Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

# BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Metody s vysokým rozlišením pro řešení transportních problémů
a problémů se zákony zachování

**Plzeň, 2013**

**Vypracoval: Jan Šourek**
**Vedoucí práce: Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.**

# Zadání bakalářské práce

V tištěné podobě práce je místo tohoto listu vložen originál zadání.

**Zásady pro vypracování:**

1. Prostudovat doporučenou literaturu.
2. Analyzovat v současnosti užívané přístupy v této oblasti.
3. Vybrat, implementovat a analyzovat algoritmy vhodné pro paralelní architektury.
4. Realizovat numerické experimenty (např. pro Saint-Venantovy rovnice, transportní a advekční problémy).

**Seznam odborné literatury:**


- LeVeque, R. J.: Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge Texts in Applied Mathematics 31 (2004)
- Toro, E. F., Titarev, V. A.: MUSTA Schemes for Systems of Conservation Laws. Preprint http://www.newton.ac.uk/preprints/NI04033.pdf
- Wang, Z. J., Spectral (Finite) Volume Method for Conservation Laws on Unstructured Grids: Basic Formulation, J. Computational Physics, Vol. 178, pp. 210-251 (2002).
- Shu, C. W.: Essentially Non-Oscillatory and Weighted Non-Oscillatory Schemes for Hyperbolic Conservation Laws, ICASE Report No. 97-65, Langley Research Center (1997).

# Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem zadanou bakalářskou práci zpracoval sám s přispěním vedoucího práce a používal jsem pouze literaturu v práci uvedenou. Dále prohlašuji, že nemám námitek proti půjčování nebo zveřejňování mé bakalářské práce nebo její části se souhlasem katedry.

Datum: 24. 5. 2013
Jan Šourek

# Poděkování

Děkuji vedoucímu práce panu docentovi Markovi Brandnerovi za veškerou dosavadní spolupráci, přátelský přístup a připomínky a rady při řešení mé bakalářské práce.

# Metody s vysokým rozlišením pro řešení transportních problémů a problémů se zákony zachování

**Anotace:** Tato bakalářská práce se zaměřuje na numerické metody pro řešení homogenních nelineárních parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu v jedné prostorové dimenzi, a to jak skalárních rovnic, tak jejich soustav. Tyto rovnice se objevují v modelech proudění se zákony zachování. V práci je představeno několik základních schémat a dále některé vybrané moderní metody s vysokým rozlišením (metoda MUSTA, metoda ENO a metoda spektrálních objemů). Metody jsou porovnány z hlediska výpočetní složitosti, paralelizovatelnosti a přesnosti numerického řešení při různých experimentech, kterými jsou úloha pro advekční rovnici s periodickým hladkým řešením, Riemannův problém pro rovnici dopravního proudu a Burgersovu rovnici a úloha protržení přehrady pro Saint-Venantovy rovnice.

**Klíčová slova:** Metody s vysokým rozlišením, metoda spektrálních objemů, ENO, MUSTA, Saint-Venantovy rovnice, dopravní proud, Burgersova rovnice, advekční rovnice, Riemannův problém.

# High-resolution methods for transport problems and conservation laws

**Summary:** This bachelor thesis is focused on numerical methods for solving nonlinear homogeneous partial differential equations of hyperbolic type in one space dimension, for both scalar equations and their systems. These equations arise in transport models with conservation laws. Several basic schemes and few modern high-resolution methods (MUSTA scheme, ENO scheme and Spectral Volume Method) are presented and compared in terms of computational complexity, parallelizability and accuracy of numerical solution in various numerical experiments like an advection equation problem with periodical smooth solution, the Riemann problem for the traffic flow and Burgers' equation and the dam-break problem for Saint-Venant equations.

**Keywords:** High-resolution methods, spectral volume method, ENO scheme, MUSTA, Saint-Venant equations, traffic flow, Burgers' equation, advection equation, Riemann problem.

# Obsah


**1 Úvod** **1**

**2 Modely proudění se zákony zachování** **3**

2.1 Klasifikace rovnic a řešení . . . . . 3

2.2 Skalární lineární rovnice . . . . . 6

2.2.1 Advekční rovnice . . . . . 6

2.3 Skalární nelineární rovnice . . . . . 8

2.3.1 Rovnice dopravního proudu . . . . . 8

2.3.2 Burgersova rovnice . . . . . 9

2.3.3 Charakteristiky a rázové vlny . . . . . 9

2.3.4 Riemannův problém . . . . . 10

2.3.5 Rovnice s nekonvexní tokovou funkcí . . . . . 12

2.4 Soustava nelineárních rovnic . . . . . 12

2.4.1 Saint-Venantovy rovnice . . . . . 12

2.4.2 Rankineův-Hugoniotův vztah a Riemannův problém . . . . . 14

**3 Metoda konečných objemů** **15**

3.1 Vlastnosti metod . . . . . 15

3.1.1 Diskretizace . . . . . 15

3.1.2 Tvar numerických metod . . . . . 16

3.1.3 Rekonstrukce řešení . . . . . 17

3.1.4 Konvergence metod a CFL podmínka . . . . . 17

3.1.5 Řád metody . . . . . 19

3.1.6 TVD a TVB metody . . . . . 19

3.2 Základní metody . . . . . 20

3.2.1 Laxova-Friedrichsova metoda . . . . . 20

3.2.2 Lokální Laxova-Friedrichsova metoda . . . 21
3.2.3 Engquistova-Osherova metoda . . . 21
3.2.4 Godunovova metoda . . . 21
3.2.5 Roeova metoda . . . 22
3.2.6 HLL metoda (Hartenova-Laxova-Leerova) . . . 24
3.2.7 Metoda Flux Vector Splitting . . . 25
3.2.8 Laxova-Wendroffova metoda . . . 25
3.3 Metody s vysokým rozlišením . . . 26
3.3.1 Metody druhého řádu s TVD limitery . . . 26
3.3.2 MUSTA . . . 28
3.3.3 Metoda ENO . . . 30
3.3.4 Metoda spektrálních objemů . . . 34
3.4 Srovnání metod s vysokým rozlišením . . . 38
3.4.1 Výpočetní náročnost . . . 38
3.4.2 Paralelizovatelnost . . . 38

**4 Úlohy a numerické experimenty 40**
4.1 Poznámky k experimentům . . . 40
4.1.1 Přesné entropické řešení a chyba přibližného řešení . . . 40
4.1.2 Volba $\Delta t/\Delta x$ a určení CFL čísla . . . 41
4.1.3 Výpočetní náročnost . . . 41
4.2 Advekční rovnice - hladké řešení . . . 42
4.3 Rovnice dopravního proudu - vlna zředění . . . 48
4.4 Burgersova rovnice - rázová vlna . . . 54
4.5 Saint-Venantovy rovnice - protržení přehrady . . . 60
4.6 Shrnutí výsledků . . . 66

**5 Závěr 67**

**Seznam obrázků 68**

**Literatura 69**

# Kapitola 1

# Úvod

Matematické modely proudění se využívají v mnoha oblastech lidského působení, ať už se jedná například o modelování proudění páry v potrubí jaderného reaktoru nebo vodní hladiny v řekách při povodních. V těchto modelech se vyskytují parciální diferenciální rovnice hyperbolického typu, jež jsou obvykle složité a prakticky není možné je řešit jinak než pomocí numerických metod.

Pomocí těchto numerických metod nejsme obecně schopni řešit úlohu přesně tak, aby numerické řešení dokonale odpovídalo analytickému řešení. Ovšem už ani samotná úloha není přesným popisem skutečnosti. Úloha je nedokonalou aproximací fyzikální reality a není nutné vyžadovat vždy přesné analytické řešení této úlohy - stejně by realitě neodpovídalo. Vystačíme si s řešením přibližným. Některá numerická řešení mohou být realitě dokonce i bližší než analytické řešení. Příkladem může být, když některé rovnice zanedbávají viskozitu kapalin a plynů, zatímco numerické výpočty většinou vytvářejí při řešení úloh takzvanou „numerickou viskozitu“, čímž mohou realitu vystihovat lépe než analytické řešení úlohy.

Zejména u některých aplikací je nutná vysoká rychlost našich výpočtů, jako například u modelování počasí nebo hladiny říčních toků. Je nutné zvolit takovou numerickou metodu, která je uspokojivá svou přesností i rychlostí pro potřeby konkrétní aplikace. Naopak pokud budeme provádět bezpečnostní výpočty, budeme pravděpodobně vyžadovat především velmi vysokou přesnost i za cenu případné nižší rychlosti. Nelze tak obecně říci, která metoda je dobrá a která špatná. Jak metody jednoduché, rychlé, ale méně přesné, tak metody složitější, pomalé a přesné nacházejí své uplatnění.

Se zvyšujícím se výpočetním výkonem současných počítačů je možné využívat i lepší numerické metody. K rozvoji numerických metod dochází právě zejména v posledních dese-

tiletích. Zjednodušeně řečeno, metody, které poskytují přesnější řešení než metody základní, se nazývají metody s vysokým rozlišením.

Pro urychlení výpočtu lze také využít více výpočetních jednotek zároveň. Efektivní paralelizovatelnost metody nese určitou výhodu, jelikož výpočet může být prováděn na větším množství počítačů zároveň nebo využívat jejich nevyužitý výpočetní výkon při nečinnosti. V práci se zaměříme mj. na takzvanou metodu spektrálních objemů, která je poměrně nová a zdá se být dobře paralelizovatelná, na rozdíl od často užívaných metod ENO a WENO.

Nejprve uvedeme obecný transportní model vycházející ze zákona zachování jisté veličiny. Pak představíme konkrétní jednoduché modely transportních problémů, které budeme využívat pro testování numerických metod. Následně popíšeme numerické metody a jejich schémata a nakonec s nimi provedeme numerické experimenty a zhodnotíme jejich výsledky.

Práce si klade za cíl porovnat právě tyto metody, od jednoduchých základních po vybrané složitější moderní metody, představit jejich výhody a nevýhody a být tak přehledem při výběru vhodné metody pro jednotlivé aplikace.

# Kapitola 2

# Modely proudění se zákony zachování

## 2.1 Klasifikace rovnic a řešení

Budeme se zabývat jednodimenzionálními modely proudění se zákony zachování popsanými v diferenciálním tvaru pomocí hyperbolických parciálních diferenciálních rovnic. Teoretické poznatky jsou popsány například v [1].

Nejprve uveďme skalární parciální diferenciální rovnici ve tvaru

$$q_t(x,t) + f_x(q(x,t)) = 0, \tag{2.1}$$

kde dle fyzikálního významu $x$ značí prostorovou proměnnou, $t$ označuje časovou proměnnou, $q = q(x,t)$ je námi hledaná skalární veličina, $q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a $f = f(q)$ je tokové funkce, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$, kterou při řešení konkrétního problému známe a u které budeme většinou předpokládat, že je konvexní, nebo konkávní. Tokové funkce $f(q)$ může být ve své proměnné $q$ jak lineární u jednoduchých problémů, tak nelineární. Rovnice se pak nazývá lineární, respektive nelineární. V práci nebudeme uvažovat problémy, ve kterých je tokové funkce explicitně funkcí místa $x$ nebo času $t$. Rovnost ve tvaru (2.1) vyjadřuje zákon zachování veličiny $q$ v diferenciálním tvaru.

Dále obecněji uvažujme soustavu $m$ parciálních diferenciálních rovnic

$$\mathbf{q}_t(x,t) + \mathbf{f}_x(\mathbf{q}(x,t)) = 0, \tag{2.2}$$

kde námi hledaná veličina $\mathbf{q} = \mathbf{q}(x,t)$ je vektorová, $\mathbf{q} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Každá složka $\mathbf{q}$ vyjadřuje množství nějaké veličiny splňující zákon zachování. Tokové funkce je $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{q})$, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ a $\mathbf{f} \in [C^1]^m$. Každá složka $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ vyjadřuje tok příslušné složky veličiny $\mathbf{q}$.

Pokud je funkce $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ lineární funkcí své proměnné $\mathbf{q}$, a tedy ji lze zapsat jako $\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{q}$, kde $\mathbf{A}$ je konstantní reálná matice velikosti $m \times m$, jedná se o lineární soustavu parciálních diferenciální rovnic. Pro nelineární funkci $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ se jedná o nelineární soustavu parciálních diferenciálních rovnic. Pro $m = 1$ dostáváme skalární rovnici (2.1).

Pokud jsou funkce $q(x,t)$, popřípadě $\mathbf{q}(x,t)$, hladké, můžeme skalární rovnici (2.1) nebo soustavu (2.2) zapsat v takzvaném *kvazilineárním tvaru*, a to

$$q_t + f'(q)q_x = 0 \tag{2.3}$$

pro skalární rovnici, přičemž $f'(q)$ vyjadřuje klasickou derivace funkce $f(q)$, a obecněji

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}\,'(\mathbf{q})\mathbf{q} = 0, \tag{2.4}$$

pro soustavu rovnic, kde $\mathbf{f}\,'(\mathbf{q})$ vyjadřuje Jacobiho matici funkce $\mathbf{f}(\mathbf{q})$. U lineárních rovnic přechází $f'(q)$ na reálnou konstantu $a$ a Jacobiho matice $\mathbf{f}\,'(\mathbf{q})$ se stává konstantní reálnou maticí $\mathbf{A}$.

Soustavu rovnic (2.2) označíme jako *hyperbolickou*, pokud splňuje jisté podmínky obsažené v následující definici. Definici v tomto znění nalezneme v literatuře [6].

**Definice 1.** *Jako* **slabě hyperbolickou** *označíme soustavu parciálních diferenciálních rovnic (2.2), pokud má Jacobiho matice* $\boldsymbol{f}\,'(\boldsymbol{q}_0)$ *reálná vlastní čísla pro všechny fyzikálně přípustné hodnoty* $\boldsymbol{q}_0 \in \mathbb{R}^m$.

*Jako* **silně hyperbolickou** *označíme soustavu parciálních diferenciálních rovnic (2.2), pokud je Jacobiho matice* $\boldsymbol{f}\,'(\boldsymbol{q}_0)$ *diagonalizovatelná a má reálná vlastní čísla pro všechny fyzikálně přípustné hodnoty* $\boldsymbol{q}_0 \in \mathbb{R}^m$.

*Jako* **ryze hyperbolickou** *označíme soustavu parciálních diferenciálních rovnic (2.2), pokud je Jacobiho matice* $\boldsymbol{f}\,'(\boldsymbol{q}_0)$ *diagonalizovatelná a má navzájem různá reálná vlastní čísla pro všechny fyzikálně přípustné hodnoty* $\boldsymbol{q}_0 \in \mathbb{R}^m$.

V integrálním tvaru má zákon zachování veličiny $q$ tvar

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} q(x,t)dx = f(q(x_1,t)) - f(q(x_2,t)) \tag{2.5}$$

a jeho integrací v čase přes interval $\langle 0,T\rangle$ dostáváme na obdélníku $\langle x_1,x_2\rangle \times \langle 0,T\rangle$ integrální

bilanční vztah

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x,T)dx - \int_{x_1}^{x_2} q(x,0)dx = \int_0^T f(q(x_1,t))dt - \int_0^T f(q(x_2,t))dt, \tag{2.6}$$

přičemž pokud je veličina $q$ vektorová s více než jednou složkou, provádíme integraci po jednotlivých složkách. Z tohoto tvaru lze jednodušeji odvodit tvary některých numerických metod. Diferenciální tvar se odvodí z integrálního bilančního vztahu za předpokladu, že jsou funkce $q(x,t)$ a $f(q)$ hladké. Pokud hladké nejsou, nelze všude popsat problém zákonem zachování v diferenciálním tvaru, avšak integrální bilanční vztah stále platí. Proto je integrální bilanční vztah obecnější a numerické metody z něj odvozené fungují i při nespojitostech ve funkcích v oblastech, kde nelze problém popsat v diferenciálním tvaru.

V této části budeme dále pracovat s počáteční úlohou se skalární rovnicí ve tvaru

$$q_t(x,t) + f_x(q(x,t)) = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in (0,\infty), \tag{2.7}$$

$$q(x,0) = \tilde{q}(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

V praxi většinou úlohu neřešíme pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a $t \in (0,\infty)$, ale pouze na omezených intervalech $x \in \langle x_1, x_2\rangle$ a $t \in (0,T\rangle$. Počáteční podmínku definovanou na intervalu $(x_1,x_2)$ doplňujeme pak o okrajové podmínky $q(x_1,t)$ a $q(x_2,t)$ pro $t \in \langle 0,T\rangle$. Taková úloha se nazývá počátečně-okrajová.

Zadefinujme si nyní některé druhy řešení této úlohy. Nejprve uvedeme takzvané *klasické řešení*. Následující definici nalezneme v [6].

**Definice 2** (klasické řešení)**.** *Jako* **klasické řešení** *počáteční úlohy (2.7), (2.8) označujeme takovou funkci $q(x,t)$, která je spojitá na $\mathbb{R}\times\langle 0,\infty)$, má spojité derivace podle obou svých proměnných na $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, splňuje rovnost (2.7) ve všech bodech $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ a pro $t=0$ splňuje počáteční podmínku (2.8).*

U počátečních úloh s nelineárními rovnicemi může nastat situace, kdy se i přes původně spojitou nebo hladkou počáteční podmínku v řešení objeví nespojitosti. Je třeba si uvědomit, že v bodech, ve kterých funkce $q(x,t)$ není hladká, nemá rovnost v diferenciálním tvaru (2.1) smysl, zatímco obecnější integrální bilanční vztah (2.6) si i přes nehladkou funkci $q(x,t)$ svůj smysl zachovává. Chceme-li tak zobecnit pojem řešení i pro nehladké funkce $q(x,t)$, požadujeme, aby byla integrální rovnost zachována pro libovolnou volbu $T$, $x_1$ a $x_2$. S tímto požadavkem se ale v další matematické teorii pracuje obtížně. Proto se pro zobecnění pojmu řešení využívá jiná integrální formulace problému, která nás vede

k definici takzvaného *slabého řešení*. Definici uvedeme ve tvaru, který nalezneme v [2].

**Definice 3** (slabé řešení)**.** *Omezenou funkci* $q(x,t)$ *nazveme* **slabým řešením** *počáteční úlohy (2.7), (2.8), pokud je splněna rovnost*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left[q\phi_t + f(q)\phi_x\right]\, dx\, dt + \int_{-\infty}^\infty \tilde{q}(x)\phi(x,0)\, dx = 0 \tag{2.9}$$

*pro všechny funkce* $\phi(x,t)$ *ze třídy* $C_0^1(\mathbb{R}\times\langle 0,\infty))$.

Třída $C_0^1$ je třídou funkcí, které jsou spojitě diferencovatelné a pro které platí, že uzávěr množiny, na které je funkce nenulová, je kompaktní. Parciální derivace ve výrazu (2.9) jsou u funkce $\phi$, a výraz tak dává smysl i pro nespojitosti ve funkci $q(x,t)$.

Ukazuje se, že definice slabého řešení je v souladu s fyzikální představou problému. Lze dokázat, že množina klasických řešení počáteční úlohy (2.7), (2.8) je shodná s množinou hladkých slabých řešení této úlohy. Dále platí, že slabé řešení spojité na obdélníku $\langle x_1, x_2\rangle \times \langle 0, T\rangle$ splňuje na tomto obdélníku i integrální bilanční vztah (2.6). Ještě obecněji platí, že integrální bilanční vztah splňují i slabá řešení z množiny po částech spojitých funkcí s nespojitostmi ležícími na konečném počtu hladkých křivek v rovině $xt$ protínajících obdélník $\langle x_1, x_2\rangle \times \langle 0, T\rangle$. Přesné předpoklady a znění všech tvrzení lze nalézt v [2]. Z definice slabého řešení i integrálního bilančního vztahu (2.6) dále vyplývá důležitý důsledek, kterým je *Rankineův-Hugoniotův vztah*, který později uvedeme.

Bohužel neplatí, že by slabé řešení existovalo vždy právě jedno, což fyzikální realitě odporuje, neboť pro danou počáteční podmínku očekáváme jednoznačné následné chování tekutiny. To vychází už z faktu, že náš model není dokonalým modelem reality. Do rovnice (2.1) bychom museli doplnit vazký člen, výsledná rovnice by pak byla parabolického typu a měla by právě jedno řešení. Abychom uvažovali u naší úlohy pouze fyzikálně přípustné slabé řešení, zavádí se dále takzvané *entropické podmínky*. Takové fyzikálně přípustné řešení budeme nazývat *entropické řešení*. Podrobný rozbor problému lze nalézt v literatuře [1] a [2].

## 2.2 Skalární lineární rovnice

### 2.2.1 Advekční rovnice

Skalární lineární parciální diferenciální rovnice hyperbolického typu se nazývá *advekční* rovnice a reprezentuje jednoduchý model proudění, kdy je látka přenášena konstantní rych-

lostí nezávislou na místě a čase. Skalární veličina $q$ může například vyjadřovat hustotu nějaké látky v kapalině proudící neměnnou rychlostí $\overline{u}$, přičemž tato látka neovlivňuje samotné proudění kapaliny a zanedbáváme difúzní efekt. Poznatky uvedené v této podkapitole vycházejí z literatury [1].

Advekční rovnice má tvar

$$q_t + \overline{u} q_x = 0. \tag{2.10}$$

Tvar tokové funkce vychází z toho, že rychlost proudění $\overline{u}$ je konstantní, a tok látky se tak vyjádří jako $f(q) = \overline{u}q$. Tato toková funkce je lineární funkcí $q$, z čehož plynou značná zjednodušení pro řešení rovnice.

Analytické řešení rovnice lze vyjádřit jako

$$q(x,t) = \breve{q}(x - \overline{u}t),$$

kde $\breve{q}$ je libovolná hladká funkce. Funkce $q(x,t)$ je tak konstantní podél všech přímek v rovině $xt$, pro které platí $x - \overline{u}t = konstanta$. Například podél přímky $(X(t),t) = (x_0 + \overline{u}t, t)$ je hodnota $q(X(t),t)$ rovna hodnotě $q(x_0,0) = \breve{q}(x_0)$ . Jedná se o takzvané *charakteristiky rovnice*. Hodnoty funkce $\breve{q}(x)$ jsou jednoduše přenášeny konstantní rychlostí ve směru osy $x$.

Máme-li počáteční úlohu pro advekční rovnici (2.10) s počáteční podmínkou $\tilde{q}(x)$ zadanou v čase $t = 0$ definovanou pro $-\infty < x < \infty$, pak máme řešení úlohy $q(x,t)$ jednoznačně určené pro všechna $t > 0$ a $x \in \mathbb{R}$ jako

$$q(x,t) = \tilde{q}(x - \overline{u}t).$$

Pokud je počáteční podmínka v čase $t = 0$ zadána v prostorové proměnné $x$ pouze na omezeném intervalu $(x_1, x_2)$, budeme k jednoznačnému určení řešení potřebovat ještě jednu okrajovou podmínku. Pokud je rychlost proudění $\overline{u} > 0$, potom látka teče ve směru osy $x$ a musíme specifikovat okrajovou podmínku v bodě $x_1$ (respektive pro $\overline{u} < 0$ v bodě $x_2$), tedy potřebujeme pak mít zadánu okrajovou podmínku

$$q(x_1,t) = g_0(t) \quad \text{pro } t \geq 0,$$

respektive

$$q(x_2,t) = g_0(t) \quad \text{pro } t \geq 0,$$

společně s počáteční podmínkou

$$q(x,0) = \hat{q}(x) \quad \text{pro } x_1 < x < x_2.$$

## 2.3 Skalární nelineární rovnice

Zabývejme se nyní teorií skalárních nelineárních rovnic. Teorii lze nalézt mj. v [1], [2] a [6].

### 2.3.1 Rovnice dopravního proudu

*Rovnice dopravního proudu* je často využívaným příkladem skalární nelineární parciální diferenciální rovnice hyperbolického typu. Lze na ní dobře demonstrovat jevy související s nelinearitou tokové funkce.

Uvažujme tok aut na jednosměrné silnici s jedním dopravním pruhem. Vynecháme možnosti předjíždění a srážek aut. Veličina $q$ bude udávat hustotu aut na silnici, a to tak, že hodnota 1 bude značit úplně plnou silnici, kde auta jsou přímo za sebou (můžeme si představit, že se téměř dotýkají nárazníky), a hodnota 0 bude značit prázdnou silnici bez aut. Zároveň uvažujme, že velikost auta je zanedbatelně malá, jako bychom silnici pozorovali z veliké dálky.

V našem modelu rychlost auta řidič přizpůsobí pouze hustotě provozu, a to tak, aby při nulové hustotě provozu (prázdné silnici) jelo auto maximální možnou rychlostí $u_m$ a při plně zaplněné silnici auto stálo. Tedy zavedeme-li pro rychlost aut funkci $u(q)$, bude nejjednodušeji našim požadavkům vyhovovat vztah

$$u(q) = u_m(1-q) \quad \text{pro } 0 \leq q \leq 1.$$

Toková funkce se vyjádří jako $f(q) = qu(q)$, a tedy po dosazení za rychlost dostáváme tvar tokové funkce

$$f(q) = u_m q(1-q). \tag{2.11}$$

Tato nelineární toková funkce je konkávní. Všimněme si, že maximálního toku aut dosáhneme při hodnotě $q = 1/2$.

Po dosazení tokové funkce do (2.1) rovnici dopravního proudu zapíšeme jako

$$q_t + (u_m q(1-q))_x = 0. \tag{2.12}$$

V kvazilineárním tvaru ji vyjáříme jako

$$q_t + (u_m(1-2q))\, q_x = 0. \tag{2.13}$$

### 2.3.2 Burgersova rovnice

*Burgersova rovnice* je další často využívaný příklad nelineární skalární rovnice. Rovnice nepopisuje konkrétní fyzikální jev, svou jednoduchostí ale dobře slouží pro ukázku chování nelineárních modelů. Rovnice má tvar

$$q_t + \left(\frac{1}{2}q^2\right)_x = 0. \tag{2.14}$$

Toková funkce $f(q) = \frac{1}{2}q^2$ je konvexní. V kvazilineárním tvaru rovnici zapíšeme jako

$$q_t + qq_x = 0. \tag{2.15}$$

### 2.3.3 Charakteristiky a rázové vlny

Uvažujme rovnici (2.1) a křivky $(X(t), t)$ v rovině $xt$. Pokud jsou funkce $X(t)$ a řešení rovnice $q(x,t)$ hladké, platí pro derivaci hodnoty veličiny $q$ na těchto křivkách vztah

$$\frac{d}{dt}q(X(t),t) = X'(t)q_x + q_t. \tag{2.16}$$

Vyjádříme-li funkci $X(t)$ obyčejnou diferenciální rovnicí

$$X'(t) = f'(q(X(t),t)), \tag{2.17}$$

dostáváme pro derivaci hodnoty veličiny $q$ na křivkách

$$\frac{d}{dt}q(X(t),t) = X'(t)q_x + q_t = q_t + f'(q(X(t),t))q_x = 0, \tag{2.18}$$

jelikož rovnice (2.1) je splněna v každém bodě hladkého řešení, a tedy i na těchto křivkách. Na každé jednotlivé takové křivce tedy platí, že hodnota veličiny $q = q(X(t),t)$ je konstantní, a proto i $X'(t) = f'(q(X(t),t))$ je konstantní a se musí jednat o přímky. Tyto přímky se nazývají *charakteristiky rovnice*. Struktura charakteristik je dána počáteční podmínkou $q(x,0)$. Může docházet k tomu, že charakteristiky se protínají - v těchto bodech

přestává být řešení hladké a dochází ke vzniku nespojitosti, takzvané *rázové vlny*.

Nespojitost v řešení se v prostoru posouvá časově proměnnou rychlostí $s(t)$. Lze odvodit, že pro tuto rychlost platí vztah

$$s(t)(q_r - q_l) = f(q_r) - f(q_l), \tag{2.19}$$

kde hodnoty $q_r$ a $q_l$ vyjadřují hodnoty funkce $q$ zleva a zprava v prostorové proměnné $x$ v bodě nespojitosti v časové hladině $t$. Tato rovnost (2.19) se nazývá *Rankineův-Hugoniotův vztah* a přímo z něj můžeme odvodit vztah pro rychlost vlny

$$s(t) = \frac{f(q_r) - f(q_l)}{q_r - q_l}. \tag{2.20}$$

### 2.3.4 Riemannův problém

Zabývejme se nyní počáteční úlohou pro rovnici (2.1) se speciální, po částech konstantní, počáteční podmínkou

$$q(x,0) = \begin{cases} q_l & \text{pro } x < 0, \\ q_r & \text{pro } x > 0. \end{cases} \tag{2.21}$$

Taková úloha se nazývá *Riemannův problém*.

Lze ukázat, že slabým řešením je takzvané *podobnostní řešení* ve tvaru

$$q(x,t) = \widetilde{q}(x/t). \tag{2.22}$$

Toto řešení je konstantní na paprscích $x/t = konstanta$ v rovině $xt$.

Nejprve pro rovnice s konkávní tokovou funkcí (jako je například uvedená rovnice dopravního proudu) uvažujme Riemannův problém s $q_l < q_r$ . Charakteristiky vycházející ze záporné části osy $x$ se protínají s charakteristikami s menším sklonem z kladné části osy $x$, jelikož z konkávnosti tokové funkce plyne, že $f'(q_l) > f'(q_r)$. Slabým řešením tohoto problému je nespojitost (*rázová vlna*) šířící se rychlostí $s$ danou vztahem (2.20). Toto řešení můžeme zapsat jako

$$q(x,t) = \begin{cases} q_l & \text{pro } x/t < s, \\ q_r & \text{pro } x/t > s. \end{cases} \tag{2.23}$$

Dále pro stejnou rovnici uvažujme opačný Riemannův problém s $q_l > q_r$. Charakteristiky se nyní díky konkávnosti tokové funkce neprotínají. Dvěma slabými řešeními jsou

*rázová vlna* šířící se rychlostí $s$ danou vztahem (2.20), která se opět vyjádří vztahem (2.23), a dále je slabým řešením takzvaná *vlna zředění*, kterou zapíšeme jako

$$q(x,t) = \begin{cases} q_l & \text{pro } x/t < f'(q_l), \\ (f')^{-1}(x/t) & \text{pro } f'(q_l) < x/t < f'(q_r), \\ q_r & \text{pro } x/t > f'(q_r), \end{cases} \tag{2.24}$$

kde $(f')^{-1}(x/t)$ vyjadřuje inverzní funkci k funkci $f'(q)$ v proměnné $x/t$, jejíž existenci máme díky konkávnosti $f(q)$, a tedy monotonii $f'(q)$, zaručenou.

Pro tento Riemannův problém máme tedy dvě slabá řešení. Fyzikálně je přijatelné ale pouze jediné. Tento problém jsme mírně nastínili v předchozí podkapitole. Fyzikálně přijatelné slabé řešení se nazývá *entropické řešení*. Abychom mohli toto entropické řešení určit, zavádí se takzvané *entropické podmínky*. Pro příklad uveďme entropickou podmínku, kterou lze využít v předchozím problému a kterou lze nalézt v [1].

**Definice 4** (Laxova entropická podmínka)**.** *U zákonů zachování ve tvaru (2.1) s konvexní nebo konkávní tokovou funkcí říkáme, že* **nespojitost** *šířící se rychlostí $s$ danou vztahem (2.20)* **splňuje Laxovu entropickou podmínku**, *pokud platí*

$$f'(q_l) > s > f'(q_r), \tag{2.25}$$

*kde $q_l$ je hodnota funkce $q$ zleva a $q_l$ hodnota funkce $q$ zprava v místě nespojitosti.*

Uvědomme si, že pro konvexní nebo konkávní tokovou funkci platí, že rychlost $s$ vždy leží mezi $f'(q_l)$ a $f'(q_r)$, a tedy je postačující uvažovat pro splnění podmínky (2.25) pouze zda $f'(q_l) > f'(q_r)$. U námi uvažované rovnice dopravního proudu s konkávní tokovou funkcí se tento požadavek redukuje pouze na podmínku $q_l < q_r$.

Pro rovnici dopravního proudu a Riemannův problém s počáteční podmínkou $q_l < q_r$ splňuje rázová vlna (2.23) Laxovu entropickou podmínku a platí, že je entropickým řešením. Naproti tomu u Riemannova problému s $q_l > q_r$ rázová vlna (2.23) nesplňuje Laxovu entropickou podmínku a není entropickým, fyzikálně přijatelným, řešením. Entropickým řešením je v tomto případě vlna zředění (2.24).

### 2.3.5 Rovnice s nekonvexní tokovou funkcí

Uvažujme dále rovnici s tokovou funkcí, která není konvexní ani konkávní, tedy například rovnici

$$q_t + \left(q^3\right)_x = 0, \tag{2.26}$$

jejíž toková funkce je $f(g) = q^3$. V kvazilineárním tvaru rovnici zapíšeme jako

$$q_t + \left(3q^2\right) q_x = 0. \tag{2.27}$$

Je třeba si uvědomit, že ačkoliv část 2.3.3 o charakteristikách a rázových vlnách u nelineárních rovnic je odvozena nezávisle na předpokladu konvexnosti nebo konkávnosti tokové funkce, část 2.3.4 o Riemannových problémech obsahuje značná zjednodušení právě pro tyto speciální funkce a řešení Riemannova problému je tak pro rovnici (2.26) složitější. Pokud se charakteristiky vycházející zleva a zprava neprotínají, nemáme u řešení typu vlny zředění vždy k dispozici inverzní funkci k funkci $f'(q)$, a tedy tento postup hledání řešení zde selhává. Také nemáme pro tento případ definovanou Laxovu entropickou podmínku (definice 4) a nemůžeme tak pomocí ní rozhodnout o fyzikální přípustnosti případného nalezeného slabého řešení.

## 2.4 Soustava nelineárních rovnic

### 2.4.1 Saint-Venantovy rovnice

Saint-Venantovy rovnice reprezentují jednoduchý model vodního toku. Námi využitý zjednodušený tvar těchto rovnic, který můžeme nalézt v [1] a [6], uvažuje nevazkou a nestlačitelnou kapalinu v jednodimenzionálním korytu konstantní šířky, kde sklon dna je dostatečně malý (nulový), je uvažována pouze rychlost kapaliny v horizontálním směru a je předpokládáno, že tato rychlost v celém průřezu koryta stejná. Jsou vhodným úvodem do problematiky nelineárních soustav, jelikož se jedná o soustavu pouze dvou rovnic. Ty jsou odvozeny ze zákona zachování hmotnosti a hybnosti.

Budeme využívat Saint-Venantovy rovnice ve tvaru

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2.28}$$

kde $h = h(x,t)$ značí výšku hladiny vody, $u = u(x,t)$ značí rychlost proudění vody a $g$ je

velikost tíhového zrychlení.

Přeznačíme

$$\begin{aligned} q_1 &= h, \\ q_2 &= hu, \end{aligned}$$

a protože

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_2 \\ q_2^2/q_1 + \frac{1}{2}gq_1^2 \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

rovnici můžeme zapsat jako

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} q_2 \\ q_2^2/q_1 + \frac{1}{2}gq_1^2 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.30}$$

Jacobiho matice je

$$\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(q_2/q_1)^2 + gq_1 & 2q_2/q_1 \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Zavedeme-li vztah

$$c = \sqrt{gh}, \tag{2.32}$$

její vlastní čísla jsou

$$\lambda_1 = u - c, \qquad \lambda_2 = u + c, \tag{2.33}$$

a jim příslušné vlastní vektory

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + c \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Vlastní čísla jsou pro $h > 0$ od sebe různá, reálná, a tedy Jacobiho matice je diagonalizovatelná a soustava rovnic pro $h > 0$ splňuje definice *ryze hyperbolické* soustavy rovnic. Pro Jacobiho matici tedy platí vztah

$$\mathbf{f}'(\mathbf{q}) = \mathbf{R}\Lambda\mathbf{R}^{-1}, \tag{2.35}$$

kde matice $\mathbf{R}$ je regulární matice s vlastními vektory (2.34) ve sloupcích, tedy

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ u-c & u+c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{2c} \begin{bmatrix} u+c & -1 \\ -(u-c) & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.36}$$

a

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2). \tag{2.37}$$

Obecně u soustav nelineárních rovnic mají vlastní čísla $\lambda_p(\mathbf{q})$ význam takzvaných *charakteristických rychlostí*. Samotný stav $\mathbf{q}$ v bodě $(X, T)$ může být rozložen na lineární kombinaci vlastních vektorů Jacobiho matice $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$. Jedná se pak o superpozici vln, kde každá se šíří právě příslušnou charakteristickou rychlostí. Jelikož se jedná o nelineární soustavu rovnic a samotné vlastní vektory i vlastní čísla se mění, i tyto vlny a jejich rychlost se pohybem mění.

### 2.4.2 Rankineův-Hugoniotův vztah a Riemannův problém

Stejně jako v případě nelineárních skalárních rovnic, i v řešení úlohy s nelineární soustavou rovnic se mohou tvořit nespojitosti. Pro nespojitost šířící se prostorem rychlostí $s(t)$ platí Rankineův-Hugoniotův vztah ve tvaru

$$s(t)(\mathbf{q}_r - \mathbf{q}_l) = \mathbf{f}(\mathbf{q}_r) - \mathbf{f}(\mathbf{q}_l). \tag{2.38}$$

Zde již nelze rychlost $s(t)$ jednoduše vyjádřit tak jako ve skalárním případě, jelikož se jedná o maticovou rovnici.

Řešení Riemannova problému pro nelineární soustavy rovnic vyžaduje více úsilí než v případě skalárních rovnic. Řešením už nejsou samostatná rázová vlna, nebo vlna zředění, ale bude se jednat o jejich kombinace, přičemž takových vln je stejný počet, jako je počet rovnic. V praktických numerických výpočtech se proto přesné řešení Riemannova problému obvykle nehledá a využívají se přibližné řešiče a linearizace Jacobiho matice v místě nespojitosti.

# Kapitola 3

# Metoda konečných objemů

V této kapitole se budeme zabývat takzvanou *metodou konečných objemů* v jednodimenzionální podobě pro nelineární skalární rovnice a soustavy rovnic. Název metody vychází ze způsobu diskretizace užité v této metodě, kdy je interval, na kterém je prováděn výpočet, rozdělen na jednotlivé buňky konečného objemu (v našem jednodimenzionálním případě je pod tímto objemem uvažována délka). Tato kapitola je stručným popisem metody bez podrobnější analýzy, případně se jedná pouze o popis algoritmů. Podrobnější obecnou analýzu lze nalézt v [1].

## 3.1 Vlastnosti metod

V této podkapitole využijeme poznatky uvedené v [1].

### 3.1.1 Diskretizace

Mějme dány posloupnosti $(x_{i-1/2})_{i=1}^{J+1}$ a $(t_n)_{n=0}^{N}$. Jako $i$-tou buňku označíme otevřený interval

$$C_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), \tag{3.1}$$

přičemž velikost buňky označíme jako $\Delta x_i$ a platí

$$\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}. \tag{3.2}$$

Pro zjednodušení budeme často uvažovat, že všechny buňky mají stejnou velikost. Říkáme pak, že se jedná o *ekvidistantní síť*, a velikost buněk označujeme jako $\Delta x$. Body značené

jako $x_i$ budou ležet uvnitř buňky $C_i$, v našem případě

$$x_i = \frac{x_{i+1/2} + x_{i-1/2}}{2}. \tag{3.3}$$

Pro skalární rovnice bude hodnota $Q_i^n$ aproximovat průměrnou hodnotu veličiny $q$ v buňce $C_i$ v čase $t_n$, tedy

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x, t_n) dx = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{C_i} q(x, t_n) dx. \tag{3.4}$$

Pro soustavy rovnic hodnoty máme pak vektorovou hodnotu $\mathbf{Q}_i^n$, přičemž integraci provádíme po složkách.

### 3.1.2 Tvar numerických metod

Numerické metody pro skalární rovnice budeme uvádět v takzvaném *divergentním* tvaru

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i}(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n), \tag{3.5}$$

kde $\Delta t$ je délka časového kroku, $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, která je pro jednoduchost uvažována jako konstantní, a $F_{i-1/2}^n$ je aproximací průměrného toku v bodě $x_{i-1/2}$ v časovém intervalu $(t_n, t_{n+1})$, tedy

$$F_{i-1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-1/2}, t)) dt. \tag{3.6}$$

Tento tvar (3.5) je přímo odvozen z integrálního bilančního vztahu (2.6). Pro soustavy rovnic ho zapisujeme jako

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i}(\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n). \tag{3.7}$$

Tuto formuli používáme jako rekurentní vzorec pro výpočet integrálních průměrů $Q_i^{n+1}$ v časové hladině $t^{n+1}$, máme-li k dispozici integrální průměry $Q_i^n$ v časové hladině $t^n$.

Následující úvahy lze provést jak pro skalární rovnice, tak i obecněji pro soustavy rovnic při zaměnění skalárních veličin za příslušné vektorové veličiny, případně uvažujeme-li po složkách. Pokud nebude uvedeno jinak, budeme uvažovat oba případy.

Stanovit hodnoty toků $F_{i-1/2}^n$ na rozhraních buněk je klíčovým prvkem numerických metod. Na rozhraní dvou buněk v bodě $x_{i-1/2}$ v čase $t_n$ jsou zleva a zprava k dispozici dvě hodnoty $Q_{i-1}^n$ a $Q_i^n$. Uvažujeme-li metodu, která stanovuje $F_{i-1/2}^n$ pouze na základě těchto

dvou hodnot, dostáváme vztah

$$F^n_{i-1/2} = \mathcal{F}(Q^n_{i-1}, Q^n_i), \tag{3.8}$$

kde $\mathcal{F}$ je takzvaná *numerická toková funkce*. Pro výpočet $Q^{n+1}_i$ dle vztahu (3.5) potřebujeme stanovit ještě $F^n_{i+1/2}$, k čemuž je potřeba hodnot $Q^n_i$ a $Q^n_{i+1}$. Numerická metoda tak pro určení $Q^{n+1}_i$ využívá celkem tři hodnoty $Q^n_{i-1}$, $Q^n_i$ a $Q^n_{i+1}$ a nazývá se *tříbodová*. Pokročilejší metody mohou být i vícebodové, jako například metody (W)ENO a metody spektrálních objemů.

### 3.1.3 Rekonstrukce řešení

Z přibližných integrálních průměrů $Q^n_i$ můžeme takzvaně *rekonstruovat* (interpolovat) funkci $Q^n = Q^n(x)$ aproximující řešení úlohy v čase $t_n$. Rekonstrukci řešení můžeme provést mnoha způsoby, přičemž je kladen základní požadavek, aby integrální průměr funkce $Q^n(x)$ v buňce $C_i$ byl roven hodnotě $Q^n_i$. Většinou se také očekává, že je funkce ve vnitřních bodech buněk spojitá, celkově je tedy po částech spojitá. Nejčastěji se rekonstrukce provádí pomocí polynomů.

### 3.1.4 Konvergence metod a CFL podmínka

*Konvergentní metodou* rozumíme metodu, pro kterou platí, že numerické řešení získané touto metodou konverguje k přesnému řešení při zjemňování mřížky ($\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$, přičemž $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ je konstantní). Aby byla metoda *konvergentní*, musí být obecně splněny dvě podmínky, a to že je metoda *konzistentní* a *stabilní*.

*Konzistencí* vyjadřujeme požadavek, kdy pro funkci $q(x,t) = \overline{q}$, která je konstantní v $x$ i $t$, očekáváme, že numerická toková funkce, jako například $\mathcal{F}(Q^n_{i-1}, Q^n_i)$, bude dávat stejnou hodnotu jako toková funkce $f(q)$, jelikož i $q(x,t)$ bude konstantní v čase a numerická toková funkce nám dává aproximaci pravé strany ve (3.6), a tedy

$$\mathcal{F}(\overline{q}, \overline{q}) = f(\overline{q}). \tag{3.9}$$

Dále obecněji požadujeme spojitost této numerické tokové funkce, tj. aby pro $Q^n_{i-1}, Q^n_i \to \overline{q}$ platilo, že $\mathcal{F}(Q^n_{i-1}, Q^n_i) \to f(\overline{q})$, případně obvykle i lipschitzovskou spojitost.

*Stabilitou* metody máme na mysli vlastnost, kdy, zjednodušeně řečeno, požadujeme, aby chyby vzniklé v každém kroku metody nenarůstaly s časem příliš rychle.

Nutnou podmínkou stability a konvergence metody je pak takzvaná *CFL podmínka*, která nám klade omezení na nejvyšší velikost poměru $\frac{\Delta t}{\Delta x}$. Vyjadřuje požadavek, aby numerická metoda vůbec mohla zachytit změny způsobené vlnami v řešení šířící se nějakou určitou rychlostí. Pokud například numerický tok na rozhraní v bodě $x_{i-1/2}$ závisí pouze na dvou krajních hodnotách $Q_{i-1}^n, Q_i^n$ a časový krok $\Delta t$ je příliš velký vzhledem k rychlostem šíření vln v řešení, skutečný tok tak v tomto bodě pro tento okolní stav závisí i na dalších vzdálenějších hodnotách a metoda nebude konvergentní.

*CFL podmínka* má tvar

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq konst. \tag{3.10}$$

Konstanta ve vztahu závisí na nejvyšší rychlosti, jakou se vlny šíří v řešení. Čím je tato rychlost vyšší, tím musí být konstanta menší.

Pro nelineární skalární rovnice pro tříbodovou metodu, která uvažuje pro výpočet hodnoty $Q_i^{n+1}$ na následující časové hladině pouze hodnotu $Q_i^n$ a krajní hodnoty $Q_{i-1}^n$ a $Q_{i+1}^n$, bude mít podmínka tvar

$$\max_j |f'(Q_j^n)| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \tag{3.11}$$

Číslo

$$\max_j |f'(Q_j^n)| \frac{\Delta t}{\Delta x} = \nu \tag{3.12}$$

se nazývá *Courantovo číslo* nebo *CFL číslo*. S jeho pomocí bychom CFL podmínku pro tuto metodu vyjádřili jako $\nu \leq 1$. Pro pětibodovou metodu uvažující navíc i hodnoty $Q_{i-2}^n$ a $Q_{i+2}^n$ by CFL podmínka byla $\nu \leq 2$. Obvykle zjednodušeně říkáme, že CFL $\leq 1$, respektive CFL $\leq 2$. Zdůrazněme, že se jedná o nutnou, nikoliv postačující, podmínku konvergence metody.

Pro soustavu nelineárních rovnic je CFL číslo

$$\nu(\mathbf{q}) = \max_p |\lambda_p(\mathbf{q})| \frac{\Delta t}{\Delta x} \tag{3.13}$$

a pro tříbodovou metodu by CFL podmínka byla, že

$$\max_p |\lambda_p(\mathbf{q})| \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{3.14}$$

pro všechny stavy $\mathbf{q}$, které mohou v řešení nastat.

### 3.1.5 Řád metody

Často se budeme zmiňovat o *řádu metody*. Jedná se o řád přesnosti metody, pokud bychom ji odvodili z Taylorova rozvoje řešení úlohy. Protože ale derivace nejsou definovány v bodech, ve kterých je řešení nehladké, nemůžeme pro tyto body metodu korektně odvodit, a hovoříme tak pouze o *formálním řádu metody* a metoda je odvozena, jako by bylo řešení všude hladké.

Rozlišujeme řád přesnosti v prostoru a řád přesnosti v čase. Pro metodu $k$-tého řádu v prostoru a $p$-tého řádu v čase je chyba přibližného řešení dána součtem chyb $O(\Delta x^k)$ a $O(\Delta t^p)$. U metod s vyšším řádem přesnosti tak chyba při zjemňování sítě rychleji klesá k nule.

Vyšší řád obvykle přináší výrazně lepší přesnost přibližného řešení hlavně v jeho hladkých částech. Ovšem zejména u nespojitých řešení může například vysoký řád metody dosažený pomocí polynomiální rekonstrukce způsobovat nežádoucí oscilace, a přesnost se tak naopak s řádem snižuje. Vyšší řád také může zvyšovat výpočetní náročnost metod.

### 3.1.6 TVD a TVB metody

S řádem metod vyšším než jedna se v přibližném řešení v okolí bodů, kde je funkce nehladká, začínají objevovat nežádoucí umělé oscilace. Proto byly v teorii skalárních rovnic zavedeny následující pojmy.

Vhodnou vlastností metody je, pokud s časem nezvyšuje *totální variaci řešení*, jelikož ani totální variace přesného entropického řešení skalární rovnice se nezvyšuje. Totální variace je pro přibližné řešení v čase $t_n$ definována jako

$$TV(Q^n) = \sum_i |Q^n_{i+1} - Q^n_i|. \tag{3.15}$$

Metody, u kterých pro všechna $n$ platí

$$TV(Q^{n+1}) \leq TV(Q^n), \tag{3.16}$$

se nazývají jako *TVD metody* (z anglického *total variation diminishing*). Pro TVD metody navíc platí, že *zachovávají monotonii řešení*, tedy pokud pro všechna $i$ platí, že $Q^n_i \geq Q^n_{i+1}$, pak i $Q^{n+1}_i \geq Q^{n+1}_{i+1}$ pro všechna $i$.

Metody, pro které platí, že pro libovolná počáteční data $Q^0$ (pro něž $TV(Q^0) < \infty$)

a čas $T$ existují konstanta $R > 0$ a hodnota $\Delta t_0 > 0$ takové, že

$$TV(Q^n) \leq R \tag{3.17}$$

pro všechna $n$, pro která $n\Delta t \leq T$, když $\Delta t \leq \Delta t_0$, se nazývají *TVB metody* (z anglického *total variation bounded*).

Pojmy TVD a TVB ztrácejí smysl pro soustavy rovnic, protože pro ty už neplatí, že se totální variace přesného entropického řešení s časem nezvyšuje. Přístupy založené na TVD a TVB se u soustav rovnic ovšem obecně využívají pro potlačování nežádoucích oscilací v řešení.

## 3.2 Základní metody

Numerické metody pro nelineární skalární rovnice na ekvidistantní síti budeme uvádět v *divergentním* tvaru (3.5)

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n)$$

a obecnější metody pro nelineární soustavy rovnic ve tvaru (3.7)

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{F}_{i-1/2}^n).$$

Většina uvedených metod je popsána v [1].

### 3.2.1 Laxova-Friedrichsova metoda

Laxova-Friedrichsova metoda je jedna z nejjednodušších numerických metod. Metoda je prvního řádu v čase i prostoru a numerický tok této tříbodové metody je dán vztahem

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \frac{1}{2}\left[\mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1}^n) + \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i^n)\right] - \frac{\Delta x}{2\Delta t}\left(\mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}_{i-1}^n\right). \tag{3.18}$$

Schéma je použitelné pro skalární rovnice i soustavy rovnic. Ačkoliv je metoda stabilní pro CFL čísla až do velikosti 1, což je maximální možná hodnota pro tříbodovou metodu, vnáší do řešení velké množství numerické difúze a i když řešení konverguje k entropickému řešení úlohy, řešení získaná touto metodou nejsou příliš přesná.

### 3.2.2 Lokální Laxova-Friedrichsova metoda

Tato metoda (označovaná také zkratkou *LLF* či jako *Rusanovova metoda*) je vylepšenou verzí metody předchozí. Člen $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ je pro skalární úlohy nahrazen výrazem

$$a_{i-1/2} = \max(|f'(q)|) \quad \text{pro } q \in \left\langle \min(Q_{i-1}^n, Q_i^n), \max(Q_{i-1}^n, Q_i^n) \right\rangle, \tag{3.19}$$

přičemž pro konvexní nebo konkávní tokovou funkci $f(q)$ stačí uvažovat

$$a_{i-1/2} = \max(|f'(Q_{i-1}^n)|, |f'(Q_i^n)|). \tag{3.20}$$

Pro soustavy rovnic taktéž s konkávními nebo konvexními složkami tokové funkce $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ a Jacobiho maticí $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$ s vlastními čísly $\lambda_p(\mathbf{q})$ volíme hodnotu

$$a_{i-1/2} = \max(|\lambda_1(Q_{i-1}^n)|, |\lambda_1(Q_i^n)|, \ldots, |\lambda_m(Q_{i-1}^n)|, |\lambda_m(Q_{i-1}^n)|). \tag{3.21}$$

Výsledný numerickou tok je dán jako

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^n = \frac{1}{2}\left[\mathbf{f}(\mathbf{Q}_{i-1}^n) + f(\mathbf{Q}_i^n)\right] - \frac{a_{i-1/2}}{2}\left(\mathbf{Q}_i^n - \mathbf{Q}_{i-1}^n\right). \tag{3.22}$$

Metoda vytváří menší množství numerické difúze než klasická Laxova-Friedrichsova metoda a rovněž platí, že přibližné řešení konverguje k entropickému řešení úlohy.

### 3.2.3 Engquistova-Osherova metoda

Engquistova-Osherova metoda pro nelineární skalární rovnici je metoda využívající numerický tok

$$F_{i-1/2}^n = \frac{1}{2}[f(Q_{i-1}^n) + f(Q_i^n)] - \frac{1}{2}\int_{Q_{i-1}^n}^{Q_i^n} |f'(q)|dq. \tag{3.23}$$

Entropická podmínka je vždy splněna a přibližné řešení tak konverguje k řešení entropickému. Metodu lze zobecnit pro na soustavy rovnic na takzvané *Osherovo schéma*, toto zobecnění nebudeme uvádět a lze jej nalézt v další literatuře.

### 3.2.4 Godunovova metoda

Godunovova metoda je metodou prvního řádu využívající po částech konstantní rekonstrukci funkce $Q^n(x)$. Pro určení numerického toku v bodě $x_{i-1}$ se použije přesné řešení

Riemannova problému, které jsme pro skalární rovnici rozebrali v oddíle 2.3.4. Jedná se v podstatě o zobecnění takzvané *metody upwind*, která je určená pouze pro lineární rovnice a soustavy. Metodu zapíšeme jako

$$F^n_{i-1/2} = f(q^{\downarrow}(Q^n_{i-1}, Q^n_i)), \tag{3.24}$$

kde funkce $q^{\downarrow} = q^{\downarrow}(Q^n_{i-1}, Q^n_i)$ nám dává hodnotu řešení Riemannova problému s nespojitostí v bodě $x_{i-1/2}$ a hodnotami $Q^n_{i-1}$, $Q^n_i$ na paprsku $(x - x_{i-1/2})/t = 0$ v rovině $xt$.

Metoda je použitelná pro CFL čísla až do velikosti 1.

Godunovovu metodu budeme v této formě využívat jen pro skalární rovnice. Přesné řešení Riemannova problému pro soustavy rovnic je složitější a v praxi u složitějších rovnic nemusí být k dispozici. Místo toho pro soustavy rovnic uvedeme metody využívající přibližné Riemannovy řešiče. Jednou z takových je metoda následující.

### 3.2.5 Roeova metoda

Roeova metoda je metoda pro řešení nelineárních soustav rovnic založená na přibližném řešení Riemannova problému. Metoda zapsaná v divergentním tvaru (3.7) využívá numerický tok

$$\mathbf{F}^n_{i-1/2} = \frac{1}{2}[\mathbf{f}(\mathbf{Q}^n_{i-1}) + \mathbf{f}(\mathbf{Q}^n_i)] - \frac{1}{2}|\hat{\mathbf{A}}^n_{i-1/2}|(\mathbf{Q}^n_i - \mathbf{Q}^n_{i-1}), \tag{3.25}$$

kde takzvanou *Roeovu matici* $\hat{\mathbf{A}}^n_{i-1/2} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}^n_{i-1}, \mathbf{Q}^n_i)$ hledáme v každé časové hladině $t_n$ a v každém hraničním bodě $x_{i-1/2}$ tak, aby byly splněny tyto podmínky:

- platnost Rankineova-Hugoniotova vztahu pro soustavy rovnic (2.38) v linearizované podobě
$$\hat{\mathbf{A}}^n_{i-1/2}\,(\mathbf{Q}^n_i - \mathbf{Q}^n_{i-1}) = \mathbf{f}(\mathbf{Q}^n_i) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}^n_{i-1}), \tag{3.26}$$
- pro $\mathbf{Q}^n_{i-1} \to \mathbf{Q}^n_i$ matice $\hat{\mathbf{A}}^n_{i-1/2} = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{Q}^n_{i-1}, \mathbf{Q}^n_i)$ přechází na Jacobiho matici, tedy $\hat{\mathbf{A}}^n_{i-1/2} \to \mathbf{f}\,'(\mathbf{Q}^n_i)$,
- matice $\hat{\mathbf{A}}^n_{i-1/2}$ je diagonalizovatelná a má reálná vlastní čísla.

Použitá „absolutní hodnota“ matice $\hat{\mathbf{A}}^n_{i-1/2}$ je definována jako

$$|\hat{\mathbf{A}}^n_{i-1/2}| = \hat{\mathbf{R}}|\hat{\Lambda}|\hat{\mathbf{R}}^{-1}, \tag{3.27}$$

kde $|\hat{\Lambda}| = \mathrm{diag}(|\hat{\lambda}_p|)$, přičemž $\hat{\lambda}_p$ jsou vlastní čísla matice $\hat{\mathbf{A}}^{n}_{i-1/2}$ a $\hat{\mathbf{R}}$ je matice příslušných sloupcových vlastních vektorů.

Metoda v tomto tvaru nezajišťuje konvergenci k entropickému řešení. Proto je pro zajištění konvergence přibližného řešení k entropickému řešení pro všechny typy nespojitostí potřeba zavést do metody takzvaný *entropy fix*. Využijeme *Hartenův entropy fix*, který zamezuje vlastním číslům $\hat{\lambda}_p$ matice $\hat{\mathbf{A}}^{n}_{i-1/2}$, aby byly příliš blízko nule. Každou z hodnot $|\hat{\lambda}_p|$ v matici $|\hat{\Lambda}|$ nahradíme hodnotou $\phi(|\hat{\lambda}_p|)$, kterou stanovíme jako

$$\phi(|\hat{\lambda}_p|) = \begin{cases} |\hat{\lambda}_p| & \text{pro } |\hat{\lambda}_p| \geq \lambda_0, \\ \frac{1}{2}(\lambda_0 + \frac{|\hat{\lambda}_p|^2}{\lambda_0}) & \text{pro } |\hat{\lambda}_p| < \lambda_0, \end{cases} \tag{3.28}$$

přičemž kladné reálné číslo $\lambda_0$ představuje takzvaný *práh* - minimální hodnotu $|\hat{\lambda}_p|$, od které se použití entropy fixu neprojeví, a je nutné ho zvolit v závisloti na řešeném problému. Je heuristicky ukázáno, že metoda využívající tento entropy fix konverguje při vhodné volbě $\lambda_0$ k entropickému řešení.

V našem textu budeme Roeovu metodu využívat pro numerické řešení nelineární soustavy Saint-Venantových rovnic (2.28). V souladu se značením v oddílu 2.4.1 má Roeova matice pro tuto soustavu tvar

$$\hat{\mathbf{A}}^{n}_{i-1/2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\hat{u}^2 + g\overline{h} & 2\hat{u} \end{bmatrix}, \tag{3.29}$$

kde $\hat{u}$ je takzvaný *Roeův průměr* hodnot $u_i$ a $u_{i+1}$, který vypočteme jako

$$\hat{u} = \frac{u_{i-1}\sqrt{h_{i-1}} + u_i\sqrt{h_i}}{\sqrt{h_{i-1}} + \sqrt{h_i}}, \tag{3.30}$$

a $\overline{h}$ je aritmetický průměr hodnot $h_{i-1}$ a $h_i$, tedy

$$\overline{h} = \frac{1}{2}(h_{i-1} + h_i). \tag{3.31}$$

Vlastní vektory matice $\hat{\mathbf{A}}^{n}_{i-1/2}$ jsou

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{u} - \hat{c}, \quad \hat{\lambda}_2 = \hat{u} + \hat{c}, \tag{3.32}$$

přičemž

$$\hat{c} = \sqrt{g\overline{h}}, \tag{3.33}$$

a matice příslušných sloupcových vlastních vektorů a její inverze jsou

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \hat{u}-\hat{c} & \hat{u}+\hat{c} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{R}}^{-1} = \frac{1}{2\hat{c}} \begin{bmatrix} \hat{u}+\hat{c} & -1 \\ -(\hat{u}-\hat{c}) & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.34}$$

a tedy pro Saint-Venantovy rovnice sestavíme $|\hat{\mathbf{A}}^{n}_{i-1/2}|$ jako

$$|\hat{\mathbf{A}}^{n}_{i-1/2}| = \mathbf{R}|\Lambda|\mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{2\hat{c}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \hat{u}-\hat{c} & \hat{u}+\hat{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\hat{\lambda}_1| & 1 \\ 1 & |\hat{\lambda}_2| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}+\hat{c} & -1 \\ -(\hat{u}-\hat{c}) & 1 \end{bmatrix}. \tag{3.35}$$

Při použití *Hartenova entropy fixu* (3.28) pak sestavíme $|_{EF}\hat{\mathbf{A}}^{n}_{i-1/2}|$ jako

$$|_{EF}\hat{\mathbf{A}}^{n}_{i-1/2}| = \frac{1}{2\hat{c}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \hat{u}-\hat{c} & \hat{u}+\hat{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(|\hat{\lambda}_1|) & 1 \\ 1 & \phi(|\hat{\lambda}_2|) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}+\hat{c} & -1 \\ -(\hat{u}-\hat{c}) & 1 \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

a použijeme namísto $|\hat{\mathbf{A}}^{n}_{i-1/2}|$ ve vztahu (3.25).

### 3.2.6 HLL metoda (Hartenova-Laxova-Leerova)

HLL metoda uplatňuje aproximaci řešení Riemannova problému. Ve schématu v divergentním tvaru (3.7) využívá numerický tok

$$\mathbf{F}^{n}_{i-1/2} = \frac{a^{+}_{i-1/2}\mathbf{f}(\mathbf{Q}^{n}_{i-1}) - a^{-}_{i-1/2}\mathbf{f}(\mathbf{Q}^{n}_{i})}{a^{+}_{i-1/2} - a^{-}_{i-1/2}} - \left|\frac{a^{+}_{i-1/2}a^{-}_{i-1/2}}{a^{+}_{i-1/2} - a^{-}_{i-1/2}}\right| (\mathbf{Q}^{n}_{i} - \mathbf{Q}^{n}_{i-1}) \tag{3.37}$$

a v tomto tvaru lze použít jak pro nelineární soustavy rovnic, tak pro skalární rovnice. Pro skalární rovnice definujeme

$$\begin{aligned} a^{+}_{i-1/2} &= \max(0, f'(Q^{n}_{i-1}), f'(Q^{n}_{i})), \\ a^{-}_{i-1/2} &= \min(0, f'(Q^{n}_{i-1}), f'(Q^{n}_{i})) \end{aligned}$$

a pro soustavy rovnic s Jacobiho maticí $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$ s vlastními čísly $\lambda_p(\mathbf{q})$ definujeme

$$\begin{aligned} a^{+}_{i-1/2} &= \max(0, \lambda_1(\mathbf{Q}^{n}_{i-1}), \lambda_1(\mathbf{Q}^{n}_{i}), \ldots, \lambda_m(\mathbf{Q}^{n}_{i-1}), \lambda_m(\mathbf{Q}^{n}_{i})), \\ a^{-}_{i-1/2} &= \min(0, \lambda_1(\mathbf{Q}^{n}_{i-1}), \lambda_1(\mathbf{Q}^{n}_{i}), \ldots, \lambda_m(\mathbf{Q}^{n}_{i-1}), \lambda_m(\mathbf{Q}^{n}_{i})). \end{aligned}$$

HLL metoda konverguje pro skalární rovnice a soustavy dvou rovnic k entropickému řešení. Nedokáže ovšem přesně aproximovat kontaktní nespojitosti, vyskytující se u soustavy tří a více rovnic.

### 3.2.7 Metoda Flux Vector Splitting

Metoda Flux Vector Splitting je metoda prvního řádu pro řešení soustav nelineárních rovnic. Numerický tok pro divergentní schéma (3.7) je

$$\mathbf{F}^n_{i-1/2} = \mathbf{F}^+(\mathbf{Q}^n_{i-1}) + \mathbf{F}^-(\mathbf{Q}^n_i), \tag{3.38}$$

kde $\mathbf{F}^{\pm}(\mathbf{q})$ jsou definovány jako

$$\mathbf{F}^+(\mathbf{q}) = \mathbf{R}\Lambda^+\mathbf{R}^{-1}, \tag{3.39}$$
$$\mathbf{F}^-(\mathbf{q}) = \mathbf{R}\Lambda^-\mathbf{R}^{-1} \tag{3.40}$$

a matice označené $\Lambda^{\pm}$ jsou

$$\Lambda^+ = \frac{1}{2}(\Lambda + |\Lambda|), \tag{3.41}$$
$$\Lambda^- = \frac{1}{2}(\Lambda - |\Lambda|), \tag{3.42}$$

přičemž $\Lambda$ je matice s vlastními čísly $\lambda_p(\mathbf{q})$ Jacobiho matice $\mathbf{f}'(\mathbf{q})$ na diagonále, $\mathbf{R}$ je matice příslušných sloupcových vlastních vektorů a $|\Lambda| = \mathrm{diag}(|\lambda_p(\mathbf{q})|)$.

Pro zajištění konvergence k entropickému řešení je potřeba zavést entropy fix. My využijeme entropy fix popsaný v [8], který nahrazuje hodnoty na diagonálách matic $\Lambda \pm |\Lambda|$ za hodnoty

$$\phi([\Lambda \pm |\Lambda|]_{r,r}) = [\Lambda]_{r,r} \pm \sqrt{[\Lambda]^2_{r,r} + \delta}, \tag{3.43}$$

kde $\delta$ je uživatelem definovaný kladný parametr.

Metodu budeme používat pro řešení Saint-Venantových rovnic (2.28). Tvary matic $\mathbf{R}$, $\Lambda$ a $\mathbf{R}^{-1}$ nalezneme v oddílu 2.4.1 pod (2.36) a (2.37).

### 3.2.8 Laxova-Wendroffova metoda

Laxova-Wendroffova metoda je tříbodová metoda druhého řádu v prostoru a času odvozená z Taylorova rozvoje řešení lineárních rovnic a soustav. Jedním z možných tvarů

numerického toku pro schéma v divergentním tvaru (3.7) je

$$\mathbf{F}^n_{i-1/2} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}^{n+1/2}_{i-1/2}), \tag{3.44}$$

kde

$$\mathbf{Q}^{n+1/2}_{i-1/2} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{Q}^n_{i-1} + \mathbf{Q}^n_i\right) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left[\mathbf{f}(\mathbf{Q}^n_i) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}^n_{i-1})\right]. \tag{3.45}$$

Metoda v tomto tvaru se nazývá také *Richtmyerova metoda* a při aplikaci na lineární rovnici nebo soustavu se redukuje na *klasickou* Laxovu-Wendroffovu metodu vycházející přímo z Taylorova rozvoje.

Metodu můžeme interpretovat jako metodu využívající jistou jednoduchou po částech lineární rekonstrukci. Nevýhoda metody je, že v přibližném řešení se v okolí bodů, ve kterých je řešení nespojité, obvykle vyskytují nežádoucí oscilace. Metoda tak nemá vlastnost TVD.

## 3.3 Metody s vysokým rozlišením

Dále se budeme věnovat *metodám s vysokým rozlišením*. Tento pojem označuje metody, které jsou vyššího než prvního řádu v bodech, kde je řešení hladké, a které v okolí bodů nespojitosti dostatečně přesně aproximují řešení a nevytváření umělé oscilace, které v přesném řešení obsaženy nejsou.

### 3.3.1 Metody druhého řádu s TVD limitery

Metody druhého řádu s *TVD limitery* vycházejí z klasické Laxovy-Wendroffovy metody odvozené z Taylorova rozvoje řešení lineárních rovnic a soustav. Interpretace Laxovy-Wendroffovy metody je taková, že provádíme po částech lineární rekonstrukci. Při této rekonstrukci jsou ale při výskytu nespojitosti v řešení některé velikosti směrnic lineárních funkcí v rekonstruované funkci příliš vysoké, a proto v přibližném řešení získaném touto metodou vznikají nežádoucí oscilace. Pro omezení velikosti těchto směrnic se tedy zavádějí takzvané *limitery sklonu*. Při odvození numerického toku pro divergentní schéma (3.5) se pak limitery obvykle interpretují jako *limitery toku*. Pokud výsledná metoda s těmito limitery nezvyšuje totální variaci řešení, nevznikají oscilace v řešení a říkáme, že se jedná o *TVD limitery*.

Formální řád metod je v bodech, ve kterých se projeví uplatnění limiterů, snížen na jedna a jedná se tak o metody s adaptivním řádem. Nevýhoda těchto metod je, že řád

metody je snížen i při výskytu hladkého extrému v řešení.

Metody uvedeme pro skalární nelineární rovnice. Budeme využívat přesné řešení Riemannova problému stejně jako v Godunovově metodě. Metody zapíšeme ve tvaru

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}(\widetilde{F}_{i+1/2}^n - \widetilde{F}_{i-1/2}^n), \tag{3.46}$$

kde $F_{i-1/2}^n$ je dáno vztahem (3.24) při přesném řešení Riemannova problému a

$$\widetilde{F}_{i-1/2}^n = \frac{1}{2}|s_{i-1/2}^n|\left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}|s_{i-1/2}^n|\right)(Q_i^n - Q_{i-1}^n)\phi(\theta_{i-1/2}^n), \tag{3.47}$$

kde $\phi(\theta)$ je limitovací funkce. Hodnotu $s_{i-1/2}^n$ stanovíme ze vztahu (2.20) při $q_l = Q_{i-1}^n$, $q_r = Q_i^n$ a

$$\theta_{i-1/2}^n = \frac{Q_I^n - Q_{I-1}^n}{Q_i^n - Q_{i-1}^n} \quad \text{pro } I = \begin{cases} i-1, & \text{pokud } s_{i-1/2}^n > 0, \\ i+1, & \text{pokud } s_{i-1/2}^n < 0. \end{cases} \tag{3.48}$$

TVD limitovací funkce jsou například tyto:

**Superbee limiter**

$$\phi(\theta) = \max(0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta)), \tag{3.49}$$

**Minmod limiter**

$$\phi(\theta) = \text{minmod}(1, \theta) = \max(0, \min(1, \theta)), \tag{3.50}$$

**MC limiter**

$$\phi(\theta) = \max\left(0, \min\left(\frac{1+\theta}{2}, 2, 2\theta\right)\right), \tag{3.51}$$

**Van Leer limiter**

$$\phi(\theta) = \frac{\theta + |\theta|}{1 + |\theta|}. \tag{3.52}$$

Podrobnější informace o těchto metodách včetně možností zobecnění a modifikace lze nalézt například v literatuře [1]. Zobecněná metoda pro nelineární soustavy rovnic vyžaduje přesné řešení Riemannova problému, které neznáme, a nebudeme ji tedy využívat.

### 3.3.2 MUSTA

Metoda MUSTA, jenž je zkratkou anglického *multi-stage numerical flux* (vícestupňový numerický tok), je popsána v literatuře [3]. Pro výpočet numerických toků využívá schéma typu *prediktor-korektor*. Jedná se o nekonvenční řešič Riemannova problému, který se vyznačuje jednoduchostí a obecností a může být využit i pro moderní schémata vyšších řádů, jako jsou například metody (W)ENO. Schéma uvedené v [3] využívá pro prediktor i korektor numerický tok prvního řádu typu *FORCE*, který je aritmetickým průměrem Laxova-Friedrichsova (3.18) a Laxova-Wendroffova (3.44) numerického toku a obsahuje malé množství numerické disperze, přičemž nevyžaduje explicitní řešení Riemannova problému. Tento numerický tok lze využít pro CFL čísla až do velikosti 1, což je určující pro celé schéma MUSTA. To je založeno na představě, že daný Riemannův problém s nespojitostí v bodě $x_{i+1/2}$ v časové hladině $t_n$ rozšíříme na interval $(-\infty, \infty)$ a provádíme jeho numerické řešení ve více krocích.

Schéma mající $K$ stupňů nazýváme MUSTA$_K$, přičemž MUSTA$_0$ odpovídá schématu pouze s numerickým tokem korektoru, zde tedy schématu s numerickým tokem typu *FORCE*.

**Schéma MUSTA** Základní podoba $K$-stupňového schématu for výpočet numerického toku $\mathbf{F}^n_{i+1/2}$ začíná nastavením hodnoty čítače stupňů $l = 0$ a nastavením pomocných hodnot $\mathbf{Q}^{(l)}_0 = \mathbf{Q}^n_i$, $\mathbf{Q}^{(l)}_1 = \mathbf{Q}^n_{i+1}$.

Krok I: Výpočet pomocných hodnot toků

$$\mathbf{F}^{(l)}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{Q}^{(l)}_0), \quad \mathbf{F}^{(l)}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{Q}^{(l)}_1), \quad \mathbf{F}^{(l)}_{-1/2} = \mathbf{F}^{(l)}_0, \quad \mathbf{F}^{(l)}_{3/2} = \mathbf{F}^{(l)}_1,$$
$$\mathbf{Q}^{(l)}_{1/2} = \tfrac{1}{2}[\mathbf{Q}^{(l)}_0 + \mathbf{Q}^{(l)}_1] - \tfrac{1}{2}\tfrac{\Delta t}{\Delta x}[\mathbf{F}^{(l)}_1 - \mathbf{F}^{(l)}_0], \quad \mathbf{F}^{(l)}_M = \mathbf{f}(\mathbf{Q}^{(l)}_{1/2}),$$
$$\mathbf{F}^{(l)}_{1/2} = \tfrac{1}{4}[\mathbf{F}^{(l)}_0 + 2\mathbf{F}^{(l)}_M + \mathbf{F}^{(l)}_1 - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}(\mathbf{Q}^{(l)}_1 - \mathbf{Q}^{(l)}_0)].$$

Pokud byl dosažen požadovaný počet stupňů $K$, nastavíme jako konečnou hodnotu $\mathbf{F}^n_{1/2} = \mathbf{F}^{(l)}_{1/2}$ a algoritmus ukončíme. Jinak pokračujeme na další krok.

Krok II: Vypočteme

$$\mathbf{Q}^{(l+1)}_0 = \mathbf{Q}^{(l)}_0 - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}[\mathbf{F}^{(l)}_{1/2} - \mathbf{F}^{(l)}_{-1/2}], \quad \mathbf{Q}^{(l+1)}_1 = \mathbf{Q}^{(l)}_1 - \tfrac{\Delta t}{\Delta x}[\mathbf{F}^{(l)}_{3/2} - \mathbf{F}^{(l)}_{1/2}],$$

zvýšíme hodnotu čítače $l = l + 1$ a pokračujeme krokem I.

Vypočtené hodnoty $\mathbf{F}^n_{i+1/2}$ využijeme pro schéma s rekurentním vzorcem (3.7). Schéma je obecně uvedeno pro soustavu rovnic a lze tak stejně dobře využít pro skalární rovnici.

Schéma ve své základní podobě je prvního řádu, a nejedná se tak o metodu s vysokým rozlišením ve smyslu uvedeném na začátku této podkapitoly. Uvedeme nyní ale rozšíření na schéma druhého řádu dle [3], které lze za metodu s vysokým rozlišením již označit. To provedeme využitím *MUSCL-Hancockova schématu* a po částech lineární rekonstrukci získanou pomocí některého TVD limiteru tak, že v každé $i$-té buňce v časové hladině $t_n$ budeme mít dvě hodnoty

$$\mathbf{Q}_i^L = \mathbf{Q}_i^n - \frac{1}{2}\Delta_i, \quad \mathbf{Q}_i^R = \mathbf{Q}_i^n + \frac{1}{2}\Delta_i, \tag{3.53}$$

kde $\Delta_i$ je vektor limitovaných sklonů rekonstrukce v $i$-té buňce. Při našich numerických experimentech je u soustav vypočtena každá jeho složka zvlášť a je využíván *MC limiter sklonu* (který je k nalezení v [1]), jednotlivé složky $\Delta_i$ tak budou dány vztahem

$$\Delta_i^j = \text{minmod}\left(\frac{Q_{i+1}^{j,n} - Q_{i-1}^{j,n}}{2}, 2\left(Q_i^{j,n} - Q_{i-1}^{j,n}\right), 2\left(Q_{i+1}^{j,n} - Q_i^{j,n}\right)\right), \tag{3.54}$$

kde funkce minmod je definována jako

$$\text{minmod}(x,y,z) = \begin{cases} s\min(|x|,|y|,|z|), & \text{pokud } s = \text{sign}(x) = \text{sign}(y) = \text{sign}(z), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3.55}$$

Dále stanovíme hodnoty

$$\widehat{\mathbf{Q}}_i^L = \mathbf{Q}_i^L - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}[\mathbf{f}(\mathbf{Q}_i^R) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i^L)], \quad \widehat{\mathbf{Q}}_i^R = \mathbf{Q}_i^R - \frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}[\mathbf{f}(\mathbf{Q}_i^R) - \mathbf{f}(\mathbf{Q}_i^L)] \tag{3.56}$$

a pro uvedené *schéma MUSTA* je využijeme jako počáteční hodnoty

$$\mathbf{Q}_0^{(0)} = \widehat{\mathbf{Q}}_i^R, \quad \mathbf{Q}_1^{(0)} = \widehat{\mathbf{Q}}_{i+1}^L. \tag{3.57}$$

Schéma s tímto typem rekonstrukce budeme v našich numerických experimentech označovat jako MUSTA$_K$ HR (*high-resolution*).

Další možnosti rozšíření a informace o schématu jsou k dispozici v literatuře [3].

### 3.3.3 Metoda ENO

Metody ENO a WENO (z anglického *(weighted) essentially non-oscillatory methods*) jsou založeny na polynomiální rekonstrukci funkce $Q(x)$, přičemž těžiště metody leží ve způsobu provádění této rekonstrukce. Obě metody jsou popsány v literatuře [5]. V našem textu se budeme zabývat základní metodou ENO na ekvidistantní síti.

Rekonstrukce nám poskytne po částech polynomiální funkci $Q(x)$ se stupněm polynomů nejvýše $k-1$. Při rekonstrukci postupujeme po jednotlivých buňkách. Ke každé buňce hledáme $k-1$ okolních buněk, aby na těchto buňkách byla předpokládaná původní funkce co „nejhladší“, což docílíme tím, že postupně k původní $i$-té buňce přidáváme buňky zleva, nebo zprava tak, aby velikost *Newtonových diferencí* byla co nejmenší. Cílem je vyhnout se případné nespojitosti ležící v některé z okolních buněk, která by způsobila nežádoucí oscilace. Pro danou buňku $C_i$ pak dostáváme množinu $k$ buněk $S_k$, obsahující vždy i samotnou buňku $C_i$. Na této množině provádíme polynomiální rekonstrukci polynomem $p_i(x)$ splňující rovnost integrálních průměrů tohoto polynomu na jednotlivých buňkách s příslušnými přibližnými integrálními průměry $Q_j^n$. Na každé buňce $C_i$ díky této polynomiální aproximaci získáme hodnoty $q^+_{i-1/2} = p_i(x_{i-1/2})$ a $q^-_{i+1/2} = p_i(x_{i+1/2})$, které dále využijeme.

Lze odvodit, že máme-li $k+1$ ekvidistantních bodů $x_{r-1/2}$, a tedy $k$ stejně velkých intervalů (buněk) $C_j$ s danými integrálními průměry $Q_j$, kde $j \in \{0, \dots, k-1\}$, $r \in \{-1, \dots, k-1\}$, lze provést polynomiální interpolaci souhlasící s těmito integrálními průměry, která je stupně nejvýše $k-1$, a hodnoty interpolačního polynomu $p_i(x)$ v bodech $x_{r-1/2}$ lze vypočítat jako

$$p_i(x_{r+1/2}) = \sum_{j=0}^{k-1} c_{rj} Q_j, \tag{3.58}$$

kde koeficienty $c_{rj}$ jsou dány vztahem

$$c_{rj} = \sum_{m=j+1}^{k} \frac{\sum_{l=0,\ l\neq m}^{k} \prod_{q=0,\ q\neq m,l}^{k} (r-q+1)}{\prod_{l=0,\ l\neq m}^{k} (m-l)}. \tag{3.59}$$

Již vypočtené koeficienty až do $k=7$ lze najít v [5]. Pro příklad uveďme koeficienty $c_{rj}$

zapsané v matici $C$ pro $k = 3$:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{11}{6} & -\frac{7}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{7}{6} & \frac{11}{6} \end{bmatrix}, \tag{3.60}$$

kde první řádek matice odpovídá $r = -1$ a první sloupec $j = 0$.

Uveďme nyní vzorec pro výpočet *Newtonových diferencí* pro ekvidistantní síť a časovou hladinu $t_n$. První stupeň je rozdílem hodnot primitivní funkce po částech konstantní rekonstrukce v bodech $x_{i+1/2}$ a $x_{i-1/2}$, je tedy dán vztahem

$$V\left\langle x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right\rangle = Q_i^n, \tag{3.61}$$

a vyšší stupně $j + 1$ (pro $j > 0$) jsou definovány jako

$$V\left\langle x_{i-1/2}, x_{i+j+1/2}\right\rangle \equiv V\left\langle x_{i+1/2}, x_{i+j+1/2}\right\rangle - V\left\langle x_{i-1/2}, x_{i+j-1/2}\right\rangle. \tag{3.62}$$

**ENO rekonstrukce** Máme-li danou množinu přibližných integrálních průměrů $Q_i$ na buňkách $C_i$, získáme hodnoty $q^+_{i-1/2}$ a $q^-_{i-1/2}$ pomocí po částech polynomiální ENO rekonstrukce stupně nejvýše $k - 1$ následujícím postupem:

Krok I: Vypočteme Newtonovy diference pro řády 1 až $k$ pomocí vztahů (3.61) a (3.62).

Krok II: Pro buňku $C_i$ začneme s dvouprvkovou množinou bodů

$$\hat{S}_2(i) = \left\{x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right\}, \tag{3.63}$$

která odpovídá jednoprvkové množině buněk

$$S_1(i) = \{C_i\}. \tag{3.64}$$

Krok III: Pro $l = 2, \ldots, k$, přičemž předpokládáme, že již známe

$$\hat{S}_l(i) = \left\{x_{j+1/2}, \ldots, x_{j+l-1/2}\right\}, \tag{3.65}$$

přidáme jeden ze dvou sousedních hraničních bodů $x_{j-1/2}$ nebo $x_{j+l+1/2}$ do množiny bodů podle podmínky:

- pokud
$$|V\left\langle x_{j-1/2},\ldots,x_{j+l-1/2}\right\rangle| < |V\left\langle x_{j+1/2},\ldots,x_{j+l+1/2}\right\rangle|, \tag{3.66}$$
přidáme do množiny $\hat{S}_l(i)$ bod $x_{j-1/2}$, a získáme tak
$$\hat{S}_{l+1}(i) = \left\{x_{j-1/2},\ldots,x_{j+l-1/2}\right\}, \tag{3.67}$$

- jinak přidáme do množiny $\hat{S}_l(i)$ bod $x_{j+l+1/2}$, a získáme tak
$$\hat{S}_{l+1}(i) = \left\{x_{j+1/2},\ldots,x_{j+l+1/2}\right\}. \tag{3.68}$$

Krok IV: Vypočteme hodnoty $q^+_{i-1/2} = p_i(x_{i-1/2})$ a $q^-_{i+1/2} = p_i(x_{i+1/2})$ využitím vztahů (3.58) a (3.59).

Kroky II - IV opakujeme pro všechny buňky $C_i,\ i \in \{1,\ldots,J\}$.

Pro časovou diskretizaci aplikujeme *Rungeovu-Kuttovu metodu* s vlastností TVD. Pro přibližný integrální průměr $Q_i$ v buňce $C_i$ v čase $t$ platí vztah
$$\frac{dQ_i(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x}(\hat{F}_{i+1/2} - \hat{F}_{i-1/2}), \tag{3.69}$$
kde $\hat{F}_{i-1/2} = \mathcal{F}(q^-_{i-1/2}, q^+_{i-1/2})$ je numerický tok v bodě $x_{i-1/2}$ vypočtený numerickou tokovou funkcí splňující jisté podmínky. Těmto podmínkám vyhovuje například numerický tok (3.22) z lokální Laxovy-Friedrichsovy metody, který pro naše schéma využijeme.

Dále uvažujme vektorovou funkci
$$L : Q \to L(Q) \tag{3.70}$$
kde $Q$ je vektor všech přibližných integrálních průměrů na buňkách $C_i$ v určitém časovém kroku a $L(Q)$ jako výsledek dává vektor všech aktualizovaných integrálních průměrů vypočtených pomocí vztahu (3.69), ve kterém jsou využity hodnoty zjištěné při ENO re-

konstrukci, tedy

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_{i-1} \\ Q_i \\ Q_{i+1} \\ \vdots \\ Q_J \end{bmatrix}, \quad L(Q) = \begin{bmatrix} L_1(Q) \\ \vdots \\ L_{i-1}(Q) \\ L_i(Q) \\ L_{i+1}(Q) \\ \vdots \\ L_J(Q) \end{bmatrix}, \tag{3.71}$$

kde

$$L_i(Q) = -\frac{1}{\Delta x}(\hat{F}_{i+1/2} - \hat{F}_{i-1/2}). \tag{3.72}$$

Optimální Rungeovo-Kuttovo schéma třetího řádu je pak dáno jako

$$\begin{aligned} Q^{(1)} &= Q^n + \Delta t L(Q^n), \\ Q^{(2)} &= \frac{3}{4}Q^n + \frac{1}{4}Q^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(Q^{(1)}), \\ Q^{n+1} &= \frac{1}{3}Q^n + \frac{2}{3}Q^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(Q^{(2)}) \end{aligned} \tag{3.73}$$

a je stabilní pro CFL čísla až do velikosti 1. Toto schéma budeme využívat v numerických experimentech.

Schéma, ač je uvedeno pro skalární rovnici, lze zobecnit na soustavu rovnic prováděním rekonstrukce po složkách.

Výsledná metoda je řádu přesnosti $k$ v prostoru a 3 v čase. Možnosti modifikace schématu a detailní odvození a analýzu lze nalézt ve zmiňované literatuře [5].

### 3.3.4 Metoda spektrálních objemů

Metoda spektrálních objemů je pravděpodobně pojmenována dle své příbuznosti s takzvanou *pseudospektrální metodou* ([10]) ve způsobu rekonstrukce řešení. Metoda je detailně popsána v [4]. Výpočetní oblast rozdělíme na disjunktní intervaly označované jako *spektrální objemy*. Každý spektrální objem dále rozdělíme na $k$ tzv. *kontrolních objemů*. Na každém spektrálním objemu provedeme polynomiální rekonstrukci polynomem stupně nejvýše $k-1$, přičemž taková metoda bude mít formální řád $k$.

Označíme $i$-tý spektrální objem jako $S_i$. Výpočetní oblast $\langle a, b\rangle$ je pak sjednocením všech spektrálních objemů, tedy

$$\langle a, b\rangle = \bigcup_{i=1}^{L} S_i, \quad S_i = \left\langle x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right\rangle . \tag{3.74}$$

V každém spektrálním objemu $S_i$ pak provádíme rozdělení na $k$ kontrolních objemů $C_{i,j}$ tak, že

$$C_{i,j} = (x_{i,j-1/2}, x_{i,j+1/2}), \tag{3.75}$$

přičemž

$$x_{i,1/2} = x_{i-1/2}, \quad x_{i,k+1/2} = x_{i+1/2}. \tag{3.76}$$

Rozdělení $S_i$ na kontrolní objemy je možné uvažovat jak ekvidistantní, tak neekvidistantní. V [4] je využito neekvidistatní dělení pomocí takzvaných *Gaussových-Lobatovových bodů*. Toto dělení, které budeme pro naše numerické experimenty využívat, zmenšuje oscilace polynomů při rekonstrukci a vede k vyšší stabilitě metody i přesnosti řešení. Máme-li $S_i$ rovno intervalu $\langle -1, 1\rangle$, jsou Gaussovy-Lobatovovy body definovány jako

$$x_{i,j+1/2} = -\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right), \quad \text{pro } j = \{0, \ldots, k\} \tag{3.77}$$

a pro různá $S_i$ použijeme jednoduchou transformaci. Označme dále

$$h_{i,j} = x_{i,j+1/2} - x_{i,j-1/2}. \tag{3.78}$$

Přibližné integrální průměry v kontrolních objemech $C_{i,j}$ v jistém časovém kroku označíme pro potřeby této metody $Q_{i,j}$. Polynomiální rekonstrukci v každém $S_i$ provádíme tak, aby integrální průměry rekonstrukčního polynomu $p_i(x)$ na všech $C_{i,j}$ souhlasily s integrálními průměry $Q_{i,j}$. Hodnoty $p_i(x_{i,j-1/2})$ jsou podobně jako u metody ENO lineární

kombinací integrálních průměrů $Q_{i,j}$, konkrétně

$$q_{i,j-1/2} = p_i(x_{i,j-1/2}) = \sum_{l=1}^{k} c_{j,l} Q_{i,l}, \tag{3.79}$$

kde obecně pro neekvidistantní hraniční body kontrolních objemů je

$$c_{j,l} = h_{i,l} \sum_{r=l}^{k} \frac{1}{\omega'(x_{i,r+1/2})} \sum_{m=0,m\neq r}^{k} \prod_{q=0,q\neq r,m}^{k} (x_{i,j+1/2} - x_{i,q+1/2}), \tag{3.80}$$

kde

$$\omega(x) = \left(x - x_{i,1/2}\right)\left(x - x_{i,3/2}\right)\cdots\left(x - x_{i,k+1/2}\right). \tag{3.81}$$

Jako příklad uveďme pro $k = 3$ Gausovy-Lobatovovy body $x_{i,j-1/2}$ pro $S_i = \langle -1, 1\rangle$ zapsané v řádkovém vektoru $X$ a jim příslušné koeficienty $c_{j,l}$ zapsané v matici $C$:

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{6} & \frac{19}{12} \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

První sloupec $X$ a $C$ odpovídá $j = 1$ a první řádek matice $C$ odpovídá $l = 1$.

Při transformaci na jiné spektrální objemy se při zachování poměrů velikostí kontrolních podobjemů koeficienty $c_{j,l}$ nemění, a tedy lze tyto koeficienty při neměnné struktuře dělení využít pro všechny spektrální objemy. Při našich výpočtech tak koeficienty $c_{j,l}$ vypočteme předem a následně je jen budeme využívat v průběhu výpočtu.

V základní verzi metody stanovíme numerický tok $F_{i,j-1/2}$ v hraničních bodech kontrolních objemů $x_{i,j-1/2}$ na vnitřku $S_i$ (tj. pro $j = \{2, \ldots, k-1\}$) přímo z analytické tokové funkce jako

$$F_{i,j-1/2} = f(q_{i,j-1/2}). \tag{3.83}$$

V hraničních bodech spektrálních objemů $x_{i-1/2} = x_{i,1/2} = x_{i-1,k+1/2}$ máme k dispozici rekonstruované hodnoty zleva a zprava, tj. $q_{i-1,k+1/2}$ a $q_{i,1/2}$, řešíme tedy Riemannův problém a numerický tok $F_{i,1/2} = F_{i-1,k+1/2}$ stanovíme jako

$$F_{i,1/2} = \mathcal{F}(q_{i-1,k+1/2}, q_{i,1/2}), \tag{3.84}$$

kde $\mathcal{F}$ je funkce splňující předpoklady stejné jako numerická toková funkce $\mathcal{F}$ použitá v metodě ENO. Využijeme tedy stejnou funkci, a to numerický tok lokální Laxovy-Friedrichsovy metody.

Pro integraci v čase pak budeme podobně jako u metody ENO využívat TVD schéma Rungeovy-Kuttovy metody (3.73), přičemž vhledem k mírně odlišnému značení a neekvidistantní síti je

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{1,1} \\ \vdots \\ Q_{i,j} \\ \vdots \\ Q_{L,k} \end{bmatrix}, \quad L(Q) = \begin{bmatrix} L_{1,1}(Q) \\ \vdots \\ L_{i,j}(Q) \\ \vdots \\ L_{L,k}(Q) \end{bmatrix} \tag{3.85}$$

a

$$L_{i,j}(Q) = -\frac{1}{\Delta h_{i,j}}(F_{i,j+1/2} - F_{i,j-1/2}). \tag{3.86}$$

Spektrální metoda vytvořená podle tohoto schématu ale vlastnost TVD ani TVB nemá. Proto se dále zavádějí *limitery*, které potlačují oscilace polynomů v okolí nespojitostí pomocí lokálního snížení řádu metody, přičemž limitery uplatňujeme buď pouze v hraničních bodech spektrálních objemů (SV limitery), nebo ve všech hraničních bodech kontrolních objemů (CV limitery). Dle testů v [4] dosahují CV limitery znatelně přesnějších výsledků, a budeme se tak dále věnovat pouze jim.

Uvažujme tedy nyní, že numerické toky ve všech hraničních bodech kontrolních i spektrálních objemů stanovíme jako

$$F_{i,j+1/2} = \mathcal{F}(\tilde{q}^-_{i,j+1/2}, \tilde{q}^+_{i,j+1/2}), \tag{3.87}$$

kde $\mathcal{F}$ je numerická toková funkce stejná jako v (3.84) a $\tilde{q}^-_{i,j+1/2}$ a $\tilde{q}^-_{i,j+1/2}$ jsou limitované rekonstruované hodnoty. Dále rozložme nelimitované rekonstruované hodnoty $q_{i,j+1/2} = q^-_{i,j+1/2} = q^+_{i,j+1/2}$ na vnitřku $S_i$ jako

$$\begin{array}{rcccl} q^-_{i,j+1/2} & = & Q_{i,j} & + & \Delta q^+_{i,j}, \\ q^+_{i,j+1/2} & = & Q_{i,j+1} & - & \Delta q^-_{i,j} \end{array} \tag{3.88}$$

a na okrajích spektrálních objemů mějme

$$\begin{array}{rcccccl} q_{i-1,k+1/2} & = & q^-_{i,1/2} & = & Q_{i-1,k} & + & \Delta q^+_{i-1,k}, \\ q_{i,1/2} & = & q^+_{i,1/2} & = & Q_{i,1} & - & \Delta q^-_{i,1}. \end{array} \tag{3.89}$$

Limitované hodnoty získáme jako

$$\begin{aligned} \tilde{q}^-_{i,j+1/2} &= Q_{i,j} + \Delta\tilde{q}^+_{i,j}, \\ \tilde{q}^+_{i,j+1/2} &= Q_{i,j+1} - \Delta\tilde{q}^-_{i,j}, \end{aligned} \tag{3.90}$$

kde $\Delta\tilde{q}^-_{i,j}$ a $\Delta\tilde{q}^+_{i,j}$ stanovíme pomocí následujících limiterů:

**CV TVD limiter**

$$\Delta\tilde{q}^-_{i,j} = \text{minmod}(\Delta q^-_{i,j}, Q_{i,j+1} - Q_{i,j+1}, Q_{i,j} - Q_{i,j-1}), \tag{3.91}$$

$$\Delta\tilde{q}^+_{i,j} = \text{minmod}(\Delta q^+_{i,j}, Q_{i,j+1} - Q_{i,j+1}, Q_{i,j} - Q_{i,j-1}). \tag{3.92}$$

Tento limiter je také nazýván *CVTVDM limiter*. Funkce minmod je definovaná vztahem (3.55).

**CV TVB limiter**

$$\Delta\tilde{q}^-_{i,j} = \begin{cases} \Delta q^-_{i,j}, & \text{pokud } |q^-_{i,j}| \le Mh^2_{i,j}, \\ \text{minmod}(\Delta q^-_{i,j}, Q_{i,j+1} - Q_{i,j+1}, Q_{i,j} - Q_{i,j-1}) & \text{jinak}, \end{cases} \tag{3.93}$$

$$\Delta\tilde{q}^+_{i,j} = \begin{cases} \Delta q^+_{i,j}, & \text{pokud } |q^+_{i,j}| \le Mh^2_{i,j}, \\ \text{minmod}(\Delta q^+_{i,j}, Q_{i,j+1} - Q_{i,j+1}, Q_{i,j} - Q_{i,j-1}) & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3.94}$$

Číslo $M$ je závislé na druhé derivaci řešení a je vhodné ho volit jako maximum absolutní hodnoty druhé derivace řešení na výpočetní oblasti. Tento limiter je nazýván *CVTVBM limiter*.

Nedostatkem metody s CVTVDM limiterem je, že dochází ke snížení přesnosti metody i v bodech extrému hladkého řešení. Tímto nedostatkem netrpí metoda s CVTVBM limiterem, která je i dle testů provedených v [4] pro praktické využití nejvhodnější. Je nutné ovšem vhodně zvolit konstantu $M$, jejíž optimální hodnotu předem neznáme a musíme ji většinou vhodně odhadnout. Při volbě $M = 0$ se metoda s CVTVBM limiterem redukuje na metodu s CVTVDM limiterem a ztrácíme přesnost v bodech hladkého extrému. Naopak při volbě příliš vysoké hodnoty $M$ se v řešení mohou objevit i oscilace.

Při použití schématu na soustavu rovnic provádíme rekonstrukci i aplikací limiterů po jednotlivých složkách.

Metoda je formálního řádu přesnosti $k$ v prostoru a 3 v čase. Uvádí se, že metoda druhého řádu (pro $k = 2$) je stabilní pro CFL$\leq 1/2$ a metoda třetího řádu pro CFL$\leq 1/3$.

## 3.4 Srovnání metod s vysokým rozlišením

Zaměřme se nyní na srovnání metod s vysokým rozlišením obecně aplikovatelných na soustavy nelineárních rovnic bez nutnosti řešit přesně Riemannův problém, a to tedy na metody MUSTA, ENO a metodu spektrálních objemů. Jedná se o vlastní nepřevzaté závěry.

### 3.4.1 Výpočetní náročnost

Metoda MUSTA$_K$ využívá $K$-stupňové přibližné řešení Riemannova problému ve všech hraničních bodech buněk. Nevýhodou tohoto postupu je, že počet operací se zvyšuje přibližně lineárně s $K$.

Metoda ENO a metoda spektrálních objemů používají odlišný přístup založený na polynomiální rekonstrukci řádu $k$. Zatímco metoda spektrálních objemů využívá rekonstrukci na optimální neekvidistantní síti, metoda ENO využívá *adaptivní šablonu* na ekvidistantní síti. Výhodou přístupu metody spektrálních objemů je, že počet operací zůstává se stupněm $k$ přibližně konstantní a nezvyšuje se tak výpočetní doba. U metody je ENO je třeba provést s rostoucím $k$ více operací, ale počet operací nenarůstá tak strmě jako u metody MUSTA.

Potřeba neekvidistantního dělení u metody spektrálních objemů s sebou může nést nevýhodu v podobě nutnosti volit menší $\Delta t$ pro dosažení stejného CFL čísla jako u metod s ekvidistantní sítí při stejném počtu buněk. Tuto vlastnost podrobíme zkoumání při numerických experimentech.

### 3.4.2 Paralelizovatelnost

Metodu MUSTA lze efektivně využívat na paralelních architekturách. Každé výpočetní jednotce může být svěřena jistá část výpočetní oblasti $\langle x_{A-1/2}, x_{B+1/2} \rangle$ a pro stanovení hodnot $Q_i^{n+1}$ pro $i \in \{A, \ldots, B\}$ je zapotřebí dodat dvě krajní hodnoty $Q_{A-1}^n$ a $Q_{B+1}^n$. Nezávisle na velikosti výpočetní oblasti a počtu stupňů $K$ je tak nutné předávat v každém časovém kroku dvě hodnoty.

Metodu ENO, využívající pro rekonstrukci adaptivní šablonu, lze paralelizovat poněkud méně efektivně. Aby mohla metoda $k$-tého řádu pracovat na výpočetní oblasti

$\langle x_{A-1/2}, x_{B+1/2}\rangle$, je potřeba předat v každém kroku až $2(k-1)$ okolních hodnot $Q_j^n$ a dvě krajní hodnoty $q^-_{A-1/2}$ a $q^+_{B+1/2}$ stanovené z polynomiální rekonstrukce na vedlejších buňkách. Je nutné tak předávat až $2k$ hodnot.

Metodu spektrálních objemů lze efektivně paralelizovat přidělením jistého počtu sousedících spektrálních objemů $S_i$ každé výpočetní jednotce, tedy přidělením oblasti $\langle x_{A-1/2}, x_{B+1/2}\rangle$ pro $i \in \{A, \ldots, B\}$. V každém kroku je nutné předat dvě krajní hodnoty $q_{A-1,k+1/2}$ a $q_{B+1,1/2}$ stanovené pomocí polynomiální rekonstrukce na $S_{A-1}$ a $S_{B+1}$. Pro využití CV limiterů navíc ještě potřebujeme dvě krajní hodnoty $Q^n_{A-1,k}$ a $Q^n_{B+1,k}$. Je tak potřeba předávat v každém kroku 4 hodnoty.

# Kapitola 4

# Úlohy a numerické experimenty

V této kapitole podrobíme všechny v práci popsané metody numerickým experimentům. Veškeré uvedené výsledky jsou vlastní, nepřevzaté.

## 4.1 Poznámky k experimentům

### 4.1.1 Přesné entropické řešení a chyba přibližného řešení

Přibližné řešení úlohy získané pomocí numerických metod budeme porovnávat s přesným entropickým řešení úlohy. Je třeba si uvědomit, že bodové hodnoty přesného řešení a integrální průměry přesného řešení na jednotlivých buňkách se obecně liší. V grafech budeme přesné řešení zobrazovat plnou čarou a přibližné řešení ve formě integrálních průměrů na buňkách budeme zobrazovat značkami umístěnými uprostřed buněk.

Chyba přibližného řešení v čase $t_n$ se nejběžněji stanovuje v normě $L_1$ nebo $L_\infty$ a vypočte se jako

$$E_1 = \sum_i |Q_i^n - q_i^n| \Delta x_i, \tag{4.1}$$

respektive

$$E_\infty = \max_i |Q_i^n - q_i^n|, \tag{4.2}$$

kde $Q_i^n$ je přibližný integrální průměr na buňce $C_i$ získaný numerickým řešení úlohy a $q_i^n$ je integrální průměr přesného řešení na buňce $C_i$.

### 4.1.2 Volba $\Delta t/\Delta x$ a určení CFL čísla

Při experimentech budeme vyšetřovat závislost chyby přibližného řešení na volbě $\Delta t$ při konstantní velikosti buněk $\Delta x$ a počtu buněk $N$ na výpočetní oblasti. Poměr $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ přímo souvisí s CFL číslem, které se stanoví ze vztahů (3.12) pro skalární rovnice nebo (3.13) pro soustavu rovnic. Hodnota $\max_j |f'(Q_j^n)|$ se ale pro každé konkrétní přibližné řešení může lišit, například při vzniku umělých oscilací nebo snížením přesnosti v bodech extrémů řešení.

U metody spektrálních objemů navíc není síť ekvidistantní, máme k dispozici rozměry buněk $\Delta h_{i,j}$ a při stejném počtu buněk na jisté oblasti mají buňky na okrajích spektrálních objemů menší rozměr než je $\Delta x$ u ekvidistantní sítě, a pro dosažení stejného CFL čísla jako u metody s ekvidistantní sítí tak musíme volit menší hodnotu $\Delta t$.

Proto zavedeme pro metodu spektrálních objemů hodnotu $\Delta x$ jako průměrnou hodnotu $\Delta h_{i,j}$, tedy

$$\Delta x = \frac{\sum_{i,j} \Delta h_{i,j}}{N}, \tag{4.3}$$

a pro přehlednější porovnání vlivu volby $\Delta t$ na chybu řešení budeme do grafu vynášet závislost chyby na hodnotě

$$C = \max_q |f'(q)| \frac{\Delta t}{\Delta x}, \tag{4.4}$$

kde $\max_q |f'(q)|$ je maximální hodnota derivace tokové funkce pro všechny možné stavy $q$ přesného entropického řešení. Hodnota $\Delta x$ je na jisté výpočetní oblasti při konstantním počtu buněk $N$ nezávislá na použitém dělení.

V těchto grafech budeme zobrazovat chyby řešení $E_1$ v závislosti na hodnotě $C = \max_q |f'(q)| \frac{\Delta t}{\Delta x}$ pro vybrané hodnoty $\Delta t$ tak, aby $C$ bylo z intervalu $\langle \frac{1}{10}, 1 \rangle$. Pokud metoda pro dané $\Delta t$ nekonverguje, není chyba řešení do grafu zahrnuta.

Pokud se totální variace přibližného řešení skalární úlohy zvýší o hodnotu větší než tolerance $\epsilon \approx 10^{-2}$, je to v grafu označeno zdvojením značky, přičemž velikost značky je úměrná velikosti zvýšení totální variace. V úloze pro soustavu Saint-Venantových rovnic je pak v grafech stejným způsobem označeno, když je totální variace první složky přibližného řešení větší než totální variace první složky přesného řešení.

### 4.1.3 Výpočetní náročnost

Výpočetní náročnost schémat budeme experimentálně porovnávat pomocí měření doby výpočtu řešení úlohy. Doba konkrétního výpočtu bude v grafech značena jako $T$ a je udá-

vána v sekundách. Tento způsob srovnání má pouze orientační charakter a může být ovlivněn řadou faktorů, jako je konfigurace výpočetní jednotky, použitý software a v neposlední řadě případná optimalizace jednotlivých algoritmů.

Schémata byla implementována v programovém prostředí MATLAB R2011b.

**Konfigurace sestavy** Procesor AMD E-450 1.65GHz, 4.00 GB RAM, Windows7 64bit.

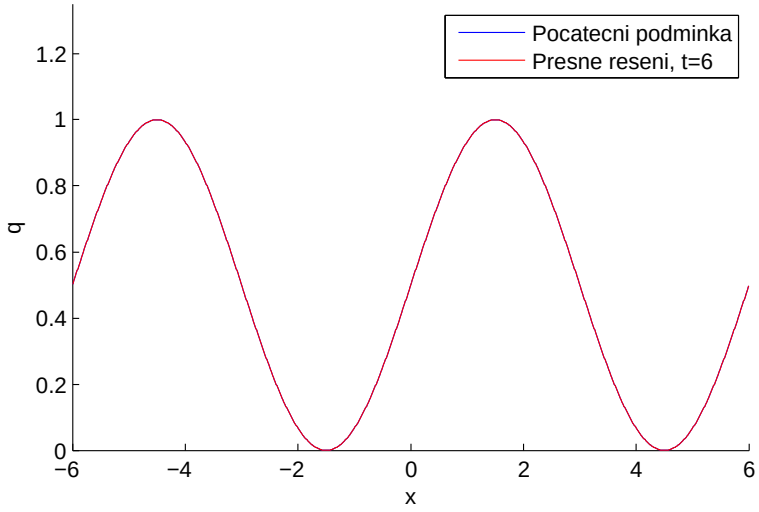
## 4.2 Advekční rovnice - hladké řešení

### Zadání úlohy a přesné řešení

Úloha pro advekční rovnici s periodickou okrajovou podmínkou bude mít tvar

$$\begin{array}{rcll} q_t + q_x & = & 0, & x \in \langle -6, 6\rangle\,, \quad t \in (0, 6\rangle\,, \\ q(x,0) & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right), & x \in \langle -6, 6\rangle\,, \\ q(-6,t) & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin(-\frac{\pi(6+t)}{3}), & t \in (0, 6\rangle\,. \end{array} \tag{4.5}$$

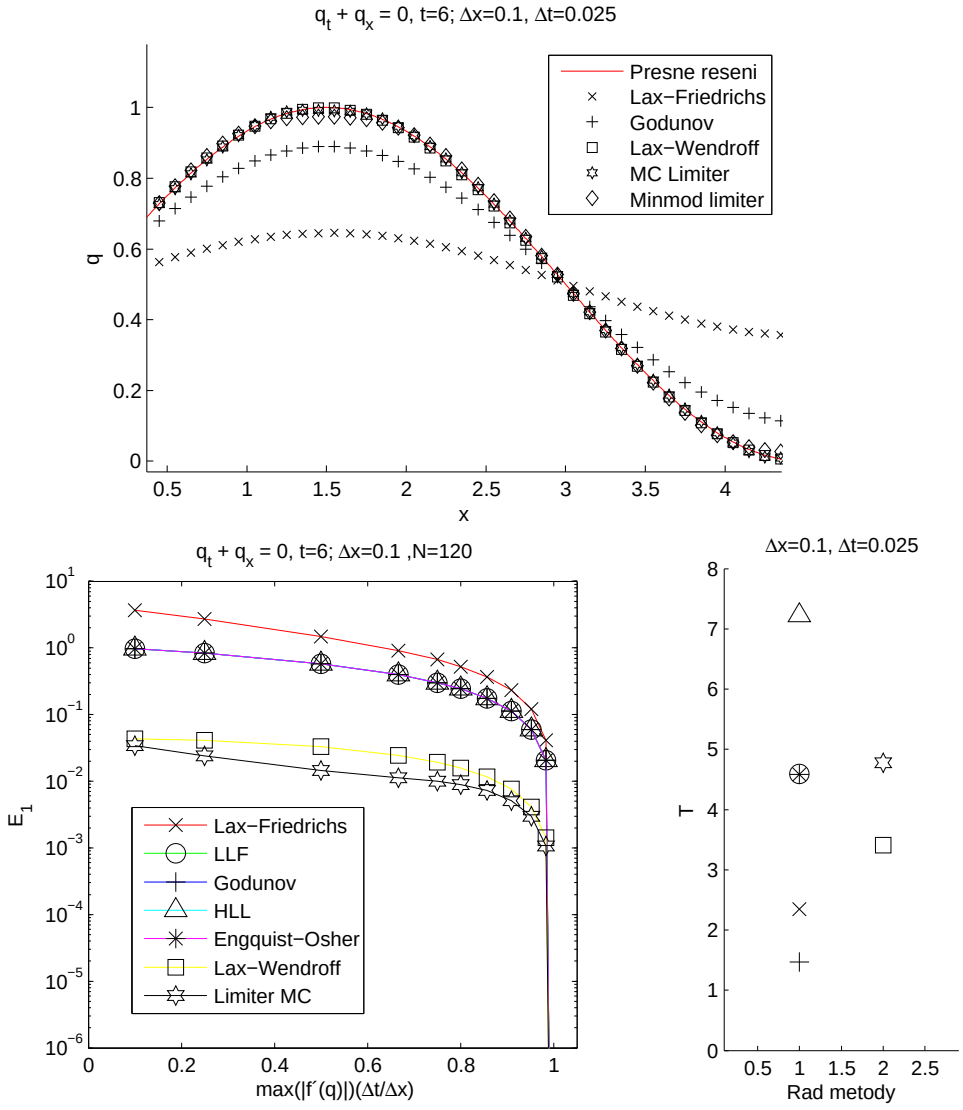
Entropické řešení je třídy $C^\infty$ a v časech $t = 6n,\ n \in \mathbb{N}$, je shodné s počáteční podmínkou. Hledejme tedy přibližné řešení v čase $t = 6$.




Obrázek 4.1: Advekční rovnice - počáteční podmínka a entropické řešení

## Základní metody a metody druhého řádu s TVD limitery

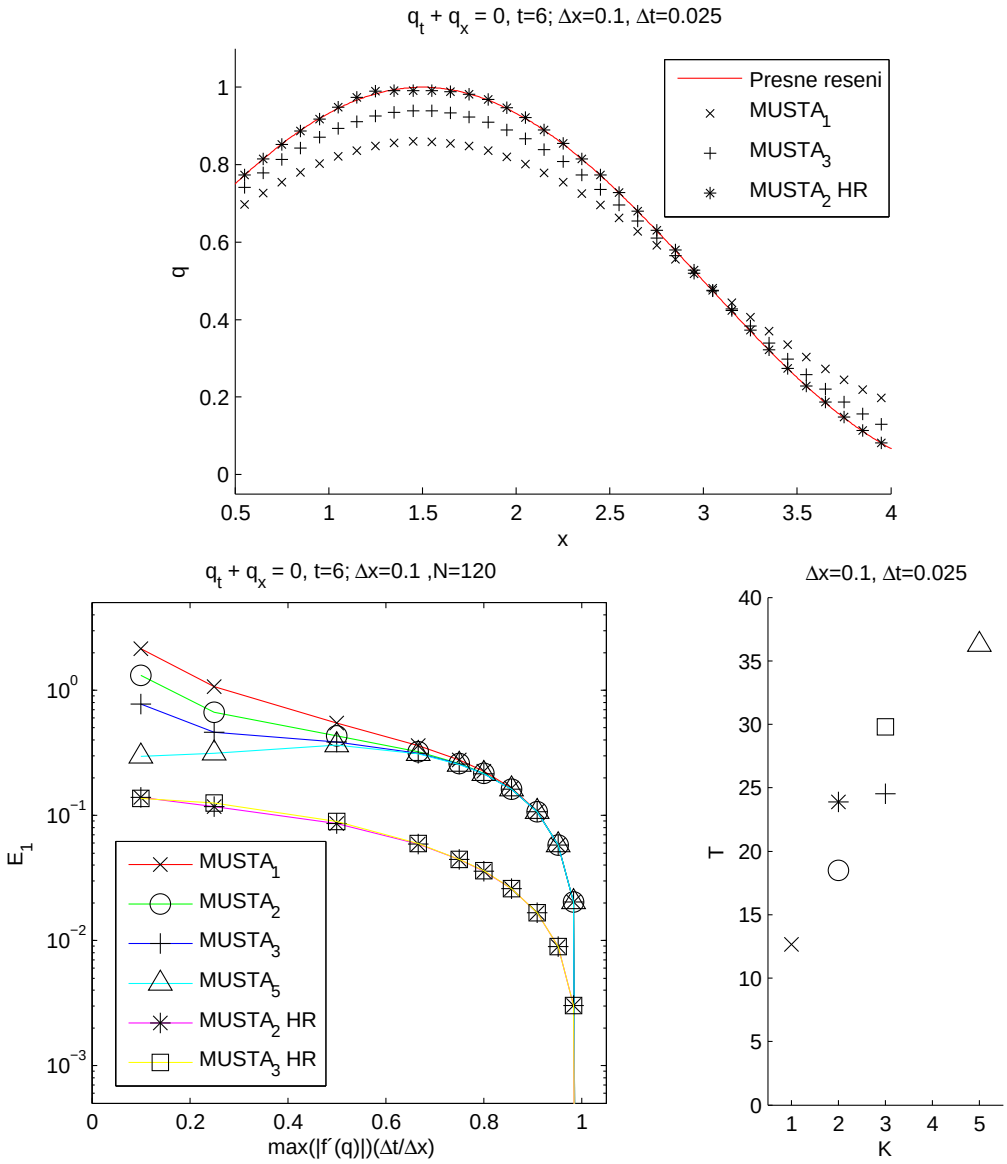
Pro advekční rovnici dávají LLF, Godunovova metoda, HLL a Engquistova-Osherova metoda identické výsledky. Pro $C = \text{CFL} = 1$ dostáváme od všech metod přesná řešení. Se snižujícím se CFL se přesnost výrazně snižuje. Metody druhého řádu dosahují znatelně vyšší přesnosti. U metody s minmod limiterem se výrazněji projevuje snížení řádu přesnosti v extrému řešení. Všechny metody jsou stabilní pro všechna $C = \text{CFL} \leq 1$.




Obrázek 4.2: Advekční rovnice - základní metody

## Metoda MUSTA

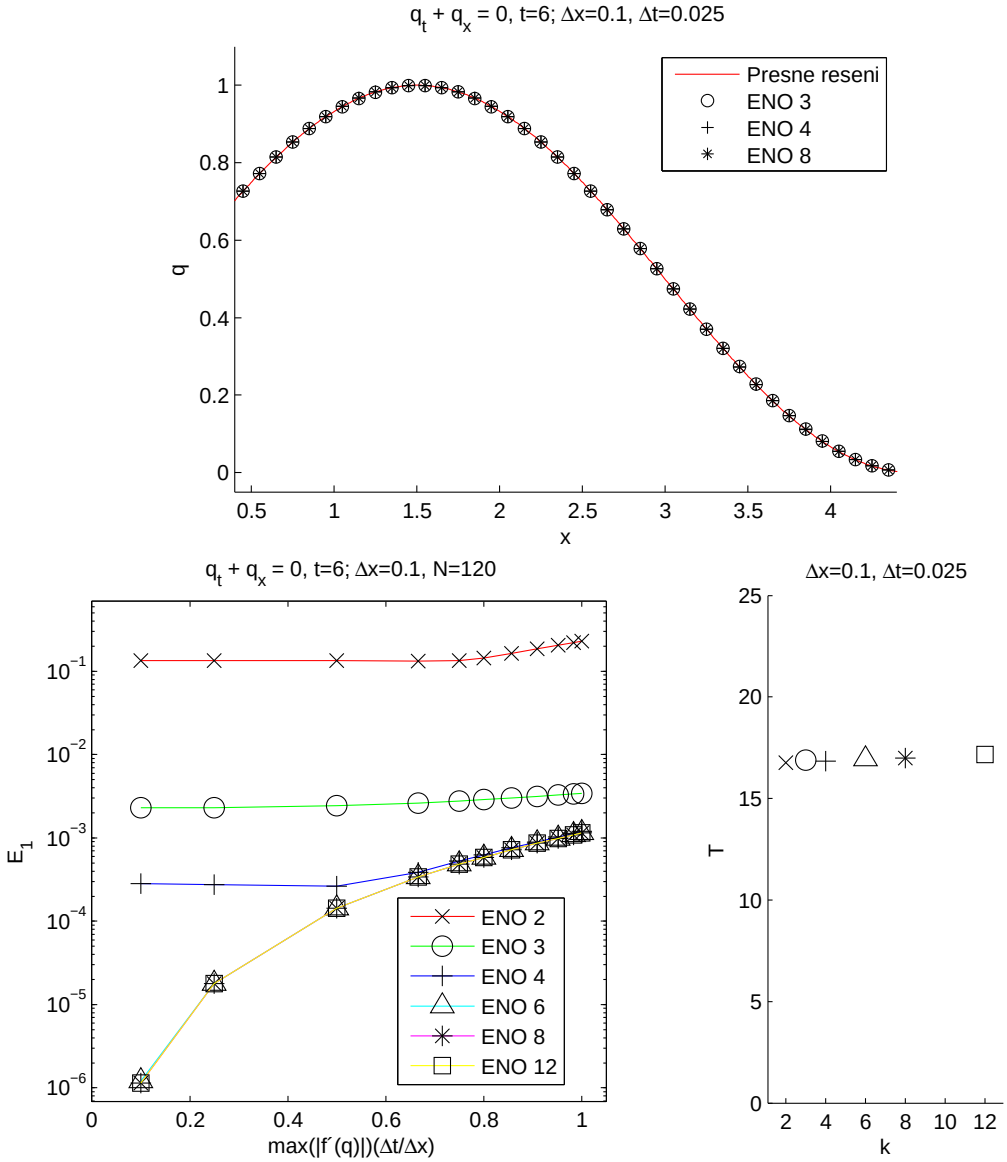
U metody MUSTA se projevuje strmý nárůst výpočetní doby s počtem stupňů $K$. Pro $C = \mathrm{CFL} = 1$ dostáváme přesné řešení. S nižším CFL výrazně narůstá velikost numerické difúze a přesnost se snižuje. Metoda MUSTA s TVD rekonstrukcí druhého řádu (značená jako MUSTA$_K$ HR) pro tuto úlohu podává přesnější výsledky.




Obrázek 4.3: Advekční rovnice - metoda MUSTA

## Metoda ENO

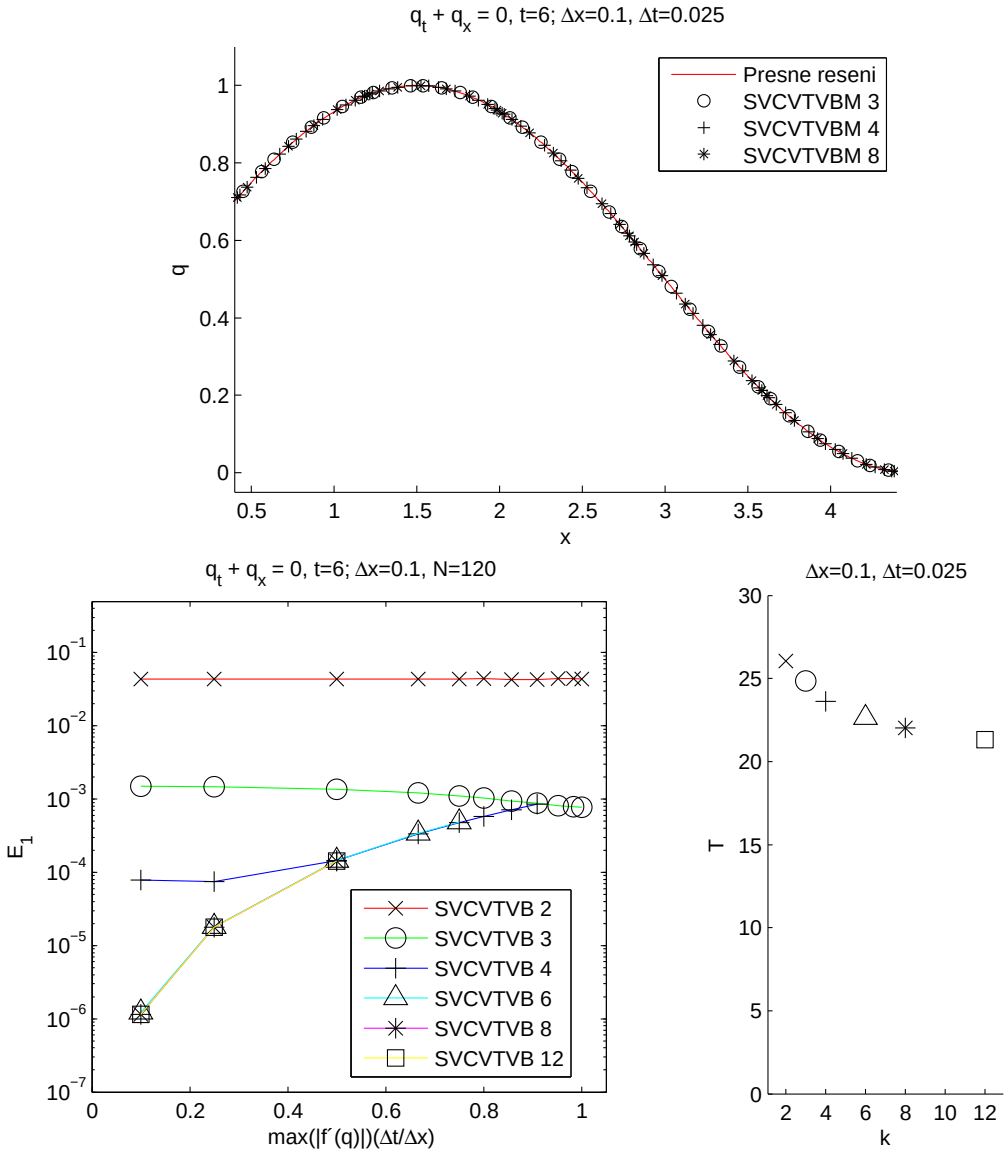
Metoda ENO pro toto hladké řešení podává velmi přesné výsledky. S nižším CFL se přesnost zvyšuje (schéma je 3. řádu v čase). U metody vyšších řádů se projevuje dominance chyby způsobené časovým krokem, zatímco u metody řádu nižšího než 5 se pro $C \leq 1/2$ projevuje chyba způsobená prostorovou diskretizací. Metoda všech testovaných řádů je stabilní pro $C \leq 1$.




Obrázek 4.4: Advekční rovnice - metoda ENO

## Metoda spektrálních objemů

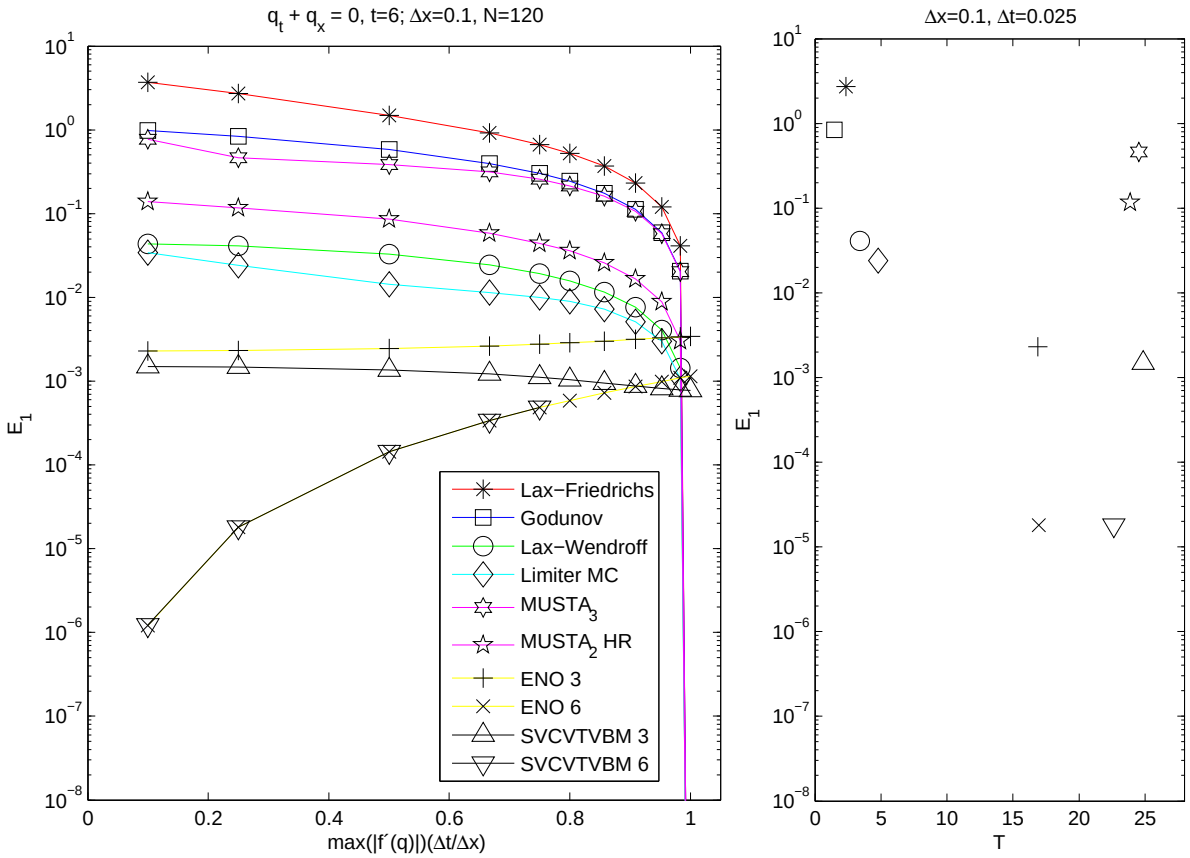
Metoda podává velmi přesné výsledky. Projevuje se nutnost volit nižší $\Delta t$ pro metodu vyšších řádů - v tomto případě platí, že například metoda 12. řádu je stabilní pro $C \leq 1/2$. Pro metodu nižšího než pátého řádu je pro $C \leq 1/2$ dominantní chyba prostorové diskretizace. Konstanta $M$ pro CV limiter je volena jako 0.79.




Obrázek 4.5: Advekční rovnice - metoda spektrálních objemů

## Porovnání výsledků

V této úloze platí, že metody vyšších řádů podávají přesnější výsledky. Metoda MUSTA s vyšším počtem stupňů nedosahuje výrazně lepších výsledků a metoda ENO a metoda spektrálních objemů jsou znatelně efektivnější. U metody spektrálních objemů se projevila nutnost volit nižší $\Delta t$ v porovnání s ostatními metodami, způsobená neekvidistantní diskretizací. Tato diskretizace ovšem zase přináší vyšší přesnost rekonstrukce než diskretizace metody ENO, jak je vidět například v porovnání metod 3. řádu. U metod ENO a spektrálních objemů vyššího než čtvrtého řádu je pro $C \in \langle 0.1, 1 \rangle$ dominantní chyba časové diskretizace.




Obrázek 4.6: Advekční rovnice - srovnání metod

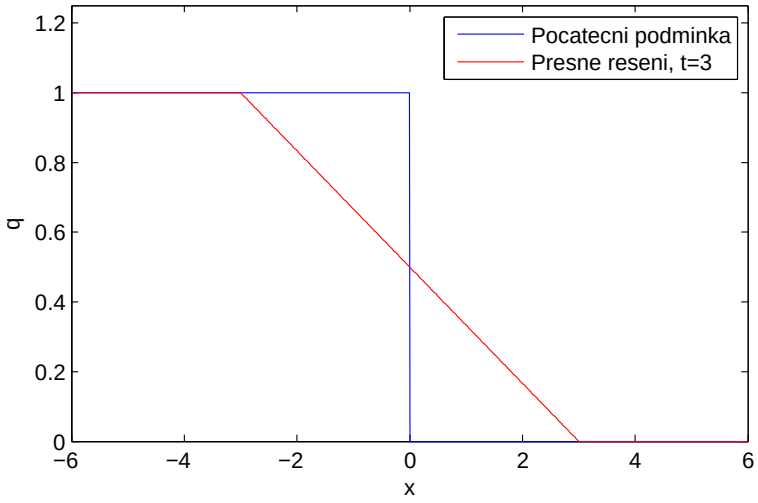
## 4.3 Rovnice dopravního proudu - vlna zředění

### Zadání úlohy a přesné řešení

Uvažujme Riemannův problém pro rovnici dopravního proudu ve tvaru

$$\begin{aligned} q_t + (1-2q)\, q_x &= 0, \quad x \in \langle -6, 6\rangle\,, \quad t \in (0, 3\rangle\,, \\ q(x,0) &= \begin{cases} 1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.6}$$

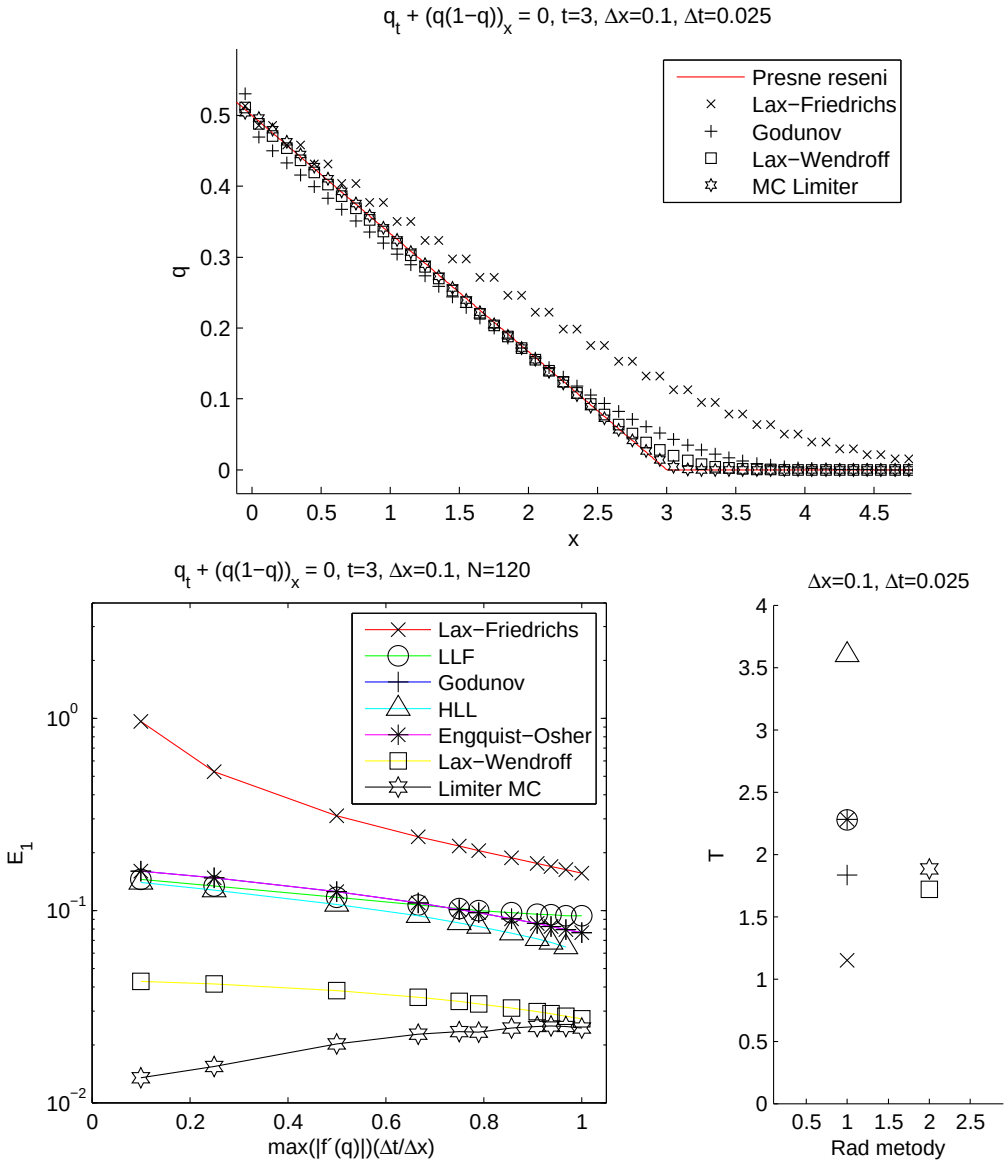
Entropickým řešením je vlna zředění (2.24). Řešení je spojité, ale není hladké. Budeme hledat přibližné řešení v čase $t = 3$.




Obrázek 4.7: Rovnice dopravního proudu - počáteční podmínka a entropické řešení

## Základní metody a metody druhého řádu s TVD limitery

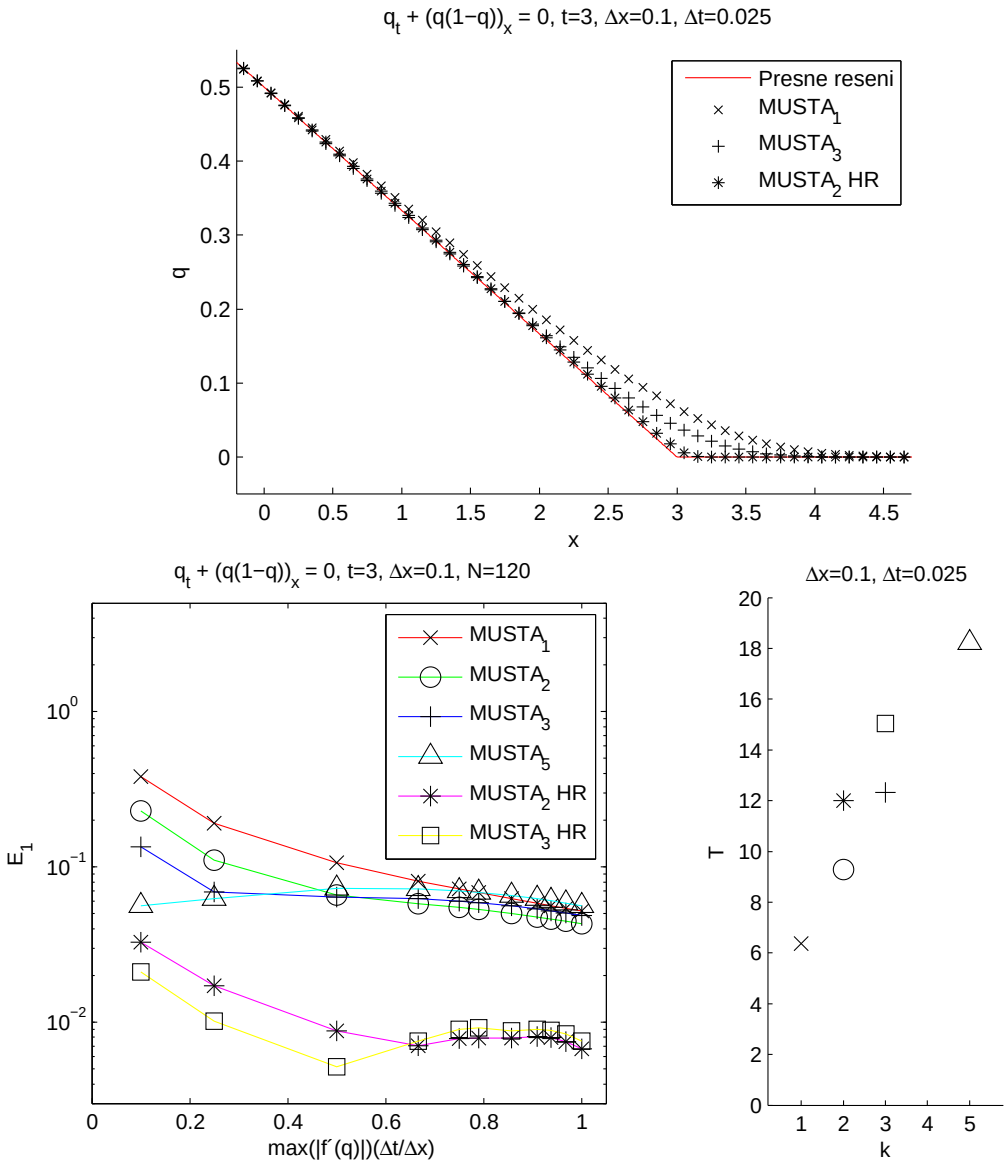
Metody jsou stabilní pro $C \leq 1$. Metody s TVD limitery dosahují velmi dobrých výsledků. Lax-Wendroffova metoda nevytváří pro tuto úlohu oscilace, ač se zde vyskytují body, ve kterých řešení není hladké.




Obrázek 4.8: Rovnice dopravního proudu - základní metody

## Metoda MUSTA

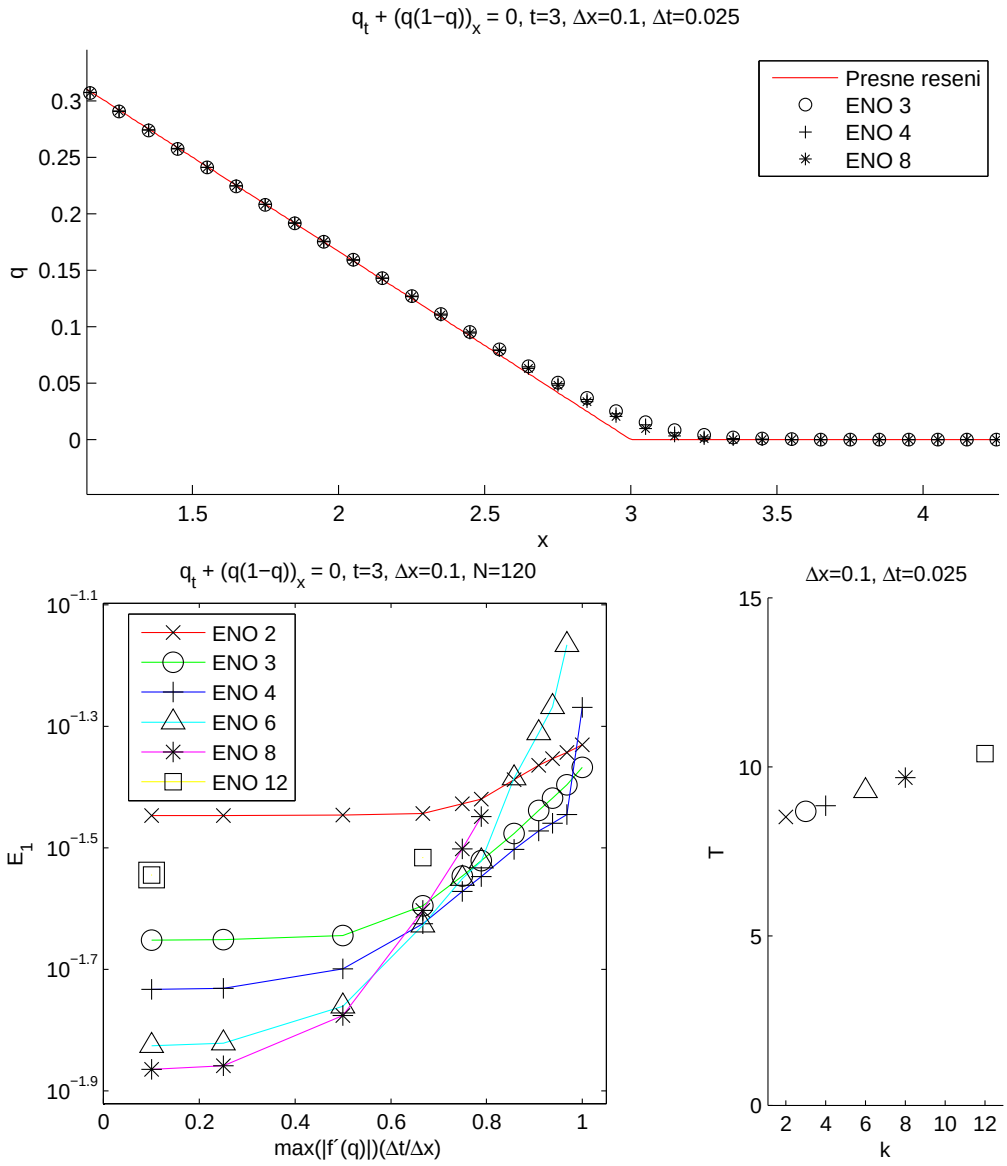
Metoda s TVD rekonstrukcí podává dle očekávání přesnější výsledky bez podstatného navýšení výpočetní doby oproti metodě v základní podobě. Testované metody jsou stabilní pro $C \leq 1$, což vychází z použití schémat prvního řádu. Se zvyšováním počtu stupňů $K$ nedosahujeme výrazně přesnějších výsledků, ale doba výpočtu se znatelně prodlužuje.




Obrázek 4.9: Rovnice dopravního proudu - metoda MUSTA

## Metoda ENO

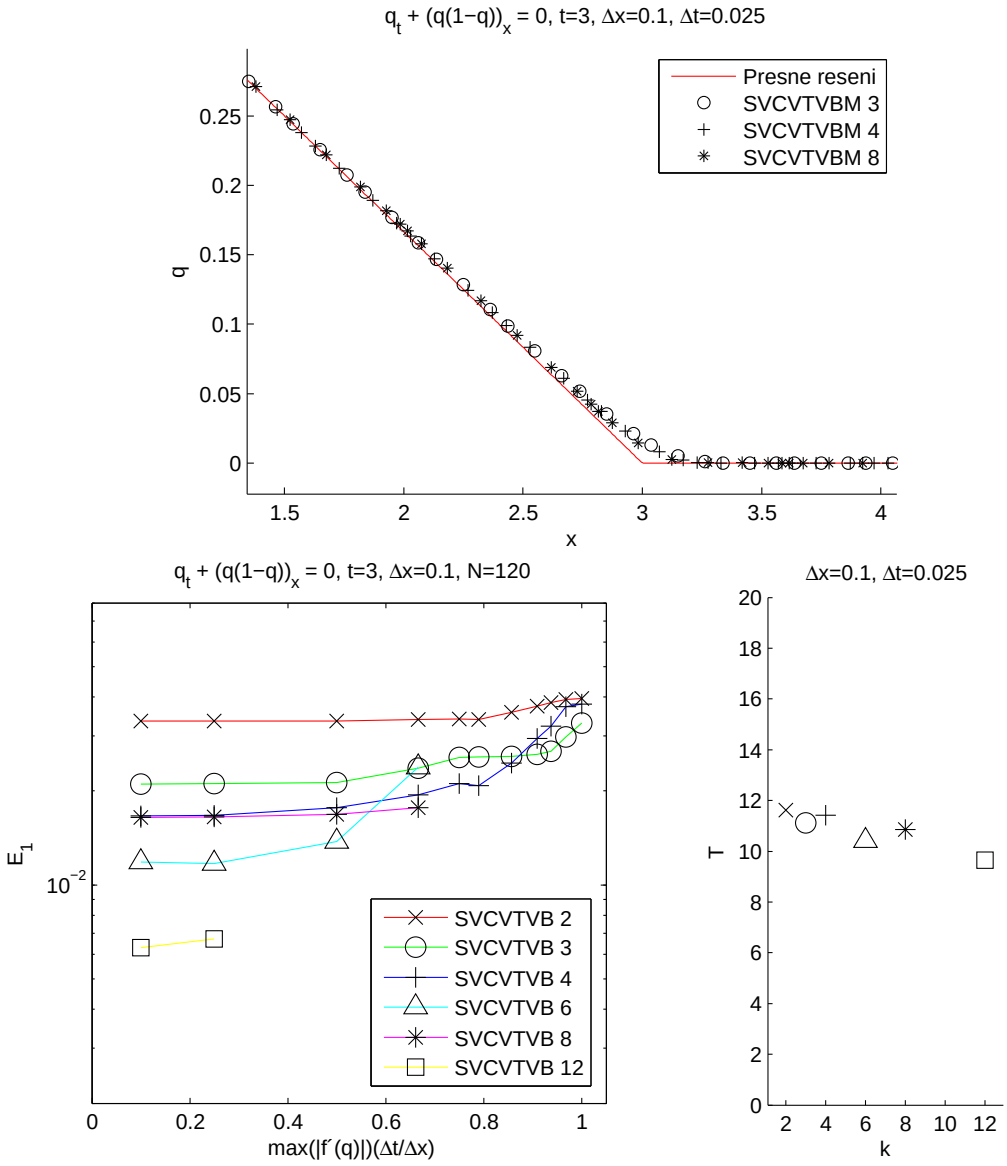
V této úloze ENO metoda nepodává výrazně lepší výsledky než metody prvního a druhého řádu. Se zvyšováním řádu je nutné volit nižší $\Delta t$ pro zachování stability. Metoda 12. řádu se již chová velmi nestabilně. To je pravděpodobně způsobeno nutností provést na některých buňkách polynomiální rekonstrukci přes bod, ve kterém není řešení hladké.




Obrázek 4.10: Rovnice dopravního proudu - metoda ENO

## Metoda spektrálních objemů

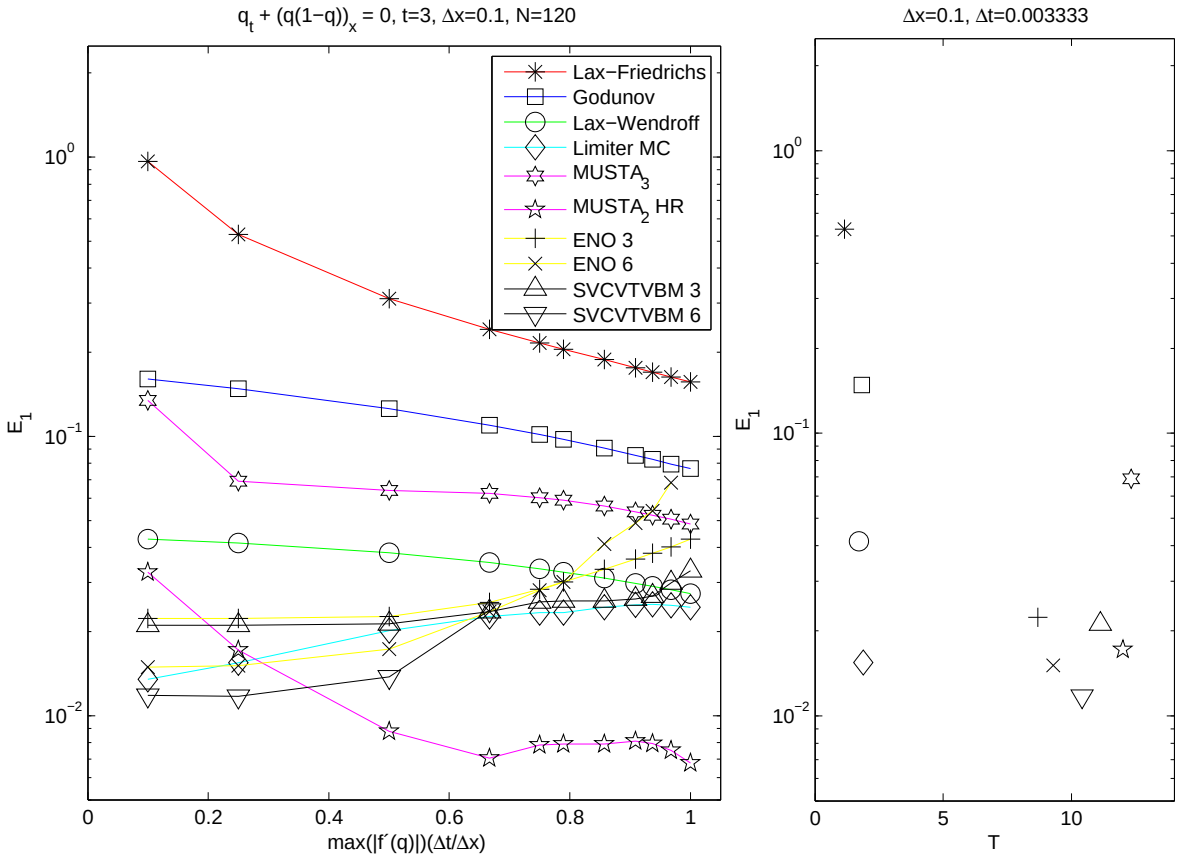
Výsledky jsou v přesnosti srovnatelné s metodou ENO. S vyšším řádem je nutno volit menší $\Delta t$, aby byla splněna CFL podmínka. Díky aplikaci limiterů je pro odpovídající hodnoty $\Delta t$ stále stabilní i metoda 12. řádu. Ovšem vyšší řád metody nemusí znamenat přesnější výsledek, jak je vidět u metody 8. řádu, která podává výsledky méně přesné než metoda 6. řádu. Konstanta $M$ je volena jako 0.




Obrázek 4.11: Rovnice dopravního proudu - metoda spektrálních objemů

## Porovnání výsledků

Pro tuto úlohu se jako nejefektivnější metody osvědčily metody 2. řádu s TVD limitery. Metoda spektrálních objemů poskytuje rovněž přesné výsledky a díky použití limiterů je stabilní i pro vyšší řády, ale zvyšováním řádu metody nedosáhneme výraznějšího zlepšení přesnosti. Metoda ENO řádu vyššího než 8 se jevila nestabilně. Pro vyšší CFL nepřesnějších výsledků dosáhlo schéma MUSTA s TVD rekonstrukcí.




Obrázek 4.12: Rovnice dopravního proudu - srovnání metod

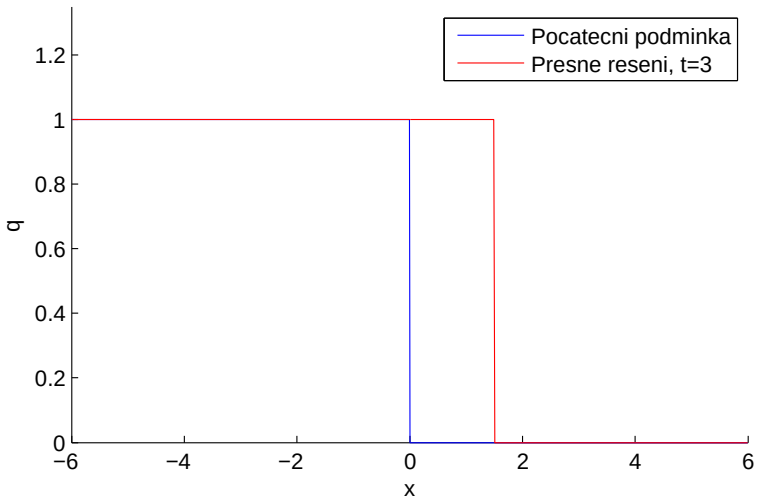
## 4.4 Burgersova rovnice - rázová vlna

### Zadání úlohy a přesné řešení

Mějme zadán Riemannův problém se stejnými počátečními hodnotami jako u předchozí úlohy, ale tentokrát pro Burgersovu rovnici. Úloha má tedy tvar

$$\begin{aligned} q_t + q\, q_x &= 0, \quad x \in \langle -6, 6\rangle\,, \quad t \in (0, 3\rangle\,, \\ q(x,0) &= \begin{cases} 1 & \text{pro } x < 0, \\ 0 & \text{pro } x > 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4.7}$$

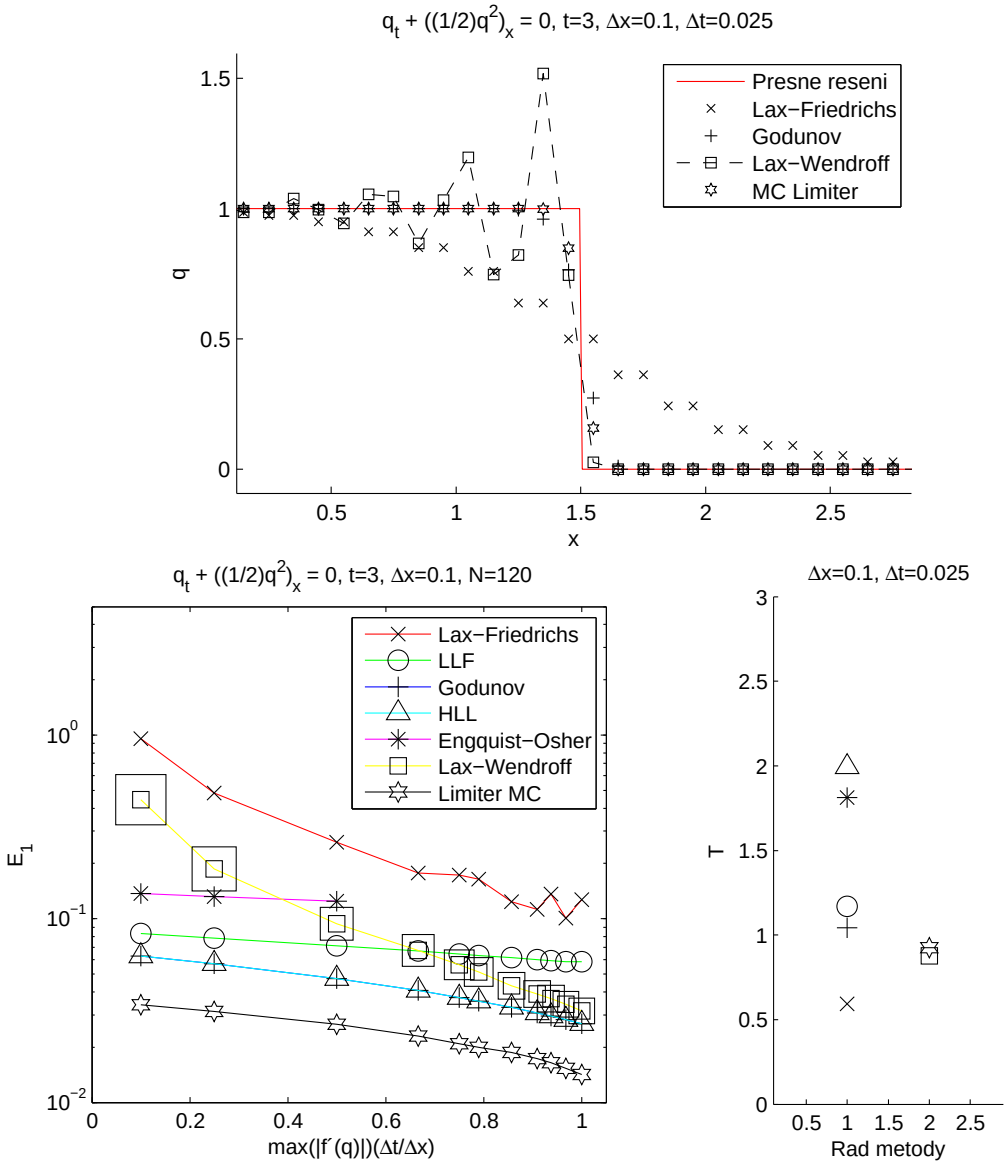
Entropickým řešením je rázová vlna šířící se konstantní rychlostí $s$ (2.20), řešení je tedy nespojité. Hledejme přibližné řešení v čase $t = 3$.




Obrázek 4.13: Burgersova rovnice - počáteční podmínka a entropické řešení

## Základní metody a metody druhého řádu s TVD limitery

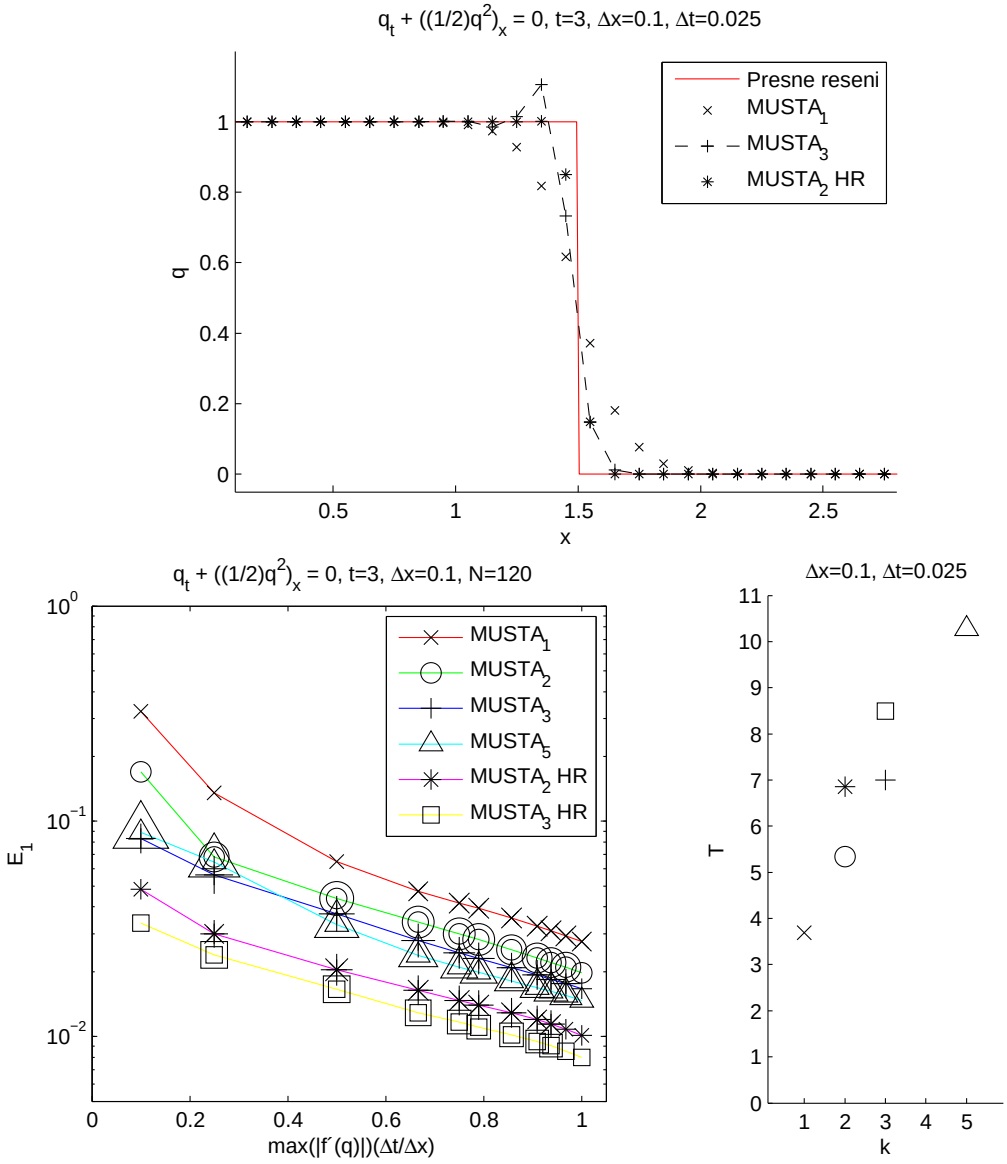
Pro tuto úlohu se u Lax-Wendroffovy metody projevuje vznik oscilací. Metody druhého řádu s TVD limitery, které tyto oscilace potlačují, dosahují nejlepších výsledků. Engquistova-Osherova metoda je pro tuto úlohu stabilní pro $C \leq 1/2$, ostatní testované metody pro $C \leq 1$.




Obrázek 4.14: Burgersova rovnice - základní metody

## Metoda MUSTA

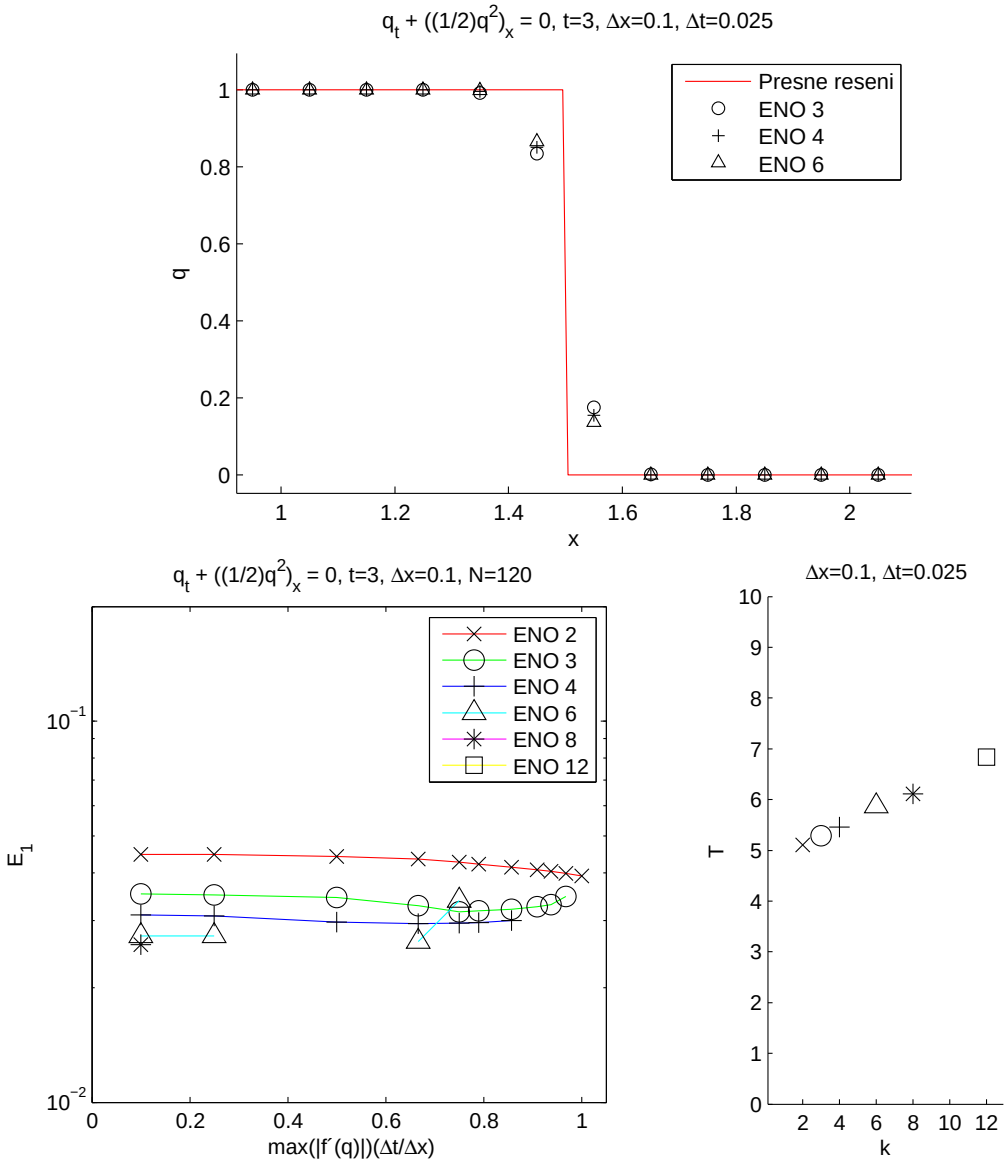
U metody MUSTA se objevuje na okraji rázové vlny překmit hodnoty řešení. S vyšším počtem stupňů je velikost překmitu dokonce větší. S časem se ale jeho maximální velikost nezvyšuje. Metoda s TVD rekonstrukcí poskytuje přesnější výsledky, i u ní se ale v jisté míře tento jev vyskytuje. Metoda MUSTA v základní podobě je v přesnosti srovnatelná s metodami prvního řádu, výpočetní doba je ale výrazně vyšší.




Obrázek 4.15: Burgersova rovnice - metoda MUSTA

## Metoda ENO

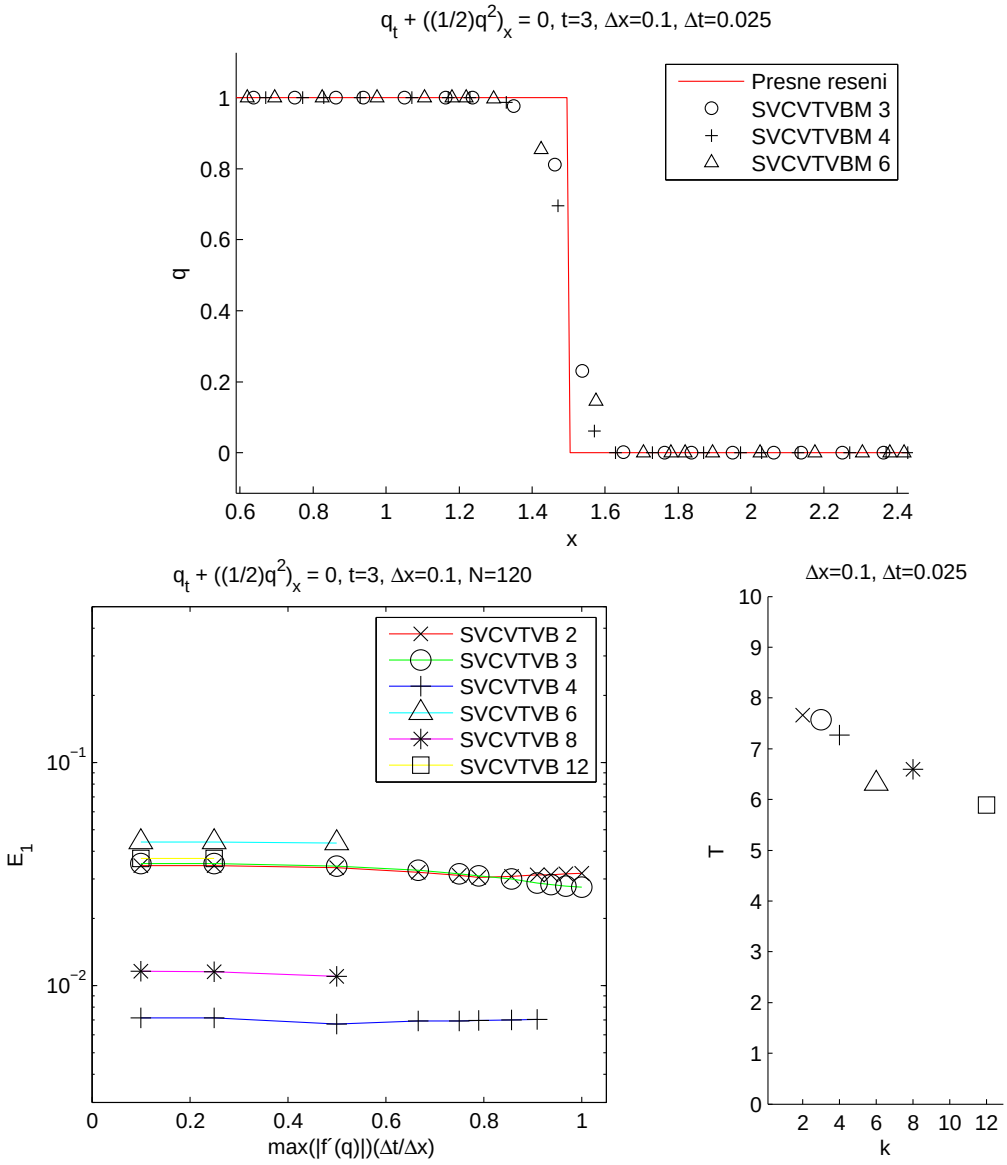
Metoda ENO vyššího než 4. řádu se jeví jako poměrně nestabilní. To je zřejmě způsobenou polynomiální rekonstrukcí na ekvidistantní síti, která není pro tyto potřeby ideální. Metoda 4. řádu podává v porovnání s metodou nižších řádů srovnatelné výsledky, které nejsou výrazně přesnější než výsledky základních metod prvního řádu.




Obrázek 4.16: Burgersova rovnice - metoda ENO

## Metoda spektrálních objemů

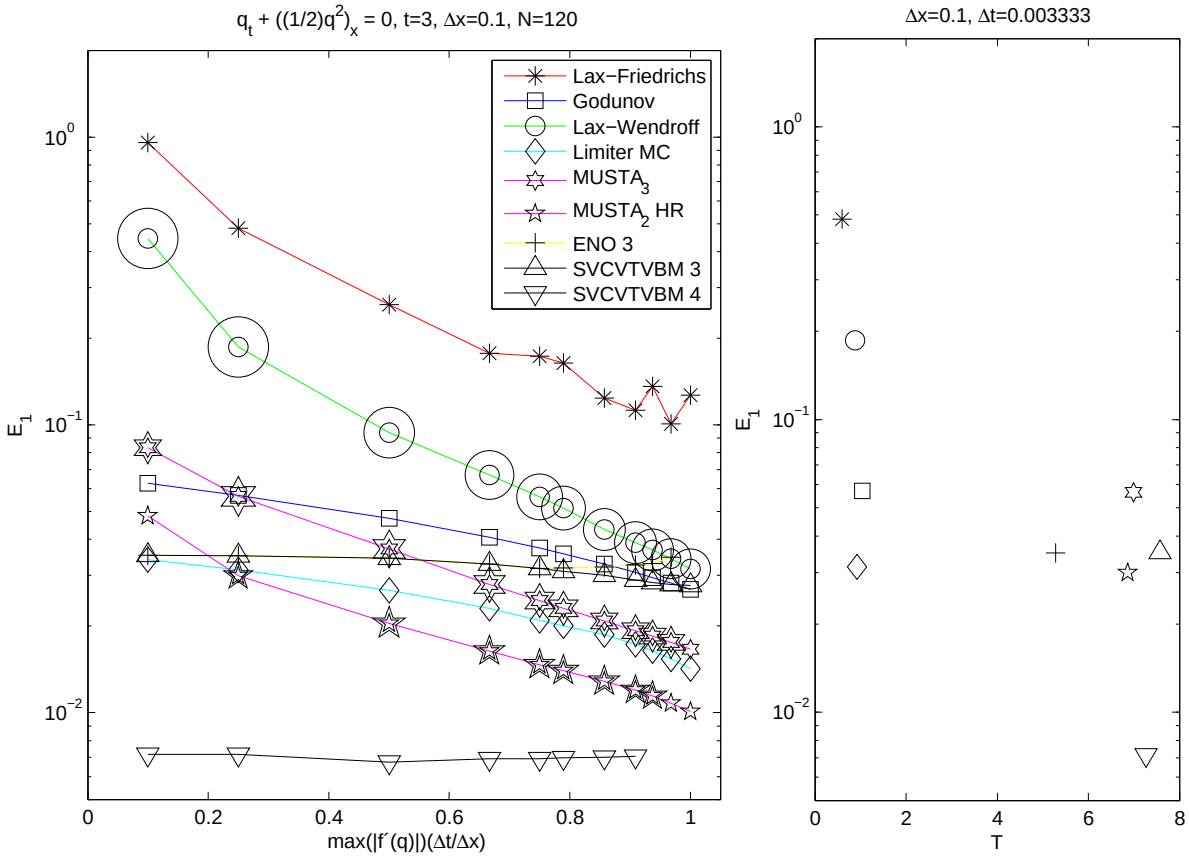
Metoda spektrálních objemů se ukázala být stabilní i v této úloze. Při volbě vhodného $\Delta t$ lze bez obav využívat i schémata vyšších řádů, která ovšem nezaručují vždy zvýšení přesnosti. Nejpřesnější se ukázala být metoda 4. řádu. Konstanta pro CV limiter je volena $M = 0$.




Obrázek 4.17: Burgersova rovnice - metoda spektrálních objemů

## Porovnání výsledků

V této úloze se projevilo, že ENO metoda vyšších řádů nemusí být příliš stabilní. Metoda spektrálních objemů dosáhla při nižších řádech shodné přesnosti, ale ve vyšších řádech si zachovává na rozdíl od metody ENO stabilitu. Nejvhodnější pro tuto úlohu je metoda spektrálních objemů řádu 4. Dále pak zejména při CFL blízkým 1 podávají dobré výsledky metody 2. řádu s TVD limitery a metoda MUSTA s TVD rekonstrukcí. U metody MUSTA se ovšem projevil překmit hodnoty řešení na okraji rázové vlny, a metoda tak zvyšuje totální variaci řešení.




Obrázek 4.18: Burgersova rovnice - srovnání metod

## 4.5 Saint-Venantovy rovnice - protržení přehrady

### Zadání úlohy a přesné řešení

Mějme zadánu takzvanou *úlohu protržení hráze* (známou pod anglickým názvem *dam-break problem*). Jedná se o Riemannův problém pro Saint-Venantovy rovnice, který bude mít v našem případě tvar

$$\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x \in \langle -6, 6\rangle, \quad t \in (0, 1\rangle, \tag{4.8}$$

$$u(x,0) = 0, \quad h(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \leq 0, \\ \frac{1}{4} & \text{pro } x > 0, \end{cases}$$

kde konstantu $g$ volíme pro jednoduchost jako 10.

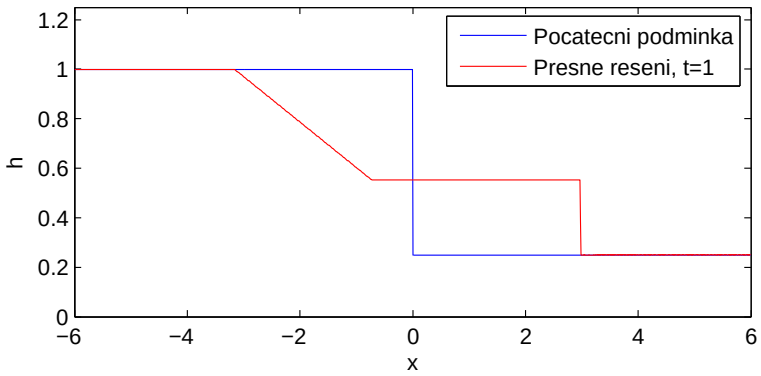
Entropické řešení je složeno z vlny zředění a rázové vlny, je tedy nespojité. Mezi těmito vlnami leží konstantní stav

$$\begin{bmatrix} h_m \\ u_m \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.5517\ldots \\ 1.6267\ldots \end{bmatrix},$$

přičemž tyto konstanty $h_m$ a $u_m$ jsme pro naši konkrétní úlohu určili jako řešení nelineární soustavy rovnic, kterou lze nalézt v [1]. Konstanty nelze obecně explicitně vyjádřit a je třeba řešit soustavu s dostatečnou přesností numericky.

Rychlost šíření rázové vlny stanovíme ze vztahu (2.38) a rychlosti šíření okrajů vlny zředění odpovídají charakteristickým rychlostem.

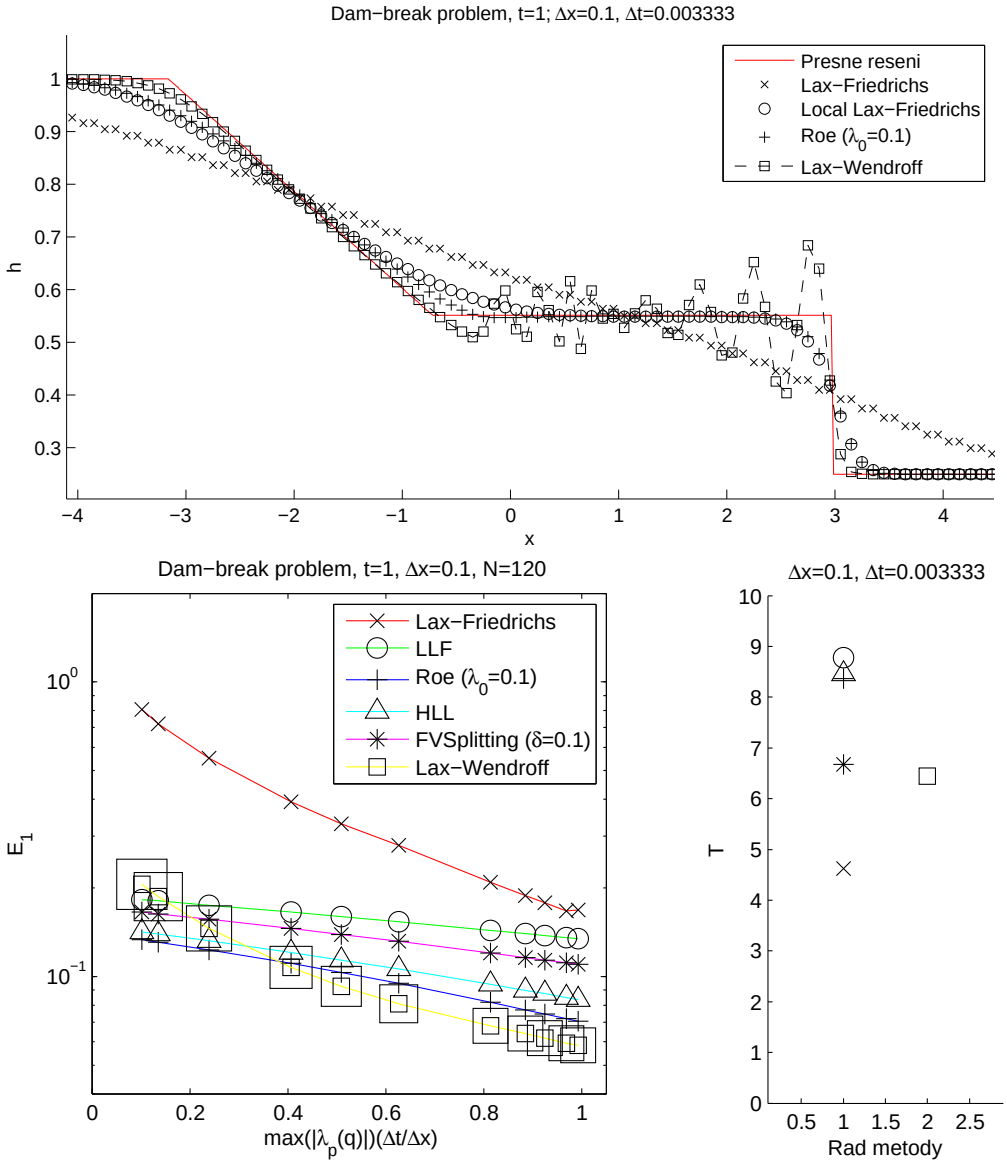
Numerickými metodami hledejme přibližné řešení $h(x,t)$ v čase $t = 1$.




Obrázek 4.19: Saint-Venantovy rovnice - počáteční podmínka a entropické řešení

## Základní metody

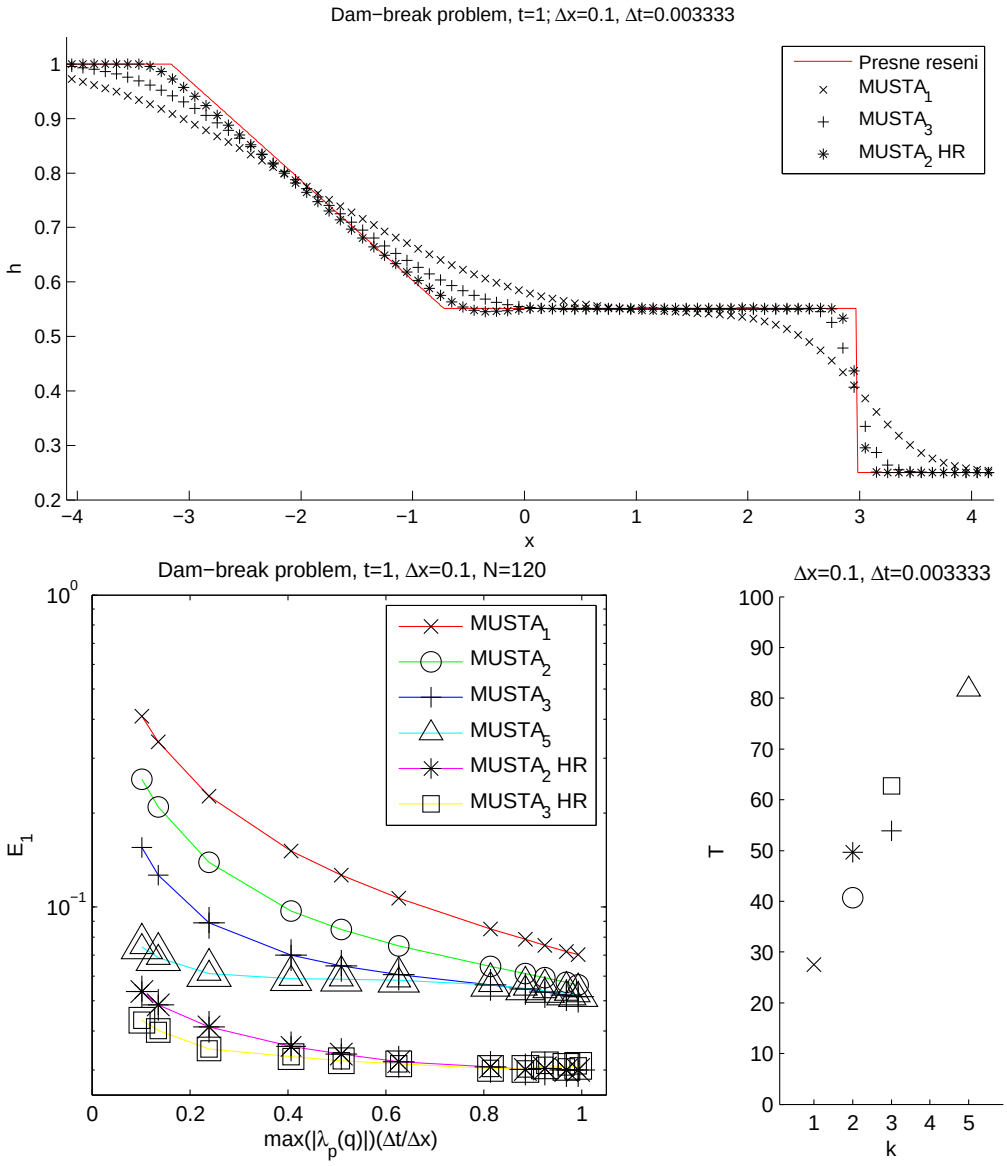
U Laxova-Wendroffova schématu se objevují výrazné oscilace v okolí bodů, kde řešení není hladké. Roeova metoda, LLF, HLL a metoda Flux Vector Splitting podávají srovnatelné výsledky z hlediska přesnosti i výpočetní doby. Všechny metody jsou pro $C \leq 1$ stabilní a dosahují vyšší přesnosti pro hodnoty blízké 1.




Obrázek 4.20: Saint-Venantovy rovnice - základní metody

## Metoda MUSTA

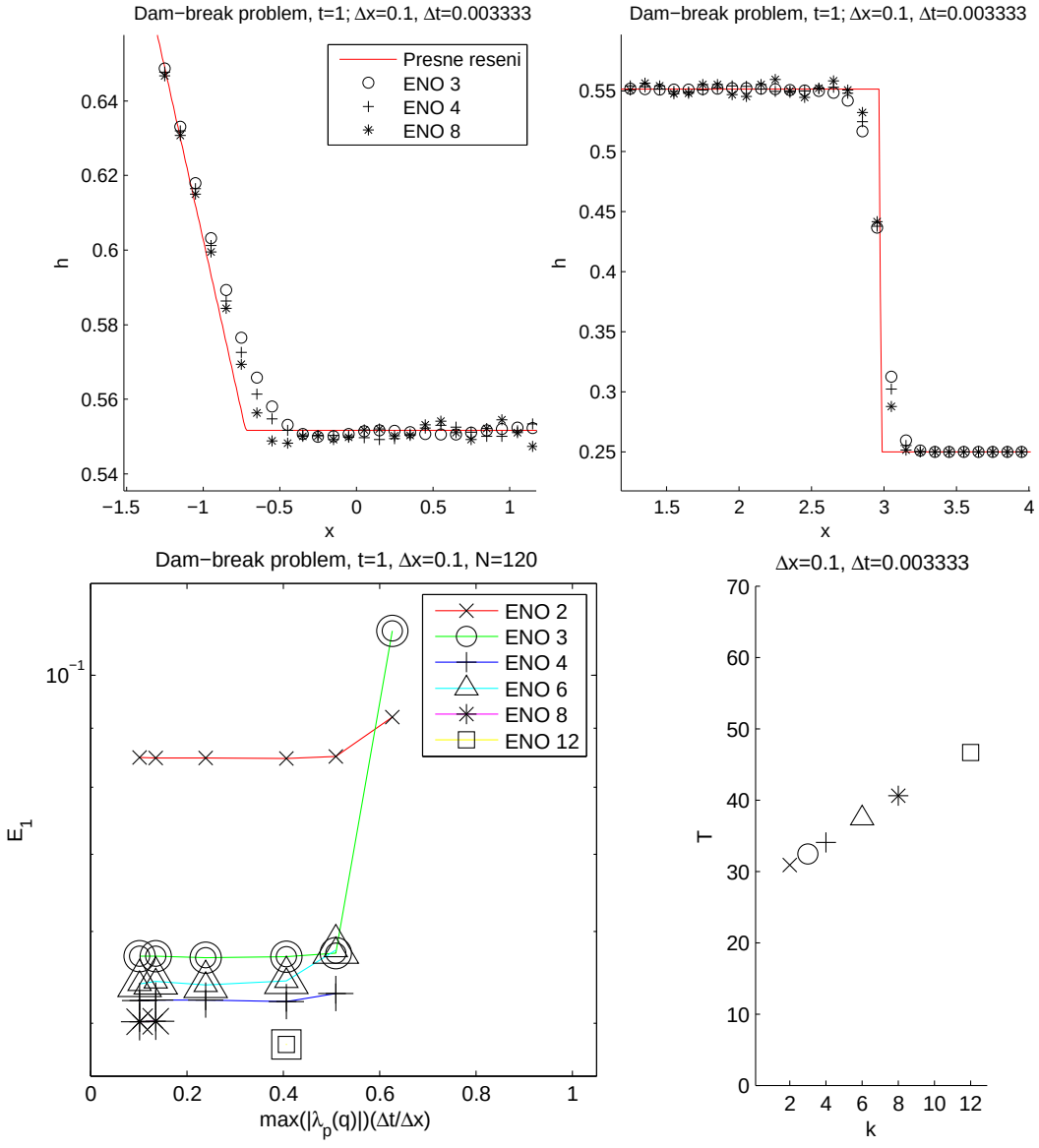
Metoda MUSTA s TVD rekonstrukcí podává v porovnání se všemi ostatními metodami dobrý výsledek, zejména pro nižší CFL. Totální variace první složky řešení $h$ se ovšem zvyšuje s větším počtem stupňů $K$.




Obrázek 4.21: Saint-Venantovy rovnice - metoda MUSTA

## Metoda ENO

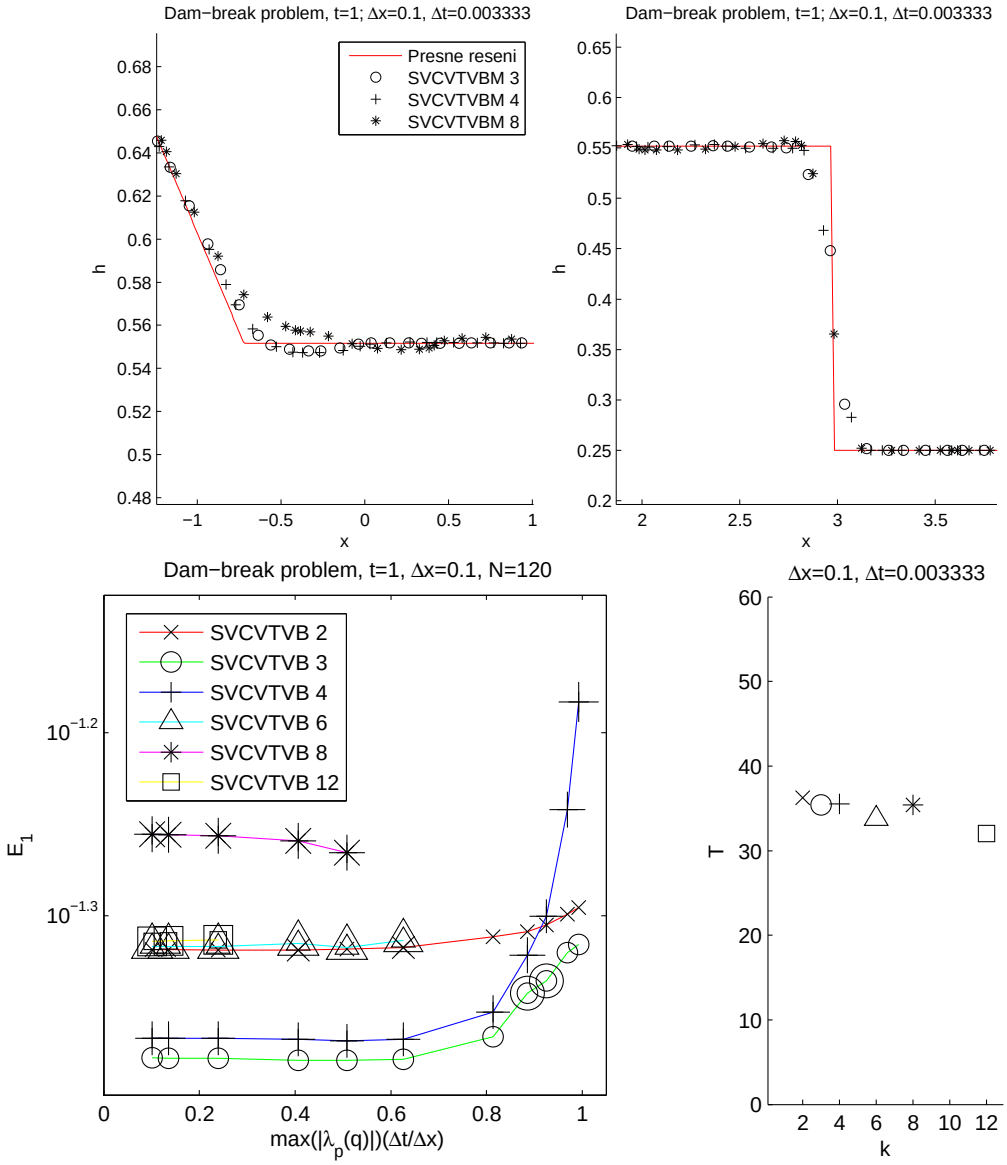
Metoda ENO řádu vyššího než 6 se ukázala být pro tuto úlohu opět nestabilní. Metoda do řádu 6 je stabilní přibližně pro $C \leq 1/2$. V řešení se ale i tak vyskytují oscilace.




Obrázek 4.22: Saint-Venantovy rovnice - metoda ENO

## Metoda spektrálních objemů

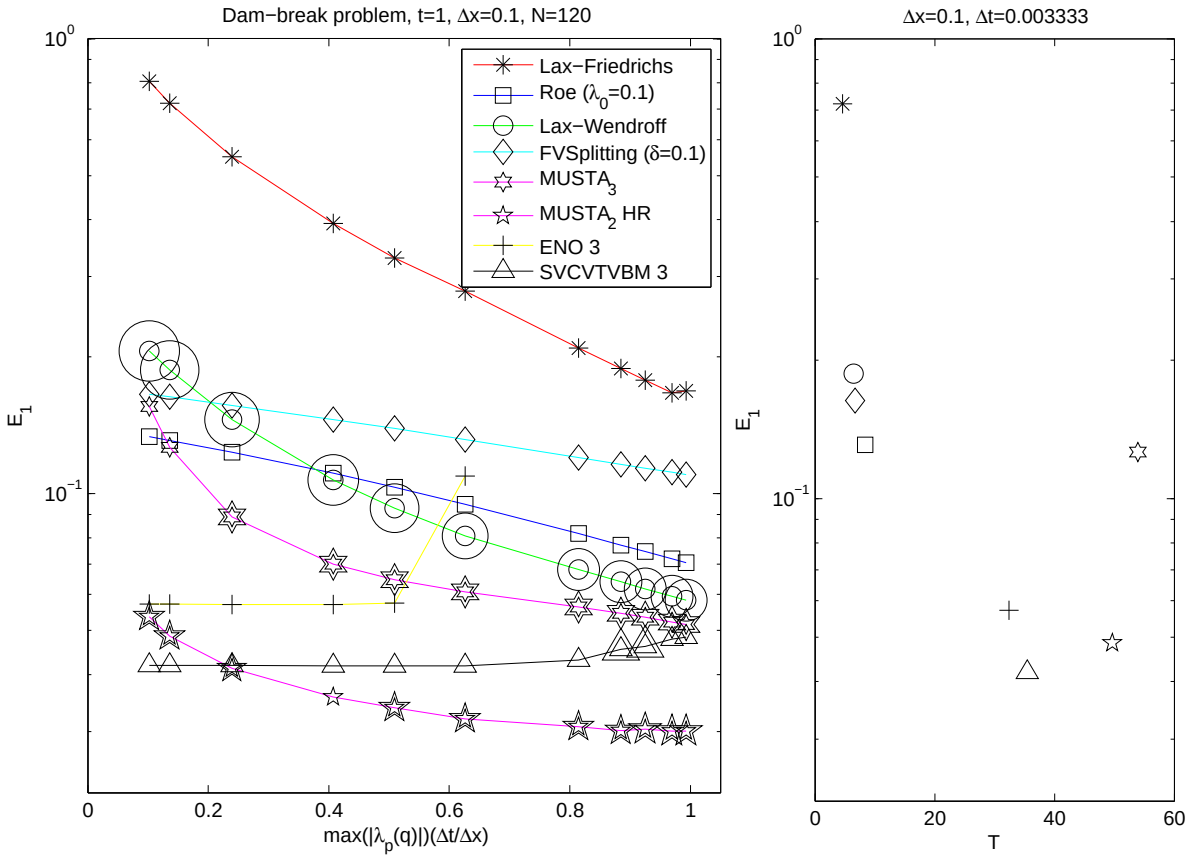
Stejně jako ve všech předchozích úlohách je metoda spektrálních objemů pro vhodné $\Delta t$ stabilní. Metoda řádu vyššího než 3 ale poskytuje řešení s oscilacemi. Metoda řádu 3 podává nejpřesnější výsledek bez výrazných oscilací. Konstanta $M$ je volena jako nulová.




Obrázek 4.23: Saint-Venantovy rovnice - metoda spektrálních objemů

## Porovnání výsledků

V této úloze nejlepší přesnosti dosáhlo schéma MUSTA s TVD rekonstrukcí a metoda spektrálních objemů 3. řádu, která potřebuje méně výpočetního času. Metoda ENO, zejména vyšších řádů, podává výsledky s výraznějšími oscilacemi. Metoda spektrálních objemů všech testovaných řádů je stabilní při vhodné volbě $\Delta t$.




Obrázek 4.24: Saint-Venantovy rovnice - srovnání metod

## 4.6 Shrnutí výsledků

Při numerických experimentech se ukázalo, že pro hladké řešení metody vyšších řádů dosahují výrazné přesnosti. Přesnost metody spektrálních objemů je mírně vyšší než přesnost metody ENO stejného řádu díky rekonstrukci na Gaussových-Lobatovových bodech. Kvůli neekvidistantnímu dělení je ale u metody spektrálních objemů nutné volit menší časový krok $\Delta t$.

U úloh obsahujících nespojitosti se ukázalo, že metoda ENO vyšších řádů nemusí být vždy stabilní. Naopak metoda spektrálních objemů je díky použití limiterů velmi stabilní. Je ale nutné vhodně zvolit konstantu $M$, jejíž ideální hodnota se může lišit v okolí nespojitostí a na hladkých částech řešení. Špatnou volbou může dojít k tomu, že v řešení mohou vznikat oscilace, případně dojde ke snížení přesnosti v bodech extrému řešení.

Metoda MUSTA se ukázala být relativně přesná při aproximaci v okolí bodů, kde je řešení nehladké. Ovšem při některých úlohách se objevuje překmit hodnoty na okraji rázové vlny, který ale nemá s časem rostoucí charakter. Výpočetní doba se s počtem stupňů $K$ zvyšuje přibližně přímo úměrně. Metoda ve své základní verzi nedosahuje příliš dobrých výsledků při aproximaci hladkých řešení a v přesnosti je srovnatelná se základními metodami prvního řádu. Metoda s TVD rekonstrukcí druhého řádu obecně dosahuje vyšší přesnosti pro všechny typy úloh za cenu mírného navýšení výpočetní doby.

# Kapitola 5

# Závěr

V práci jsme předložili základní poznatky teorie hyperbolických diferenciálních rovnic potřebné pro porozumění numerickým metodám sloužícím pro jejich řešení a uvedli jsme několik rovnic, na kterých jsme později prováděli numerické experimenty. Dále jsou uvedeny vlastnosti metod, přehled některých známých metod prvního a druhého řádu a popis vybraných metod s vysokým rozlišením včetně moderních přístupů, kterými jsou metoda spektrálních objemů a metoda ENO, využívající polynomiální rekonstrukci, a metoda MUSTA, založená na představě vícestupňového řešení Riemannova problému jednoduchým přibližným řešičem. Všechny uvedené metody byly podrobeny numerickým experimentům na úlohách pro advekční rovnici, rovnici dopravního proudu, Burgersovu rovnici a Saint-Venantovy rovnice, a to jak s hladkým řešením, tak s nehladkými a nespojitými řešeními.

V úloze s hladkým řešením obě metody využívající polynomiální rekonstrukci vyšších řádů poskytovaly výrazně přesnější výsledky než metody nižších řádů při zachování stability schémat. Přesnost řešení byla úměrná řádu použité rekonstrukce. Dále se projevilo, že pro úlohy s nehladkým řešením je metoda spektrálních objemů stabilnější než metoda ENO. V těchto úlohách nevedlo zvyšování řádu metod k přesnějším výsledkům. Metoda MUSTA se ukázala být vhodná zejména pro úlohy obsahující nespojitosti, jelikož je stabilní a dává dobré výsledky i za méně striktní CFL podmínky. Nevýhodou metody je nižší řád přesnosti pro hladká řešení a vyšší výpočetní náročnost.

Tato bakalářská práce je vyústěním mé dlouhodobější spolupráce s vedoucím práce. Další postup by měl být směřován ke dvěma důležitým zobecněním, a to sice k metodám pro řešení úloh s nenulovou pravou stranou a úloh pro více prostorových dimenzích. Teprve tyto úlohy mají významnější praktické využití a výrazněji se u nich může projevit potřeba paralelizace a výhody a nevýhody daných přístupů.

# Seznam obrázků


4.1 Advekční rovnice - počáteční podmínka a entropické řešení . . . . . 42
4.2 Advekční rovnice - základní metody . . . . . 43
4.3 Advekční rovnice - metoda MUSTA . . . . . 44
4.4 Advekční rovnice - metoda ENO . . . . . 45
4.5 Advekční rovnice - metoda spektrálních objemů . . . . . 46
4.6 Advekční rovnice - srovnání metod . . . . . 47
4.7 Rovnice dopravního proudu - počáteční podmínka a entropické řešení . . . 48
4.8 Rovnice dopravního proudu - základní metody . . . . . 49
4.9 Rovnice dopravního proudu - metoda MUSTA . . . . . 50
4.10 Rovnice dopravního proudu - metoda ENO . . . . . 51
4.11 Rovnice dopravního proudu - metoda spektrálních objemů . . . . . 52
4.12 Rovnice dopravního proudu - srovnání metod . . . . . 53
4.13 Burgersova rovnice - počáteční podmínka a entropické řešení . . . . . 54
4.14 Burgersova rovnice - základní metody . . . . . 55
4.15 Burgersova rovnice - metoda MUSTA . . . . . 56
4.16 Burgersova rovnice - metoda ENO . . . . . 57
4.17 Burgersova rovnice - metoda spektrálních objemů . . . . . 58
4.18 Burgersova rovnice - srovnání metod . . . . . 59
4.19 Saint-Venantovy rovnice - počáteční podmínka a entropické řešení . . . . . 60
4.20 Saint-Venantovy rovnice - základní metody . . . . . 61
4.21 Saint-Venantovy rovnice - metoda MUSTA . . . . . 62
4.22 Saint-Venantovy rovnice - metoda ENO . . . . . 63
4.23 Saint-Venantovy rovnice - metoda spektrálních objemů . . . . . 64
4.24 Saint-Venantovy rovnice - srovnání metod . . . . . 65

# Literatura


[1] LEVEQUE, Randall J. *Finite volume methods for hyperbolic problems.* Cambridge: Cambridge University Press, 2002. ISBN 05-110-4219-1.

[2] BEN-ARTZI, Matania a Joseph FALCOVITZ. *Generalized Riemann problems in computational fluid dynamics.* New York: Cambridge University Press, 2003. ISBN 05-217-7296-6.

[3] TORO, E.F. MUSTA: A multi-stage numerical flux. *Applied Numerical Mathematics*, 2006, vol. 56, 10-11, s. 1464-1479. DOI: 10.1016/j.apnum.2006.03.022. Dostupné z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0168927406000766

[4] WANG, Z.J. Spectral (Finite) Volume Method for Conservation Laws on Unstructured Grids. Basic Formulation. *Journal of Computational Physics*, 2002, vol. 178, issue 1, s. 210-251. DOI: 10.1006/jcph.2002.7041. Dostupné z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021999102970415

[5] SHU, Chi-Wang. Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws. *Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations.* Springer Berlin Heidelberg, 1998, s. 325-432. DOI: 10.1007/BFb0096355. Dostupné z: http://www.springerlink.com/index/10.1007/BFb0096355

[6] BRANDNER, Marek, Jiří EGERMAIER a Hana KOPINCOVÁ. *Numerické modelování v hydrologii* [online]. 2011, aktualizováno 4. 3. 2012 [cit. 2013-04-15]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/modul/numericke-modelovani-v-hydrologii

[7] BRANDNER, Marek, Jiří EGERMAIER a Hana KOPINCOVÁ. *Numerické metody pro řešení evolučních parciálních diferenciálních rovnic* [online]. 2012, aktualizováno 22.4.2012 [cit. 2013-04-15]. Dostupné z: http://mi21.vsb.cz/modul/numericke-metody-pro-reseni-evolucnich-parcialnich-diferencialnich-rovnic

[8] PARENT, Bernard. Positivity-preserving high-resolution schemes for systems of conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 2012, vol. 231, issue 1, s. 173-189. DOI: 10.1016/j.jcp.2011.09.006. Dostupné z: http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0021999111005249

[9] SRINIVASAN, B., A. JAMESON a S. KRISHNAMOORTHY. An upwinded state approximate Riemann solver. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2012, vol. 70, issue 5, s. 578-602. DOI: 10.1002/fld.2701. Dostupné z: http://doi.wiley.com/10.1002/fld.2701

[10] GOURGOULHON, Eric et al. *Introduction to spectral methods* [online]. 4th EU Network Meeting, Palma de Mallorca, 2002 [cit. 2013-05-01]. Dostupné z: http://www.lorene.obspm.fr/palma.pdf