic. Naznačíme si dvě možnosti jak částečně integrovat Lagrangeovy rovnice a přitom získat zachovávající se veličiny.

Jako první uvažujme situaci, ve které v Lagrangiánu není obsažena některá obecná souřadnice (řekněme souřadnice označená q_1), ale je tam ji příslušná zobecněná rychlost, tj. Lagrangián je tvaru $L(q_2, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$. Derivace takového Lagrangiánu podle souřadnice q_1 je zřejmě nula a příslušná Lagrangeova rovnice má tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) \;=\; 0.$$

Jinak řečeno

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \;=\; p_1,$$

kde p_1 je konstanta[34]. Vidíme tedy, že když Lagrangián neobsahuje některou obecnou souřadnici q_i, v tomto případě nazývanou **cyklická souřadnice**,

[34]Rovnice $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = p_1$ je obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu, obsahuje zobecněnou rychlost příslušnou cyklické souřadnici. Skutečně jsme tedy Lagrangeovu rovnici částečně integrovali. Poznamenejme, že hodnotu konstanty p_1 určíme z počátečních podmínek.

ale obsahuje ji příslušnou zobecněnou rychlost $\dot{q}_i$, tak existuje zachovávající se veličina

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i, \tag{1.10}$$

která se nazývá **zobecněná hybnost**[35] příslušná souřadnici q_i.

Pro další účely bude vhodné, jestliže zavedeme pojem zobecněné hybnosti vztahem (1.10) bez ohledu na to, zda se tato veličina zachovává či nikoli.

Budeme uvažovat druhou situaci, při které není v Lagrangiánu obsažen explicitně čas. Lagrangián tedy je $L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$. Lagrangeovy rovnice rozepsané v explicitního tvaru jsou

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2}\ddot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Protože Lagrangián neobsahuje explicitně čas, je parciální derivace podle času nulová a v rovnicích nám vypadne třetí člen. Lagrangeovy rovnice jsou tedy tvaru

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2}\ddot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_i}\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Jestliže každou z těchto rovnic vynásobíme příslušnou zobecněnou rychlostí $\dot{q}_i$[36] a takto vzniklé rovnice sečteme, tak dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2}\ddot{q}_i\dot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i \right] = 0.$$

Nyní použijeme trik, přičteme šikovně nulu a dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial^2 L}{\partial q_i^2}\ddot{q}_i\dot{q}_i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i \right] = 0.$$

Výraz na levé straně lze napsat ve tvaru[37]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \right] = 0.$$

[35] Motivací pro tento název je následující situace, kdy je Larangián předpokládán ve tvaru $L(y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(y, z)$. Zobecněná hybnost příslušná x-ové souřadnici je pak $p_x = m\dot{x}$ a to odpovídá výrazu pro hybnost známému z Newtonovské formulace mechaniky.

[36] Předpokládáme, že rychlost je nenulová.

[37] O tom se lze přesvědčit výpočtem.

Dostali jsme výsledek, který říká, že veličina, nazývaná **zobecněná energie**[38],

$$E = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \tag{1.11}$$

je konstantní (zachovává se v průběhu času).

Speciálně pro jeden stupeň volnosti platí $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L$, dostaneme tedy diferenciální rovnici prvního řádu (v implicitním tvaru)[39] .

Ve fyzice je zvykem definovat zobecněnou energii vztahem (1.11) bez ohledu na to zda se zachovává či nikoli. Obecně je tedy zobecněná energie veličina závislá na obecných souřadnicích, zobecněných rychlostech a času.

1.6 Pohybové rovnice v Hamiltonově formalismu

Jak víme, Lagrangeovy rovnice můžeme sestavit podle jednoduchého receptu, to je jejich nesporná výhoda. Jejich nevýhodou je, že jsou rovnicemi druhého řádu. Bylo by výhodné je upravit a dostat pouze rovnice prvního řádu[40]. Takováto úprava se dá provést řadou způsobů. Na jeden velice elegantní přišel W. Hamilton a ten si ukážeme.

Lagrangián je funkcí obecných souřadnic, zobecněných rychlostí a (popřípadě) času, jeho diferenciál je

$$\mathrm{d}L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \mathrm{d}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t.$$

Když použijeme definice zobecněné hybnosti (1.10), tak dostaneme

$$\mathrm{d}L = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \mathrm{d}t. \tag{1.12}$$

Dále zřejmě platí identita

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \mathrm{d}p_i.$$

[38] Zdůrazněme, že zobecněná energie (jako zachovávající se veličina) je funkcí obecných souřadnic a jim příslušných zobecněných rychlostí. Její hodnotu snadno spočteme ze znalosti počátečních podmínek.

[39] Aplikace tohoto výsledku na řešení jednorozměrných fyzikálních úloh s Lagrangiánem $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} f(q) \dot{q}^2 - U(q)$ je v [8], [4].

[40] Pro jeden stupeň volnosti je takovou rovnicí $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - L$, jak jsme se o tom zmínili výše.

Odtud dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \mathrm{d}\dot{q}_i = \mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i\right) - \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \mathrm{d}p_i.$$

Dosadíme-li toto vyjádření do diferenciálu Lagrangiánu (1.12) obdržíme po jednoduché úpravě

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{1.13}$$

Nyní si napíšeme Lagrangeovy rovnice pomocí definice zobecněné hybnosti, zřejmě dostaneme

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}. \tag{1.14}$$

Dosazením (1.14) do (1.13), obdržíme

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L\right) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \mathrm{d}p_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \mathrm{d}q_i - \frac{\partial L}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{1.15}$$

Výraz v závorce na levé straně silně připomíná definici zobecněné energie, ta ale závisí na obecných souřadnicích a zobecněných rychlostech a čase. Její diferenciál by musel být lineární formou v těchto proměnných. To ale v našem případě není pravda. Výraz v závorce musí představovat funkci jejíž diferenciál je lineární formou, jejíž proměnné jsou obecné souřadnice, jim příslušné zobecněné hybnosti a čas. Proto definujeme tzv. **Hamiltonovu funkci** (Hamiltonián),

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L. \tag{1.16}$$

Považujeme přitom veličinu $\dot{q}_i$ za vyjádřenou pomocí obecných souřadnic, zobecněných hybností a času. Toto vyjádření získáme z definice zobecněných hybností (1.10), jestliže tyto rovnice rozřešíme vzhledem k zobecněným rychlostem[41] a takto vypočtené zobecněné rychlosti dosadíme do definice Hamiltoniánu[42].

[41]Přitom předpokládáme, že je to možné. Podmínky pro řešitelnost soustav rovnic jsou uvedeny např. v [10], [11].

[42]Naznačený přechod od Lagrangiánu k Hamiltoniánu se nazývá Legendrova transformace, bližší poučení o Legendrově transformaci viz [1], [9].

Vypočteme-li diferenciál Hamiltoniánu, dostaneme

$$\mathrm{d}H = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial t}\mathrm{d}t. \tag{1.17}$$

Porovnáním dvojího vyjádření diferenciálu Hamiltoniánu, tj. porovnání (1.17) a (1.16) dostaneme

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1.18}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{1.19}$$

a

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}.$$

Rovnice (1.18) a (1.19) se nazývají **Hamiltonovy kanonické rovnice**. Jsou to (nelineární) obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu rozřešené vzhledem k derivaci. Na rozdíl od Lagrangeových rovnic, které byly druhého řádu a jejichž počet byl roven počtu stupňů volnosti je Hamiltonových rovnic dvojnásobný počet, ale jsou prvního řádu.

K určení jednoznačného řešení Hamiltonových kanonických rovnic musíme zadat počáteční podmínky. Počáteční podmínky udávají hodnoty zobecněných souřadnic a jim odpovídajících zobecněných hybnostím v jistém čase t_0. V Hamiltonovském formalismu zadáním zobecněných souřadnic a hybností zadáváme stav studovaného (mechanického) systému.

Tyto rovnice se například hodí k numerickému řešení na počítačích, protože pro rovnice prvního řádu existuje řada numerických metod na jejich řešení. Připouštějí také zajímavou geometrickou interpretaci viz [12], [13].

Praktický postup sestrojení Hamiltonových kanonických rovnic je

1. Sestavíme Lagrangeovu funkci problému.

2. Sestavíme Hamiltonián podle předpisu (1.16), nezapomeneme přitom vyjádřit zobecněné rychlosti pomocí obecných souřadnic, jim příslušných zobecněných hybností a času.

3. Nakonec vypočteme derivace na pravých stranách rovnic (1.18) a (1.19).

Ilustrujme si tento postup na příkladu matematického kyvadla.

Příklad 1.6.1. Sestavte Hamiltonián a Hamiltonovy kanonické rovnice pro matematické kyvadlo. Popis provádějte v inerciální souřadné soustavě.

Řešení: Podle příkladu 1.4.1 je Lagrangián matematického kyvadla dán vztahem

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi.$$

Vypočtěme nejprve zobecněnou hybnost příslušnou úhlu φ, platí

$$p_\varphi = ml^2\dot{\varphi}.$$

Z tohoto vztahu vypočteme zobecněnou rychlost $\dot{\varphi}$ jako funkci zobecněné hybnosti p_φ, máme

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}.$$

Podle definice Hamiltoniánu (1.16) je

$$H = p_\varphi\frac{p_\varphi}{ml^2} - \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{p_\varphi}{ml^2}\right)^2 - mgl\cos\varphi.$$

Po jednoduché úpravě dostaneme Hamiltonián matematického kyvadla

$$H(\varphi, p_\varphi) = \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi.$$

Nyní sestavíme Hamiltonovy kanonické rovnice. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi}{ml^2}, \\ \dot{p_\varphi} &= -mgl\sin\varphi. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že tato soustava se asi nejsnadněji řeší eliminační metodou (převedením na rovnici druhého řádu pro úhel φ). Rovnice, která takto vznikne je stejná jako rovnice získaná pomocí Lagrangeových rovnic.

■

1.7 Hamiltonova-Jacobiho rovnice

V tomto odstavci se pokusíme o naznačení souvislostí mezi soustavou Hamiltonových kanonických rovnic a jednou parciální diferenciální rovnicí prvního řádu[43].

Při řešení Hamiltonových kanonických rovnic můžeme použít vhodných transformací obecných souřadnic a jim odpovídajících zobecněných hybností na zjednodušení Hamiltonových kanonických rovnic. Tyto transformace jsou

[43]Korektnější matematický přístup je prezentován v [9], [13]

takové, že nemění tvar Hamiltonových rovnic a nazývají se **kanonické transformace**. Jak se ukazuje lze tyto transformace získat pomocí funkcí, které se nazývají **vytvořující funkce** kanonických transformací. Podrobněji je o kanonických transformacích a jejich vytvořujících funkcích pojednáno v [1], proto se omezíme pouze na jeden případ, který se ve fyzice často používá. Označme si písmeny q_i a p_i, $i = 1, \dots, n$ „staré" souřadnice a „staré" hybnosti, písmeny Q_j a P_j, $j = 1, \dots, n$ „nové" souřadnice a „nové" hybnosti a písmenem t čas. Dále uvažujme vytvořující funkci S, která je závislá na „starých" souřadnicích $q_i, i = 1, \dots, n$ a „nových" hybnostech $P_j, j = 1, \dots, n$ a (popřípadě) času; Hamiltonián, který je funkcí času, „starých" souřadnic a „starých" hybností označme H a $\tilde{H}$ nechť je Hamiltonián závislý na čase, „nových" souřadnicích a „nových" hybnostech. Pak lze ukázat, viz [1], že platí vztahy

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \tag{1.20}$$

$$Q_j = \frac{\partial S}{\partial P_j}, \tag{1.21}$$

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t}. \tag{1.22}$$

V rovnici (1.22) považujeme veličiny na pravé straně za vyjádřené pomocí „nových" souřadnic a „nových" hybností. Toto vyjádření získáme z rovnic[44] (1.20) a (1.21).

Protože kanonické transformace zanechávají tvar Hamiltonových kanonických rovnic nezměněný, tak je jistě vhodné, aby „nový" Hamiltonián (1.22) vedl na co nejjednodušší Hamiltonovy kanonické rovnice. Jestliže se podíváme na strukturu Hamiltonových kanonických rovnice (1.18) a (1.19), tak by bylo nejlepší, kdyby byl „nový" Hamiltonián roven nule pro všechny přípustné hodnoty nezávisle proměnných[45]. Jinak řečeno, potřebujeme najít takovou vytvořující funkci S, aby zadaný Hamiltonián H přešel na Hamiltonián $\tilde{H} = 0$. Takováto vytvořující funkce musí tedy vyhovovat vztahu

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0.$$

Jestliže dosadíme do Hamiltoniánu za „staré" hybnosti podle (1.20), tak do-

[44] Předpokládáme, že rovnice (1.20) a (1.21) lze rozřešit vůči těmto „novým" souřadnicím.

[45] Pak je integrace Hamiltonových kanonických rovnic triviální. Hledané „nové" neznámé Q_j a P_j budou konstantní funkce a jejich hodnoty se určí z počátečních podmínek.

staneme rovnici (v rozepsaném tvaru)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) \;=\; 0. \qquad (1.23)$$

Rovnice (1.23) se nazývá **Hamiltonova-Jacobiho rovnice**.

Jak lze ukázat, viz např. [12], tak při znalosti řešení Hamiltonových kanonických rovnic můžeme sestrojit řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice a naopak při znalosti (úplného) řešení[46] Hamiltonovy-Jacobiho rovnice lze sestrojit řešení Hamiltonových kanonických rovnic. Tato korespondence může v některých případech ulehčit řešení Hamiltonových kanonických rovnic.

Protože úplné řešení rovnice (1.23) obsahuje $n+1$ konstant (ukazuje se, že jedna z nich je aditivní[47]) a protože funkce S by měla být závislá na „nových" hybnostech (které jsou konstantní), tak je docela přirozené ztotožnit „nové" hybnosti s n (neaditivními) konstantami obsaženými ve vztahu popisujícím úplné řešení rovnice (1.23). Takto dostaneme funkci S závislou na „starých" souřadnicích, „nových" (konstantních) hybnostech, času a jedné aditivní konstantě. K určení trajektorií vyšetřované mechanické soustavy použijeme rovnice[48] (1.21). Z nich vypočteme souřadnice q_i jako funkci času, „nových" (konstantních) hybností a „nových" (konstantních) souřadnic. „Nové" konstantní souřadnice a hybnosti určíme z počátečních podmínek[49].

Když jsme nastínili postup řešení Hamiltonových kanonických rovnic pomocí Hamiltonovy-Jacobiho rovnice, tak by nás jistě zajímalo, jak sestrojíme (úplné) řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice. Sestrojit takové řešení není snadné, ale v některých případech to jde. Metoda, která se k tomuto účelu často používá se nazývá metoda separace proměnných a její princip nejlépe vysvitne na konkrétním a nejjednodušším možném příkladu.

Příklad 1.7.1. Sestavte a řešte Hamiltonovu-Jacobiho rovnici pro volný

[46] Zhruba řečeno, pod úplným řešením rozumíme řešení rovnice (1.23), které závisí na $n+1$ konstantách (počet konstant je stejný jako počet nezávisle proměnných q_i a t). Podrobnosti jsou v [12].

[47] To znamená, že úplné řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice lze zapsat ve tvaru $S(t, q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \;=\; f(t, q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \alpha_{n+1}$. Konstanta α_{n+1} se pak nazývá aditivní. Konstanty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ by se v tomto případě nazvaly neaditivní. Obdobně bychom postupovali, jestliže by byla aditivní některá z konstant $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

[48] Při derivování nám aditivní konstanta vypadne. Proto se často ve fyzice při výpočtech neuvádí („zanedbává se").

[49] Neznámé „staré" hybnosti určíme z rovnic (1.20).

hmotný bod na přímce[50]. Počáteční podmínky jsou

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, \\ p_x(0) &= p_{x0}, \end{aligned}$$

kde $p_{x0} > 0$ a x_0 je libovolné reálné číslo. Řešení provádějte v inerciální (kartézské) souřadné soustavě.

Řešení: Abychom sestrojili Hamiltonovu-Jacobiho rovnici, tak musíme znát Hamiltonián pro volný hmotný bod. Hamiltonián zase sestavujeme pomocí Lagrangiánu. Lagrangián pro volnou částici v inerciální kartézské souřadné soustavě je[51]

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2.$$

Standardním postupem získáme Hamiltonián pro volný hmotný bod[52]

$$H = \frac{1}{2m}p_x^2.$$

Podle výše uvedeného je Hamiltonova-Jacobiho rovnice pro náš problém tvaru

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = 0. \tag{1.24}$$

Nyní se pokusíme najít (úplné) řešení Hamiltonovy-Jacobiho rovnice pomocí metody separace proměnných. Metoda spočívá na předpokladu, že lze (úplné) řešení S napsat ve tvaru součtu dvou funkcí, z nichž jedna je funkcí pouze času a druhá je funkcí pouze x-ové souřadnice, tj. předpokládáme, že platí[53]

$$S(x,t) = S_1(t) + S_2(x).$$

Jestliže tento předpoklad dosadíme do rovnice (1.24), tak po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S_2(x)}{\partial x}\right)^2 = -\frac{\partial S_1(t)}{\partial t}.$$

[50] Přímku budeme považovat za osu x kartézské souřadné soustavy. Budeme tedy studovat jednorozměrný pohyb. Za obecnou souřadnici zvolíme kartézskou souřadnici x, tj. $q_1 = x$ a jí příslušnou zobecněnou hybnost označíme p_x.

[51] Označili jsme písmenem m (setrvačnou) hmotnost volného hmotného bodu a $\dot{x}$ označuje rychlost hmotného bodu vzhledem k inerciální kartézské souřadné soustavě.

[52] Hamiltonovy kanonické rovnice jsou $\dot{x} = \frac{p_x}{m}$ a $\dot{p}_x = 0$. Podle vět o existenci a jednoznačnosti řešení pro soustavy obyčejných diferenciálních rovnic jejich jediné (maximální) řešení existuje pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

[53] Pro všechny přípustné hodnoty x a t.

Protože levá strana rovnice závisí pouze na proměnné x a pravá strana pouze na proměnné t, tak aby nastala rovnost musí se obě strany rovnat nějaké konstantě[54], kterou označíme P_1. Dostaneme (po úpravě) soustavu obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial S_2(x)}{\partial x} = \sqrt{2mP_1}, \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial S_1(t)}{\partial t} = -P_1. \tag{1.26}$$

Rovnice (1.25) a (1.26) snadno integrujeme a dostaneme

$$\begin{aligned} S_2(x) &= \sqrt{2mP_1}x + C_1, \\ S_1(t) &= -P_1 t + C_2, \end{aligned}$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty. Hledaná funkce S je tedy tvaru

$$S(x, t; P_1, C) = \sqrt{2mP_1}x - P_1 t + C,$$

kde jsme označili $C = C_1 + C_2$. Funkce S závisí na dvou konstantách P_1, C, kde konstanta C je aditivní a konstantu P_1 ztotožníme s „novou“ (konstantní) hybností. Podle rovnice (1.21) dostaneme „novou“ (konstantní) souřadnici, je

$$Q_1 = \frac{mx}{\sqrt{2mP_1}} - t.$$

Odtud vypočteme souřadnici x jako funkci času

$$x(t) = \frac{\sqrt{2mP_1}(Q_1 + t)}{m}.$$

Nyní vypočteme „starou“ hybnost jako funkci času, podle vztahu (1.20) dostaneme

$$p_x(t) = \sqrt{2mP_1}.$$

Řešení našeho problému můžeme shrnout a dostaneme

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sqrt{2mP_1}(Q_1 + t)}{m}, \\ p_x(t) &= \sqrt{2mP_1}, \end{aligned}$$

[54] Protože je levá strana kladná pro všechna přípustná x, musí být konstanta také kladná. Levá strana by mohla být rovna nule. Pak by konstanta byla nula a takovou konstantu neuvažujeme. Vedla by totiž na konstantní vytvořující funkci a tím pádem bychom dostali, že volný hmotný bod je v klidu vůči inerciální kartézské souřadné soustavě. Podle našich počátečních podmínek to není možné.

pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Určíme ještě konstanty P_1, Q_1 z počátečních podmínek. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{p_{xo}^2}{2m}, \\ Q_1 &= \frac{m x_0}{p_{x0}}. \end{aligned}$$

Řešení splňující předepsané počáteční podmínky je

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{p_{x0}}{m} t + x_0, \\ p_x(t) &= p_{x0}, \end{aligned}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$. ■

Kapitola 2

Klasická elektrodynamika

V této kapitole jsou shrnuty základní fyzikální zákony, které popisují elektromagnetické pole a jeho interakci s nabitými částicemi. Ukážeme si také, na třech jednoduchých příkladech, jak se pohybuje nabitá částice v daném vnějším (konstantním) elektromagnetickém poli.

2.1 Základní postuláty klasické elektrodynamiky

Během osmnáctého a devatenáctého století se hromadily experimentální poznatky z elektřiny, magnetismu a optiky. Byl nalezen výraz pro sílu, jíž se přitahují dvě nabité koule v klidu vzhledem k laboratoři (Coulumbův vzorec).

Byl sestrojen zdroj (trvalého) napětí (Volta), což umožnilo zkoumat vedení elektrického proudu ve vodičích. Bylo zjištěno, že vodiče se průchodem elektrického proudu zahřívají a také, že vodič jímž protéká elektrický proud působí na střelku kompasu (Öerstedův pokus). Dále se zjistilo, že vodiče jimiž prochází elektrický proud na sebe působí silou. Ampér nalez vzorec, který toto silové působení popisuje (Ampérův vzorec)[1].

Velkým pokrokem byla experimentální práce M. Faradaye, který objevil (mimo jiné) jev elektromagnetické indukce a zavedl myšlenku o elektromagnetickém poli jako zprostředkovateli elektromagnetického působení[2]. Farada-

[1] Jak vidíme snažili se fyzici (zcela přirozeně) vyložit elektrické jevy pomocí mechaniky. V řadě případů byl takový výklad velice úspěšný.

[2] To byla revoluční představa, protože do té doby se vzájemné působení uvažovalo do dálky. Pachatelem působení byl např. jeden vodič jímž procházel elektrický proud a obětí tohoto působení byla střelka kompasu. Vodič i střelka nebyly přitom ve vzájemném kontaktu. Faraday si to vykládal tak (v dnešní formulaci), že vodič nepůsobí na střelku, ale vytvoří elektromagnetické pole a to působí na střelku (tlačí na ní).

yovy myšlenky doplnil a matematicky formuloval J. C. Maxwell, který shrnul zákony elektřiny, magnetismu a optiky do jediného rámce, tzv. klasické elektrodynamiky.

Všimneme si případu, kdy se náboje pohybují ve volném prostoru (vakuu). V tomto případě mají zákony[3] popisující elektromagnetické pole tvar

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0},\\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0,\\ \nabla\times\mathbf{B}-\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0\mathbf{j},\\ \nabla\times\mathbf{E} &= -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\end{aligned}$$

kde $\mathbf{E}$ je vektor intenzity elektrického pole, $\mathbf{B}$ vektor magnetické indukce, ρ je hustota elektrického náboje, $\mathbf{j}$ je hustota elektrického proudu, ϵ_0 permitivita vakua, μ_0 permeabilita vakua[4]. Předpokládá se, že hustota elektrického náboje a hustota elektrického proudu jsou známé veličiny[5] - zdroje elektromagnetického pole a neznámé jsou vektory elektrického pole a magnetické indukce.

Matematicky představují rovnice popisující elektromagnetické pole soustavu lineárních parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu. K těmto rovnicím je nutno připojit počáteční podmínky[6], které jsou stejně důležité jako samotné rovnice. Analogicky jako pro podobné úlohy o obyčejných diferenciálních rovnicích, tak i pro parciální diferenciální rovnice (a jejich soustavy) se matematici pokouší dokazovat věty o existenci a jednoznačnosti jejich řešení.

K soustavě rovnic popisující elektromagnetické pole musíme připojit ještě vztah, který popíše působení elektromagnetického pole na své zdroje. Zobecněním experimentálních vztahů (Coulumbův vzorec, Ampérův vzorec) docházíme k výrazu pro sílu, tzv. **Lorentzova síla**, kterou působí elektromagnetické pole na své zdroje

$$\mathbf{F}=\int_V(\rho\mathbf{E}+\mathbf{j}\times\mathbf{B})\,\mathrm{d}V.$$

[3]Jsou to zákon Gaussův, poučka o neexistenci magnetických nábojů, zobecněný Ampérův zákon a konečně zákon elektromagnetické indukce.

[4]Permitivita vakua a permeabilita vakua jsou pevné kladné konstanty. Intenzita elektrického pole, magnetická indukce, hustota elektrického náboje a hustota elektrického proudu jsou obecně závislé na čase a poloze v prostoru.

[5]Tyto veličiny nejsou nezávislé, ale jsou svázány zákonem zachování náboje.

[6]Kdyby bylo elektromagnetické pole nějak omezeno, bylo by nutné zadat okrajové podmínky.

Pro nabitou částici (bodový náboj) předpokládáme, že platí

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \tag{2.1}$$

kde písmenem q označujeme náboj nabité částice[7], rychlost nabité částice (vzhledem k inerciální souřadné soustavě, vůči níž provádíme popis pohybu) označíme $\mathbf{v}$.

V klasické elektrodynamice, viz [6], se ukazuje, že náboj, který se pohybuje s nenulovým zrychlením vyzařuje elektromagnetické pole. Jestliže máme kromě pole vyzářeného zrychleně se pohybujícím nábojem druhé pole (jehož zdroje jsou jiné náboje), tak se tato pole navzájem skládají[8] a tím vzniká nové pole, které zpětně ovlivňuje pohyb náboje, který se v něm zrychleně pohybuje. Tato situace je tedy dosti komplikovaná, protože vyžaduje řešení soustavy rovnic složené z rovnic popisujících elektromagnetické pole a z pohybové rovnice vyšetřované částice. Často se ukazuje jako dobré přiblížení zanedbat nábojem vyzářené elektromagnetické pole. V tomto případě pak mluvíme o pohybu částice ve **vnějším elektromagnetickém poli**[9].

Nakonec poznamenejme, že je často výhodné popisovat elektromagnetické pole pomocí tzv. **skalárního potenciálu** φ a **vektorového potenciálu** $\mathbf{A}$[10]. Jak je ukázáno např. v [6], platí mezi vektory popisujícími elektromagnetické pole a potenciály vztahy

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\varphi, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{2.3}$$

Z těchto vztahů je vidět, že vektory popisující elektromagnetické pole přísluší celým skupinám potenciálů. Tato nejednoznačnost však není škodlivá, protože potenciály jsou pouze pomocné veličiny a výběr jakéhokoliv potenciálu z dané třídy nemění vektory popisující elektromagnetické pole. Podrobněji je tato problematika rozebrána v [6].

[7] V klasické elektrodynamice se předpokládá, že náboj je ve všech inerciálních soustavách stejný.

[8] Platí princip superpozice pro pole, protože rovnice popisující vlastnosti elektromagnetického pole jsou ve vakuu lineární.

[9] Elektromagnetické pole ve kterém se náboj pohybuje není tímto nábojem ovlivněno a pokládáme ho za (pevně) dané.

[10] Tyto veličiny jsou pouze pomocné, nejsou přístupné měření. V dalším o nich budeme předpokládat, že jsou to veličiny diferencovatelné na nějaké otevřené množině v $\mathbb{R}^4$ (tři kartézské souřadnice a čas).

2.2 Pohyb nabitých částic ve vnějším elektromagnetickém poli

Protože elektromagnetické pole pokládáme za dané, nebudeme se pokoušet o Lagrangeovský a Hamiltonovský popis elektromagnetického pole, viz [7]. Budeme předpokládat, že pohyb nabitých částic ve vnějším elektromagnetickém poli je nerelativistický, relativistický pohyb je popsán v [7].

Sestrojení pohybové rovnice v Newtonově formulaci je snadné, stačí pouze dosadit vzorec pro Lorentzovu sílu (2.1) do pohybové rovnice (1.5). Ilustrujme si tento přístup na velice jednoduchém příkladu.

Příklad 2.2.1. Sestavte a řešte pohybové rovnice pro nabitou částici ve vnějším homogenním elektrickém poli, které je popsané vektorem intenzity elektrického pole $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ vzhledem k dané inerciální kartézské soustavě souřadnic. Počáteční podmínky jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= (0,0,0), \\ \dot{\mathbf{r}}(0) &= (v_{x0}, 0, 0), \end{aligned}$$

kde $v_{x0} \in \mathbb{R}$.

Řešení: Pohybové rovnice[11] (v Newtonovské formulaci) zřejmě jsou

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} &= 0, \\ m\ddot{z} &= qE. \end{aligned}$$

Rovnice snadno integrujeme a použitím počátečních podmínek dostaneme (jediné) řešení

$$\begin{aligned} x &= v_{x0}t, \\ y &= 0, \\ z &= \frac{qE}{2m}t^2, \end{aligned}$$

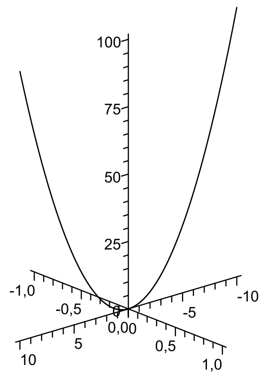
pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Vidíme, že pohyb probíhá v rovině o rovnici $y = 0$ a částice se v této rovině pohybuje po parabole popsané rovnicemi

$$\begin{aligned} x^2 - \frac{2mv_{x0}^2}{qE}z &= 0, \\ y &= 0. \end{aligned}$$

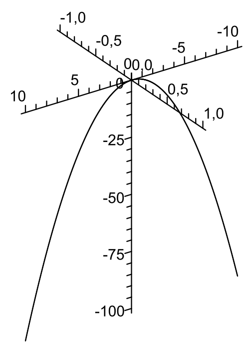
[11] Protože dostaneme soustavu pohybových rovnic s konstantními koeficienty, tak víme, že existuje právě jedno (maximální) řešení splňující počáteční podmínky a je definované pro všechny časy; viz [12]. Předpokládáme, že $q, E \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Pro názornost si ještě získané řešení vykresleme pro různé hodnoty parametrů m, q, E, v_{x0}[12].



Obrázek 2.1: Pole má orientaci v kladném směru osy z.

Na obrázku 2.1 jsme zvolili hodnoty $m = 1$ g, $q = 1$ C, $E = 2$ NC^{-1}, $v_{x0} = 1$ ms^{-1}, časový interval je $t \in \langle -10; 10 \rangle$ a čas je udán v milisekundách. Jestliže zvolíme hodnoty parametrů $m = 1$ g, $q = 1$ C, $E = -2$ NC^{-1}, $v_{x0} = 1$ ms^{-1} , časový interval je $t \in \langle -10; 10 \rangle$ a čas je udán v milisekundách, tak dostaneme průběh znázorněný na obrázku 2.2



Obrázek 2.2: Pole má orientaci v záporném směru osy z.

Jak vidíme, dokáže fyzika (za pomoci matematického aparátu) určit kdy a kde vyšetřovaná částice byla v minulosti i kdy a kde bude v budoucnosti,

[12] Grafy byly vytvořeny pomocí programu Maple.

přestože známe pouze polohu a rychlost v čase $t = 0$ s. Dále poznamenejme, že řešení nezávisí pouze na „nezávisle proměnné“ t, ale i na parametrech m, q, E, v_{x0}[13]. ■

Podívejme se na Lagrangeovskou a Hamiltonovskou formulaci pohybu částice ve vnějším elektromagnetickém poli.

Začněme Lagrangeovskou formulací pohybu částice ve vnějším elektromagnetickém poli. Lagrangián pro částici ve vnějším elektromagnetickém poli (vzhledem k inerciální souřadné soustavě) je dán výrazem[14]

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - q\varphi.$$

Popřípadě v kartézských souřadnicích[15]

$$L = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i^{\,2} + q\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_iA_i - q\varphi. \tag{2.4}$$

Pro takovouto volbu Lagrangiánu hovoří fakt, že pohybové rovnice z něho odvozené (při použití vztahů mezi potenciály a vektory popisujícími pole) jsou shodné s rovnicí získanou pomocí Newtonovské formulace mechaniky. Podrobnosti výpočtu v kartézských souřadnicích jsou uvedeny v [2] a výpočet ve vektorovém šatu je v [7].

Přistupme k Hamiltonovské formulaci pohybu částice ve vnějším elektromagnetickém poli. Protože známe Lagrangián částice ve vnějším elektromagnetickém poli, tak můžeme snadno sestrojit Hamiltonián. Budeme počítat v kartézských souřadnicích. Podle definice zobecněných hybností (1.10) je

$$p_i = m\dot{x}_i + qA_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Z těchto vztahů lehce vypočteme souřadnice rychlosti, platí

$$\dot{x}_i = \frac{p_i - qA_i}{m}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.5}$$

Podle vztahu (1.16) specializovaného pro jednu částici (v kartézských souřadnicích) dostaneme

$$H = \sum_{i=1}^{3}p_i\dot{x}_i - \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i^{\,2} - q\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_iA_i + q\varphi. \tag{2.6}$$

[13]Samozřejmě závisí i na definičním oboru „nezávisle proměnné“ t a na definičním oboru parametrů.

[14]Poznamenejme, že nejednoznačnost ve volbě potenciálů nemá vliv na pohybové rovnice nabité částice, podrobnosti jsou v [6].

[15]Odtud můžeme přejít k libovolným jiným souřadnicím (sférickým, válcovým, . . .).

Musíme však ještě vyjádřit rychlosti pomocí souřadnic a (zobecněných) hybností podle vztahů (2.5). Dosadíme-li vztahy (2.5) do vztahu (2.6), tak obdržíme

$$H = \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{p_i - qA_i}{m} - \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{p_i - qA_i}{m} \right)^2 - q \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i - qA_i}{m} A_i + q\varphi.$$

Po přímočarých úpravách dostaneme hledaný Hamiltonián částice ve vnějším elektromagnetickém poli

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{3} (p_i - qA_i)^2 + q\varphi, \tag{2.7}$$

nebo ve vektorovém kabátu

$$H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) \cdot (\mathbf{p} - q\mathbf{A}) + q\varphi.$$

Jelikož jsme sestrojili Hamiltonián nabité částice ve vnějším elektromagnetickém poli, tak můžeme snadno sestavit Hamiltonovu-Jacobiho rovnici a tu využít na vyšetření pohybu nabité částice.

Na následujících dvou příkladech si předvedeme použití Hamiltonovského a Lagrangeovského přístupu k popisu pohybu nabité částice ve vnějším elektromagnetickém poli. První příklad nám popíše pohyb nabité částice ve vnějším konstantním a homogenním magnetickém poli s pomocí Hamiltonových kanonických rovnic. Druhý příklad zobecní první příklad, tak že přidáme působení konstantního a homogenního elektrického pole a popis provedeme s použitím Lagrangeových pohybových rovnic.

Příklad 2.2.2. Sestavte a řešte Hamiltonovy pohybové rovnice pro částici ve vnějším homogenním magnetickém poli popsaném vektorem magnetické indukce $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ vzhledem k inerciální kartézské souřadné soustavě. Počáteční podmínky jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= (x_{10}, 0, 0), \\ \dot{\mathbf{r}}(0) &= (0, \dot{x}_{20}, 0), \end{aligned}$$

kde $x_{10}, \dot{x}_{20} \in \mathbb{R}$.

Řešení: Abychom mohli sestavit Hamiltonián (2.7), tak potřebujeme znát souřadnice vektorového potenciálu magnetického pole. Zadanému poli odpovídá vektorový potenciál $\mathbf{A} = (0, x_1 B, 0)$, o tom se lze snadno přesvědčit výpočtem[16]. Hamiltonián našeho problému má tedy tvar[17]

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + (p_2 - qBx_1)^2 + p_3^2\right).$$

Nyní lehce sestavíme Hamiltonovy kanonické rovnice

$$\dot{x}_1 = \frac{p_1}{m}, \tag{2.8}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{p_2}{m} - \frac{qBx_1}{m}, \tag{2.9}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{p_3}{m}, \tag{2.10}$$

$$\dot{p}_1 = \frac{qB}{m}(p_2 - qBx_1), \tag{2.11}$$

$$\dot{p}_2 = 0, \tag{2.12}$$

$$\dot{p}_3 = 0. \tag{2.13}$$

K této soustavě rovnic příslušejí počáteční podmínky pro polohu a (zobecněnou) hybnost. Protože máme zadánu podmínku pro počáteční polohu a rychlost, tak musíme z rovnic (2.8) až (2.10) určit počáteční (zobecněné) hybnosti. Dosazením počátečních poloh a rychlostí do rovnic (2.8) až (2.10) dostaneme (po úpravě) počáteční (zobecněné) hybnosti

$$\begin{aligned} p_{10} &= 0, \\ p_{20} &= m\dot{x}_{20} + qBx_{10}, \\ p_{30} &= 0. \end{aligned}$$

Přistupme k řešení rovnic (2.8) až (2.13)[18]. Rovnice (2.10), (2.12) a (2.13) jsou velmi snadno řešitelné, použitím počátečních podmínek pro polohy a hybnosti dostaneme

$$\begin{aligned} x_3 &= 0, \\ p_2 &= m\dot{x}_{20} + qBx_{10}, \\ p_3 &= 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

[16] Naše volba vektorového potenciálu není jediná, mohli jsme zvolit např. $\mathbf{A} = (-x_2B, 0, 0)$ a dostaneme stejný vektor magnetické indukce $\mathbf{B}$, tyto souvislosti jsou probrány v [6].

[17] Předpokládáme, že $q, B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dále je $\varphi = 0$ v celém prostoru a pro všechny časy; elektrické pole je totiž nulové. Je pravdou, že bychom mohli (obecněji) volit $\varphi = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ pro všechny polohy a všechny časy. V tomto případě by bylo elektrické pole také nulové, jak je vidět z (2.2). Protože fyzikálně (měřitelnou veličinou je intenzita elektrického pole!) na volbě čísla c nezávisí, položíme ho (pro jednoduchost) rovno nule.

[18] Protože soustava rovnic (2.8) až (2.13) je lineární a má konstantní koeficienty, tak má právě jedno (maximální) řešení splňující počáteční podmínky a toto řešení je definované pro všechny časy; viz [12].

Zbývá vyřešit rovnice (2.8), (2.9), (2.11). Zabývejme se nejprve rovnicemi (2.8) a (2.11). Jestliže derivujeme rovnici (2.8) podle času a pak dosadíme (za $\dot{p}_1$) do rovnice (2.11), tak obdržíme (s využitím znalosti p_2 a po úpravě) rovnici

$$\ddot{x}_1 + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 x_1 \;=\; \frac{qB}{m}\left(\dot{x}_{20} + \frac{qB}{m}x_{10}\right).$$

Tato rovnice má (obecné) řešení tvaru[19]

$$x_1 \;=\; C_1 \sin\frac{qBt}{m} + C_2\cos\frac{qBt}{m} + \frac{m}{qB}\left(\dot{x}_{20} + \frac{qB}{m}x_{10}\right). \tag{2.15}$$

Podle rovnice (2.8) vypočteme

$$p_1 \;=\; qBC_1\cos\frac{qBt}{m} - qBC_2\sin\frac{qBt}{m}. \tag{2.16}$$

Integrační konstanty vystupující ve vztazích (2.15) a (2.16) vypočteme z počátečních podmínek pro polohu a (zobecněnou) hybnost. Dostaneme vztahy

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{m\dot{x}_{20}}{qB}\cos\frac{qBt}{m} + \frac{m\dot{x}_{20}}{qB} + x_{10}, & (2.17)\\ p_1 &= m\dot{x}_{20}\sin\frac{qBt}{m}. \end{aligned}$$

Zbývá vyřešit rovnici (2.9). Dosadíme-li do rovnice (2.9) vztah (2.14) a (2.17) dostaneme po jednoduchých úpravách

$$\dot{x}_2 \;=\; \dot{x}_{20}\cos\frac{qBt}{m}.$$

Integrací a použitím počáteční podmínky získáme

$$x_2 \;=\; \frac{m\dot{x}_{20}}{qB}\sin\frac{qBt}{m}.$$

[19]Nejprve nalezneme všechna řešení homogenní rovnice a pak k nim přičteme jedno řešení nehomogenní rovnice (které v tomto případě lehce uhodneme), dostaneme pak všechna řešení nehomogenní rovnice. K nalezení všech řešení homogenní rovnice stačí najít pouze dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice a pak utvořit všechny jejich lineární kombinace. Dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice jsou $\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$ a $\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Jedno řešení nehomogenní rovnice je zřejmě $\frac{m}{qB}\left(\dot{x}_{20} + \frac{qB}{m}x_{10}\right)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Oprávněnost tohoto postupu je dokázána v [12].

Pro přehlednost shrneme dosažené výsledky. Jediné (maximální) řešení Hamiltonových kanonických rovnic (2.8) až (2.13) je dáno funkcemi

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= -\frac{m\dot{x}_{20}}{qB}\cos\frac{qBt}{m} + \frac{m\dot{x}_{20}}{qB} + x_{10}, \\
x_2(t) &= \frac{m\dot{x}_{20}}{qB}\sin\frac{qBt}{m}, \\
x_3(t) &= 0, \\
p_1(t) &= m\dot{x}_{20}\sin\frac{qBt}{m}, \\
p_2(t) &= m\dot{x}_{20} + qBx_{10}, \\
p_3(t) &= 0,
\end{aligned}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Odtud vidíme, že se nabitá částice pohybuje stále v jedné rovině určené rovnicí $x_3 = 0$. Její trajektorií je kružnice o poloměru $r = \frac{m\dot{x}_{20}}{qB}$ a středu $S = \left[\frac{m\dot{x}_{20}}{qB} + x_{10}, 0\right]$[20]. ■

Příklad 2.2.3. Sestavte a řešte Lagrangeovy pohybové rovnice pro částici ve vnějším homogenním elektromagnetickém poli popsaném konstantními vektory intenzity elektrického pole $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ a magnetické indukce $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ vzhledem k inerciální kartézské souřadné soustavě. Počáteční podmínky jsou

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(0) &= (x_{10}, 0, 0), \\
\dot{\mathbf{r}}(0) &= (0, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30}),
\end{aligned}$$

kde $x_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30} \in \mathbb{R}$.

Řešení: Sestavíme Lagrangián v kartézských souřadnicích. Podle vztahu (2.4) potřebujeme znát elektromagnetické potenciály $\mathbf{A}$ a φ. Zvolme je ve tvaru[21] $\mathbf{A} = (-Bx_2, 0, 0)$ a $\varphi = -Ex_3$. Lagrangián našeho problému v kartézských souřadnicích je

$$L = \frac{1}{2}m\sum_{i=1}^{3}\dot{x}_i{}^2 - qBx_2\dot{x}_1 + qEx_3.$$

[20] To je vidět z prvních dvou rovnic popisujících časovou závislost souřadnic x_1 a x_2. Jestliže členy s funkcemi sin a cos necháme na jedné straně a ostatní členy převedeme na druhou stranu rovnosti, pak rovnosti umocníme a umocněné rovnosti sečteme; dostaneme $\left(x_1 - \frac{m\dot{x}_{20}}{qB} - x_{10}\right)^2 + x_2^2 = \left(\frac{m\dot{x}_{20}}{qB}\right)^2$, což není nic jiného než rovnice popisující kružnici.

[21] Předpokládáme, že $q, B \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ a $E \in \mathbb{R}$. Snadno překontrolujeme, že podle definičních vztahů (2.2) a (2.3) je tato volba správná. Dává totiž zadané vektory elektromagnetického pole.

Nyní sestavíme Lagrangeovy pohybové rovnice. Nejprve využijeme skutečnosti, že souřadnice x_1 je cyklická (viz odstavec 1.5). Zachovává se tedy s ní sdružená hybnost. Platí

$$p_1 = m\dot{x}_1 - qBx_2.$$

Odtud vypočteme $\dot{x}_1$, dostaneme

$$\dot{x}_1 = \frac{p_1}{m} + \frac{qB}{m}x_2. \tag{2.18}$$

Lagrangeovy rovnice pro zbývající souřadnice jsou

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(m\dot{x}_2) + qB\dot{x}_1 = 0, \tag{2.19}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(m\dot{x}_3) + qE = 0. \tag{2.20}$$

Rovnice (2.18), (2.19), (2.20) představují matematický popis pohybu částice v zadaném elektromagnetickém poli. Je to soustava lineárních rovnic s konstantními koeficienty a proto jejich řešení existuje a je určeno jednoznačně pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Přistupme k nalezení řešení těchto rovnic.

Rovnici (2.20) snadno vyřešíme dvojnásobnou integrací, dostaneme

$$x_3(t) = \frac{qE}{2m}t^2 + \frac{C_1}{m}t + C_2. \tag{2.21}$$

Zbývají rovnice (2.18) a (2.19). Jestliže dosadíme z (2.18) do (2.19) za $\dot{x}_1$ dostaneme

$$\ddot{x}_2 + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 x_2 = -\frac{qBp_x}{m^2}. \tag{2.22}$$

Rovnice (2.22) snadno integrujeme[22] a dostaneme

$$x_2(t) = C_3 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_4 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{p_x}{qB}. \tag{2.23}$$

[22] Nejprve nalezneme všechna řešení homogenní rovnice a pak k nim přičteme jedno řešení nehomogenní rovnice (které v tomto případě lehce uhodneme), dostaneme pak všechna řešení nehomogenní rovnice. K nalezení všech řešení homogenní rovnice stačí najít pouze dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice a pak utvořit všechny jejich lineární kombinace. Dvě lineárně nezávislá řešení homogenní rovnice jsou $\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$ a $\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$ pro všechna $t \in \mathbb{R}$. Jedno řešení nehomogenní rovnice je zřejmě $-\frac{p_x}{qB}$. Oprávněnost tohoto postupu je dokázána v [12].

Jestliže dosadíme (2.23) do (2.18) a pak integrujeme, zřejmě dostaneme

$$x_1(t) = -C_3 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_4 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + C_5. \tag{2.24}$$

Nyní určíme integrační konstanty $p_x, C_1 \ldots, C_5$ z počátečních podmínek. Jestliže uplatníme počáteční podmínka na funkce (2.21), (2.23) a (2.24) dostaneme konečné řešení našeho problému

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{m\dot{x}_{20}}{qB}\left(1 - \cos\frac{qBt}{m}\right) + x_{10}, \\ x_2(t) &= \frac{m\dot{x}_{20}}{qB}\sin\frac{qBt}{m}, \\ x_3(t) &= \frac{qE}{2m}t^2 + \dot{x}_{30}t, \end{aligned}$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Měli bychom diskutovat některé speciální případy našeho řešení, které jsou i fyzikálně zajímavé. To nám umožní lépe pochopit získané řešení nejenom matematicky, ale i fyzikálně. Předpokládejme, že by bylo elektrické pole nulové. V tomto případě by se částice pohybovala po kružnici, která leží v rovině $x_3 = 0$[23] a její rovnice jsou

$$\begin{aligned} \left(x_1 - \left(\frac{qBx_{10}}{m\dot{x}_{20}} + 1\right)\right)^2 + x_2^2 &= \left(\frac{m\dot{x}_{20}}{qB}\right)^2, \\ x_3 &= 0. \end{aligned}$$

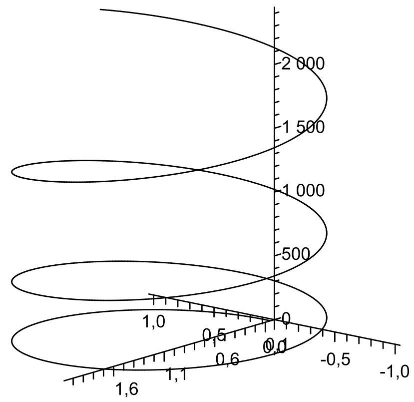
Dále budeme předpokládat, že vektor intenzity elektrického pole je nenulový. Zvolme konkrétní číselné hodnoty fyzikálních veličin m, q, E, B, x_{10}, $\dot{x}_{20}$, $\dot{x}_{30}$ a pokusme se znázornit křivku, po které se částice pohybuje.

Nejprve zvolme $m = 1$ g, $q = 1$ C, $B = 1$ T, $E = 2$ NC^{-1}, $x_{10} = 0,05$ cm, $\dot{x}_{20} = 1$ ms^{-1}, $\dot{x}_{30} = 20$ ms^{-1} a časový interval je $t \in \langle 0; 20\rangle$ (čas je udán v milisekundách). Při této volbě jsou vektory elektromagnetického pole rovnoběžné a souhlasně orientované. Grafické znázornění trajektorie je na obrázku[24] 2.3.

Vidíme, že s přibývajícím časem se závity šroubovice od sebe vzdalují; taková křivka by se mohla nazvat „protažená“ šroubovice. To lze snadno pochopit fyzikálně, protože elektrické pole urychluje částici ve směru osy x_3. Z parametrického popisu pohybu ve směru osy x_3 vidíme, že se dokonce jedná o pohyb rovnoměrně zrychlený (složka rychlosti v kladném směru osy

[23] To snadno zjistíme, když vyloučíme parametr t z prvních dvou předpisů pro x_1 a x_2.

[24] Grafy byly vytvořeny pomocí programu Maple.

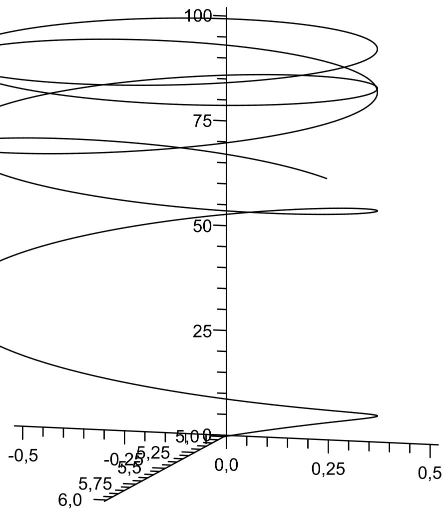


Obrázek 2.3: Souhlasně orientované vektory elektromagnetického pole

z nemění svůj směr, ale zvětšuje svoji velikost.). Elektrické pole mění tedy velikost vektoru rychlosti. Naopak magnetické pole nemění velikost vektoru rychlosti, ale mění pouze směr vektoru rychlosti (způsobuje zatáčení částice).

Jestliže zvolíme $m = 1$ g, $q = 2$ C, $B = 1$ T, $E = -2$ NC^{-1}, $x_{10} = 5$ cm, $\dot{x}_{20} = 1$ ms^{-1}, $\dot{x}_{30} = 20$ ms^{-1} a časový interval je $t \in \langle 0; 16 \rangle$ (čas je udán v milisekundách). Při této volbě jsou vektory elektromagnetického pole rovnoběžné a nesouhlasně orientované. Grafické znázornění části trajektorie vidíme na obrázku 2.4.

Z obrázku je zřejmé, že elektrické pole částici brzdí (v jistém časovém intervalu) v jejím postupu ve směru orientace vektoru magnetické indukce. V jistém okamžiku ji přinutí změnit směr svého postupu a částice se začne pohybovat v opačném směru než jakým je orientován vektor magnetické indukce. Tento pohyb je v záporném směru osy x_3 pohybem rovnoměrně zrychleným (rychlost rovnoměrně roste). ■



Obrázek 2.4: Nesouhlasně orientované vektory elektromagnetického pole

Závěr

V této práci jsme si na nejjednodušších příkladech ukázali aplikace klasické matematické analýzy v klasické mechanice. Problémy, které jsme řešili, byly vybrány tak, aby vedly na rovnice, které jsou snadno řešitelné (obyčejné lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty). Bylo by možné zabývat se problémy (např. pohyby částice ve vnějším nehomogenním elektromagnetickém poli), které vedou na nelineární obyčejné diferenciální rovnice. Tyto rovnice (ve většině případů) nelze řešit analyticky a jsme odkázáni na použití numerických metod. Je též možné studovat kvalitativní vlastnosti řešení bez toho, abychom nalezli explicitní formule pro řešení dané diferenciální rovnice. Také by bylo zajímavé formulovat zákony klasické mechaniky tak, aby nebyly založeny na Newtonových pohybových rovnicích. Za základ by jsme zvolili tzv. Hamiltonův princip, který umožňuje velice kompaktní a elegantní formulaci zákonů mechaniky a lze ho rozšířit i do jiných oblastí fyziky, kde se stává neocenitelným (heuristickým) pomocníkem při studiu ne zcela prozkoumaných fyzikálních jevů.

Literatura

[1] Brdička M., Hladík A. *Teoretická mechanika.* Praha.: Academia 1987

[2] Horský J., Novotný J, Štefaník M. *Mechanika ve fyzice.* Praha.: Academia 2001

[3] Trkal V. *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa.* Praha.: Academia 1956

[4] Štoll I., Tolar J. *Teoretická fyzika.* Praha.: ČVUT 1999

[5] Votruba V. *Základy speciální teorie relativity.* Praha.: Academia 1969

[6] Kvasnica J. *Teorie elektromagnetického pole.* Praha.: Academia 1985

[7] Landau L. D., Lifshitz E. M. *The classical theory of fields.* Butterworth-Heinemann 1980

[8] Landau L. D., Lifshitz E. M. *Mechanics.* Butterworth-Heinemann 1976

[9] Gelfand I. M., Fomin S. V. *Calculus of variations.* Prentice-Hall 1963

[10] Jarník V. *Diferenciální počet II.* Praha.: Academia 1983

[11] Sikorski R. *Diferenciální a integrální počet funkce více proměnných.* Praha.: Academia 1973

[12] Stěpanov V. V. *Kurs diferenciálních rovnic.* Praha.: Přírodovědecké nakladatelství 1950

[13] Arnold V. I. *Mathematical methods of classical mechanics.* New-York: Springer-Verlag 1989