Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

1 proti 100
pravděpodobnost výhry

Plzeň 2013 Martina Abrahamová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 29. května 2013

Martina Abrahamová

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Michalu Frieslovi, Ph.D. za odborné vedení této práce, cenné rady a nápady, vstřícný přístup a čas věnovaný této práci.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je seznámit se s pravidly televizní soutěže 1 proti 100 a zkoumat pravděpodobnost, že hráč zvítězí. Pravděpodobnost bude zkoumána pomocí tří modelů výpočtu, a to modelu absorpčního stavu Markovského řetězce počtu soupeřů, modelu rozkladu podle délky hry a modelu první chybné odpovědi hráče. Dále bude vyšetřována závislost pravděpodobnosti výhry hráče ve hře na pravděpodobnosti jeho správné odpovědi a odpovědi soupeřů a provedena simulační studie.

Klíčová slova: Pravděpodobnost, jev, hra, odpověď, výhra, absorpce, Markovské řetězce, simulace

Abstract

This work explores the rules of a television game show „1 proti 100“ and analyses the probability of the contestant winning. The probability is analysed through three calculation models; the first looks at the overall number of contestants through the absorbing states of a Markov chain; the second is a division model utilising the length of the game as the dataset; and the third is a probabilistic analysis based on the first incorrect answer. These are followed by a comparative analysis of winning-probability based on the probability of the contestant's correct answer and on the probability of the opponent's correct answers. A simulation study is conducted to support our calculations.

Keywords: Probability, event, game, answer, win, absorption, Markov chain, simulation

Obsah

1 Úvod **1**

2 Pravidla hry **2**

3 Modely výpočtu **3**
- 3.1 Hlavní hráč a soupeř 3
- 3.2 Rozklad podle délky hry 3
  - 3.2.1 Strategie výpočtu 3
  - 3.2.2 Jevy použité v modelu 4
  - 3.2.3 Výpočet modelu 4
- 3.3 Podle okamžiku první chybné odpovědi hráče 8
  - 3.3.1 Strategie výpočtu 8
  - 3.3.2 Jevy použité v modelu 8
  - 3.3.3 Výpočet modelu 8
- 3.4 Absorpční stav Markovského řetězce počtu soupeřů 11
- 3.5 Shrnutí matematických modelů 14

4 Průběh pravděpodobnosti **16**
- 4.1 V závislosti na správné odpovědi hlavního hráče 16
  - 4.1.1 Monotonie 16
  - 4.1.2 Konvexnost a konkávnost 17
- 4.2 V závislosti na správné odpovědi soupeřů 20
  - 4.2.1 Monotonie 20
  - 4.2.2 Konvexnost a konkávnost 21

5 Simulace **23**

6 Závěr **26**

1 Úvod

Televizní vědomostní soutěže byly dříve velmi populární, ať už pro ty, kteří chtěli vyhrát vysněné miliony, a nebo pro ty, kteří byli pouze diváky, jenž si chtěli ověřit, jak velké vědomosti mají. Cílem této bakalářské práce je vypočítat pravděpodobnost výhry právě v jedné z televizních vědomostních soutěží a to konkrétně ve hře 1 proti 100.

Tato bakalářká práce je rozdělena na dvě části, na teoretickou a praktickou část. V teoretické části budou rozebrány tři modely výpočtu pravděpodobnosti výhry hlavního hráče nad soupeři a bude vyšetřen průběh pravděpodobnosti výhry hlavního hráče ve hře 1 proti 100 v závislosti na správné odpovědi hlavního hráče a soupeřů. V praktické části bude vytvořena simulace hry 1 proti 100 v softwaru MATLAB.

V druhé kapitole uvedeme pravidla televizní vědomostní soutěže 1 proti 100.

Třetí kapitola se bude zabývat jednotlivými modely výpočtu pravděpodobnosti výhry hlavního hráče ve hře 1 proti 100, modelem rozkladu podle délky hry, modelem první chybné odpovědi hráče a modelem absorpčního stavu Markovského řetězce počtu soupeřů. Na úvod třetí kapitoly zadefinujeme pojmy hlavní hráč a soupeř. U každého modelu výpočtu bude demonstrována strategie výpočtu, budou uvedené jevy vyskytující se v jednotlivých výpočtech a nakonec bude proveden samotný výpočet. Na konci třetí kapitoly shrneme výsledky jednotlivých přístupů k výpočtu a porovnáme jednotlivé modely z hlediska přesnosti výsledků a komplikovanosti výpočtu.

Čtvrtá kapitola bude věnována vyšetření průběhu pravděpodobnosti výhry ve hře v závislosti na správné odpovědi hlavního hráče a soupeřů.
Pro každý případ bude vyšetřena monotonie a konvexnost a konkávnost.

Praktické části je věnována kapitola pátá. Tato kapitola se bude zabývat popisem přiložené simulace hry 1 proti 100. V této kapitoleme srovnáme analyticky získané výsledky a výsledky získané pomocí simulace.

2 Pravidla hry

Hra 1 proti 100 je televizní vědomostní soutěž, kde hráč a zároveň jeho 100 soupeřů dostane v každém kole jednu vědomostní otázku se třemi variantami odpovědi. Otázka je stejná pro všechny hráče hrající v určitém kole. Hráč může přemýšlet nad odpovědí neomezený čas, má několik možností záchrany a volí, zda následující otázka bude snadná nebo obtížná. Každý soupeř má na odpověď deset vteřin a špatná odpověď ho definitivně vyřazuje ze hry. Hráč, poté, co správně odpoví na zadanou otázku dotane finanční odměnu ve výši počtu vyřazených hráčů vydělenou počtem všech soupeřů hrajících v tomto kole vynásobenou částkou půl milionu. Pokud hráč vyřadí všechny soupeře hned v prvním kole vyhrává $\frac{100}{100} * 500000$ Kč. Hra probíhá do té doby, než se vyřadí všichni soupeři nebo dokud hráč neodpoví špatně. V takovém případě odchází bez výhry.

3 Modely výpočtu

Výpočty v kapitole 3.2 a 3.3 vycházejí z teorie pravděpodobnosti, čtenář se může o teorii pravděpodobnosti více dočíst v publikaci [1].

3.1 Hlavní hráč a soupeř

Jako *hlavního hráče* označíme jedince, který má ve hře lepší podmínky, tedy může přemýšlet nad odpovědí neomezený čas, má několik možností záchrany a volí mezi lehkou a těžkou otázkou. *Hlavní hráč* odpovídá správně na zadanou otázku s pravděpodobností p a špatně s pravděpodobností $1 - p$. První špatná odpověď ho vyřadí ze hry a ta dále nepokračuje.

Jako *soupeře* uvažujeme jedince, který má ve hře pouze deset vteřin na odpověď a žádným způsobem nemůže hru ovlivnit (nemůže vybírat otázku ani použít záchrany). *Soupeř* odpovídá správně na otázku s pravděpodobností q a špatně s pravděpodobností $1 - q$ (pro zjednodušení počítáme se stejnou pravděpodobností pro všechny soupeře). Po první špatné odpovědi je *soupeř* automaticky vyřazen ze hry.

Ve všech modelech výpočtu pravděpodobnosti výhry hlavního hráče ve hře 1 proti 100 zanedebáváme všechny jeho výše zmíněné výhody.

3.2 Rozklad podle délky hry

3.2.1 Strategie výpočtu

Jedním z možných způsobů, jak vypočítat pravděpodobnost výhry hlavního hráče nad soupeři ve hře 1 proti 100, je rozložení hry podle délky. Označme i počet kol, otázky jsou zadávány v kolech 1 až i a hlavní hráč v posledním $i$tém kole zvítězí.

Hlavní hráč odpoví v každém kole 1 až i na zadanou otázku správně. Každý ze sta soupeřů hlavního hráče odpoví v jednom z kol 1 až i chybně a alespoň jeden z nich odpoví poprvé chybně v kole i. Strategie tohoto výpočtu tedy spočívá v tom, že hlavní hráč odpovídá do kola i správně a minimálně jeden z jeho soupeřů postoupí do $i$tého kola, kde odpoví poprvé špatně. Tím je zaručena výhra hlavního hráče v tomto $i$tém kole, jelikož on odpověděl správně a zbyvájící počet soupeřů (minimálně jeden) se v tomto kole vyřadil.

3.2.2 Jevy použité v modelu

V tomto přístupu k výpočtu vystupuje jev H^i, který označuje, že hlavní hráč odpoví správně v kolech 1 až i, jev J^i_j, který vyjadřuje postupu $j$tého soupeře ze všech 100 soupeřů do posledního kola i . Dále zde vystupuje jev S^i_k, který představuje vyřazení $k$tého soupeře někdy během kol 1 až i a jev V^i_j, který představuje vyřazení všech zbylých 99 soupeřů během kol 1 až i. Dále je v tomto modelu používán jev U^i_j, který reprezentuje, že $j$tý soupeř odpoví poprvé špatně v kole i a všech 99 zbývajících soupeřů odpoví špatně nejpozději v kole i. Celková pravděpodobnost výhry hlavního hráče nad soupeři je označena P a je vypočítána jako

$$\begin{aligned}
P &= P\bigcup_{i=1}^{\infty}(H^i \cap \bigcup_{j=1}^{100} U^i_j) \\
&= P\bigcup_{i=1}^{\infty}(H^i \cap \bigcup_{j=1}^{100}(J^i_j \cap V^i_j)) \\
&= P\bigcup_{i=1}^{\infty}(H^i \cap \bigcup_{j=1}^{100}(J^i_j \cap \bigcap_{k\neq j} S^i_k)),
\end{aligned}$$

kde v posledním průniku je k z množiny {1,2,..,100} kromě hodnoty, která představuje pořadí $j$tého hráče.

3.2.3 Výpočet modelu

Pravděpodobnost, že hlavní hráč odpoví správně na zadané otázky během kol 1 až i, vypočteme jako průnik i nezávislých jevů, tedy hlavní hráč odpoví i krát správně. Pravděpodobnost jevu H^i reprezentuje výraz

$$P(H^i) = p^i,$$

kde p je pravděpodobnot správné odpovědi hlavního hráče na zadanou otázku.

Dále uvažujeme, že alespoň jeden ze soupeřů odpoví poprvé špatně na otázku v kole i a všichni ostatní soupeři nejpozději v kole i. Předpokládáme tedy, že přinejmenším jeden ze 100 soupeřů odpoví v kolech 1 až $i-1$ správně a v kole i odpoví poprvé na otázku špatně. Ostatní soupeři odpoví v některém z kol 1 až i špatně.

Pravděpodobnost jevu J_j^i, pravděpodobnost správné odpovědi $j$tého soupeře v kolech 1 až i a špatné odpovědi v kole i (soupeř odpoví $i-1$krát správně a jednou špatně), reprezentuje výraz

$$P(J_j^i) = q^{i-1}(1-q),$$

kde q je pravděpodobnost správné odpovědi soupeře na zadanou otázku.

Ostatní soupeři, kteří nemusí nutně postoupit až do posledního kola i, odpoví na některou zadanou otázku během kol 1 až i chybně. Pravděpodobnost jevu S_k^i, tedy pravděpodobnost špatné odpovědi $k$tého soupeře v jednom z kol 1 až i, má tvar

$$\begin{aligned} P(S_k^i) &= (1-q) + q(1-q) + q^2(1-q) + ... + q^{i-1}(1-q) \\ P(S_k^i) &= \sum_{n=0}^{i-1} q^n(1-q). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Jelikož výraz (3.1) vyjadřuje geometrickou řadu s prvním členem $1-q$ a kvocientem q, můžeme členy geometrické řady sečíst. Součet výrazu (3.1) je

$$P(S_k^i) = \sum_{n=0}^{i-1} q^n(1-q) = \sum_{n=1}^{i} q^{n-1}(1-q) = (1-q)\frac{q^i-1}{q-1} = 1-q^i.$$

Pro náš model výpočtu stačí postup jednoho libovolného soupeře do posledního kola i. U zbylých 99 soupeřů pro nás již není důležité, ve kterém kole vypadnou. Jev V_j^i představuje vyřazení zbylých 99 hráčů během kol 1 až i. Jev V_j^i je tedy průnikem 99 nezávislých jevů S_k^i. Pravděpodobnost jevu V_j^i vypočítáme jako

$$P(V_j^i) = P(\bigcap_{k\neq j} S_k^i) = (1-q^i)^{99}.$$

Pravděpodobnost jevu U_j^i, špatné odpovědi $j$tého soupeře v kole i a ostatních 99 soupeřů nejpozději v kole i, vypočítáme jako pravděpodobnost průniku jevů J_j^i a V_j^i, které jsou nezávislé. Hodnota pravděpodobnosti jevu U_j^i

vypadá následovně

$$\begin{aligned}
P(U_j^i) &= P(J_j^i \cap V_j^i) \\
P(U_j^i) &= P(J_j^i \cap \bigcap_{k \neq j} S_k^i) \\
P(U_j^i) &= q^{i-1}(1-q)(1-q^i)^{99}.
\end{aligned}$$

Jelikož nevíme, který ze 100 soupeřů, kteří ve hře 1 proti 100 vystupují, postoupí až do posledního kola i, sjednotíme všechny jevy U_j^i přes všechna j jdoucí od jedné do sta (jev U_1^i reprezentuje postup prvního soupeřů do kola i, jev U_{100}^i představuje postup stého soupeře do kola i). Sjednocení jevů U_j^i má tvar

$$\begin{aligned}
P(\bigcup_{j=1}^{100} U_j^i) &= P(U_1^i) + P(U_2^i) + P(U_3^i) + \dots \\
&\quad -P(U_1^i \cap U_2^i) - P(U_1^i \cap U_3^i) - \dots \\
&\quad +P(U_1^i \cap U_2^i \cap U_3^i) + P(U_1^i \cap U_2^i \cap U_4^i) + \dots \\
&\quad -P(U_1^i \cap U_2^i \cap U_3^i \cap U_4^i) - \dots \\
&\quad \dots
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Jednotlivé řádky výrazu (3.2) mají tvar

$$\begin{aligned}
P(U_1^i) + P(U_2^i) + P(U_3^i) + \dots &= \binom{100}{1} q^{i-1}(1-q)(1-q^i)^{99} \\
-P(U_1^i \cap U_2^i) - P(U_1^i \cap U_3^i) - \dots &= (-1)\binom{100}{2} q^{2(i-1)}(1-q)^2(1-q^i)^{98} \\
P(U_1^i \cap U_2^i \cap U_3^i) + P(U_1^i \cap U_2^i \cap U_4^i) + \dots &= \binom{100}{3} q^{3(i-1)}(1-q)^3(1-q^i)^{97} \\
\dots
\end{aligned}$$

Výraz (3.2) můžeme vyjádřit jako alternující řadu ve tvaru

$$P(\bigcup_{j=1}^{100} U_j^i) = \sum_{k=1}^{100} \binom{100}{k} (-1)^{k+1} q^{k(i-1)}(1-q)^k(1-q^i)^{100-k}.$$

Pravděpodobnost P, že hlavní hráč porazí všechny soupeře v kole i, vypočítáme jako pravděpodobnost průniku jevů H^i a $\bigcup_{j=1}^{100} U_j^i$, které jsou opět nezávislé. Prvěpodobnost průniku těchto dvou jevů ještě sečteme přes všechny

i jdoucí od jedné do nekonečna, jelikož hra může trvat od jednoho do nekonečně mnoha kol. Tento součet představuje sjednocení disjunktních jevů. Pravděpodobnost výhry hlavního hráče ve hře 1 proti 100 vypočítáme jako

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{\infty} P(H^i)P(\bigcup_{j=1}^{100} U_j^i) \\ P &= \sum_{i=1}^{\infty} p^i \sum_{k=1}^{100} \binom{100}{k} (-1)^{k+1} q^{k(i-1)} (1-q)^k (1-q^i)^{100-k}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Výraz (3.3) neumíme explicitně sečíst, sečteme tedy jen prvních n členů. Pro určení počtu členů n, které sečteme, odhadneme zbytek řady po sečtení prvních n členů a určíme konstatntu ϵ, na které bude záviset přesnost výsledku. Zbytek řady odhadneme řadou $\sum_{i=n}^{\infty} p^i$, jelikož výraz $\sum_{k=1}^{100} \binom{100}{k} (-1)^{k+1} q^{k(i-1)} (1-q)^k (1-q^i)^{100-k}$ reprezentuje hodnotu pravděpodobnosti, tedy hodnotu z intervalu (0,1), a výraz p^i se může po vynásobení touto hodnotou pouze zmenšit. Odhad zbytku řady 3.3 a následné sečetní řady $\sum_{i=n}^{\infty} p^i$ má tvar

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=n}^{\infty} p^i \sum_{k=1}^{100} \binom{100}{k} (-1)^{k+1} q^{k(i-1)} (1-q)^k (1-q^i)^{100-k} \right| &< \sum_{i=n}^{\infty} p^i \\ \frac{p^n}{1-p} &< \epsilon. \end{aligned}$$

Konstantu ϵ volíme jako hodnotu 0,001, tedy aproximovaná hodnota pravděpodobnosti P bude s přesností na jedno desetinné místo procenta.

3.3 Podle okamžiku první chybné odpovědi hráče

3.3.1 Strategie výpočtu

Dalším modelem výpočtu pravděpodobnosti výhry hlavního hráče ve hře 1 proti 100 je model první chybné odpovědi hlavního hráče. V tomto přístupu k výpočtu odpoví hlavní hráč na otázku poprvé špatně později než všichni jeho soupeři, tzn. všichni soupeřové se do určitého kola vyřadí a hlavní hráč až poté odpoví špatně. Pro náš model označíme kolo i jako kolo, ve kterém odpoví hlavní hráč poprvé špatně.

V tomto modelu odpoví hlavní hráč na všechny zadané otázky během kol 1 až $i-1$ správně a na otázku zadanou v i-tém kole odpoví poprvé chybně. Každý ze sta soupeřů vypadne v některém z kol 1 až $i-1$, tedy každý z nich odpoví na některou zadanou otázku během těchto kol špatně a tím pro něj hra končí. Tím je zaručena výhra hlavního hráče, jelikož všech sto soupeřů vypadne nepojzdějí v kole $i-1$, kde hlavní hráč ještě odpoví správně.

3.3.2 Jevy použité v modelu

V tomto přístupu k výpočtu vystupuje jev H^i, který označuje správnou odpověď hlavního hráče v kolech 1 až $i-1$ a špatnou odpověď v kole i. Dále zde vystupuje jev S_j^i, který vyjadřuje špatnou odpověď $j$tého soupeře v některém z kol 1 až $i-1$ a jev U^i, který reprezentuje vyřazení všech 100 soupeřů do kola $i-1$. Celková pravděpodobnost výhry hlavního hráče nad soupeři je označena P a je vypočítána jako

$$P = \bigcup_{i=2}^{\infty} P(H^i \cap \bigcap_{j=1}^{100} S_j^i) = \bigcup_{i=2}^{\infty} P(H^i \cup U^i).$$

3.3.3 Výpočet modelu

Pravděpodobnost jevu H^i vypočítáme jako průnik pravděpodobností i nezávislých jevů, jevů představujících jednu špatnou odpověď v kole i a jevu reprezentující $i-1$ správných odpovědí během kol 1 až $i-1$. Pravděpodobnost jevu H^i má tvar

$$P(H^i) = p^{i-1}(1-p).$$

Všichni soupeři odpoví v některém z kol 1 až $i-1$ špatně. Pravděpodobnost jevu S^i_j, tedy špatné odpovědi j-tého soupeře v jednom z kol 1 až $i-1$ vypočeteme jako

$$P(S^i_j) = (1-q) + q(1-q) + q^2(1-q) + ... + q^{i-2}(1-q). \tag{3.4}$$

Výraz (3.4) můžeme vyjádřit jako geometrickou řadu s prvním členem $1-q$ a kvocientem q, kterou umíme sečíst. Součet této geometrické řady má tvar

$$\begin{aligned} P(S^i_j) &= \sum_{n=0}^{i-2} q^n(1-q) = \sum_{n=1}^{i-1} q^{n-1}(1-q) = \\ &= (1-q)\frac{q^{i-1}-1}{q-1} = 1 - q^{i-1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ve hře 1 proti 100 figuruje 100 soupeřů a každý z nich odpovídá v kolech 1 až $i-1$ s pravděpodobností vypočítanou ve výrazu (3.5). Pravděpodobnost jevu U^i tedy vypočítáme jako průnik 100 nezávislých jevů S^i_j

$$P(U^i) = P(\bigcap_{j=1}^{100} S^i_j) = (1-q^{i-1})^{100}.$$

Jak již bylo řečeno, pravděpodobnost výhry hlavního hráče v kole i vypočteme jako průnik jevů H^i a S^i, které jsou nezávislé. Pravděpodobnost průniku těchto jevů ještě sečteme (tento součet představuje sjednocení disjunktních jevů) přes všechna i jdoucí od dvou do nekonečna, jelikož hra může teoreticky trvat od dvou (jedno kolo není možné, v případě, že by hra trvala pouze jedno kolo, nastal by spor s tímto modelem, jelikož hlavní hráč by v prvním kole odpověděl chybně a prohrál by) do nekonečně mnoha kol

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=2}^{\infty} P(H^i)P(U^i) \\ P &= \sum_{i=2}^{\infty} p^{i-1}(1-p)(1-q^{i-1})^{100} \\ P &= \sum_{i=1}^{\infty} p^i(1-p)(1-q^i)^{100}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Výraz (3.6) upravíme rozmocněním výrazu $(1-q^i)^{100}$

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{\infty}(1-p)p^i[1-\binom{100}{1}q^i+\binom{100}{2}q^{2i}-\binom{100}{3}q^{3i}+ \\ &\dots \\ &+ \binom{100}{98}q^{98i}-\binom{100}{99}q^{99i}+\binom{100}{100}q^{100i}]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

.
Dále můžeme výraz (3.7) vyjádřit jako součet 101 geometrických řad

$$\begin{aligned} P &= (1-p)[\sum_{i=1}^{\infty}p^i-\binom{100}{1}\sum_{i=1}^{\infty}p^iq^i+\binom{100}{2}\sum_{i=1}^{\infty}p^iq^{2i}-\binom{100}{3}\sum_{i=1}^{\infty}p^iq^{3i}+ \\ &\dots \\ &+ \binom{100}{98}\sum_{i=1}^{\infty}p^iq^{98i}-\binom{100}{99}\sum_{i=1}^{\infty}p^iq^{99i}+\binom{100}{100}\sum_{i=1}^{\infty}p^iq^{100i}]. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Těchto 101 geometrických řad z výrazu (3.8) můžeme postupně sečíst

$$\begin{aligned} P &= (1-p)(\frac{p}{1-p}-\binom{100}{1}\frac{pq}{1-pq}+\binom{100}{2}\frac{pq^2}{1-pq^2}- \\ &\dots \\ &- \binom{100}{99}\frac{pq^{99}}{1-pq^{99}}+\binom{100}{100}\frac{pq^{100}}{1-pq^{100}}). \end{aligned}$$

Pravděpodobnost výhry P hlavního hráče nad všemi soupeři v modelu první chybné opdovědi hlavního hráče má po úpravě tvar

$$P=(1-p)\sum_{n=0}^{100}(-1)^n\binom{100}{n}\frac{pq^n}{1-pq^n}.$$

3.4 Absorpční stav Markovského řetězce počtu soupeřů

Výpočty prováděné v této kapitole jsou založeny na teorii náhodnýh procesů, především Markových řetězců. Více o těchto řetězcích a náhodných procesech se může čtenář dočíst v publikacích [2] a [3].

Posledním z modelů výpočtu v této práci je model hry pomocí Markovského řetězce. Průběh hry lze modelovat markovovým řetězcem s množinou stavů $\{s_j\}_{j=0}^{101}$ (stavy představují počet žijích soupeřů,kromě stavu 101, který představuje špatnou odpověď hlavního hráče na zadanou otázku, nebo-li prohru hlavního hráče nad soupeři, jejichž počet nás v tomto stavu nezajímá) a maticí přechodu $P = [p_{i,j}]_{i,j=0}^{101}$.

Stavy 1 až 100 představují počty nevyřazaných soupeřů, tedy stav 1 představuje hru, ve které zbyl jeden soupeř a hlavní hráč, stav 2 reprezentuje situaci se dvěma soupeři a hlavním hráčem atd. Stav 0, představuje žádného soupeře, tedy vítězství hlavního hráče. Stav 101 reprezentuje prohru hlavního hráče. Ze stavů 0 a 101 nemůže hra pokračovat do žádného jiného stavu, jedná se o absorpční stavy Markovova řetězce.

Nyní sestavíme matici přechodu P v závislosti na parametrech p a q.Sestavení matice budemem demonstrovat na stavu 2. Pokud se hra nachází ve stavu 2, tedy ve stavu kdy zbývají dva soupeři a hlavní hráč, může hra pokračovat do 4 stavů, do stavu 0, kdy hlavní hráč zvítězí, do stavu 1, kdy jeden ze dvou soupeřů odpoví špatně, setrvat ve stavu 2 nebo přejít do stavu 101, kdy hra končí, protože hlavní hráč odpověděl špatně. Přechod ze stavu 2 do stavu 0 reprezentuje špatnou odpověď obou soupeřů a správnou odpověď hlavního hráče, pravděpodobnost tohoto přechodu je

$$p_{2,0} = p(1-q)^2.$$

Při přechodu ze stavu 2 do stavu 1 odpoví jeden konkrétní soupeř z těchto dvou hrajících soupeřů správně, druhý odpoví špatně a hlavní hráč odpovídá správně. Pravděpodobnost tohoto přechodu má tvar

$$p_{2,1} = \binom{2}{1} pq(1-q).$$

Setrvání ve stavu 2 je možné, pokud hlavní hráč i oba soupeři odpoví na zadanou otázku správně. Pravděpododnost setrvání ve stavu 2 je

$$p_{1,1} = pq^2.$$

Přechod ze stavu 2 do stavu 101 představuje konec hry prohrou hlavního hráče. Jelikož se jedná o konec hry, zajímá nás pouze odpověď hlavního hráče, která je špatná. Odpovědi soupeřů pro nás v tomto okamžiku nemají význam. Pravděpodobnost přechodu ze stavu 2 do stavu 101 má tvar

$$p_{2,101} = (1 - p).$$

Přechod do stavů 3 až 100 není ze stavu 2 možný, jelikož soupeři mohou pouze ubývat, pokud špatně odpoví, nikoliv přibývat. Pravděpodobnost přechodu je tedy

$$p_{2,k} = 0 \qquad k = \{3, 4, 5, \ldots, 99, 100\}.$$

Jak již bylo zmíněno, stavy 0 a 101 jsou absorpčními stavy Markovova řetězce, tedy ze stavu 0 můžeme přejít pouze do stavu 0, ze stavu 101 pouze do stavu 101. Pravděpodnosti setrvání ve stavech 0 a 101 je tedy

$$\begin{aligned} p_{0,0} &= 1 \\ p_{101,101} &= 1. \end{aligned}$$

Analogicky doplníme prvky zbývajících řádků. Výsledná matice přechodu P je čtvercová matice řádu 102 ve tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ p(1-q) & pq & 0 & 0 & \ldots & 1-p \\ p(1-q)^2 & \binom{2}{1}pq(1-q) & pq^2 & 0 & \ldots & 1-p \\ p(1-q)^3 & \binom{3}{1}pq(1-q)^2 & \binom{3}{2}pq^2(1-q) & pq^3 & \ldots & 1-p \\ p(1-q)^4 & \binom{4}{1}pq(1-q)^3 & \binom{4}{2}pq^2(1-q)^2 & \binom{4}{3}pq^3(1-q) & \ldots & 1-p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ p(1-q)^{99} & \binom{99}{1}pq(1-q)^{99} & \binom{99}{2}pq^2(1-q)^{97} & \binom{99}{3}pq^3(1-q)^{96} & \ldots & 1-p \\ p(1-q)^{100} & \binom{100}{1}pq(1-q)^{100} & \binom{100}{2}pq^2(1-q)^{98} & \binom{100}{3}pq^3(1-q)^{97} & \ldots & 1-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Stavy 1 až 100 jsou stavy přechodné. Nyní nás zajímá pravděpodobnost absorpce ze stavu 100 do stavu 0. Sestavíme soustavu rovnic podle následující rovnice pro výpočet pravděpodobnosti absorpce ze stavu i do stavu j podle pravděpodobností přechodů

$$u_{i,j} = p_{i,j} + \sum_{\nu \in T} p_{i\nu} u_{\nu j}, \qquad i \in T, j \notin T$$

kde T je množina přechodných stavů, tedy stavů 1 až 100.

Po dosazení jednotlivých pravděpodobností přechodů z matice přechodu P do rovnice (3.9) získáváme soustavu 100 následujících rovnic.

$$\begin{aligned}
u_{1,0} &= p(1-q) + pqu_{1,0} \\
u_{2,0} &= p(1-q)^2 + \binom{2}{1} pq(1-q)u_{1,0} + pq^2 u_{2,0} \\
u_{3,0} &= p(1-q)^3 + \binom{3}{1} pq(1-q)^2 u_{1,0} + \binom{3}{2} pq^2(1-q)u_{2,0} + pq^3 u_{3,0} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Jelikož nás zajímá absorpce ze stavu 100 do stavu 0, potřebujeme vyjádřit všechny pravděpodobnosti $u_{i,j}, i = \{1, 2, \ldots, 99, 100\}, j = 0$. Explicitní vyjádření všech těchto pravděpodobností je velmi náročné, z tohoto důvodu budou tyto pravděpodobnosti vyjádřeny numericky. Postupně budeme dosazovat hodnoty parametrů p a q, $p, q \in (0, 1)$. Pro tyto hodnoty následně vyčíslíme pravděpodobnost $u_{100,0}$, která představuje výhru hlavního hráče.

Numerický výpočet byl proveden v programu MATLAB. Pro hodnoty pravděpodobností p a q byly voleny hodnoty $k \cdot 0,05$, kde k= {0,1,2, . . . , 20}. Jednotlivé rovnice z výrazu (3.9) lze vyjádřit ve tvaru

$$u_{k,0} = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{k-n} p(1-q)^n q^{k-n} u_{k-n,0} \tag{3.10}$$

který použijeme jako výpočetní tvar v programu MATLAB.

Jelikož MATLAB počítá s přesností na 15 míst, podle vzorce (3.10) nám nevypočítá explicitní výsledek díky velkým hodnotám kombinačních čísel. Vyjádříme tedy výraz (3.10) pomocí přirozeného logaritmu a výpočet kombinačních čísel pomocí logaritmické Gamma funkce, která je v MATLABU vestavěna. Upravený výraz má tvar

$$u_{k,0} = \sum_{n=0}^{k} e^{ln\Gamma(k+1)-(ln\Gamma(k-n+1)+ln\Gamma(i+1)ln(p(1-q)^n q^{k-n} u_{k-i,0})}.$$

3.5 Shrnutí matematických modelů

Po numerickém vyjádření pravděpodobnosti výhry pro určité proměnné p a q získáváme pro všechny metody výpočtu stejné hodnoty.

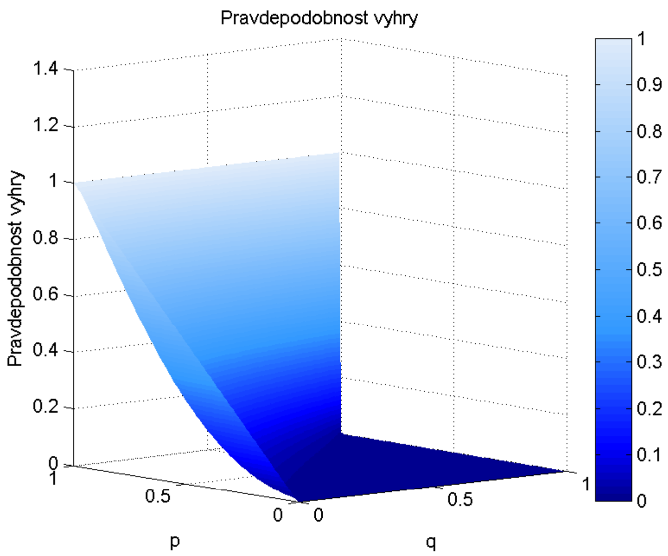
V prvním modelu rozklad hry podle délky získáváme aproximovaný výsledek, jelikož jsme nebyli schopni získat pomocí tvaru funkce získaného v tomto modelu explicitní výsledek. Tvar funkce získaný pomocí tohoto modelu je velmi komplikovaný, jelikož sčítáme dvě nekonečné sumy. V druhém modelu získáváme explicitní výsledky, jelikož tvar funkce získaný v modelu podle první chybné odpovědi hráče je tvořen konečným, nikoliv nekonečným součtem jako v předchozím modelu. Tvar funkce získaný pomocí třetího modelu, modelu absorpčního stavu Markovského řetězce, dává taktéž explicitní výsledek. V tomto modelu získáváme soustavu 100 rovnic, ze které je velmi složité analyticky vyjádřit výsledek. Po numerickém vyjádření v softwaru MATLAB získáváme výsledek aproximovaný.

Z hlediska komplikovanosti je tedy nejjednodušším tvarem funkce tvar funkce získaný v modelu podle první chybné odpovědi hráče, tento tvar je při numerickém vyjádření také nejpřesnějším výsledkem.

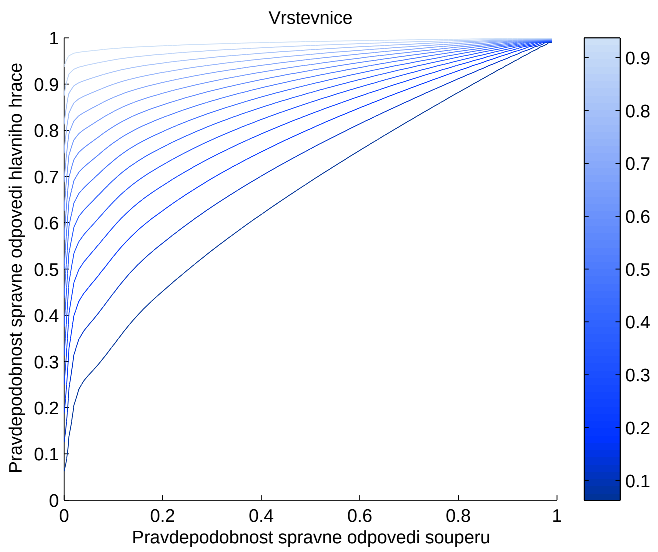
Na obrázku 3.1 je znázorněn graf pravděpodobnosti výhry hlavního hráče ve hře 1 proti 100 v závislosti jak na správné odpovědi hlavního hráče, tak na správné odpovědi soupeřů.

Pro lepší grafickou představivost jsou na obrázku 3.2 vyobrazeny vrstevnice funkce reprezentující pravděpodobnost výhry hlavního hráče ve hře 1 proti 100.

Další grafy závislosti pravděpodobnosti výhry hlavního hráče P na jednotlivých proměnných p a q jsou znázorněny v následující kapitole, viz obrázek 4.1 a obrázek 4.2.



Obrázek 3.1: Pravděpodbnost výhry P v závislosti na správné odpovědi hlavního hráče a soupeřů



Obrázek 3.2: Vrstevnice

4 Průběh pravděpodobnosti

4.1 Průběh pravděpodobnosti v závislosti na správné odpovědi hlavního hráče

Nyní se podíváme na závislost pravděpodobnosti výhry hlavního hráče nad soupeři. Vyšetříme závislost pravděpodobnosti výhry na správné odpovědi hlavního hráče a soupeřů, především nás bude zajímat monotonie, konvexnost a konkávnost funkce reprezentující pravděpodobnost P.

4.1.1 Monotonie

Pro vyšetření monotonie funkce představující pravděpodobnost výhry hlavního hráče ve hře 1 proti 100 v závislosti na proměnné p, tedy správné odpovědi hlavního hráče na zadanou otázku, využijeme tvaru funkce získaného z modelu výpočtu pravděpodobnosti výhry podle rozkladu podle délky hry. V tomto modelu je pravděpodobnost výhry vypočítána jako

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{\infty} P(H^i) P\Big(\bigcup_{j=1}^{100} U_j^i\Big) \\ P &= \sum_{i=1}^{\infty} p^i \sum_{k=1}^{100} \binom{100}{k} (-1)^{k+1} q^{k(i-1)} (1-q)^k (1-q^i)^{100-k}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Vídíme, že pravděpodobnost $P(\bigcup_{j=1}^{100} U_j^i)$ závisí pouze na proměnné q, tedy správné odpovědi soupeře, nikoli na proměnné p, podle které vyšetřujeme monotonii. Upravíme tedy výraz (4.1) jako

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} p^i \cdot c_i, \qquad c \in (0,1). \tag{4.2}$$

Nyní výraz (4.2), který představuje mocninnou řadu, zderivujeme pro vyšetření monotonie. U mocninných řad můžeme uvnitř oboru konvergence derivovat členy člen po členu a je zřejmé, že interval (0,1), na kterém chceme derivovat patří do oboru konvergence této mocninné řady.

Derivace výrazu (4.2) má tvar

$$P' = \sum_{i=1}^{\infty} i p^{i-1} \cdot c_i, \qquad c \in (0,1).$$

V následující tabulce 4.1 jsou znázorněné jednotlivé činitele z první derivace a jejich výsledné znaménko.

Výraz	interval (0,1)
ic^i	kladný
p^{i-1}	kladný
$ip^{i-1}c^i$	kladný

Tabulka 4.1: Hodnoty činitelů první derivace podle p

Hodnota první derivace výrazu (4.2) je kladná, funkce je tedy na intervalu (0,1) rostoucí vzhledem k proměnné p.

4.1.2 Konvexnost a konkávnost

Zda-li je funkce konvexní nebo konkávní vyšetříme z tvaru funkce vyjádřené v modelu podle první chybné odpovědi hráče. V tomto modelu je pravděpodobnost P vypočítána jako

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=2}^{\infty} P(H^i)P(S^i) \\ P &= \sum_{i=1}^{\infty} p^i(1-p)(1-q^i)^{100}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Jelikož $P(S^i) = (1-q^i)^{100}$ nezávisí na proměnné p, podle které vyšetřujeme konvexnost a konkávnost, ale pouze na proměnné q, upravíme výraz (4.3) na tvar

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} p^i(1-p)c_i, \qquad c \in (0,1). \tag{4.4}$$

Konvexnost a konkávnost určíme podle hodnoty druhé derivace zkoumané funkce. Pokud je druhá derivace záporná, funkce je konkávní, pokud funkce nabývá v druhé derivaci kladné hodnoty je funkce konvexní.

Výraz (4.4) reprezentuje mocninou řadu a interval (0,1) opět spadá do oboru konvergence mocninné řady (4.4), můžeme ji tedy derivovat člen po členu.

První derivace funkční řady (4.4) podle proměnné p je

$$P' = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(ip^{i-1} - ip^i - p^i), \qquad c \in (0,1). \tag{4.5}$$

První derivace je opět mocninnou řadou, kterou můžeme opět derivovat člen po členu, jelikož poloměr konvergence je u mocninných řad při derivování zachován a interval (0,1) znovu spadá do oboru konvergence mocninné řady (4.5).

Vypočítáme druhou derivaci, ze které určíme, zda-li je funkce konvexní nebo konkávní. Druhá derivace výrazu (4.4) má tvar

$$P'' = \sum_{i=1}^{\infty} c_i i(i-1)(1-p)p^{i-2}, \qquad c \in (0,1).$$

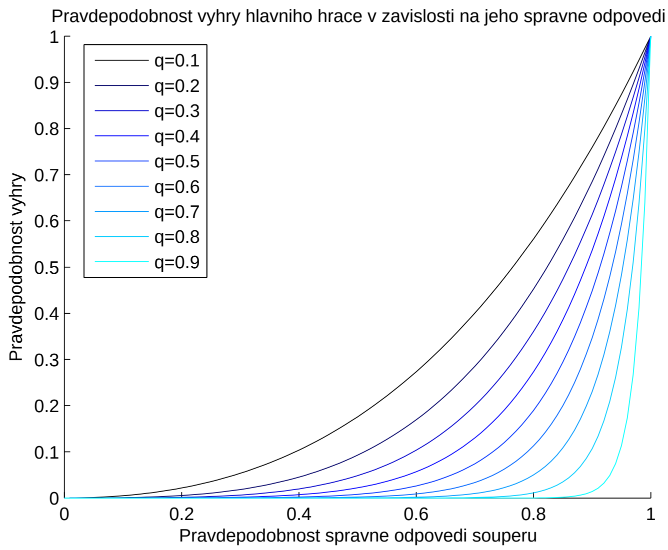
V tabulce 4.2 jsou znázorněny kladnosti respektive zápornosti jednotlivých činitelů vystupujících v druhé derivaci.

Hodnota druhé derivace funkce představující výhru hlavního hráče ve hře 1 proti 100 podle proměnné p, tedy pravděpodobnosti správné odpovědi hlavního hráče, je nezáporná. Funkce je tedy konvexní vzhledem k p.

Na obrázku 4.1 je zobrazen graf průběhu pravděpodobnosti P v závislosti na pravděpodobnosti správné odpovědi hlavního hráče pro 9 vybraných hodnot q.

Výraz	interval (0,1)
$c^i i$	kladný
$i-1$	nezáporný
$1-p$	kladný
p^{i-2}	kladný
$c^i i(i-1)(1-p)p^{i-2}$	nezáporný

Tabulka 4.2: Hodnoty činitelů v druhé derivace podle p



Obrázek 4.1: Průběh pravděpodobnosti v závislosti na správné odpovědi hlavního hráče

Jak je z obrázku vidět, jednotlivé grafy jsou funkce rostoucí a konvexní. Výpočet toto tvrzení potvrzuje.

4.2 Průběh pravděpodobnosti v závislosti na správné odpovědi soupeřů

4.2.1 Monotonie

Pro vyšetření monotonie funkce představují pravděpodobnost výhry hlavního hráče nad soupeři ve hře 1 proti 100 podle proměnné q, tedy správné odpovědi soupeře na zadanou otázku, využijeme tvaru funkce získaného v modelu podle první chybné odpovědi hráče. V tomto přístupu je hledaná funkce vypočítána jako

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=2}^{\infty} P(H^i)P(S^i) \\ P &= \sum_{i=1}^{\infty} p^i(1-p)(1-q^i)^{100}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Vidíme, že výraz $P(H^i) = p^i(1-p)$ je závislý pouze na proměnné p, nikoliv na proměnné q, podle které monotonii vyšetřujeme. Jak již bylo zmíněno, výraz $P(H^i)$ představuje pravděpodobnost, tedy hodnotu mezi 0 a 1. Výraz (4.6) můžeme tedy zapsat v upraveném tvaru

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot (1-q^i)^{100}, \qquad c \in (0,1). \tag{4.7}$$

Nyní získaný výraz (4.7) zderivujeme podle proměnné q, abychom mohli vyšetřit monotonii v závislosti na této proměnné. Výraz 4.7 reprezentuje mocninnou řadu a interval (0,1) patří do oboru konvergence této mocninné řady, můžeme ji tedy derivovat po členech.

První derivace výrazu (4.7) podle q má tvar

$$P' = \cdot \sum_{i=1}^{\infty} -100iq^{i-1}(1-q^i)^{99}c_i, \qquad c \in (0,1). \tag{4.8}$$

V tabulce 4.3 jsou znázorněny kladnosti respektive zápornosti jednotlivých činitelů, ze kterých se skládá první derivace výrazu 4.7.

Hodnota výrazu 4.8 je záporná, daná funkce je tedy klesající vzhledem k q.

Výraz	interval (0,1)
$-100i$	záporný
q^{i-1}	kladný
$(1-q^i)^{99}$	kladný
$-100iq^{i-1}(1-q^i)^{99}$	záporný

Tabulka 4.3: Hodnoty činitelů první derivace podle q

4.2.2 Konvexnost a konkávnost

Konvexnost a konkávnost funkce představující výhru hlavního hráče v závislosti na správné odpovědi soupeřů, vyšetříme stejně jako v předchozím případě z funkce získané v modelu podle první chybné odpovědi hráče.
V tomto modelu je pravděpodobnost výhry P hlavního hráče nad soupeři vypočítána jako

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=1}^{\infty} P(H^i)P(S^i) \\ P &= \sum_{i=1}^{\infty} p^i(1-p)(1-q^i)^{100}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Výraz $P(H) = p^i(1-p)$ závisí pouze na proměnné p, podle které nevyšetřujeme monotonii. Budeme tedy tento výraz brát jako hodnotu mezi 0 a 1 (jedná se o hodnotu pravděpodobnosti) a upravíme výraz (4.9) na tvar

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot (1-q^i)^{100}, \qquad c \in (0,1). \tag{4.10}$$

První derivaci výrazu 4.10 jsme získali již v předchozí část ve tvaru

$$P' = \cdot \sum_{i=1}^{\infty} -100iq^{i-1}(1-q^i)^{99}c_i, \qquad c \in (0,1). \tag{4.11}$$

Nyní vypočítáme druhou derivaci výrazu (4.10) pro vyšetření konvexnosti nebo konkávnosti funkce reprezentující pravděpodobnost výhry hlavního hráče ve hře 1 proti 100 v závislosti na správné odpovědi soupeřů. Výraz

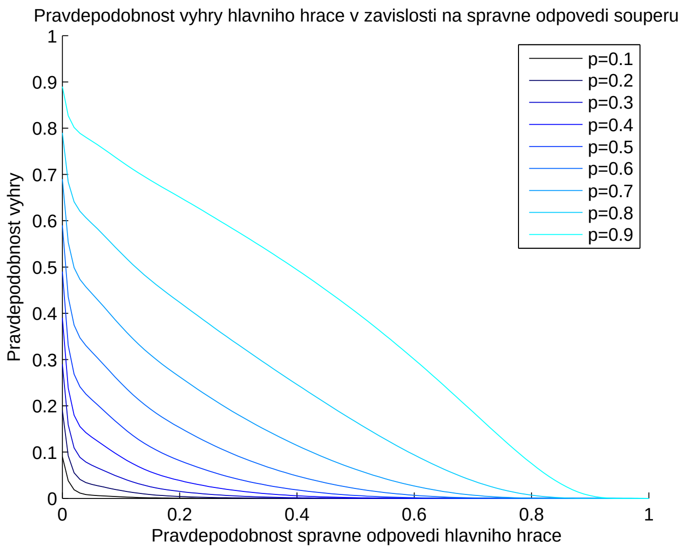
(4.11) reprezentuje opět mocninnou řadu a při derivování mocninné řady se zachovává poloměr konvergence, můžeme tedy opět derivovat po členech.

Druhá derivace výrazu (4.10) je

$$P'' = \cdot \sum_{i=1}^{\infty} -100iq^{i-2}(1-q^i)^{98}(100iq^i - q^i - i + 1)c_i, \qquad c \in (0,1).$$

Konvexnost a konkávnost nelze tímto způsobem určit, jelikož nulový bod pro výraz $(100iq^i - q^i - i + 1)$ závisí na i a těžko určíme, pro které hodnoty bude funkce konvexní a pro které konkávní.

Na obrázku 4.2 je zobrazena závislost pravděpodobnosti výhry hlavního hráče na správné odpovědi soupeřů.



Obrázek 4.2: Průběh pravděpodobnosti v závislosti na správné odpovědi soupeřů

5 Simulace

Poslední částí této bakalářské práce je simulace hry 1 proti 100 v programu MATLAB. Jedná se o programovou simulaci televizní vědomostní soutěže 1 proti 100.

Program náhodně generuje správné a chybné odpovědi hlavního hráče a soupeřů, na základě vstupních parametrů simuluje výsledek hry a vypočítává odhad pravděpodobnost výhry hlavního hráče nad soupeři. Vstupními parametry této simulace jsou pouze pravděpodobnosti správných odpovědí hlavního hráče a soupeřů, tedy proměnné p a q.

V simulaci nejprve náhodně vygenerujeme správné a špatné odpovědi všech hráču vystupujících ve hře 1 proti 100. Dále zaznamenáme počet soupeřů, kteří odpověděli špatně, ti automaticky vypadávají ze hry, a vypočítáme výši finanční odměny pro hlavního hráče. Simulace probíhá do té doby, dokud hlavní hráč neodpoví špatně, nebo dokud nevypadnou všichni jeho soupeři.

Odpovědi hlavního hráče a soupeřů vygenerujeme pomocí funkce $rand(1)$. Funkce $rand(1)$ generuje náhodné číslo s rovnoměrným rozdělením na intervalu (0,1). Na základě vstupních paramatrů určíme, zda-li odpověděl hlavní hráč a soupeři správně nebo chybně. Pokud je vygenerovaná hodnota pomocí funkce $rand(1)$ menší než pravděpodobnost správné odpovědi, je vytvořena hodnota 1, tedy správná odpověď. V opačném případě je vytvořena hodnota 0, tedy špatná odpověď.

Simulaci necháme proběhnout celkem 10 000krát a z těchto 10 000 pozorování vypočítáme pravděpodobnost výhry hlavního hráče nad soupeři ve tvaru

$$P = \frac{n}{10000},$$

kde n je počet simulací. kdy hlavní hráč ve hře zvítězil.

V následujících tabulkách 5.1 a 5.2 jsou zobrazeny data získaná analyticky pomocí modelů výpočtu a data získaná ze simulace.

Jak je z tabulek vidět, data získaná ze simulace se liší maximálně o 0,5 procentního bodů, než data získaná analyticky. Data získaná pomocí simulace jsou tedy celkem přesná ve srovnání s analyticky získanými hodnotami.

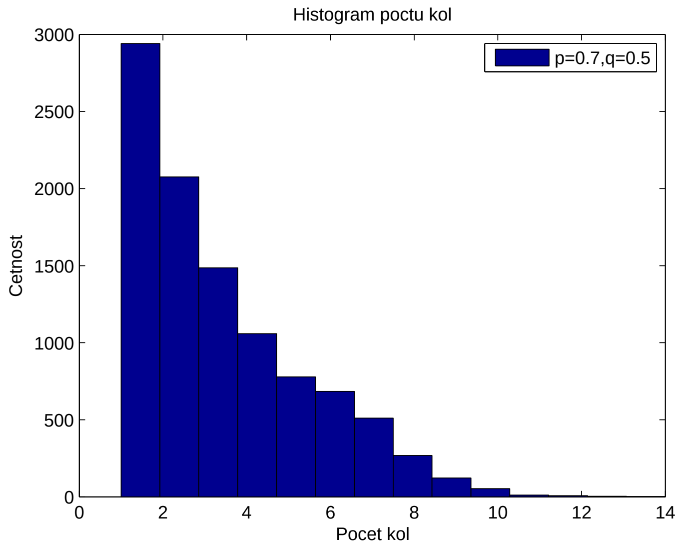
p/q	10 %	20 %	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %
10 %	0,42 %	0,06 %	0,01 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
20 %	1,91 %	0,48 %	0,13 %	0,02 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
30 %	4,82 %	1,67 %	0,58 %	0,16 %	0,03 %	0 %	0 %	0 %	0 %
40 %	9,53 %	4,19 %	0,65 %	0,17 %	0,03 %	0 %	0 %	0 %	0 %
50 %	16,45 %	8,74 %	4,51 %	2,03 %	0,71 %	0,17 %	0,02 %	0 %	0 %
60 %	25,99 %	16,19 %	9,80 %	5,32 %	2,39 %	0,78 %	0,13 %	0,01 %	0 %
70 %	38,62 %	27,62 %	19,26 %	12,4 %	6,95 %	3,05 %	0,83 %	0,08 %	0 %
80 %	54,82 %	44,30 %	35,16 %	26,47 %	18,16 %	10,59 %	4,48 %	0,89 %	0,01 %
90 %	75,10 %	67,81 %	60,64 %	53,02 %	43,91 %	33,61 %	21,83 %	9,52 %	0,94 %

Tabulka 5.1: Analyticky získané hodnoty pravděpodobností

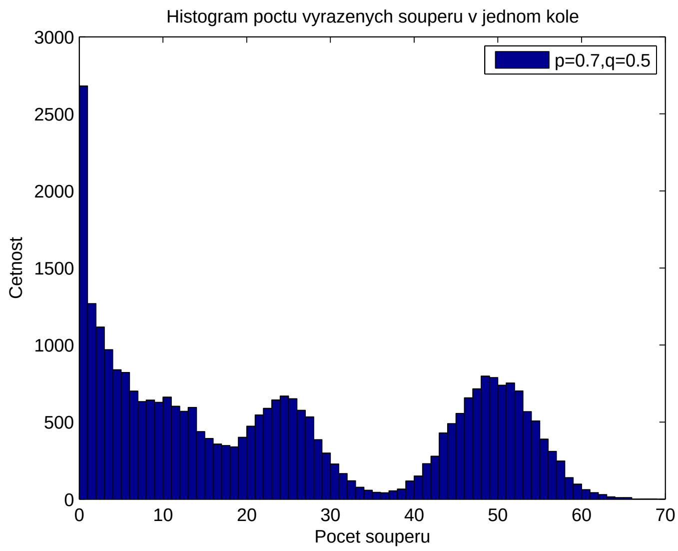
p/q	10 %	20 %	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %
10 %	0,58 %	0,51 %	0,01 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %	0 %
20 %	2,00 %	0,43 %	0,15 %	0,03 %	0,01 %	0 %	0 %	0 %	0 %
30 %	4,88 %	1,84 %	0,48 %	0,2 %	0,04 %	0 %	0 %	0 %	0 %
40 %	9,54 %	3,92 %	1,49 %	0,74 %	0,14 %	0,04 %	0 %	0 %	0 %
50 %	16,20 %	8,51 %	4,69 %	2,04 %	0,58 %	0,12 %	0 %	0 %	0 %
60 %	25,81 %	16,17 %	10,24 %	4,99 %	2,16 %	0,72 %	0,09 %	0 %	0 %
70 %	38,52 %	27,50 %	18,77 %	12,53 %	6,74 %	3,00 %	0,81 %	0,08 %	0 %
80 %	54,40 %	44,23 %	35,11 %	26,11 %	18,10 %	10,25 %	4,10 %	0,97 %	0,01 %
90 %	75,42 %	67,80 %	60,5 %	53,49 %	44,22 %	33,03 %	21,89 %	9,36 %	0,98 %

Tabulka 5.2: Hodnoty pravděpodobností získané pomocí simulace

Dále jsme ze zaznamenaných dat pro zajímavost vytvořili 2 histogramy pro zvolené vstupní parametry. Na oprázku 5.1 je zobrazen histogram počtu kol v jednotlivých simulacích a na obrázku 5.2 je zobrazen histogram počtu vyřazených soupeřů v jednom kole.



Obrázek 5.1: Histogram počtu kol



Obrázek 5.2: Histogram počtu vyřazených soupeřů v jednom kole

6 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo zkoumat pravděpodobnost vítězství hlavního hráče ve hře 1 proti 100 a provést simulaci této hry. K výpočtu této pravděpodobnosti byly využity tři modely výpočtu: model absorpčního stavu Markovského řetězce, model rozkladu podle délky hry a model podle okamžiku první chybné odpovědi hlavního hráče.

Jako první metoda byla zvolena metoda rozklad podle délky hry. V tomto modelu jsme hru vyjádřili tak, že hlavní hráč odpovídal na všechny zadané otázky správně a alespoň jeden jeho soupeř s ním postoupil do posledního kola, kde odpověděl chybně. Výsledný tvar funkce získaný pomocí tohoto modelu je velmi složitý a velmi těžko jsme z něj něco vyčetli. Tento tvar jsme museli aproximovat a vyjádřit hodnoty numericky pro představu výsledku.

Druhým modelem byl zvolen přístup výpočtu podle první chybné odpovědi hráče. V tomto modelu hra probíhala tak, že hlavní hráč odpověděl chybně na otázku později než všichni jeho soupeři a on zvítězil. Tento model dává nejlepší výsledek, jelikož tvar funkce jsme mohli explicitně sečíst a získali jsme konečnou sumu oproti předchozímu modelu, kde byl tvar funkce vypočítán pomocí dvou nekonečných součtů.

Třetím a posledním modelem byl model absorpčního stavu Markovského řetězce. Průběh hry jsme modelovali pomocí markovského řetězcem s množinou stavů, které reprezentovali počty žijících soupeřů, kromě posledního stavu který reprezentoval prohru hlavního hráče. V tomto modelu nás zajímala absorpce ze stavu, který představoval počátek hry, tedy všech 100 soupeřů a hlavní hráč byli ve hře, do stavu, kde žil pouze hlavní hráč. V tomto modelu jsme získali soustavu sta rovnic, jejichž explicitní vyjádření bylo velmi náročné. Opět jsme tedy výsledek vyjádřili numericky, pomocí softwaru MATLAB.

Dále jsme shrnuli výsledky jednotlivých metod a vykreslili různé grafy pravděpodobnosti výhry hlavního hráče nad soupeři ve hře 1 proti 100. Jak již bylo zmíněno, nejelegantnější tvar funkce jsme získali pomocí modelu podle první chybné odpovědi hráče.

Čtvrtá kapitola byla věnována vyšetřování průběhu pravděpodobnosti, kdy jsme vyšetřili monotonii a konvexnost a konkávnost funkce představující pravděpodobnost výhry hlavního hráče ve hře 1 proti 100. K vyšetření průběhu byly použity tvary funkcí získaných v prvních dvou modelech.

Poslední kapitola byla věnována simulaci hry 1 proti 100 v softwaru MATLAB. V této kapitole byl popsán program, kterým byla simulace provedena a porovnány výsledky získané analyticky a výsledky získané pomocí simulační studie. Hodnoty získané pomocí simulace se téměř shodovaly s analyticky získanými hodnotami.

Pokud shrneme výsledky této bakalářské práce, podařilo se nám získat představu o tom, jakou má hráč v konkrétní televizní vědomostní soutěži 1 proti 100 pravděpodobnost výhry. Jelikož jsme zanedbali všechny výhody hlavního hráče v této hře, pravděpodonost výhry by měla být ve skutečnosti větší, než jsme vypočítali.

Literatura

[1] *Reif J., Kobeda Z.:* **Úvod do pravděpodobnosti a spolehlivosti**
Nakladatelství Západočeské univerzity, Plzeň 2000

[2] *Mandl P.:* **Pravděpodobnostní dynamické modely**
Nakladatelství Academia, Praha 1985

[3] *Prášková Z., Lachout P.:* **Základy náhodných procesů**
Nakladatelství Karolinum, Praha 2001