

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MECHANIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**MODELOVÁNÍ A ANALÝZA KMITÁNÍ
MECHANICKÝCH SOUSTAV S RÁZY**

ŠTĚPÁN DYK

Prohlášení

Předkládám k posouzení tuto diplomovou práci. Prohlašuji, že jsem ji vytvořil samostatně a že jsem použil jen těch zdrojů, které jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

V Plzni dne 10. června 2013

Štěpán Dyk

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat Ing. Miroslavu Byrtusovi, Ph.D., za vedení a pomoc při vytváření této práce a za množství cenných rad a připomínek. Děkuji rovněž své rodině a všem svým blízkým za podporu a pomoc v průběhu celého mého dosavadního studia.

autor, 10. června 2013

Abstrakt

Tato práce je zaměřena na matematické modelování a následnou analýzu kmitajících mechanických soustav s rázy. V úvodní kapitole je shrnuta motivace pro studium těchto soustav a stručně je zde nastíněn historický vývoj v dané oblasti. Následně jsou uvedeny základní matematické modely rázu a potřebný teoretický aparát pro popis nehladkých systémů. Aplikační část se věnuje matematickému modelování převodového ústrojí s možností ztráty silového záběru v ozubení s ohledem na nelineární chování tohoto systému. Je uvažován zjednodušený model torzního kmitání převodovky a komplexní model vytvořený metodou konečných prvků, kde pro sestavení modelu je použita metoda modální syntézy s kondenzací. Jsou zde uvedeny různé metody redukce a je analyzován vliv úrovně kondenzace a volby použitého přístupu k numerickému modelování na výpočetní čas. Na modelech převodových ústrojí je formou bifurkačních diagramů ukázán vliv parametrů na odezvu systému na typická buzení. Dále je uveden matematický model vibrolisu na zhutnění betonové směsi a jeho dynamická analýza.

Klíčová slova: mechanika, nelineární dynamika, rázy, nehladké systémy, metoda modální syntézy, bifurkační diagram, ustálená odezva, metoda konečných prvků, rotor, převodovka, vibrolis

Abstract

The thesis focuses on mathematical modelling and analysis of vibrating mechanical systems with impact motions. In introductory chapter, a motivation for study of such systems is summarized and a historical progress in this field is discussed. In next chapters, basic mathematical models of impact are described and corresponding theory is explained. An application part of the thesis focuses on mathematical modelling of gearbox with possible loss of contact in gear, and nonlinear behaviour of the system is analysed. Simplified torsional model and complex model of test gearbox modelled by FEM are considered. The mathematical model is based on modal synthesis method with reduction and different reduction methods are tested. Influence of level of reduction is analysed and efficiency of different numerical approaches is shown. On such systems, influence of parameters on response of models is shown by means of bifurcation diagrams. Further, mathematical model of an impact-forming machine and its dynamical analysis is presented.

Keywords: mechanics, nonlinear dynamics, impact, non-smooth systems, modal synthesis method, bifurcation diagram, steady-state solution, finite element method, rotor, gearbox, impact-forming machine

Obsah

Prohlášení	2
Poděkování	3
Abstrakt	4
1. Úvod	8
1.1. Historie	8
1.2. Technická zařízení s vnitřními rázy	10
1.3. Shrnutí současného stavu řešené problematiky	11
1.4. Cíle práce	11
2. Základní matematické modely rázů	13
2.1. Elementární teorie rázu	13
2.2. Kelvinův-Voigtův model rázu	16
2.3. Huntův-Crossleyův model rázu	17
2.4. Hertzova teorie	19
3. Teorie nehladkých systémů	20
3.1. Diferenciální inkluze	21
3.1.1. Filipovova teorie	21
3.2. Mechanické systémy s nehladkými funkcemi	24
3.2.1. Konstitutivní vztahy	25
3.2.2. Modelové příklady nehladkých soustav	27
3.3. Numerické přístupy k řešení nehladkých systémů	31
3.3.1. Metoda zhladčení nehladké funkce	31
3.3.2. Metoda přepínání modelů	33
4. Aplikace: Modely vybraných mechanických soustav s rázy	35
4.1. Zjednodušený torzní model jednostupňové převodovky s rázy v ozubení	35
4.1.1. Výsledky numerických simulací pohybu	39
4.1.2. Srovnání výpočetního času při užití různých numerických přístupů	42
4.2. Matematický model testovací převodovky s uvažováním rázů v ozubení	43
4.2.1. Matematický model rotorové soustavy	44
4.2.2. Metoda modální syntézy pro rotorovou soustavu	48
4.2.3. Aplikace na testovací převodovku - výsledky numerických simulací	56
4.3. Matematický model vibrolisu na zhutnění betonové směsi	65

Obsah	7
4.3.1. Popis vibrolisu a princip jeho funkce	66
4.3.2. Matematický model vibrolisu	67
5. Závěr	75
A. Přílohy	77
A.1. Příklad aplikace metody zhlačení nehladké funkce v prostředí MATLAB	77
A.2. Příklad aplikace přepínacího modelu v prostředí MATLAB	78
A.3. Vybrané parametry torzního modelu kmitání jednostupňové převodovky	79
A.4. Vybrané parametry vibrolisu na zhutnění betonové směsi	79
A.5. Parametry testovací převodovky	80
A.6. Bifurkační diagramy pro různé režimy vnějšího zatížení	81
Literatura	83
Publikace autora související s tématem práce	86

1. Úvod

Rázy se vyskytují v řadě jevů jak v přírodě, tak v technice. V technických aplikacích mohou být tyto jevy dvojího druhu; zaprvé jde např. o nejrůznější projevy konstrukčních vůlí, kdy jsou rázy považovány obecně za negativní, neboť při nich dochází ke zvýšenému namáhání stykových částí těles, čímž se snižuje jejich životnost. Rázy jsou navíc doprovázeny nežádoucím vyzařováním hluku. Existuje však rovněž třída technických zařízení, jejichž chod je na přítomnosti rázových jevů přímo založen, např. zhuňovací vibrolisy, buchary, kladiva apod. Z hlediska matematických modelů těchto soustav je přítomnost rázů typická silnými nelinearitami. Společně s modely jiných fyzikálních procesů, jako je např. suché tření či projevy konstrukčních vůlí, jsou modely soustav s rázy označovány jako tzv. *nehladké soustavy*, neboť příslušné matematické modely obsahují nehladké funkce či nějaký druh nespojitosti. Pokud jde navíc o soustavy, které lze popsat matematickým modelem ve tvaru soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu s nespojitou pravou stranou (viz dále), jsou tyto označovány jako *soustavy Filippova typu* [Leine 2004]. V případě zmiňovaného suchého tření jde v technických aplikacích rovněž většinou o nežádoucí jev, který je potřeba omezit či eliminovat, ovšem i zde existují případy, kdy jsou zařízení principiálně založena na přítomnosti tření, např. nejrůznější typy brzd, prvky snižující úroveň kmitání některých mechanických soustav atd. Mimo technickou oblast je suché tření charakteristické např. pro tvorbu zvuku – při hře na smyčcové nástroje dochází k rozechvívání struny díky suchému tření mezi smyčcem a strunou.

1.1. Historie

Z výše zmíněných příkladů technických aplikací nehladkých systémů je zřejmá potřeba vhodných nástrojů k analýze těchto systémů. Ty lze najít v oblasti *nelineární dynamiky*, kam dynamika nehladkých systémů spadá. Tato kapitola tvoří stručný přehled o historickém vývoji dané oblasti a konkrétně o historii výzkumu mechanických soustav s rázy.

Stručná historie nelineární dynamiky

V nelineární dynamice lze v dnešní době nalézt široké spektrum matematických modelů pro procesy z nejrůznějších oblastí lidského bádání. Široká třída aplikací se nabízí v oblasti techniky, ale rovněž existují nelineární dynamické modely v ekonomii, biologii, chemii, meteorologii a mnoha dalších netechnických oborech.

Počátky vývoje nelineární dynamiky sahají na přelom devatenáctého a dvacátého století, kdy francouzský matematik a fyzik Henri Poincaré (1854 – 1912) při studiu pohybu nebeských těles jako jeden z prvních narazil na zvláštní, nepředvídatelné chování těchto systémů¹.

¹Historické podklady čerpány z [Nayfeh & Balachandran 2004] a [Tung 2002].

Již Poincarého pozorování ukázalo, že při velmi malé změně počátečního stavu systému může zkoumaný výsledný jev být kvalitativně i kvantitativně docela odlišný. Dnes jsou podobné systémy nazývány jako systémy *chaotické*. Odtud plyne obecně užívaná definice chaotického systému jako takového dynamického systému, ve kterém malá změna vstupních dat vyvolá velkou změnu ve zkoumaném jevu [Nayfeh & Balachandran 2004].

V průběhu devatenáctého a dvacátého století přispěla řada dalších vědců k rozvoji tohoto odvětví, např. Georg Duffing, Lord Rayleigh, Alexandr Ljapunov, Balthasar van der Pol, či Georg David Birkhof. V roce 1945 pozorovali britští matematici Mary Cartwrightová a John Littlewood při studiu van der Polova oscilátoru podivné chování tohoto systému a jako první jej podrobili hlubší analýze. V roce 1963 pak vytvořil Edward Lorenz (1917 – 2008) značně zjednodušený model počasí, reprezentovaný třemi obyčejnými diferenciálními rovnicemi, na kterém ukázal, že i tato jednoduchá deterministická soustava rovnic vykazuje vysokou citlivost odezvy na malou změnu počátečních podmínek. Tento jev označil Lorenz poprvé jako tzv. *efekt motýlích křídel* [Tung 2002]. Nezávisle na Lorenzovi vytvořil Smale roku 1967 jiný model, na němž demonstroval chaotické chování.

Teprve s prudkým rozvojem výpočetní techniky na konci 20. století však došlo ke skutečnému rozmachu v oblasti nelineární dynamiky, a to zejména díky novým možnostem rozsáhlých numerických simulací. Byla sepsána řada publikací zabývajících se touto problematikou, jež ukazují nespočet nejrůznějších aplikací nelineární dynamiky v rozličných odvětvích.

Historie výzkumu mechanických soustav s rázy

První kroky k matematickému popisu soustav s rázy jsou spjaty se jménem anglického matematika Isaaca Newtona (1643 – 1727), který formuloval tzv. elementární teorii rázu. Pro popis míry disipace energie v průběhu rázu zavedl ve své práci pojem koeficientu restituace. Newtonova teorie je hojně užívána dodnes, neboť i přes jistou míru zjednodušení je pro množství technických aplikací postačující. Další důležitý model rázu mezi tělesy vytvořil Heinrich Hertz (1857 – 1894), který se zabýval popisem mechanických napětí a deformací v kontaktním místě. Tyto jevy Newtonova teorie nezahrnovala, omezovala se pouze na popis stavu tělesa před rázem a po něm. V následujících letech byla Hertzova teorie dále rozvíjena, zpřesňována a experimentálně ověřována. Rovněž byl formulován tzv. Kelvinův-Voigtův model rázu², který nahrazuje síly vzniklé při nárazu pomocí lineární pružně-viskózní narážky.

Vývoj a výzkum v oblasti kmitání mechanických soustav s rázy se započal ve 40. až 50. letech 20. století v souvislosti s aplikacemi na rázové tlumiče kmitů křídel letadel či lopatek turbín [Peterka 1981]. Kromě elementárních případů byly zkoumány také složitější případy rázových jevů, kterými se zabýval např. Z. Horák. Další vývoj v této oblasti vycházel z potřeby optimalizace některých technických zařízení, která rázové efekty využívají. Těmto zařízením bude věnována kap. 1.2.

Diferenciální inkluze

Koncept *diferenciálních inkluzí* byl vytvořen z potřeby řešit diferenciální rovnice s nespojitou funkcí na pravé straně [Leine 2004]. V šedesátých letech představil A. F. Filipov *konvexní me-*

²Historické podklady této podkapitoly byly čerpány z práce [Peterka 1981]

todu (též *metodu konvexifikace*), která převádí problém formulovaný jako diferenciální rovnici na tzv. diferenciální inkluzi (viz dále). V současné době jsou matematické modely některých fyzikálních procesů formulovány již přímo ve tvaru diferenciálních inkluzí. Celá třída matematických modelů, které jsou konvexní metodou převeditelné do tvaru inkluze, je dodnes označována jako soustavy Filipovova typu.

1.2. Technická zařízení s vnitřními rázy

Jak již bylo zmíněno v úvodu této kapitoly, existují mnohá technická zařízení, jejichž činnost je principiálně založena na rázech. Tento přehled nejvýznamnějších příkladů strojů využívajících rázy čerpá zejména z publikace [Peterka 1981].

První třídou strojů ze zkoumané skupiny jsou systémy pro zhutňování a tváření, vibrační kladiva, systémy pro vbíjení, zařízení pro zatloukání pilotů, apod. Všechny tyto stroje jsou založeny na rázovém kontaktu nástroje s opracovávaným tělesem, resp. vibrujícího tělesa s formou v případě zhutňovacích strojů. Existují nejrůznější konstrukční řešení těchto systémů (např. u bucharů jsou známy konstrukce s pevnou kovadlinou, s odpruženou kovadlinou, s pružnou vazbou mezi srážejícími se tělesy, apod.), přičemž právě na konstrukci záleží, zda a jak se přenášejí vibrace ze stroje do základu, a způsobují tak nežádoucí hluk a zvýšené namáhání součástí. Jinou skupinu strojů tvoří elektromagnetické pneumatické či hydraulické systémy, např. elektromagneticky buzené sbíječky. Zde principiálně dochází ke kmitání jádra elektromagnetu v duté trubce, přičemž kmitající náboj naráží na jedné straně do nástroje sbíječky, na straně druhé se pak odráží od pružné narážky. U podobných zařízení, zvláště u ručních sbíječek, je základním konstrukčním úkolem zajistit co možná nejmenší přenos vibrací do rukojeti stroje při zachování efektivity opracování.

Další třídou mechanických soustav s rázy jsou kladivové drtiče či mlýny, užívané k drcení hornin, uhlí, kovového šrotu, apod. Zde dochází k drcení materiálu pomocí rotujících kladiv, založených např. na principu jednoduchých nebo dvojitých kyvadel. Podobně při transportu některých materiálů jsou užívány vibrační dopravníky, které obsahují rázově buzené (nakloněné) roviny. Např. pro dopravu sypkých hmot lze užít vibračně buzeného potrubí či desek [Gonda 1969]. V tomto případě a v podobných aplikacích se rázové buzení realizuje několika páry protiběžných rotorů, jež rozkmitávají těleso, které pak při svém pohybu naráží do jiného tělesa. V případě dopravníků např. čtyři protiběžné rotory mohou generovat biharmonický pohyb kladiva, které při svém pohybu naráží do trubky či desky.

Zajímavou aplikací jsou rovněž rázové tlumiče. V tomto případě je ke kmitající soustavě přidáno další těleso, které při pohybu soustavy naráží do některého z těles systému a snižuje tak amplitudy vibrací. Různé typy rázových tlumičů se liší podle toho, jakým způsobem je konstrukčně řešena vazba na kmitající soustavu - těleso může volně kmitat mezi narážkami, může být vázáno k rámu či k některému z těles soustavy, apod. Celá řada aplikací se nabízí také ve stavebním inženýrství, např. u strojů pro pěchování zeminy.

Jak již bylo zmíněno, mezi soustavy s vnitřními rázy se řadí také zařízení s konstrukčními vůlemi či taková zařízení, u nichž došlo vlivem provozu k vymezení vůlí v některých kinematických dvojicích. Za provozu stroje potom může docházet k rázům v čepech rotačních vazeb či ve vedení vazeb posuvných. Tím dochází k nežádoucímu zvýšenému namáhání součástí a k nadměrnému vyzařování hluku.

1.3. Shrnutí současného stavu řešené problematiky

V současné době existuje řada publikací, které se zabývají modelováním mechanických soustav s rázy z nejrůznějších hledisek. Elementární teorii rázu jsou věnovány příslušné kapitoly ve většině monografií či skript zabývajících se dynamikou mechanických systémů - viz použitá literatura v kap. 2.1. Obecně problematice rázů je např. věnována monografie [Stronge 2004] postihující veškeré základní aspekty tohoto jevu. Z hlediska obecnější třídy tzv. nehladkých systémů se rázovými jevy zabývají publikace [Leine 2004] a [Leine 2000], které představují matematické modely nehladkých systémů ve tvaru diferenciálních inkluzí a zabývají se vybranými numerickými přístupy pro jejich řešení. Z hlediska nelineární dynamiky jsou některé speciální případy nehladkých matematických modelů zmiňovány rovněž v [Nayfeh & Balachandran 2004], či [Thompson & Stewart 2002]. Ucelený přehled o strojních zařízeních, jež při své činnosti využívají rázů, je pak ukázán např. v [Peterka 1981].

Kromě zmiňovaných monografií vzniká rovněž celá řada publikací, v nichž lze sledovat současný stav vývoje v této oblasti. Jde o publikace s nejrůznějším zaměřením. Kompletní přehled témat aktuálních v matematickém modelování rázů v době vzniku této práce je nastíněn v [Makarenkov & al. 2012]. Řada článků se zabývá pohybem soustav s rázy z pohledu nelineární dynamiky a chaotického pohybu a zaměřuje se na stabilitu pohybu, periodická řešení, či bifurkační diagramy vzhledem k různým parametrům, viz např. [Pavlovskaja & Wiercigroch 2007], [Batako et al. 2007]. Jiné práce, viz [Luo 2007], se zabývají vlivem tlumení a disipace energie na pohyb soustav s rázy. V témže článku je uvedena přímá aplikace na zhutňovací stroj. Zajímavou aplikaci lze najít rovněž např. v práci [Cong et al. 2011], kde jsou ukázány vlivy rázů na dynamiku rotoru při uvažování kontaktu mezi rotorem a statorem.

1.4. Cíle práce

Tato práce se zabývá matematickým modelováním a následnou analýzou kmitajících mechanických soustav s rázy s ohledem na ustálenou odezvu těchto systémů. Jejím cílem je

- stručně shrnout historický vývoj v oblasti matematického modelování nelineárních dynamických soustav, vývoj výzkumu mechanických soustav s rázy a posoudit stav této problematiky v současnosti,
- podat přehled způsobů formulace matematických modelů kmitání mechanických soustav s rázy, uvést shrnutí některých teorií a hypotéz pro popis rázových dějů za předpokladu tuhých těles a shrnutí potřebného teoretického aparátu,
- popis vybraných přístupů k numerickému modelování a vyšetřování kmitání těchto soustav,
- sestavení matematických modelů vybraných mechanických soustav s rázy, kterými jsou
 - zjednodušený matematický model torzního kmitání převodového ústrojí s s možností odlehnutí zubového záběru,
 - model tzv. testovací převodovky s možností odlehnutí zubového záběru,
 - matematický model vibrolisu na zhutnění betonové směsi,

- aplikace popsaných numerických přístupů k řešení těchto soustav a analýza výsledků s ohledem na nelineární chování a na výpočtovou složitost,
- posouzení možností metod kondenzace použitých matematických modelů,
- shrnutí a zhodnocení použitých přístupů a získaných výsledků, analýza efektivity použitých numerických přístupů.

2. Základní matematické modely rázů

Jako *ráz* je označován takový děj, při kterém dochází ke kontaktu mezi dvěma tělesy, pohybujícími se různými rychlostmi [Hořejší 1980]. Ráz trvá velmi krátkou dobu, řádově $10^{-4} \div 10^{-6}$ s [Brousil et al. 1989], a závisí na relativní rychlosti obou těles před rázem, na jejich hmotnosti, materiálových vlastnostech, velikosti, apod. Při rázu vznikají velké tzv. *rázové síly*, oproti kterým jsou jiné silové účinky (vlastní tíha těles, pasivní účinky, apod.) zanedbatelné. V případě, kdy nositelky obou předrázových rychlostí jsou totožné s rázovou normálou, je ráz označován jako *ráz přímý*, v opačném případě pak jde o *ráz šikmý* [Hlaváč 2004].

2.1. Elementární teorie rázu

Elementární teorie rázu, formulovaná poprvé Isaacem Newtonem [Brousil et al. 1989], popisuje pohyb tělesa po rázu na základě znalosti pohybu tělesa před rázem. Tato teorie nepostihuje průběh sil působících mezi tělesy ani jejich deformace. Vzhledem k výše zmiňovanému krátkému trvání rázu jsou změny v rychlosti těles uvažovány jako okamžité. Tíhové síly těles a pasivní odpor jsou zanedbatelné oproti silám rázovým a dále jsou zanedbány.

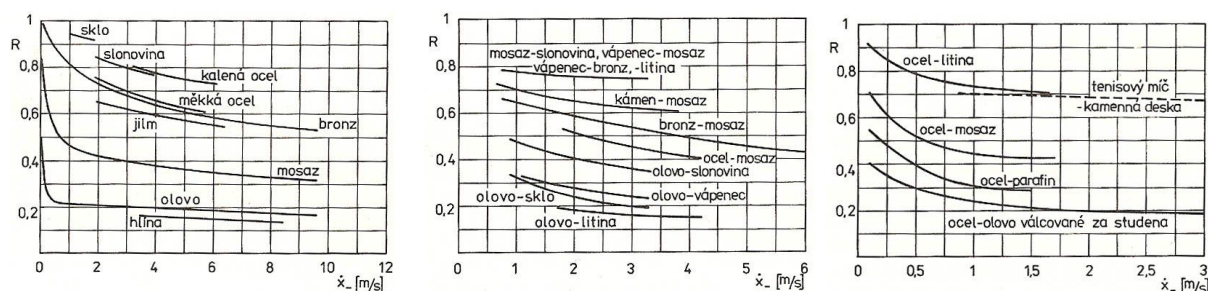
Nechť jsou dána dvě tělesa o hmotnostech m_1, m_2 , která se před rázem posouvají rychlostmi \vec{v}_1, \vec{v}_2 [Hlaváč 2004]. Tato tělesa se srazí v okamžiku t_0 a dochází k jejich deformaci, až v čase t_1 je deformace obou těles maximální a obě se pohybují shodnou rychlostí \vec{u} . Časový interval (t_0, t_1) , kdy deformace těles roste, je označován jako tzv. *první fáze rázu*, též *komprese*. Poté dochází ke zmenšování deformace, až se tělesa v okamžiku t_2 opět oddělí. Časový interval (t_1, t_2) , kdy deformace těles klesá, je označován jako tzv. *druhá fáze rázu*, též *restituce*.

Koeficient restituce

Důležitou roli hraje v elementární teorii rázu tzv. *koeficient restituce* ε , bezrozměrný parametr, který je definován jako poměr časového impulsu síly v druhé fázi rázu I_2 a časového impulsu síly v první fázi rázu I_1 , tedy

$$\varepsilon = \frac{I_2}{I_1}, \quad \text{kde } I_1 = \int_{t_0}^{t_1} F_r(t) dt, \quad I_2 = \int_{t_1}^{t_2} F_r(t) dt, \quad (2.1)$$

a kde $F_r(t)$ je časový průběh rázové síly. Koeficient restituce závisí na druhu materiálu, velikosti, hladkosti povrchu a relativní rychlosti srážejících se těles, a jeho hodnotu lze pro zkoumanou dvojici těles určit experimentálně. Platí $\varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$, přičemž pro reálná tělesa je vždy $0 < \varepsilon < 1$. Limitní případ, kdy $\varepsilon = 0$, je označován jako dokonale *plastický ráz*. Naopak pro $\varepsilon = 1$ se jedná o dokonale *elastický ráz*. Na obr. 2.1 jsou ukázány závislosti koeficientu restituce pro různé materiály a různé kombinace tvarů těles.



Obrázek 2.1.: Závislost koeficientu restituce (zde ozn. R) na relativní rychlosti při rázu dvou koulí ze stejného materiálu o stejném průměru (vlevo), při rázu dvou koulí z různého materiálu a o stejném průměru (vprostřed), při rázu ocelové koule o průměru 25,5 mm na masivní desku z různých materiálů (vpravo) – převzato z [Peterka 1981]

Jednoduché experimentální určení koeficientu restituce mezi kuličkou a deskou (zhotovených z požadovaných materiálů) se provádí na základě následujícího výpočtu. Kulička je uvažována jako volně upuštěná z výšky h_0 nad deskou. Její dopadová rychlost je

$$v_1 = \sqrt{2gh_0}, \quad (2.2)$$

načež se kulička odrazí ve svislém směru vzhůru a její počáteční rychlost po odskoku bude

$$u_1 = -\varepsilon v_1. \quad (2.3)$$

Kulička následně vystoupá do výšky h_1 , pro kterou je

$$u_1 = \sqrt{2gh_1}. \quad (2.4)$$

Pro součinitel restituce potom platí

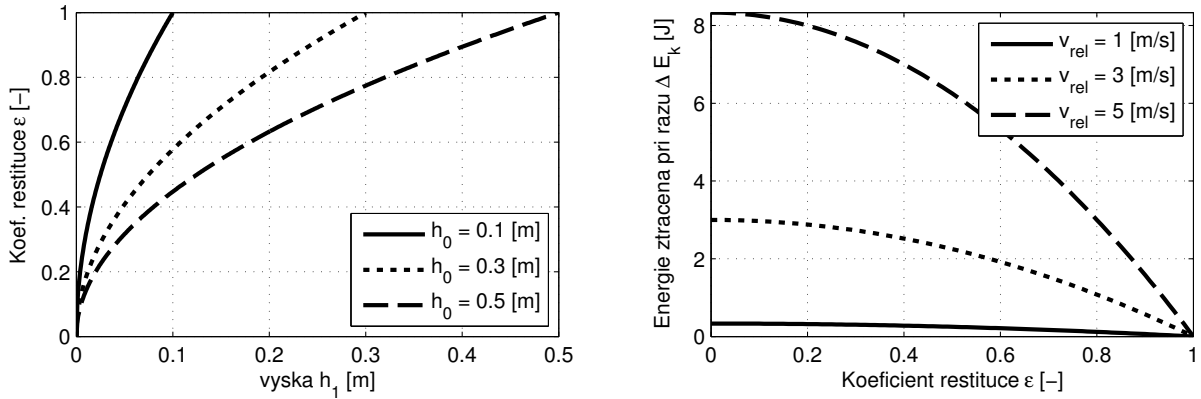
$$\varepsilon = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}. \quad (2.5)$$

Pro zjištění koeficientu restituce tedy postačuje jednoduchý experiment, při kterém je kulička puštěna ze známé výšky h_0 , a po odečtení výšky h_1 , do které se kulička odrazí, lze pomocí vztahu (2.5) přímo určit hledanou hodnotu. Závislost koeficientu restituce ε na výškách h_0, h_1 je ukázána na obr. 2.2 vlevo.

Vztahy pro porázové rychlosti

Dále bude uvažován centrický ráz¹. Tělesa, pohybující se předrázovými rychlostmi \vec{v}_1, \vec{v}_2 se srazí, v okamžiku maximální deformace je jejich společná rychlost \vec{u} a v okamžiku opětovného odpoutání těles se tato pohybují rychlostmi \vec{c}_1, \vec{c}_2 . Z věty o změně hybnosti rozepsané do rázové

¹Obecnější případ, kdy je uvažován excentrický ráz, je uveden např. v [Janeček & Zeman 1985]



Obrázek 2.2.: Koeficient restituce ε v závislosti na výšce h_1 pro různá h_0 (vlevo) a energie ΔE_k ztracená při rázu v závislosti na koeficientu restituce ε při různých relativních rychlostech (vpravo)

normály lze vyjádřit pro obě tělesa v první i druhé fázi rázu

$$\begin{cases} m_1(u - v_1) = -I, \\ m_2(u - v_2) = I, \\ m_1(c_1 - u) = -\varepsilon I, \\ m_2(c_2 - u) = \varepsilon I, \end{cases} \quad (2.6)$$

kde $I = I_1$. Odtud rychlost u obou těles v okamžiku maximální deformace je

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \quad (2.7)$$

a konečné vztahy pro porázové rychlosti

$$\begin{aligned} c_1 &= (1 + \varepsilon)u - \varepsilon v_1 = (1 + \varepsilon) \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \varepsilon v_1, \\ c_2 &= (1 + \varepsilon)u - \varepsilon v_2 = (1 + \varepsilon) \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \varepsilon v_2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Prostřednictvím vztahů (2.8) jsou určeny porázové rychlosti c_1, c_2 těles jako funkce rychlostí předrázových v_1, v_2 .

Část kinetické energie se v průběhu rázu přeměnila na deformační energii okolí rázového bodu. Pro změnu kinetické energie zde platí

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - m_1 c_1^2 - m_2 c_2^2). \quad (2.9)$$

Po dosazení c_1, c_2 z (2.8) platí pro zmařenou kinetickou energii

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 - \varepsilon^2) (v_1 - v_2)^2. \quad (2.10)$$

Odtud je zřejmé, že pro $\varepsilon \in \langle 0, 1 \rangle$ dochází v průběhu rázu ke ztrátě energie, a pouze ve spe-

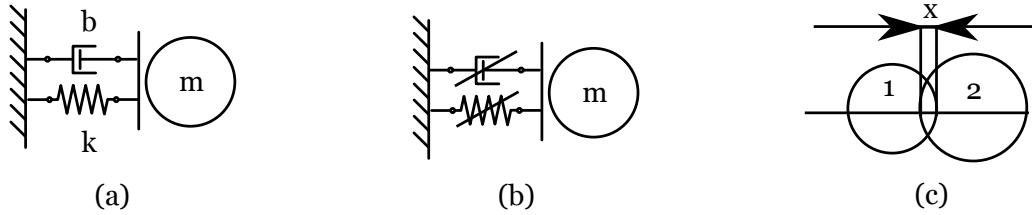
ciálním případě, kdy $\varepsilon = 1$, je $\Delta E_k = 0$, tedy energie zůstává zachována. Závislost ΔE_k na koeficientu restituce ε pro různé hodnoty relativní rychlosti $v_{rel} = (v_1 - v_2)$ při uvažování $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 2 \text{ kg}$ ukazuje obr. 2.2 vpravo.

2.2. Kelvinův-Voigtův model rázu

Jinou z možností, jak modelovat rázové děje, je formulace fyzikálního modelu jako soustavy s pružně viskózními narážkami. Pokud jsou narážky uvažovány jako lineární, je model označován jako tzv. *Kelvinův-Voigtův model* [Peterka 1981] a jeho schéma ukazuje obr. 2.3 vlevo. V průběhu kontaktu těles je pohyb těles popsán lineárním matematickým modelem ve tvaru

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \quad (2.11)$$

kde x je relativní přiblížení těles (viz obr. 2.3 vpravo), a m, b, k jsou parametry soustavy. V tomto případě vnáší do matematického modelu nelinearitu tuhostní charakteristika systému, neboť tuhost je u soustavy s pružnými narážkami nelineární (nehladkou) funkcí polohy [Zeman & Hlaváč, 2004]. Tento model však popisuje nepřesně průběh rázových sil, zejm. v počáteční a závěrečné fázi rázu, neboť zde nedochází k uzavření hysterezní smyčky (viz obr. 2.7 vlevo).



Obrázek 2.3.: Modely rázu ve formě soustavy s narážkami: (a) Kelvinův-Voigtův, (b) Huntův-Crossleyův model, (c) relativní přiblížení těles

Modelový příklad: soustava s oboustrannou narážkou

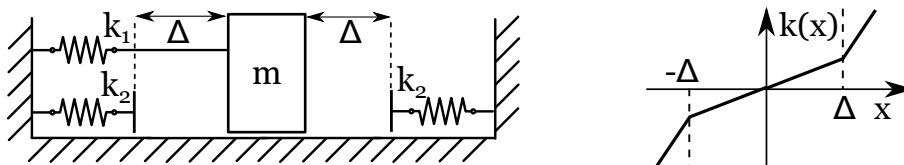
Pro názornost bude Kelvinův-Voigtův model rázu ukázán na jednoduchém příkladu systému s jedním stupněm volnosti, viz obr. 2.4. Je uvažován hmotný bod m zavěšený na pružině k_1 , kmitající mezi pružnými narážkami o tuhostech k_2 (tlumení bude uváženo dále). Příslušný matematický model má tvar

$$m\ddot{x} + k(x) = 0, \quad \text{kde } k(x) = \begin{cases} k_1 x & |x| < \Delta, \\ k_1 x + k_2(x - \Delta) & \text{pro } x > \Delta, \\ k_1 x + k_2(x + \Delta) & x < -\Delta. \end{cases} \quad (2.12)$$

Na obr. 2.5 jsou ukázány časové průběhy a fázové trajektorie volného kmitání netlumeného modelu a modelu s uvažováním proporcionalního (viskózního) tlumení b_i , $i = 1, 2$ s koeficientem proporcionality α_i jako

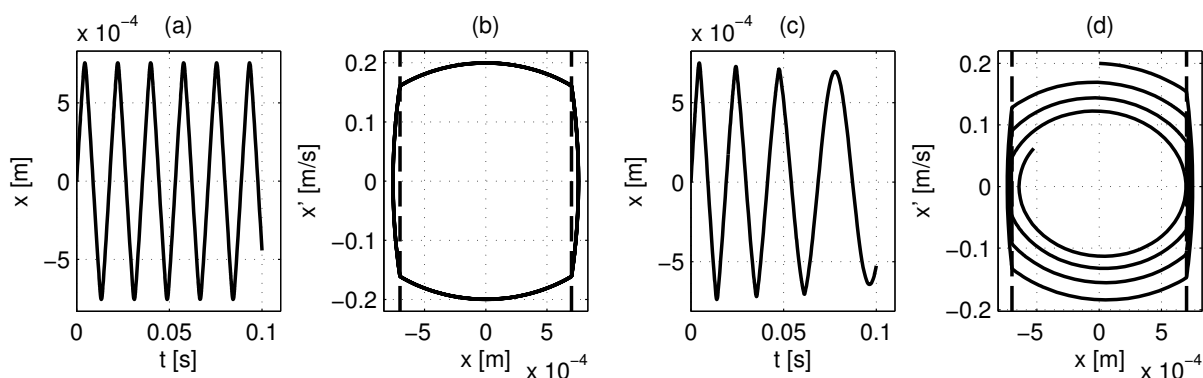
$$b_i = \alpha_i k_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^+, \quad i = 1, 2. \quad (2.13)$$

Parametry v této simulaci jsou $m = 3,5 \text{ kg}$, $k_1 = 10^5 \text{ N/m}$, $k_2 = 10^6 \text{ N/m}$, vůle $\Delta = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ a koeficienty proporcionality $\alpha_i = 0 \text{ s}$ pro netlumený model a $\alpha_i = 10^{-4} \text{ s}$ pro tlumený model. Počáteční podmínky jsou uvažovány $x(0) = 0 \text{ m}$, $\dot{x}(0) = 0,2 \text{ m/s}$. Zatímco v případě netlume-



Obrázek 2.4.: Podélně kmitající soustava s narážkami a její tuhostní charakteristika

ného lineárního harmonického oscilátoru (soustava bez narážek) je fázovou trajektorií elipsa, lze ukázat (viz [Zeman & Hlaváč, 2004]), že u soustavy s narážkami tvoří v konzervativním případě fázovou trajektorii vzájemně na sebe navazující části elips, jak je zřejmé z obr. 2.5. V nekonzervativním případě dochází k disipaci energie oscilátoru, která je zřejmá z téhož ob-



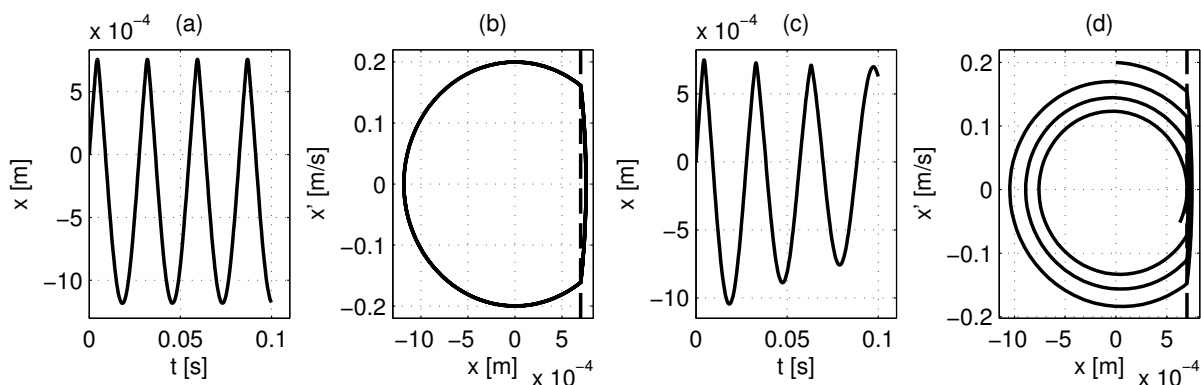
Obrázek 2.5.: Časový průběh a fázová trajektorie soustavy s narážkami pro netlumený model (vlevo) a pro proporcionálně tlumený model (vpravo)

rázku. Podobný charakter vykazuje oscilátor s jedinou pružně viskózní narážkou, jehož fázovou trajektorii a časový průběh výchylek ukazuje obr. 2.6 jak pro netlumený, tak pro tlumený případ.

2.3. Huntův-Crossleyův model rázu

Analogicky lze uvažovat o soustavě s narážkami, jejíž charakteristiky budou ovšem nelineární (viz obr. 2.3 uprostřed). Speciálním případem tohoto pojetí je model formulovaný r. 1975 Hunttem a Crossleyem [Peterka 1981], který odstraňuje nepřesnosti v průběhu rázové síly v počáteční a závěrečné fázi rázu. Smyslem tohoto modelu bylo popsat pohyb tělesa v průběhu rázu tak, aby závislost rázové síly na relativním přiblížení těles tvořila hysterezní smyčku, což lépe odpovídá fyzikální realitě. Model navržený Hunttem a Crossleyem popisuje pohyb tělesa během rázu jako

$$m\ddot{x} + (\lambda x^n)\dot{x} + kx^n = 0, \quad (2.14)$$

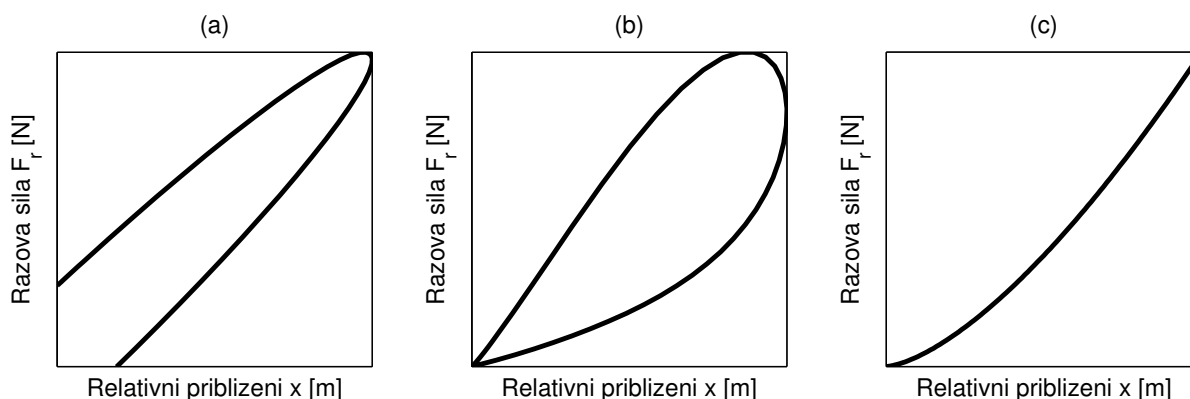


Obrázek 2.6.: Časový průběh a fázová trajektorie soustavy s jednostrannou narážkou pro netlumený model (vlevo) a pro proporcionálně tlumený model (vpravo)

kde x je relativní přiblížení těles, exponent n vystihuje různé geometrie kontaktních ploch těles², k je koeficient úměrnosti (závislý rovněž na geometrii těles) a podle Huntova-Crossleyova modelu je koeficient útlumu λ možno vyjádřit jako

$$\lambda = \frac{3}{2}k\alpha, \quad (2.15)$$

kde parametr $\alpha \in \mathbb{R}$ vyjadřuje vlastnosti materiálu. Průběh rázové síly v závislosti na relativním přiblížení těles pro Huntův-Crossleyův model ukázán na obr. 2.7 uprostřed. Je patrné, že v tomto případě dochází k požadovanému uzavření hysterezní smyčky.

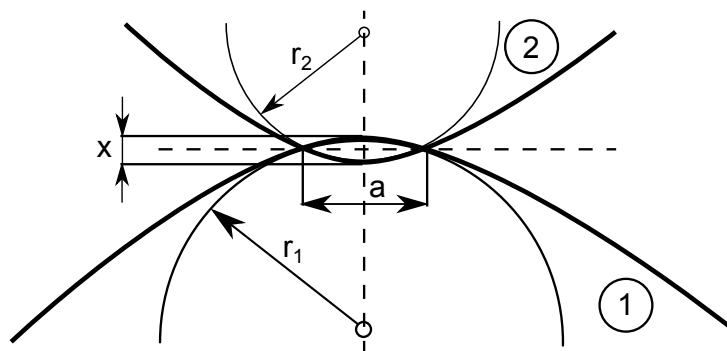


Obrázek 2.7.: Průběhy rázových sil (kvalitativně) pro (a) Kelvinův-Voigtův model, (b) Huntův-Crossleyův model a (c) Hertzův model

²Např. pro tělesa srážející se plošně lze předpokládat přibližnou hodnotu $n = 1$, pro ráz dvou válců podél povrchových přímk je hodnota $n \in (1, 1,5)$ a pro dotyk oblých těles (Hertzova teorie) je $n = 1,5$.

2.4. Hertzova teorie

Hertzova teorie je založena na předpokladu, že tělesa jsou dokonale pružná a doba trvání rázu je velká ve srovnání s dobou potřebnou pro proběhnutí elastických vln jednotlivými tělesy [Peterka 1981]. Ve zjednodušené formě lze předpokládat, že povrchy obou těles jsou rotačně symetrické



Obrázek 2.8.: Kontakt dvou těles podle Hertzovy teorie kontaktu

vzhledem ke společné normále, která prochází bodem dotyku, viz obr. 2.8. Poloměry oskulačnických koulí povrchů těles v místě prvního dotyku jsou r_1, r_2 . Pro sílu F , vzájemné přiblížení těles x a poloměr a styčné kruhové plošky platí [Peterka 1981]

$$F = \frac{16}{3} a^3 \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2 (\vartheta_1 + \vartheta_2)}, \quad x = \frac{3}{16a} F (\vartheta_1 + \vartheta_2), \quad \Rightarrow \quad F = kx^{\frac{3}{2}}, \quad (2.16)$$

kde bylo zavedeno označení

$$k = \frac{16}{3(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \quad (2.17)$$

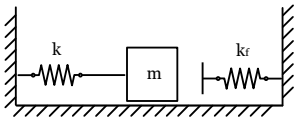
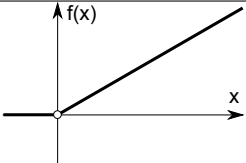
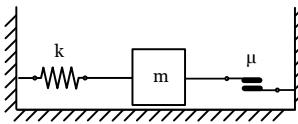
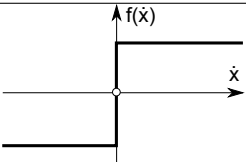
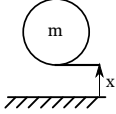
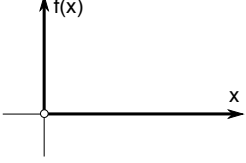
a průřikové konstanty ϑ_1, ϑ_2 jsou

$$\vartheta_1 = \frac{4(1 - \nu_1^2)}{E_1}, \quad \vartheta_2 = \frac{4(1 - \nu_2^2)}{E_2}, \quad (2.18)$$

kde E_1, E_2 jsou moduly pružnosti v tahu těles a ν_1, ν_2 jsou jejich Poissonova čísla. Průběh rázové síly v závislosti na relativním přiblížení je pro Hertzův model ukázán na obr. 2.7 vpravo.

3. Teorie nehladkých systémů

Jak již bylo zmíněno v úvodní kapitole, existují četné fyzikální procesy, jež je možno popsat nehladkými matematickými modely. Např. v oblasti matematického modelování elektrických systémů představují nehladké prvky diodové součástky, v mechanice pak jde o nejrůznější typy soustav od systémů s rázy po systémy se suchým třením. Tab. 3.1 ukazuje schématické fyzikální modely těchto soustav, jejich matematický popis (bližší specifikace viz dále) a nelineární funkci, která vnáší do soustavy nehladkost.

Fyzikální model	Matematický model	Nelinearita
Soustava s narážkou		
	$m\ddot{x} + kx = -f(x),$ $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ k_f x & x > 0 \end{cases}$	
Soustava se suchým třením		
	$m\ddot{x} + kx = -f(\dot{x}),$ $f(\dot{x}) \in \begin{cases} -\mu & \dot{x} < 0 \\ (-\mu, \mu) & \dot{x} = 0 \\ \mu & \dot{x} > 0 \end{cases}$	
Soustava s rázem		
	$m\ddot{x} + mg = mf(x),$ $x \geq 0, f(x) \geq 0, xf(x) = 0$	

Tabulka 3.1.: Příklady nehladkých systémů, jejich fyzikální a matematický model a charakteristická nehladká funkce

Prvním příkladem je podélně kmitající hmotný bod, narážející do jednostranné elastické narážky. V tomto případě je nehladkou funkcí průběh tuhosti, jak ukazuje tab. 3, neboť v případě pohybu bez kontaktu s narážkou je síla v pružině narážky $f(x) = 0$ a v případě pohybu v kontaktu s narážkou je síla v pružině lineárně závislá na výchylce x . Další schéma ukazuje soustavu se třením, kde nehladkou funkcí je závislost síly ve frikčním členu na rychlosti. Ta je současně typickou funkcí vykazující nespojitost Filipovova typu. Poslední znázorněný příklad přísluší modelu rázu; tělesa, dopadajícího na tuhou podložku, kde kontaktní síla je ve tvaru Diracova pulsu.

3.1. Diferenciální inkluze

Tato kapitola shrnuje základní poznatky z teorie diferenciálních inkluzí s ohledem na matematické modelování mechanických systémů. Podklady jsou čerpány z prací [Leine 2004] a [Leine 2000]. Budou zde shrnuty základní vlastnosti stran jednoznačnosti existence řešení.

Nechť je dán dynamický systém popsáný soustavou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu¹ ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t), \quad (3.1)$$

kde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ je stavový vektor a $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ je vektor pravých stran, o kterém předpokládáme, že je lineárně omezený, takže existují (kladné) konstanty γ, c takové, že platí

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\| \leq \gamma \|\mathbf{x}\| + c \quad \forall \mathbf{x}, t. \quad (3.2)$$

Jestliže vektorové pole dané vektorem $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ je hladké, potom pro každé počáteční podmínky existuje jednoznačné řešení rovnice (3.1)².

Věta (Existence a jednoznačnost řešení spojitého systému): *Nechť vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ je spojitě a nechť jsou dány počáteční podmínky $t_0 \in \mathbb{R}$, a $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Potom platí, že:*

1. *Existuje řešení soustavy (3.1) na otevřeném intervalu $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\delta > 0$, které splňuje počáteční podmínku $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.*
2. *Jestliže navíc je vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ lineárně omezené podle (3.2), potom existuje řešení na intervalu $(-\infty, \infty)$, které splňuje počáteční podmínku $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.*
3. *Jestliže navíc je vektorové pole $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ lokálně Lipschitzovské v bodě \mathbf{x} , existuje jednoznačné řešení (3.1) na intervalu $(-\infty, \infty)$, které vyhovuje počáteční podmínce $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.*

3.1.1. Filipovova teorie

V této podkapitole bude popsána Filipovova teorie, která zavádí zobecněné řešení pro soustavy s nespojitou pravou stranou, též nazývané *řešení ve Filipovově smyslu*.

Filipovova metoda bude pro představu ukázána na jednoduchém jednodimenzionálním případě, následně pak zobecněna. Nechť je dána diferenciální rovnice [Leine 2004] ve tvaru³

$$\dot{x} = 1 - 2 \operatorname{sign} x = \begin{cases} 3 & \text{pro } x < 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0, \\ -1 & \text{pro } x > 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

¹Případnou soustavu obyčejných diferenciálních rovnic vyššího řádu lze ekvivalentně nahradit soustavou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu o vyšším počtu rovnic a převést je tak na zmiňovaný tvar (3.1).

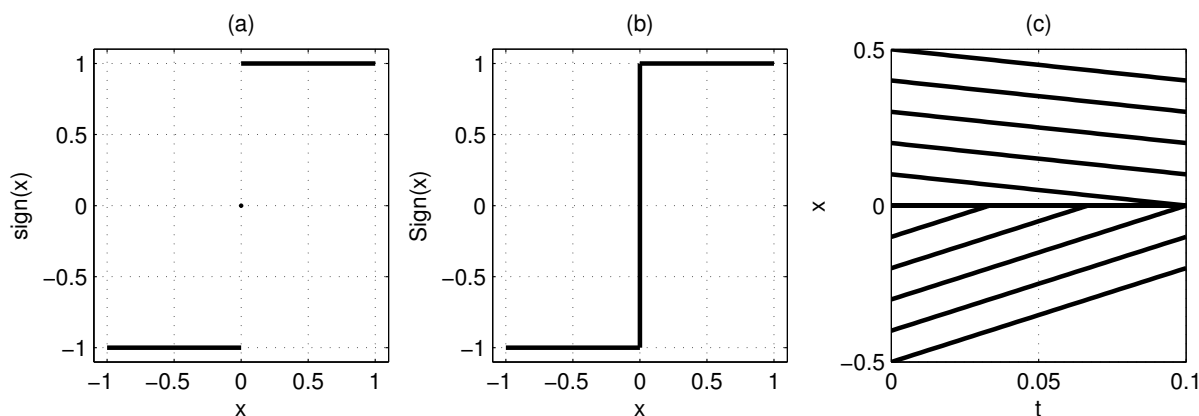
²Požadovaná hladkost vektorového pole ale není nutnou podmínkou, viz [Leine 2004].

³Užíváme funkce $\operatorname{sign}(\cdot)$, kde defintoricky $\operatorname{sign}(0) = 0$.

Řešení této rovnice lze získat např. metodou separace proměnných. Pro počáteční podmínku $x(0) \neq 0$ je

$$x(t) = \begin{cases} 3t + C_1 & x < 0, \\ -t + C_2 & x > 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

kde konstanty C_1, C_2 lze určit z počátečních podmínek. Řešení pro různé počáteční podmínky ukazuje obr. 3.1 vpravo. Je zřejmé, že pro každou počáteční podmínku dosáhne řešení přímky



Obrázek 3.1.: Funkce $\text{sign}(x)$, $\text{Sign}(x)$ a řešení úlohy (3.3) pro různé počáteční podmínky

$x = 0$. Poté už tuto přímku neopustí, protože pro $x < 0$ je $\dot{x} > 0$ a naopak pro $x > 0$ je $\dot{x} < 0$. Řešení tedy zůstává na $x = 0$ a odtud $\dot{x}(t) = 0$. Řešení $x(t) = 0, \dot{x}(t) = 0$ není řešením v klasickém smyslu, neboť $1 - \text{sign}(0) \neq 0$. Myšlenka Filipovova řešení spočívá v nahrazení diferenciální rovnice diferenciální inkluzí. V případě uvedeného příkladu (3.3) převedeme rovnici do tvaru

$$\dot{x}(t) \in 1 - 2 \text{Sign}(x), \quad (3.5)$$

kde byla zavedena funkce $\text{Sign}(x)$ (viz obr. 3.1) jako⁴

$$\text{Sign}(x) = \begin{cases} \{-1\} & x < 0, \\ \langle -1, 1 \rangle & x = 0, \\ \{1\} & x > 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

kde symbolem $\{.\}$ jsou označeny množiny konstant a symbolem $\langle ., . \rangle$ interval hodnot. S touto rozšířenou definicí je řešení $x(t) = 0$ jednoznačným řešením (v dopředném časovém vývoji).

⁴Funkci $\text{Sign}(\cdot)$ lze zavést též pomocí tzv. subdiferenciálu $\partial(\cdot)$ (viz [Leine 2004]) jako $\text{Sign}(x) = \partial|x|$, kde $|\cdot|$ značí absolutní hodnotu.

Poznámka: Fyzikální představu odpovídající výše uvedenému příkladu si lze udělat při uvažování pohybu tuhého tělesa o hmotnosti m , posouvajícího se působením vlastní tíhy v homogenním gravitačním poli o gravitačním zrychlení g po nakloněné rovině svírající s horizontálou úhel α , kde součinitel tření mezi tělesem a nakloněnou rovinou jest μ . Je-li v rychlost tohoto tělesa, je matematický model pohybu tělesa

$$m\dot{v} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha \operatorname{sign} v. \quad (3.7)$$

Tato rovnice je analogická zkoumané rovnici (3.3). Je zřejmé, že pokud dojde k zastavení tělesa, $v = 0$, které se dále nepohybuje, $\dot{v} = 0$, řešení neexistuje, neboť po dosazení do matematického modelu (3.7) je $0 = mg \sin \alpha - \mu mg \operatorname{sign} 0 = mg \sin \alpha$, což platí pouze pro $\sin \alpha = 0$. Podrobnější výklad viz [Stewart 2000].

Analogicky s tímto jednorozměrným případem lze postupovat v případě vícerozměrném. V dalším se omezíme na takové systémy, u nichž funkce pravých stran je nespojitá v konečném počtu nadploch prostoru \mathbb{R}^n . Necht' $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je stavový vektor a prostor \mathbb{R}^n je rozdělen na dva podprostory \mathcal{V}_- a \mathcal{V}_+ nadplochou (tzv. *přepínací hranicí*) Σ tak, že $\mathcal{V}_- \cup \Sigma \cup \mathcal{V}_+ = \mathbb{R}^n$. Tyto prostory jsou definovány jako

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_- &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) < 0\}, \\ \mathcal{V}_+ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) > 0\}, \\ \Sigma &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) = 0\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

kde $h(\mathbf{x})$ je skalární funkce přepínací hranice Σ definovaná jako

$$h(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \Sigma. \quad (3.9)$$

Přepínací hranice Σ je uvažována jako spojitá, ale může být nehladká. Pro normálu $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ v případě hladké funkce $h(\mathbf{x})$ platí

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \nabla h(\mathbf{x}), \quad (3.10)$$

resp. v případě nehladké funkce $h(\mathbf{x})$

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \partial h(\mathbf{x}), \quad (3.11)$$

kde $\partial(\cdot)$ značí subdiferenciál⁵ a předpokládáme $\partial h(\mathbf{x})$ omezené a $\mathbf{0} \notin \partial h(\mathbf{x})$.

Za použití výše uvedené terminologie lze formulovat (3.1) ve tvaru n -rozměrného nelineárního systému Filipovova typu, a ten následně převést do tvaru diferenciální inkluze, jak bylo naznačeno v jednorozměrném případě. Příslušná diferenciální rovnice má tvar

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{cases} \mathbf{f}_-(\mathbf{x}(t), t) & \mathbf{x} \in \mathcal{V}_-, \\ \mathbf{f}_+(\mathbf{x}(t), t) & \mathbf{x} \in \mathcal{V}_+, \end{cases} \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.12)$$

Pravá strana je nespojitá, hladká v prostorech \mathcal{V}_- a \mathcal{V}_+ a nehladká na Σ . Rovnice (3.12) nepopisuje případ, kdy $\mathbf{x} \in \Sigma$. Filipovova konvexní metoda převádí tuto soustavu na diferenciální

⁵Viz [Leine 2004].

inkluzi ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \begin{cases} \mathbf{f}_-(\mathbf{x}(t), t) & \mathbf{x} \in \mathcal{V}_-, \\ \overline{\text{co}}\{\mathbf{f}_-(\mathbf{x}(t), t), \mathbf{f}_+(\mathbf{x}(t), t)\} & \mathbf{x} \in \Sigma, \\ \mathbf{f}_+(\mathbf{x}(t), t) & \mathbf{x} \in \mathcal{V}_+, \end{cases} \quad (3.13)$$

kde operátor $\overline{\text{co}}\{\cdot\}$ značí uzavřený konvexní obal definovaný jako

$$\overline{\text{co}}\{\mathbf{f}_-, \mathbf{f}_+\} = \{(1-q)\mathbf{f}_- + q\mathbf{f}_+, \forall q \in \langle 0, 1 \rangle\}. \quad (3.14)$$

Věta (Existence řešení diferenciální inkluze): *Necht' F je funkce s množinovými hodnotami. Předpokládejme F shora polospojitou takovou, že $F(\mathbf{x}, t)$ je uzavřená, konvexní a omezená pro každé $t \in \mathbb{R}$ a pro každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Potom pro každou počáteční podmínku \mathbf{x}_0 existuje $\tau > 0$ a absolutně spojitá funkce $\mathbf{x}(t)$ definovaná na intervalu $\langle 0, \tau \rangle$, která je řešením počáteční úlohy*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} \in F(\mathbf{x}(t), t), \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Poznámka (Shora polospojité funkce): *Funkce $F(\mathbf{x})$ s množinovými hodnotami je polospojité shora v bodě \mathbf{x} , jestliže*

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}} \left(\sup_{\mathbf{a} \in F(\mathbf{y})} \inf_{\mathbf{b} \in F(\mathbf{x})} \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| \right) \rightarrow 0$$

Věta (Řešení ve Filipovově smyslu): *Absolutně spojitá funkce $\dot{\mathbf{x}}(t) : \langle 0, \tau \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je řešením úlohy $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ve Filipovově smyslu pro všechna $t \in \langle 0, \tau \rangle$, jestliže platí*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in F(\mathbf{x}, t),$$

kde $F(\mathbf{x}, t)$ je uzavřený konvexní obal všech limit $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$

$$F(\mathbf{x}, t) = \overline{\text{co}} \left\{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y} = \lim_{\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}} \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, t), \tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \setminus \Sigma \right\}$$

3.2. Mechanické systémy s nehladkými funkcemi

Hladkou mechanickou soustavu s n stupni volnosti lze popsat matematickým modelem ve tvaru

$$M(\mathbf{q}, t)\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \mathbf{0}, \quad (3.15)$$

kde $M \in \mathbb{R}^{n,n}$ je symetrická pozitivně definitní matice hmotnosti, vektor $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^n$ je vektor zobecněných souřadnic a vektor $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ obsahuje hladké funkce. Např. u lineárního modelu

$$M\ddot{\mathbf{q}}(t) + \underbrace{B\dot{\mathbf{q}}(t) + K\mathbf{q}(t) - \mathbf{f}(t)}_{-\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)} = \mathbf{0}, \quad (3.16)$$

je zřejmě $\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = -\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{K}\mathbf{q}(t) + \mathbf{f}(t)$. Jestliže budou navíc v systému přítomny nehladké funkce jako suché tření či nárazky, přibudou do modelu (3.15) kontaktní síly. Ty jsou v rámci modelu rozloženy do směru tečny a normály k povrchům těles v kontaktním bodě. Model tak lze při uvažování celkového počtu n_x kontaktních bodů a při uvažování $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ zapsat ve tvaru

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{h}(\mathbf{q}, \mathbf{u}, t) - \mathbf{W}_N(\mathbf{q}, t)\boldsymbol{\lambda}_N - \mathbf{W}_T(\mathbf{q}, t)\boldsymbol{\lambda}_T = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

kde $\boldsymbol{\lambda}_N \in \mathbb{R}^{n_x}$ je vektor normálových kontaktních sil, $\boldsymbol{\lambda}_T \in \mathbb{R}^{n_x}$ je vektor tečných kontaktních sil a $\mathbf{W}_N \in \mathbb{R}^{n, n_x}$, $\mathbf{W}_T \in \mathbb{R}^{n, n_x}$ jsou matice, jejichž sloupce udávají směr normálových a tečných kontaktních sil. Pro zmíněné vektory kontaktních sil platí

$$\boldsymbol{\lambda}_N = \begin{bmatrix} \lambda_{N_1} \\ \vdots \\ \lambda_{N_{n_x}} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}_T = \begin{bmatrix} \lambda_{T_1} \\ \vdots \\ \lambda_{T_{n_x}} \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

a pro matice směrů kontaktních sil

$$\mathbf{W}_N = [\mathbf{w}_{N_1} \mid \dots \mid \mathbf{w}_{N_{n_x}}], \quad \mathbf{W}_T = [\mathbf{w}_{T_1} \mid \dots \mid \mathbf{w}_{T_{n_x}}], \quad (3.19)$$

kde vektory \mathbf{w}_{N_i} , \mathbf{w}_{T_i} , tvořící matice \mathbf{W}_N , \mathbf{W}_T jsou

$$\mathbf{w}_{T_i} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{w}_{N_i} \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1 \dots n_x \quad (3.20)$$

a představují směry v n -rozměrném prostoru zobecněných souřadnic. Např. i -té normálové kontaktní síle (tj. normálové kontaktní síle působící v i -tém kontaktním bodě) přísluší vektor \mathbf{w}_{N_i} .

3.2.1. Konstitutivní vztahy

K obecnému modelu nehladkých mechanických soustav (3.17) je potřeba doplnit příslušné konstitutivní vztahy. Ve směru normálovém jde o tzv. Signoriniův zákon, ve směru tečném pak o Coulombův zákon suchého tření.

Signoriniův zákon

Nechť jsou dána dvě konvexní tuhá tělesa, jejichž normálová kontaktní vzdálenost je g_N , viz obr. 3.3. Protože tuhá tělesa se nemohou při kontaktu navzájem deformovat a nedojde k jejich proniknutí, je vždy $g_N \geq 0$. Jestliže nastane případ, kdy $g_N = 0$, došlo ke kontaktu mezi tělesy, čímž je generována kontaktní síla $\lambda_N \geq 0$. Jestliže dojde opět k odpoutání, $g_N > 0$, normálová síla λ_N působící mezi tělesy je $\lambda_N = 0$. Tento vztah lze zapsat ve tvaru

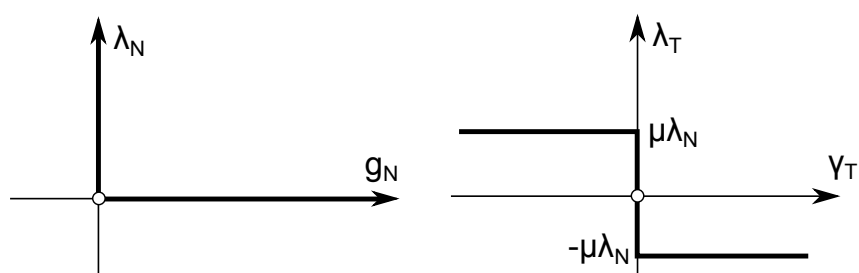
$$g_N \geq 0, \quad \lambda_N \geq 0, \quad g_N \lambda_N = 0, \quad (3.21)$$

kde třetí člen zaručuje, že alespoň jedna z veličin g_N , λ_N bude vždy nulová. Vztah (3.21) představuje podmínky komplementarity mezi těmito veličinami. Směr zobecněné síly λ_N je dán

vektorem

$$\mathbf{w}_N = \left(\frac{\partial g_N}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (3.22)$$

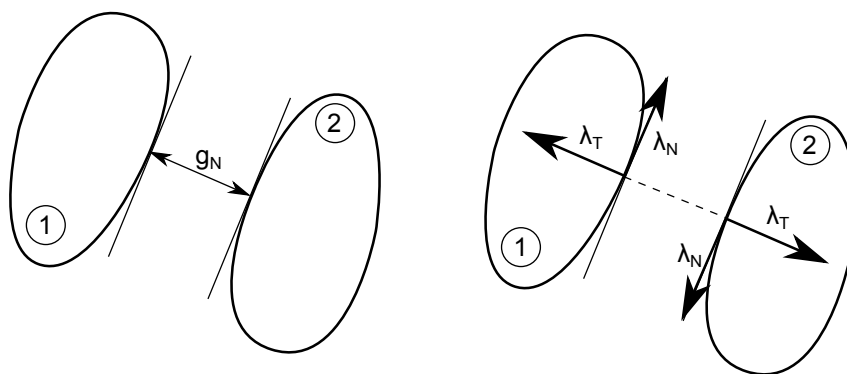
kde \mathbf{q} je vektor zobecněných souřadnic. Normálová síla může být vyjádřena rovněž pomocí nehladkého potenciálu - viz [Leine 2004]. Závislost normálové síly na relativním přiblížení těles ukazuje obr. 3.2 vlevo.



Obrázek 3.2.: Průběhy normálové a tečné kontaktní síly

Coulombův zákon suchého tření

Podobným způsobem jako u normálových kontaktních sil lze formulovat konstitutivní vztah pomocí Signoriniova zákona, lze tečné kontaktní síly formulovat pomocí Coulombova zákona. Jsou opět uvažována dvě konvexní, dokonale tuhá tělesa, mezi nimiž platí v kontaktním bodě Coulombův zákon. Relativní rychlost těchto dvou těles v tečném směru je γ_T a koeficient tření je μ .



Obrázek 3.3.: Kontaktní vzdálenost g_N těles (vlevo) a tečné síly λ_T a normálové síly λ_N při kontaktu

Pro normálovou vzdálenost $g_N = 0$ (viz obr. 3.3 vpravo) dojde ke kontaktu. Pokud je relativní rychlost v tečném směru $\gamma_T = 0$, potom se tělesa po sobě odvalují bez prokluzu a tečná kontaktní síla $\lambda_T \in \langle -\mu\lambda_N, \mu\lambda_N \rangle$. Pokud je $\gamma_T \neq 0$, potom dochází k prokluzu v příslušném

směru. Odtud lze psát Coulombův zákon ve tvaru diferenciální inkluze

$$\lambda_T \in \begin{cases} -\mu\lambda_N & \gamma_T > 0, \\ \langle -\mu\lambda_N, \mu\lambda_N \rangle & \gamma_T = 0, \\ \mu\lambda_N & \gamma_T < 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Směr zobecněných kontaktních sil je dán analogicky k (3.22) jako

$$\mathbf{w}_T = \left(\frac{\partial \gamma_T}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (3.24)$$

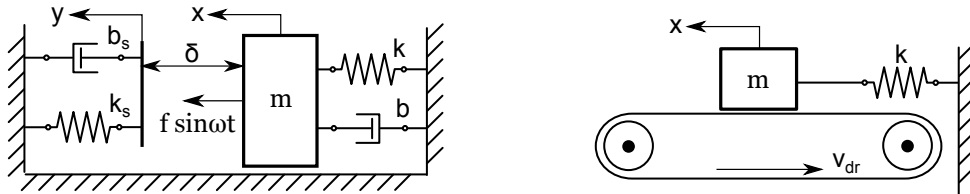
kde $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}$ jsou zobecněné rychlosti. Závislost tečné síly na relativní rychlosti těles ukazuje obr. 3.2 vpravo.

3.2.2. Modelové příklady nehladkých soustav

V této kapitole budou uvedeny jednoduché příklady soustav s nehladkými funkcemi se zaměřením na formulaci matematického modelu na základě výše uvedené teorie. Bude ukázán jak příklad soustavy s rázy, tak příklad soustavy se suchým třením.

Podélně kmitající soustava s jednostrannou narážkou

Je uvažován harmonicky buzený hmotný bod m na závěsu tuhosti k s proporcionálním tlumením b , narážející při svém pohybu do jednostranné pružně viskózní, resp. pružně-frikční, narážky podle obr. 3.4 vlevo. Nárazka je charakterizována konstantami k_s a b_s , resp. μ . Výchylka



Obrázek 3.4.: Modelové příklady nehladkých soustav - podélně kmitající soustava s jednostrannou narážkou a hmotný bod na nekonečném pásu

x přísluší výchylce hmotného bodu, y je výchylka (nehmotné) pružné narážky a δ definuje vůli mezi hmotným bodem a narážkou. Pro pohyb hmotného bodu bez kontaktu s narážkou platí pohybová rovnice

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = f \sin \omega t, \quad (3.25)$$

zatímco při pohybu systému v kontaktu s narážkou přibývají členy příslušející pružně viskózní narážce

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) + k_s y + F_t = f \sin \omega t, \quad (3.26)$$

kde

$$F_t = \begin{cases} b_s \dot{y} & \text{pro viskózní (Rayleighovo) tření,} \\ -N\mu \operatorname{sign} \dot{y} & \text{pro suché (Coulombovo) tření.} \end{cases} \quad (3.27)$$

Dálší odvození bude provedeno jen pro viskózní tlumení. Hmotný bod přejde do kontaktu s narážkou, jestliže platí $x = 0$, a kontakt se ztrácí, jestliže narážka nepřenáší žádnou sílu, tj. $f_c = k_s x + b_s \dot{x} = 0$. Tyto dvě podmínky definují funkce přepínací hranice ve tvaru

$$h_\alpha(\mathbf{x}) = x, \quad h_\beta(\mathbf{x}) = k_s x + b_s \dot{x}. \quad (3.28)$$

Stavový vektor necht' je $\mathbf{x} = [x, \dot{x}]^T$. V souladu s výše uvedenou teorií lze tedy zavést podprostory \mathcal{V}_- a \mathcal{V}_+ tak, že pro $\mathbf{x} \in \mathcal{V}_-$ není hmotný bod v kontaktu s narážkou, a naopak pro $\mathbf{x} \in \mathcal{V}_+$ je hmotný bod v kontaktu s narážkou. Platí tedy

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_- &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : h_\alpha < 0 \vee h_\beta < 0\}, \\ \mathcal{V}_+ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : h_\alpha > 0 \wedge h_\beta > 0\}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

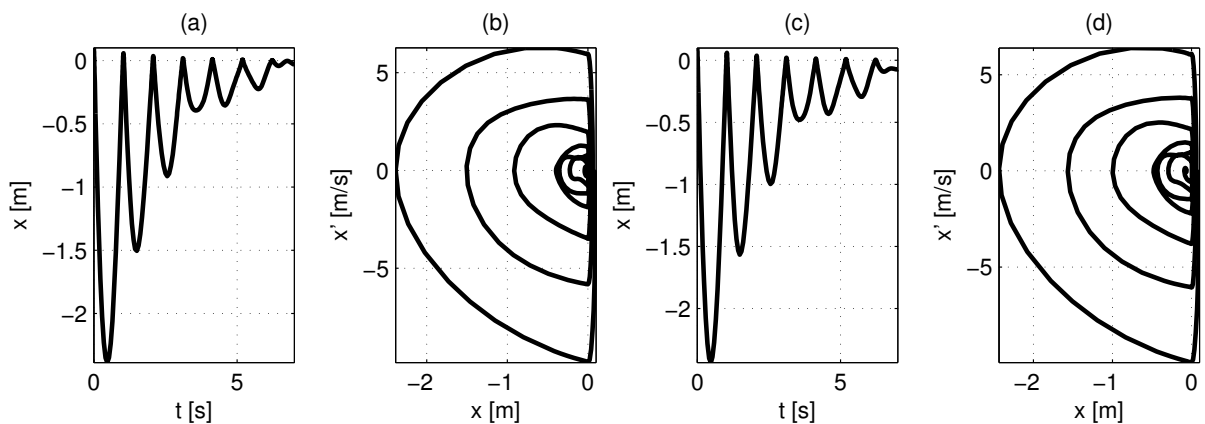
Pohybovou rovnici ve stavovém prostoru dostáváme ve tvaru

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{f}_-(t, \mathbf{x}(t)), & \mathbf{x} \in \mathcal{V}_-, \\ \mathbf{f}_+(t, \mathbf{x}(t)), & \mathbf{x} \in \mathcal{V}_+, \end{cases} \quad (3.30)$$

kde jednotlivé funkce v (3.30) mají tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_-(t, \mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{f}{m}\sin\omega t \end{bmatrix}, \\ \mathbf{f}_+(t, \mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{1}{m}(k + k_s)x - \frac{1}{m}(b + b_s)\dot{x} + \frac{f}{m}\sin\omega t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Výsledky numerické simulace pohybu této soustavy ukazuje obr. 3.5 jak pro viskózní tlumení,



Obrázek 3.5.: Časové průběhy a fázové trajektorie soustavy s narážkami při viskózním tlumení (a), (b) a při frikčním tlumení (c), (d)

tak pro frikční tlumení. Parametry simulace jsou hmotnost $m = 50$ kg, tlumení $b = 5$ Ns/m, tuhost $k = 500$ N/m, amplituda buzení $f = 100$ N, tuhost nárazky $k_s = 5 \cdot 10^5$ N/m, tlumení nárazky $b_s = b$, gravitační zrychlení $g = 10$ m/s² a $\mu = 0,4$.

Soustava s Coulombovým třením

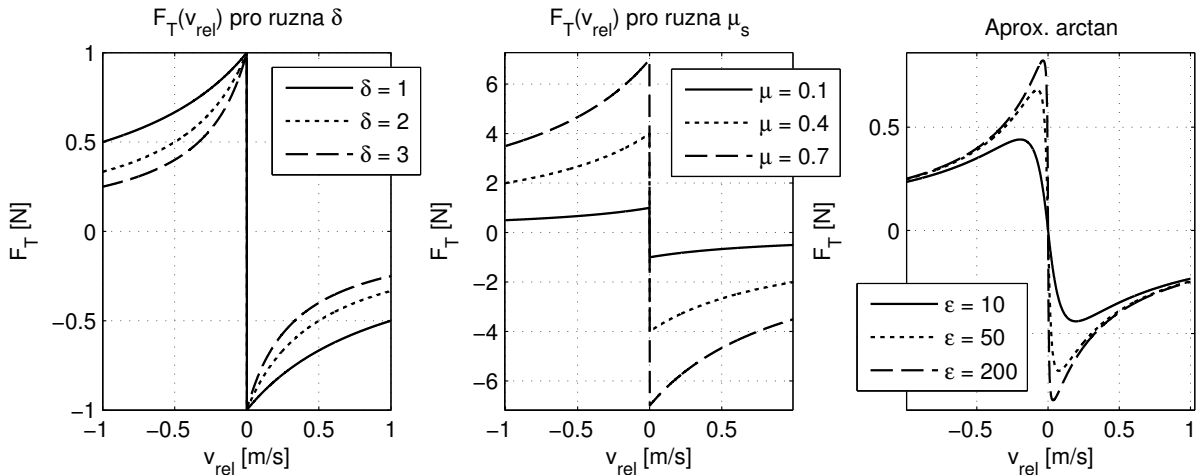
Dalším příkladem z třídy nehladkých soustav budiž podélně kmitající hmotný bod m na pružném závěsu o tuhosti k , který je zároveň unášen nekonečným pásem posouvajícím se rychlostí v_{dr} podle obr. 3.4 vpravo. Jde o typický případ soustavy, ve které dochází k samobuzenému kmitání. Tření je modelováno pomocí závislosti

$$F_T(v_{rel}) = -\mu(v_{rel})F_N \operatorname{sign} v_{rel}, \quad \text{kde } \mu(v_{rel}) = \frac{\mu_s}{1 + \delta|v_{rel}|}, \quad (3.32)$$

kde v_{rel} je relativní rychlost hmotného bodu vzhledem k pohybu pásu, daná jako

$$v_{rel} = \dot{x} - v_{dr}, \quad (3.33)$$

a kde μ_s je (statický) koeficient tření, $F_N = mg$ je normálová síla a δ je parametr třecí charakteristiky. Závislost třecí charakteristiky na různé volbě parametru δ ukazuje obr. 3.6 vlevo a změnu třecí charakteristiky v závislosti na změně μ_s obr. 3.6 uprostřed. Opět zavedeme stavový vektor



Obrázek 3.6.: Závislost třecí charakteristiky $F_T = F_T(v_{rel})$ na parametru δ (a), změna charakteristiky při různých hodnotách μ_s (b) a aproximace třecí charakteristiky funkcí arcustangens (kvalitativně)

ve tvaru $\mathbf{x} = [x, \dot{x}]^T$ a definujeme funkci $h(\mathbf{x})$ jako

$$h(\mathbf{x}) = v_{rel}. \quad (3.34)$$

Tato funkce bude anulována v případě, kdy relativní rychlost hmotného bodu vůči pásu bude $v_{rel} = 0$, tedy když hmotný bod bude na pásu tzv. *ulpívat*. Celý systém lze matematicky spopsat

diferenciální inkluzí ve výše uvedeném tvaru (3.13) jako

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \begin{cases} \mathbf{f}_-(\mathbf{x}(t)) & \mathbf{x} \in \mathcal{V}_-, \\ \overline{\text{co}}\{\mathbf{f}_-(\mathbf{x}(t)), \mathbf{f}_+(\mathbf{x}(t))\} & \mathbf{x} \in \Sigma, \\ \mathbf{f}_+(\mathbf{x}(t)) & \mathbf{x} \in \mathcal{V}_+, \end{cases} \quad (3.35)$$

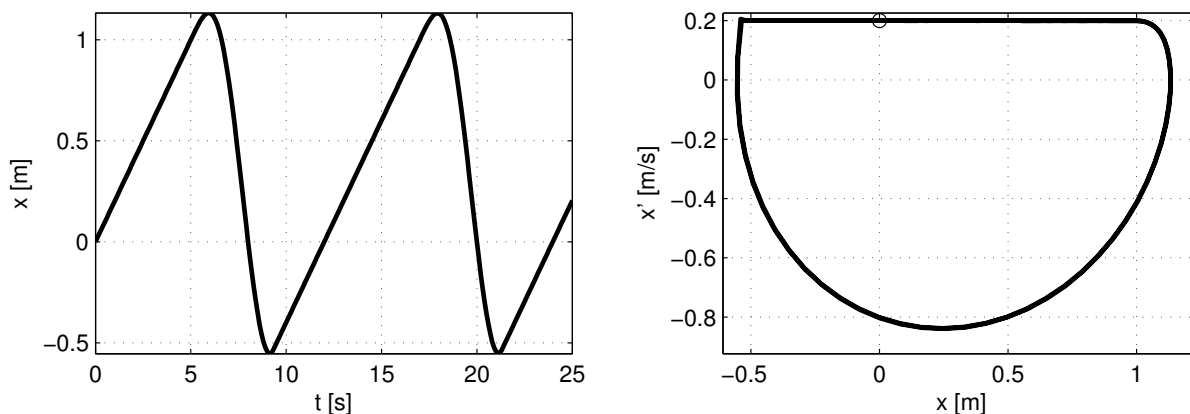
kde jednotlivé podprostory jsou zde definovány jako

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_- &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) < 0\}, \\ \Sigma &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) = 0\}, \\ \mathcal{V}_+ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) > 0\}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

a pro vektory pravých stran diferenciální inkluze (3.35) platí

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_-(t, \mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{k}{m}x + \frac{1}{m} \frac{F_s}{(1+\delta|v_{rel}|)} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{f}_+(t, \mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -\frac{k}{m}x - \frac{1}{m} \frac{F_s}{(1+\delta|v_{rel}|)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Řešení takovéto soustavy lze provést pomocí vybraných numerických přístupů (viz následující kap. 3.3). Např. po nahrazení třecí charakteristiky funkcí arcustangens⁶ podle obr. 3.6 vpravo lze provést výpočet pomocí standardního řešiče obyčejných diferenciálních rovnic. Výsledek



Obrázek 3.7.: Výsledky numerické simulace pohybu soustavy s Coulombovým třením - časový průběh (vlevo) a fázová trajektorie (vpravo)

numerické simulace pro konkrétní počáteční podmínky ukazuje obr. 3.7. Parametry soustavy jsou hmotnost $m = 1$ kg, tuhost závěsu $k = 1$ N/m, rychlost posouvání pásu $v_{dr} = 0,2$ m/s, parametr tření $\mu_s = 0,1$, parametr $\delta = 3$ s/m, $F_s = 1$ N a gravitační zrychlení $g = 10$ m/s².

⁶Aproximace nehladké funkce funkcí hladkou bude diskutováno v kap. 3.3.1.

3.3. Numerické přístupy k řešení nehladkých systémů

V oblasti numerických simulací hladkých systémů existuje množství nejrůznějších řešičů, s jejichž pomocí lze řešit diferenciální rovnice (např. řešiče typu *ode* v MATLABu, implementující Rungeovu-Kuttovu metodu). V případě nehladkých systémů obecně nelze využívat těchto řešičů, neboť v oblasti nehladkého přechodu mezi vektorovými poli může řešení začít alternovat a při následném zjemňování kroku (u metod s adaptivním krokem) se výpočet významně zpomaluje, či přímo kolabuje [Leine 2004]. Je tedy nutné hledat numerická schémata, která podobným problémům při integraci pohybových rovnic předcházejí, či vhodně upravit řešiče pro hladké systémy. V této kapitole budou dále popsány dva základní numerické přístupy pro řešení nehladkých systémů – metoda zhladčení nehladkých funkcí a metoda přepínání – a bude zde rovněž ukázán příklad numerické realizace těchto přístupů v prostředí MATLAB. Kromě zmínovaných dvou základních přístupů lze nalézt v literatuře další speciální metody řešení nehladkých systémů, kterými jsou např. metoda řízení integrace událostmi (*event-driven integration method*) či metody časové diskretizace (*time stepping method*). Tyto metody jsou blíže diskutovány např. v [Leine 2004], [Leine 2000].

3.3.1. Metoda zhladčení nehladké funkce

Základní metodou pro řešení nehladkých systémů je metoda zhladčení nehladkého vektorového pole systému (*smoothing method*). Necht' je uvažována diferenciální inkluze ve tvaru (3.13)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \in \begin{cases} \mathbf{f}_-(\mathbf{x}(t), t) & \mathbf{x} \in \mathcal{V}_-, \\ \overline{\text{co}}\{\mathbf{f}_-(\mathbf{x}(t), t), \mathbf{f}_+(\mathbf{x}(t), t)\} & \mathbf{x} \in \Sigma, \\ \mathbf{f}_+(\mathbf{x}(t), t) & \mathbf{x} \in \mathcal{V}_+, \end{cases} \quad (3.38)$$

kde jednotlivé prostory \mathcal{V}_- , \mathcal{V}_+ , Σ jsou definovány v (3.8) jako

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_- &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) < 0\}, \\ \mathcal{V}_+ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) > 0\}, \\ \Sigma &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) = 0\}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Pravá strana diferenciální inkluze (3.38) je obvykle ve tvaru znaménkové funkce $\text{sign}(\cdot)$ či Heavisideovy funkce. Obě tyto funkce lze aproximovat vhodně upravenou funkcí arcustangens . Např. pro aproximaci funkce signum lze psát

$$\text{sign}(x) \approx \frac{2}{\pi} \arctan(\varepsilon x), \quad \text{kde } \varepsilon \gg 1. \quad (3.40)$$

Pro aproximaci Heavisideovy funkce $H(\cdot)$ lze užít vhodné transformace funkce signum jako

$$H(x) = \frac{1}{2} (1 + \text{sign } x), \quad (3.41)$$

což po dosazení z (3.40) lze zapsat jako

$$H(x) \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan(\varepsilon x) \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\varepsilon x). \quad (3.42)$$

Diferenciální inkluzi (3.38) lze touto aproximací převést na soustavu diferenciálních rovnic

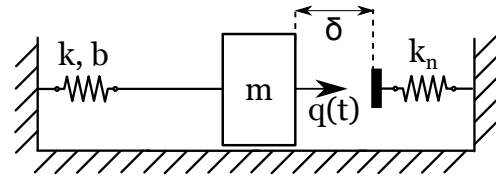
$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \left[\mathbf{f}_+ + \mathbf{f}_- + \frac{2}{\pi} \arctan(\varepsilon h(\mathbf{x}))(\mathbf{f}_+ - \mathbf{f}_-) \right], \quad (3.43)$$

kde $h = h(\mathbf{x})$ je funkce přepínací hranice a \mathbf{f}_- , \mathbf{f}_+ jsou vektory pravých stran diferenciální inkluze (3.38).

Takto provedená aproximace nehladkého vektorového pole hladkým polem obvykle poskytuje dobrou aproximaci řešení pro velké hodnoty parametru ε . Přesto se v některých případech mohou při užití metody zhladčování objevit problémy s integrací - viz [Leine 2004].

Příklad numerické realizace metody zhladčování

Např. necht' je uvažována podélně kmitající soustava s jedním stupněm volnosti. Hmotný bod m volně kmitá na závěsu o tuhosti k a tlumení b proti pružné nárazce o tuhosti k_n (viz obr. 3.8). Výchylku hmotného bodu q kótujeme z výchozí polohy, kdy vůle mezi hmotným bodem a nárazkou je δ . Definujeme funkci přepínací hranice $h(q(t)) = q(t) - \delta$ a dostáváme matematický model ve tvaru



Obrázek 3.8.: Podélně kmitající soustava s jedním stupněm volnosti s nárazkou

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + f_k(q)q(t) = 0 \quad (3.44)$$

kde nelineární funkce $f_k(q)$ zahrnuje tuhost závěsu k a tuhost nárazky a je dána jako

$$f_k(q) = \begin{cases} k & \text{pro } h(q) < 0, \\ k + k_n & \text{pro } h(q) \geq 0. \end{cases} \quad (3.45)$$

Pro aplikaci metody zhladčení lze nahradit silně nelineární závislost $f_k(q)$ slabě nelineárním výrazem

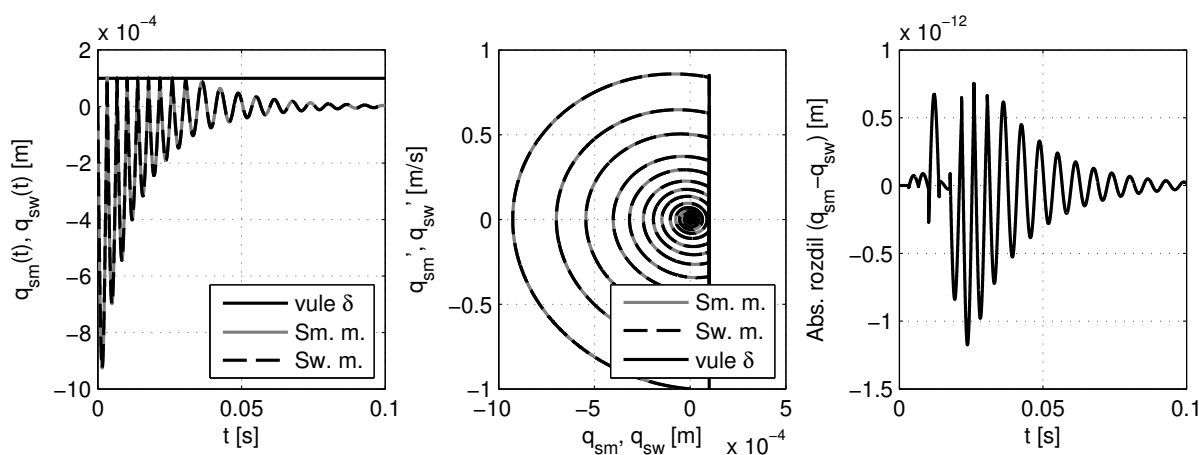
$$f_k(q) = k + k_n H(h(q)) \approx k + k_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\varepsilon h(q)) \right), \quad \varepsilon \gg 1, \quad (3.46)$$

a matematický model (3.47) tak přechází do tvaru

$$m\ddot{q}(t) + b\dot{q}(t) + \left[k + k_n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(\varepsilon h(q)) \right) \right] q(t) = 0, \quad \varepsilon \gg 1, \quad (3.47)$$

kteřý lze po vhodném přepsání na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu řešit pomocí standardních ODE řešičů. Podobně by bylo možné postupovat v případě n -rozměrném.

Konkrétní realizace v prostředí MATLAB pro danou soustavu je ukázána v příloze A.1. Výpočet je realizován pomocí Rungeovy-Kuttovy metody čtvrtého řádu s absolutní přesností



Obrázek 3.9.: Srovnání metody zhladčení a metody přepínání na příkladu volně podélně kmitajícího oscilátoru s narážkou - časový průběh, fázová trajektorie a rozdíl časových průběhů

10^{-8} a pro hodnotu parametru $\varepsilon = 10^{11}$. Zbylé parametry jsou uvedeny v kódu ve zmíněné příloze. Výsledky numerické integrace pohybových rovnic ukazuje obr. 3.9.

3.3.2. Metoda přepínání modelů

Další možností, jak provádět numerické řešení nehladkých soustav, je použití metody přepínání modelů (*switch model*, též *switch method*). Formulace tohoto numerického schématu byla motivována některými modely, pro které selhávala výše uvedená metoda zhladčování, zejm. pak v případě modelů se suchým třením, kde se projevuje efekt ulpívání.

Tento přístup je podrobněji dokumentován v práci [Leine 2004] na příkladu Karnoppova modelu. Princip metody je zde takový, že je zvolen úzký pás okolo funkce přepínací hranice a stavový prostor je rozdělen opět na několik hladkých podprostorů. Lze uvážit možnost ulpívání (v případě soustav se třením) a různé stavy hladkého pohybu. V každém kroku integrace je kontrolováno, v jakém podprostoru stavového prostoru se soustava aktuálně nachází a s ohledem na výsledek tohoto rozhodování je v integraci aplikováno příslušné vektorové pole. Tento přístup odstraňuje problémy výše uvedené metody zhladčení nehladké funkce. Na druhou stranu s sebou nese některé nevýhody. Zejména jde o nutnost ošetřit v kódu numerické implementace zvlášť pohyb soustavy ve všech možných podprostorech stavového prostoru, a tedy vzrůstající komplikovanost logické struktury kódu při větším množství kontaktních podmínek.

Příklad numerické realizace metody přepínání modelů

Příklad numerické realizace metody přepínání modelů na stejném příkladu, který byl ukázán u metody zhladčení, je uveden v příloze A.2. Výsledky téhož příkladu vypočtené přístupem přepínání modelů jsou ukázány na obr. 3.9, kde je rovněž zobrazen rozdíl mezi metodou zhladčení a metodou přepínání pro tento konkrétní případ. Je zřejmé, že k největším rozdílům dochází po průchodu funkcí přepínací hranice, zatímco při pohybu v rámci jednoho hladkého vektorového pole jsou rozdíly mezi oběma metodami malé.

4. Aplikace: Modely vybraných mechanických soustav s rázy

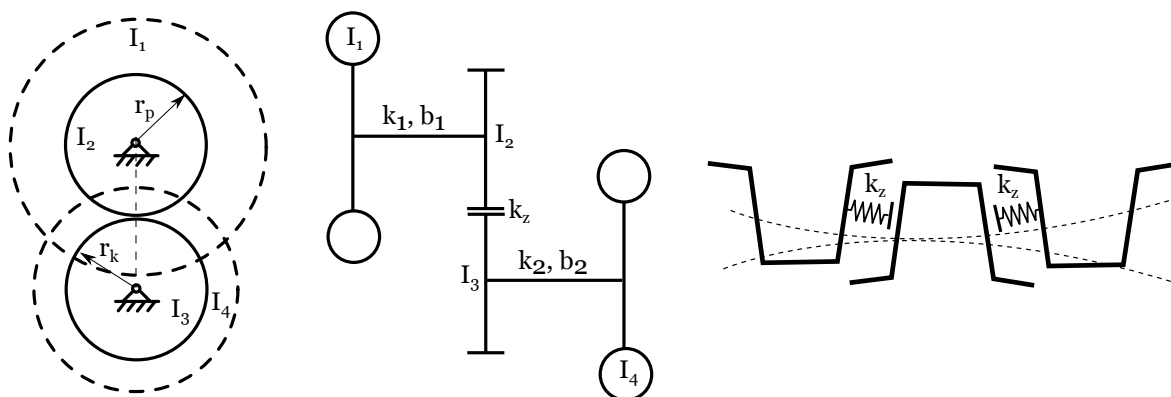
V této kapitole budou výše uvedené teoretické poznatky aplikovány na vybraných mechanických soustavách. Bude ukázána formulace a způsob sestavení matematického modelu těchto soustav, a to jak pro zařízení, ve kterých jsou rázy nežádoucí, tak pro zařízení, která rázových jevů aktivně užívají. Jako příklad soustavy s nežádoucím výskytem rázů bude uveden model jednostupňové převodovky s uvažováním možnosti odlehnutí zubového záběru, a tedy s potenciální přítomností rázů v ozubení. V tomto případě bude nejprve uvažován velmi zjednodušený model převodovky ve formě torzně kmitající soustavy se čtyřmi stupni volnosti, na němž bude ukázána metodika modelování podobných soustav, dále pak bude ukázána aplikace na tzv. testovací převodovku, jež bude modelována komplexním způsobem pomocí metody konečných prvků. Jako příklad aplikace, která principiálně využívá ke své činnosti přítomnosti rázů, bude uveden matematický model vibrolisu na zhutnění betonové směsi. Pomocí výše uvedených numerických přístupů budou provedeny simulace pohybu silně nelineárních soustav s ohledem na numerické řešení v časové oblasti a následnou analýzu ustálené odezvy na typická buzení. V případě modelů převodového ústrojí bude formou bifurkačních diagramů ukázán vliv parametrů na kvalitu pohybu systému.

4.1. Zjednodušený torzní model jednostupňové převodovky s rázy v ozubení

V této kapitole bude vytvořen zjednodušený matematický model torzního kmitání jednostupňové převodovky, u níž bude uvažována možnost ztráty silového záběru. V takovém případě mohou nastat tři odlišné stavy v místě záběru ozubených kol [Byrtus 2002]. Jednak jde o stav, kdy dochází ke stálému styku pracovních boků zubů. V tomto případě může být zubová vazba uvažována jako (visko-)elastická. Dojde-li však ke ztrátě silového záběru, může dojít k pohybu v rámci boční vůle v ozubení a elastická vazba mezi ozubenými koly se tímto ztrácí. Boční vůle v ozubení je dána výrobními nepřesnostmi. Poslední možný případ je dán možností styku nepracovních boků zubů.

V ozubených převodech je kromě vnějšího buzení (hnací, zátěžný moment ap.) přítomno též vnitřní buzení, generované v záběru ozubených kol [Hajžman et al. 2004]. Toto buzení je důsledkem výrobních úchylek a výškové modifikace ozubení a je dáno tzv. *kinematickou úchylkou ozubení*.

V prvním přiblížení je pro ověření metodiky modelování soustavy uvažována převodovka ve zjednodušené formě podle obr. 4.1. Jde o soustavu se dvěma subsystémy, jež jsou navzájem vázány nelineární zubovou vazbou. Momenty setrvačnosti disků na vstupu a výstupu jsou



Obrázek 4.1.: Model zjednodušené dvoustupňové převodovky a schéma boční vůle v ozubení

I_1, I_4 a momenty setrvačnosti spoluzabírajících ozubených kol jsou I_2, I_3 . Torzní tuhosti hřídelů jsou k_1, k_2 podle obr. 4.1 a poloměry pastorku a kola jsou $r_p = r_2, r_k = r_3$. U jednotlivých hřídelů je uvažováno materiálové (proporcionální) tlumení b_1, b_2 . Na kotouče I_1, I_4 na vstupu a výstupu jsou redukovány rotující hmoty hnací a hnané části, jež jsou velké oproti momentům setrvačnosti kol I_2, I_3 . Mezi ozubenými koly je uvažována kinematická úchylnka ozubení $\Delta(t)$ a je předpokládána možnost odlehnutí zubů. Kontakt ozubených kol je reprezentován kontaktní tuhostí k_z na záběrové přímce.

Za předpokladu prizmatických hřídelů lze torzní tuhost i -tého hřídele vyjádřit jako

$$k_i = \frac{G_i J_{pi}}{l_i}, \quad i = 1, 2, \quad (4.1)$$

kde G_i je modul pružnosti ve smyku, J_{pi} je polární moment setrvačnosti a l_i je délka i -tého hřídele. Uvažujeme-li hřídel mezikruhového průřezu, je polární moment setrvačnosti i -tého hřídele

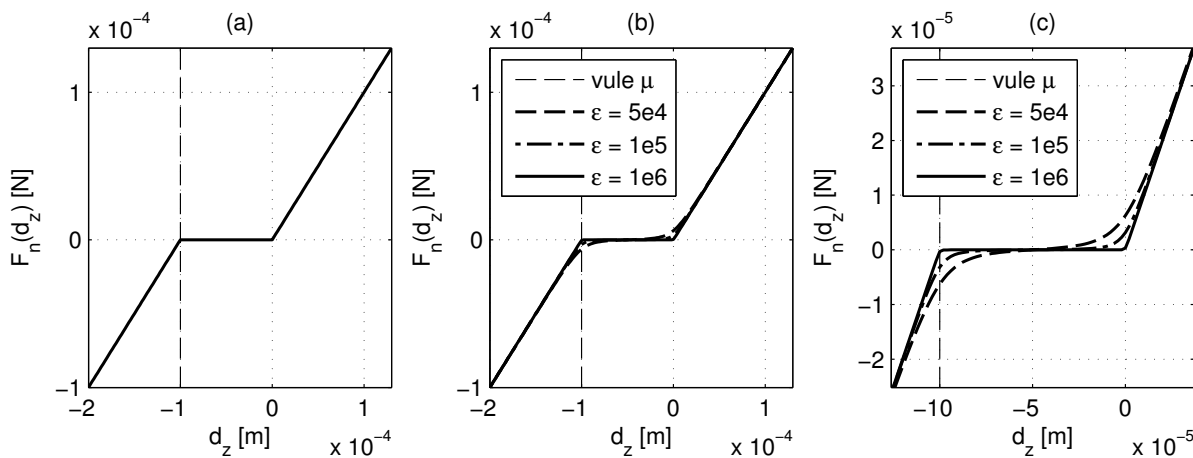
$$J_{pi} = \frac{\pi}{32} (D_i^4 - d_i^4), \quad (4.2)$$

kde D_i je vnější průměr a d_i je vnitřní průměr i -tého hřídele. Při uvažování odstupňovaného hřídele lze podle (4.1) vyjádřit torzní tuhost jednoho stupně hřídele. Celková poddajnost hřídele potom odpovídá součtu poddajností jednotlivých stupňů a z definice poddajnosti jakožto reciproké hodnoty tuhosti lze vyjádřit tuhost celého hřídele. Má-li i -tý hřídel S_i stupňů, platí pro jeho poddajnost

$$\left(\frac{1}{k}\right)_i = \left(\sum_{l=1}^{S_i} \frac{1}{k_l}\right)_i = \left(\sum_{l=1}^{S_i} \frac{l_l}{G_l J_{pl}}\right)_i, \quad i = 1, 2, \quad (4.3)$$

kde $\left(\frac{1}{k_l}\right)_i$ je poddajnost l -tého stupně i -tého hřídele, l_l je jeho délka, G_l modul pružnosti ve smyku a J_{pl} jeho polární moment setrvačnosti.

Vektor zobecněných souřadnic je $\mathbf{q} = [q_i]^T = [\varphi_i]^T, i = 1 \dots 4$, kde zobecněné sou-



Obrázek 4.2.: Nelineární charakteristika síly na záběrové přímce (a), její aproximace funkcí arcustangens podle (3.42) pro různé hodnoty argumentu ε (b) a detail aproximace v okolí nehladkosti (c)

řadnice odpovídají natočení jednotlivých kol ve smyslu otáčení (superponovanému na natočení od jmenovité rotace). Ve výchozí poloze, ze které jsou kótovány jednotlivé torzní výchylky, je mezi zuby vymezena na záběrové přímce boční vůle v ozubení μ - charakteristika síly přenášené ozubením je ukázána na obr. 4.2 vlevo. Deformace ozubení na záběrové přímce¹ je dána ve tvaru

$$d_z = r_2\varphi_2 - r_3\varphi_3 + \Delta(t). \quad (4.4)$$

Funkce přepínací hranice $h_i(\mathbf{q})$ budou v tomto případě dvě, tj. $i = 1, 2$, a platí

$$h_1(\mathbf{q}) = d_z, \quad h_2(\mathbf{q}) = d_z + \mu. \quad (4.5)$$

Nelineární matematický model lze potom formulovat ve standardním maticovém tvaru

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_I(t) + \mathbf{f}_E(t) + \mathbf{f}_N(\mathbf{q}(t)), \quad (4.6)$$

kde \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} jsou matice hmotnosti, tlumení a tuhosti ve tvaru

$$\mathbf{M} = \text{diag}\{I_i\}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{K}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

Na pravé straně rovnice (4.6) jsou vektor vnitřního buzení od kinematické úchytky ozubení $\mathbf{f}_I(t)$, vektor vnějších budících sil $\mathbf{f}_E(t)$ a vektor nelineárních sil $\mathbf{f}_N(\mathbf{q})$, které jsou definované

¹Jako deformace ozubení bude dále označována relativní vzdálenost záběrových bodů na záběrové přímce.

jako

$$\mathbf{f}_I(t) = -k_z \Delta(t) \begin{bmatrix} 0 \\ -r_p \\ r_k \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_E(t) \in \mathbb{R}^4, \quad \mathbf{f}_N(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ r_p f_n \\ -r_k f_n \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Nelineární funkce síly přenášené ozubením f_n je dána jako po částech lineární závislost

$$f_n = \begin{cases} k_z d_z, & d_z > 0, \\ 0, & d_z \in \langle -\mu, 0 \rangle, \\ k_z (d_z - \mu), & d_z < -\mu. \end{cases} \quad (4.9)$$

Kinematická úchylna ozubení $\Delta(t)$ je periodickou funkcí času a může být aproximována Fourierovou řadou ve tvaru

$$\Delta(t) = \sum_{k=1}^K (\Delta_k^C \cos k\omega_z t + \Delta_k^S \sin k\omega_z t), \quad (4.10)$$

kde Δ_k^C, Δ_k^S jsou koeficienty Fourierovy řady a ω_z je zubová frekvence, pro kterou platí $\omega_z = z_1 \omega_1$, kde z_1 je počet zubů kola 1.

V dalším bude uvažován stavový vektor \mathbf{u} , definovaný jako $\mathbf{u}^T = [\mathbf{q}^T, \dot{\mathbf{q}}^T]$. Potom lze libovolný matematický model kmitající diskrétní mechanické soustavy ve tvaru (4.6) převést do stavového prostoru a převést tak soustavu n diferenciálních rovnic druhého řádu na soustavu $2n$ diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru [Zeman & Hlaváč, 2004]

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{F}(t, \mathbf{q}), \quad (4.11)$$

kde \mathbf{u} je stavový vektor, \mathbf{A} je systémová matice a \mathbf{F} je vektor buzení ve stavovém prostoru, které jsou dány jako

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Nyní lze formulovat podprostory $\mathcal{V}_-, \mathcal{V}_+$ stavového prostoru jako takové prostory, které jsou od sebe odděleny přepínací hranicí. Pro pohyb bez kontaktu mezi tělesy je $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_-$ a pro pohyb v kontaktu je $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_+$, kde pro $\mathcal{V}_-, \mathcal{V}_+$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_- &= \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^8 : h_1(\mathbf{u}) < 0 \wedge h_2(\mathbf{u}) > 0\}, \\ \mathcal{V}_+ &= \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^8 : h_1(\mathbf{u}) \geq 0 \vee h_2(\mathbf{u}) \leq 0\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Odtud plyne pohybová rovnice ve stavovém prostoru

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}) = \begin{cases} \mathbf{f}_-(t, \mathbf{u}), & \mathbf{u} \in \mathcal{V}_- \\ \mathbf{f}_+(t, \mathbf{u}), & \mathbf{u} \in \mathcal{V}_+ \end{cases}, \quad (4.14)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_-(t, \mathbf{u}(t)) &= \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}_-(t, \mathbf{q}), \\ \mathbf{f}_+(t, \mathbf{u}(t)) &= \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}_+(t, \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Funkce $\mathbf{F}_+(t, \mathbf{q})$, $\mathbf{F}_-(t, \mathbf{q})$ charakterizují rozdílnou topologickou strukturu soustavy při pohybu v rámci vůle (bez vazby mezi ozubenými koly) a při pohybu v kontaktu mezi ozubenými koly. Na takto formulovanou soustavu již lze použít výše uvedených numerických přístupů pro řešení nehladkých systémů.

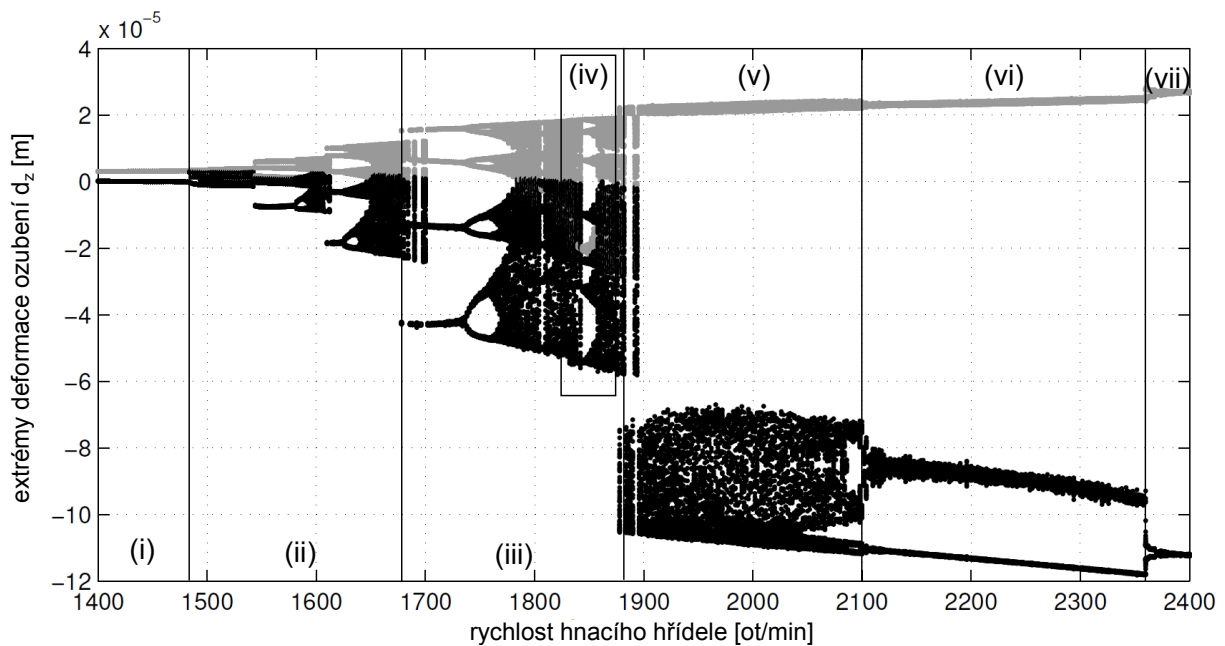
4.1.1. Výsledky numerických simulací pohybu

Numerické simulace pohybu byly provedeny pro hodnoty parametrů uvedené v příloze A.3. Byl uvažován konstantní hnací moment M_h a zátěžný moment $M_z = -M_h$, takže vektor vnějších budících sil $\mathbf{f}_I(t)$ definovaný obecně v (4.8) nabývá tvaru

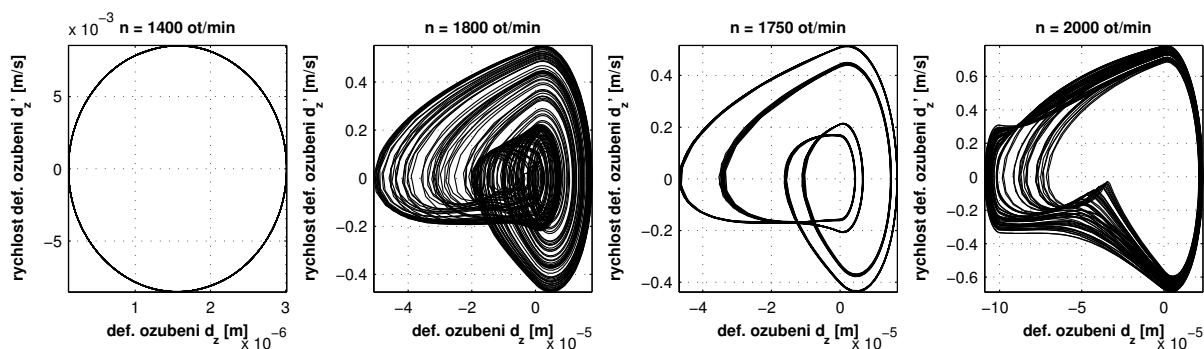
$$\mathbf{f}_I(t) = \begin{bmatrix} M_h \\ 0 \\ 0 \\ M_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_h \\ 0 \\ 0 \\ -M_h \end{bmatrix} = M_h \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

U buzení od kinematické úchyly ozubení je uvažován pouze první sinový člen, tedy $\Delta_1^S = 5 \cdot 10^{-6}$ m, $\Delta_j^S = \Delta_i^C = 0$ m, $i = 1 \dots K, j = 2 \dots K, K \in \mathbb{N}$.

Pro sledování nelineárních jevů je účelné zobrazit bifurkační diagram, viz obr. 4.3, v němž jsou vyneseny extrémní deformace ozubení d_z v závislosti na rychlosti otáčení hnacího hřídele.



Obrázek 4.3.: Bifurkační diagram - maxima (šedě) a minima (černě) deformace v ozubení d_z v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M_h = 100$ Nm



Obrázek 4.4.: Příklady fázových trajektorií pro různé otáčky n při hnacím momentu $M_h = 100 \text{ Nm}$

V diagramu jsou šedě vynesena maxima a černě minima deformace v ozubení. Pomocí této charakteristiky lze sledovat kvalitativní změny v deformaci ozubení d_z . Z bifurkačního diagramu jsou zřejmé následující jevy²:

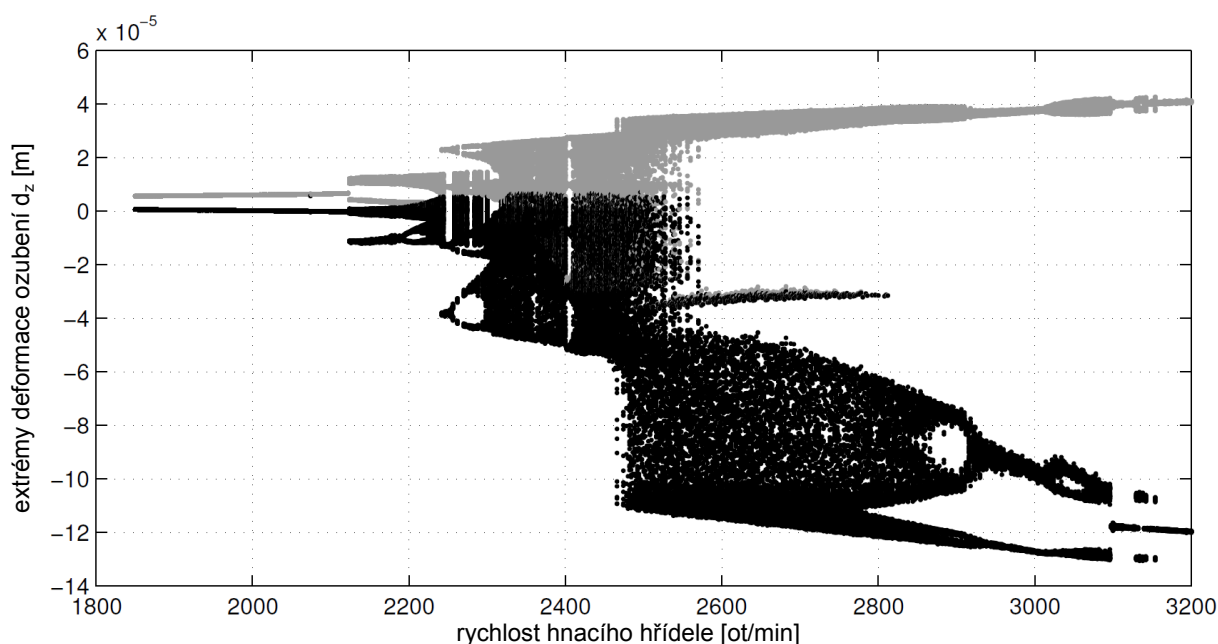
- **(i)** pro $n < 1480 \text{ ot/min}$ je časový průběh ustálené odezvy periodický a perioda odpovídá periodě buzení.
- **(ii)** Následně, pro $n \in (1480, 1680) \text{ ot/min}$, dochází ke kaskádovitému zdvojování periody a přechodu k chaotickému pohybu v blízkosti horní meze tohoto intervalu.
- **(iii)** Pro interval $n \in (1680, 1880) \text{ ot/min}$ se opět objevuje zdvojování periody, tentokrát však s většími amplitudami deformace v ozubení.
- **(iv)** Pro hnací otáčky v okolí $n = 1850 \text{ ot/min}$ lze identifikovat „okna“ uvnitř oblasti s chaotickým pohybem. Tento jev se vyskytuje u celé řady nelineárních soustav, z nichž zřejmě nejznámější je *logistické zobrazení* [Nayfeh & Balachandran 2004].
- **(v)** Při hnacích otáčkách $n = 1870 \text{ ot/min}$ je zřetelný skok v amplitudách deformace v ozubení, který charakterizuje přechod k oboustrannému rázovému pohybu, a v celé oblasti až do 2100 ot/min dochází k chaotickému pohybu.
- **(vi)** Následně, v intervalu $n \in (2100, 2360) \text{ ot/min}$, se deformace stává kvazi-periodickou funkcí.
- **(vii)** Pro $n > 2360 \text{ ot/min}$ přechází deformace v ozubení opět k periodickému pohybu s periodou buzení, tentokrát ovšem s vyšší amplitudou kmitu.

Pro snazší orientaci v bifurkačním diagramu a pro ilustraci výše zmiňovaných jevů jsou na obr. 4.4 ukázány fázové trajektorie deformace v ozubení d_z pro vybrané otáčky, které postihují základní typy odezvy deformace ozubení.

Pro lepší představu o zkoumaném systému byly dále analogickým způsobem sestrojeny bifurkační diagramy pro další hodnoty hnacího momentu $M_h = 200 \text{ Nm}$ a $M_h = 50 \text{ Nm}$,

²Čísla odkazují k označení oblastí v bifurkačním diagramu 4.3.

viz obr. 4.5 a obr. 4.6. Zde je patrné, že pro vyšší hnací moment se první bifurkace objevují při vyšších otáčkách. V obou těchto případech je zřejmé, že i zde se objevují všechny výše zmíněné druhy deformace v ozubení, od periodického pohybu přes kaskády bifurkací a chaos až ke kvaziperiodické a opět periodické funkci času. Rovněž jsou i zde patrna „okna“ v oblastech chaotického pohybu.



Obrázek 4.5.: Bifurkační diagram - maxima (šedě) a minima (černě) deformace v ozubení d_z v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M_h = 200 \text{ Nm}$

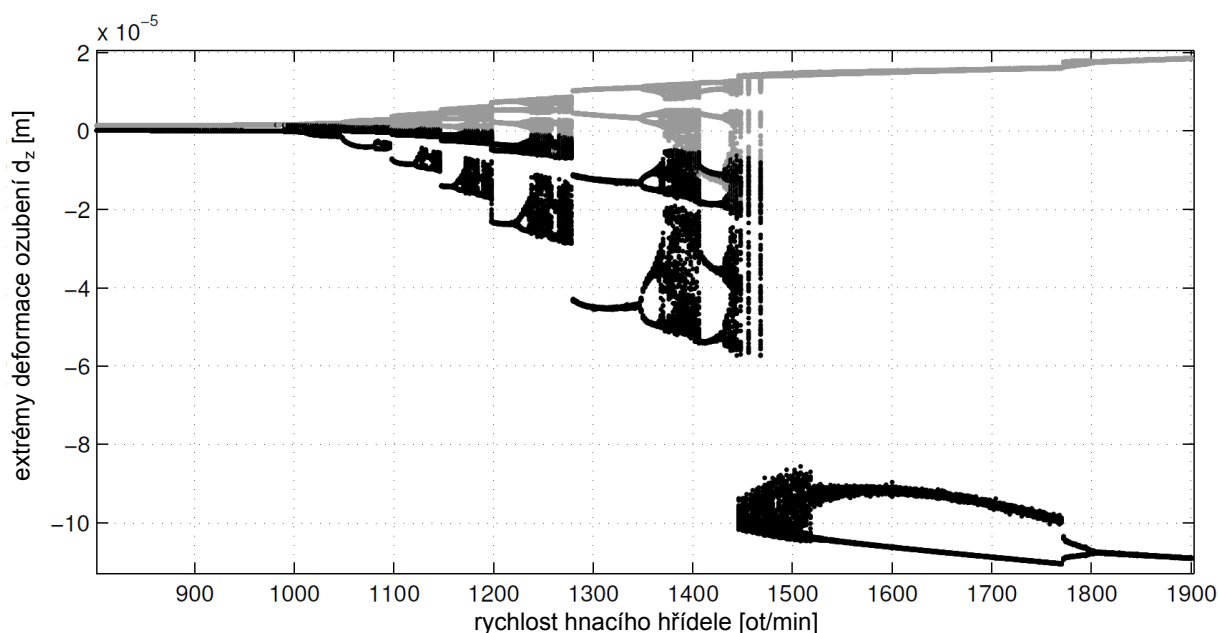
Feigenbaumova konstanta

V teorii bifurkací je často diskutována tzv. *Feigenbaumova konstanta*. Jde o univerzální konstantu, která se objevuje v nelineárních systémech, v nichž dochází k bifurkacím zdvojením periody vzhledem k některému z parametrů soustavy [Nayfeh & Balachandran 2004]. V příslušném bifurkačním diagramu lze sledovat poměr délek dvou po sobě jdoucích oblastí mezi bifurkačními body kaskády bifurkací. Feigenbaumova konstanta je rovna právě tomuto poměru a má hodnotu

$$\delta_{Feig} = 4,66292 \dots \quad (4.17)$$

Např. v bifurkačním diagramu zobrazeném na obr. 4.3 dochází v oblasti $n \in (1543, 1588)$ ot/min k bifurkaci zdvojením periody. Na obr. 4.7 je ukázán detail bifurkačního diagramu v této oblasti. Poměr délek A, B intervalů $(1543, 1580)$ ot/min a $(1580, 1588)$ ot/min na ose otáček je

$$\frac{A}{B} = \frac{37}{8} = 4,625 \doteq \delta_{Feig}, \quad (4.18)$$



Obrázek 4.6.: Bifurkační diagram - maxima (šedě) a minima (černě) deformace v ozubení d_z v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M_h = 50$ Nm

což je ve velmi dobré shodě s Feigenbaumovou konstantou. Podobně lze vyjádřit konstantu δ_{Feig} i v případě ostatních bifurkací ve výše uvedených diagramech. Pro získání přesnější hodnoty δ_{Feig} by bylo nutné zjemnit dělení intervalů otáček při numerických simulacích.

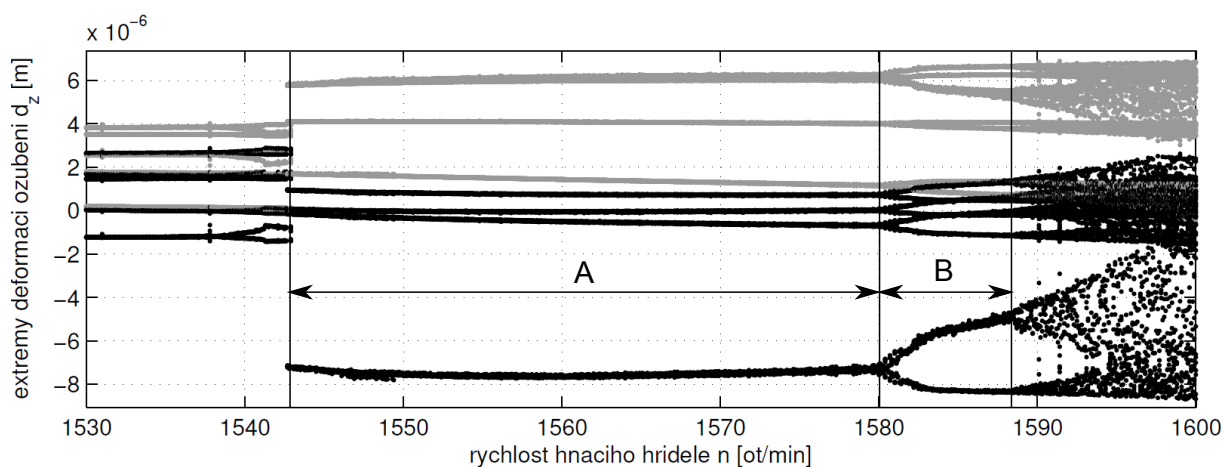
4.1.2. Srovnání výpočetního času při užití různých numerických přístupů

Na zmiňovaném příkladu jednostupňové převodovky bylo provedeno srovnání výpočetních časů při užití metody zhladčení nehladké funkce a metody přepínání modelů, jež byly uvedeny v kap. 3.3. Numerické řešení bylo provedeno pomocí Rungeovy-Kuttovy metody čtvrtého

Metoda	Výpočetní čas [s]	Počet integračních kroků
Metoda přepínání modelů	7,675758	25489
Metoda zhladčení	6,016781	25509
Metoda přepínání modelů (Heavisideova funkce)	7,691480	25489

Tabulka 4.1.: Efektivita použitých numerických přístupů při konkrétním výpočtu v časové oblasti pro $t \in \langle 0; 0, 2 \rangle$ s

řádu s adaptivním krokem pro čas $t = \langle 0; 0, 2 \rangle$ s v systému MATLAB při implicitním nastavení řešiče. Ukazuje se, že vzhledem k vysokofrekvenčnímu buzení je tento časový interval simulace postačující pro postižení zkoumaných jevů. V případě metody zhladčení byl v argumentu aproximační arcustangenty užit násobivý parametr $\varepsilon = 10^{11}$. Kromě standardního přepínacího



Obrázek 4.7.: Detail bifurkačního diagramu na obr. 4.3, výsek kaskády bifurkací zdvojením periody

modelu byl rovněž testován případ, kdy po přepsání nehladké funkce do analytického tvaru pomocí Heavisideovy funkce bylo užito přímé implementace Heavisideovy funkce programově obsažené v systému MATLAB. Tabulka 4.1 ukazuje jak výpočetní čas, tak počet integračních kroků pro jednotlivé přístupy při hnacím momentu $M_H = 100 \text{ Nm}$ a otáčkách $n = 3000 \text{ ot/min}$. Z výsledků je zřejmé, že pro danou konkrétní úlohu, pro konkrétní parametry a při dané časovém intervalu simulace vykazují nejmenší výpočetní čas metoda zhladčení. Obě metody vykazují srovnatelnou přesnost a rozdíl lze spatřovat prakticky jen ve výpočetním čase.

Shrnutí

Z uvedených bifurkačních diagramů lze usuzovat, při jakých otáčkách dojde k odlenutí zubů a při jakých přechází systém z jednostranného rázového systému na oboustranný. Tato analýza ukazuje pásma otáček, která jsou pro konkrétní hnací moment vystavena rázovým pohybům, a tedy zvýšenému namáhání zubů. Při provozu v těchto otáčkových oblastech pak lze vzhledem k vyššímu dynamickému zatížení očekávat nižší životnost ozubených kol. Zároveň lze určit otáčková pásma s periodickou deformací ozubení, kde lze očekávat relativně klidný chod ústrojí.

Pro numerické simulace se obě použité metody ukazují jako srovnatelně přesné, přičemž metoda zhladčení vykazuje poněkud nižší výpočetní čas.

4.2. Matematický model testovací převodovky s uvažováním rázů v ozubení

Dále byl sestaven matematický model tzv. *testovací převodovky*, uvedený v [Byrtus & Zeman 2011]. Jde o modelovou převodovku, na níž lze ukázat zkoumané nelineární jevy, a případné rozšíření na komplexnější reálné převodové ústrojí by bylo možné provést při zachování shodné metodiky modelování. Nejprve bude ukázán způsob modelování rotorových soustav a realizace

metody konečných prvků pro rotorové subsystémy, dále pak bude uvedena konkrétní aplikace na testovací převodovku.

4.2.1. Matematický model rotorové soustavy

Necht' systém lze dekomponovat na subsystémy, jejichž modely lze sestavit odděleně. Modely jednotlivých subsystémů mohou být sestavovány v různých výpočtových prostředích, různými metodami modelování a na různé úrovni abstrakce. Tyto subsystémy jsou vzájemně spojeny vazebními prvky, které provazují matematické modely jednotlivých subsystémů. Kromě toho jsou vazby často zdrojem vnitřního buzení, které je dáno výrobními nepřesnostmi – viz např. dále uvažovaná kinematická úchylna ozubení apod. –, proměnnou tuhostí, atd. Hlubší popis vytváření modelu systému sestávajícího ze subsystémů lze nalézt v [Byrtus 2006].

V případě modelování rozsáhlých systémů lze využít metody *kondenzace* (rovněž *redukce*), která slouží ke snížení počtu stupňů volnosti při přibližném zachování základních spektrálně-modálních vlastností. Tímto způsobem lze značně snížit počet stupňů volnosti soustavy a redukovat výpočetní čas numerických simulací při zachování přesnosti modelu v daném provozním rozsahu.

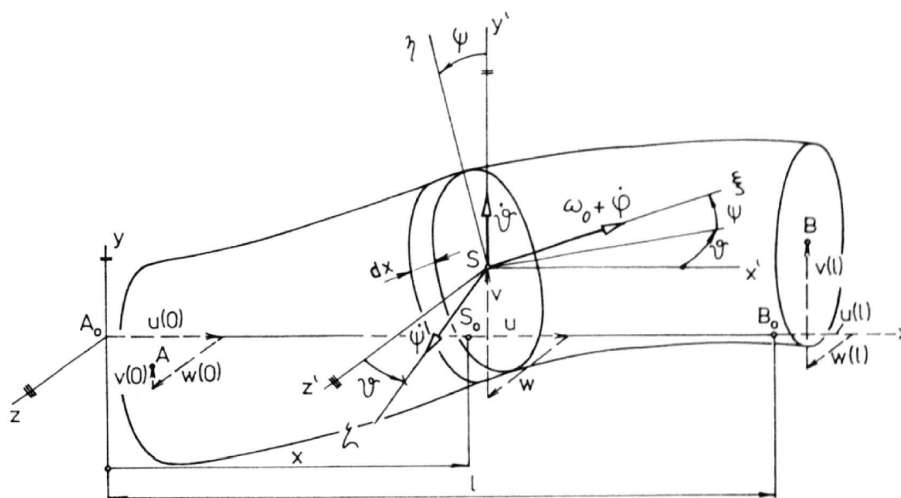
Modelování rotorů metodou konečných prvků

Je uvažován rotorový subsystém (dále jen rotor), který sestává z poddajného hřídele a tuhých těles, jež jsou na tento hřídel pevně nasazena. Jsou-li tato tělesa ve tvaru disku, mohou být modelem např. ozubených kol, spojek, kotoučů, olopatkovaných disků, apod. V obecném případě nelze aplikovat analytické modely rotoru (Lavalův rotor, Stodolův-Greenův rotor, apod. – viz např. [A6]), neboť obecně nejsou splněny zjednodušující předpoklady, na nichž jsou tyto modely vystavěny. Je proto potřeba využít vhodné přibližné metody. Dnes hojně užívanou metodou pro sestavení matematického modelu rotoru je metoda konečných prvků, uvedená např. v [Slavík et al. 2004].

Pro aplikaci metody konečných prvků je z hřídele vyňat element délky l podle obr. 4.8. Deformace libovolného bodu uvnitř tohoto elementu je popsána šesticí výchylek – podélnou výchylkou $u(x)$ a příčnými výchylkami $w(x), v(x)$ středu průřezu a úhly $\vartheta(x), \psi(x)$ natočení řezu a torzním natočením $\varphi(x)$. Hřídel je uvažován jako příčně nestlačitelné jednorozměrné kontinuum, splňující předpoklady Eulerovy-Bernoulliovy teorie, podle níž rovina řezu kolmá na střednici hřídele v nedeformovaném stavu zůstává kolmou i po deformaci. Dále je předpokládána rovnoměrná rotace hřídele úhlovou rychlostí ω_0 , malé úhly natočení $\vartheta(x), \psi(x)$ a $\dot{\varphi}(x) \ll \omega_0$.

Matematický model bude sestaven v pevném, nerotujícím prostoru. Např. pomocí Lagrangeových rovnic druhého druhu [Zeman & Hlaváč, 2004] lze odvodit z kinetické a potenciální energie elementu matematický model hřídelového elementu. Torzní a podélné výchylky jsou aproximovány lineárním polynomem, příčné deformace pak polynomem kubickým. Vektor zobecněných souřadnic elementu $\mathbf{q}^{(e)}$ je uvažován ve tvaru

$$\mathbf{q}^{(e)} = \left[v_i \quad \psi_i \quad v_{i+1} \quad \psi_{i+1} \quad w_i \quad \vartheta_i \quad w_{i+1} \quad \vartheta_{i+1} \quad u_i \quad u_{i+1} \quad \varphi_i \quad \varphi_{i+1} \right]^T. \quad (4.19)$$



Obrázek 4.8.: Hřídelový element ve zdeformované poloze, přejato z [Slavík et al. 2004]

Potom matice hmotnosti $M^{(e)}$ hřídelového elementu, matice tuhosti $K^{(e)}$ hřídelového elementu a matice gyroskopických účinků $G^{(e)}$ hřídelového elementu jsou

$$M^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-T}(\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2)\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_4\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_5\mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.20)$$

$$G^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 2\mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_2\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -2\mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_2\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.21)$$

$$K^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T}\mathbf{I}_3\mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-T}\mathbf{I}_3\mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_6\mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T}\mathbf{I}_7\mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

kde byly zavedeny aproximační matice \mathbf{S}_i , $i = 1, 2, 3$, ve tvaru

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

kde l je délka hřídelového prvku, a integrální matice \mathbf{I}_j , $j = 1 \dots 7$. Ty jsou odvozeny za předpokladu prizmatického prvku o průřezu A , kvadratickém momentu průřezu J a polárním mo-

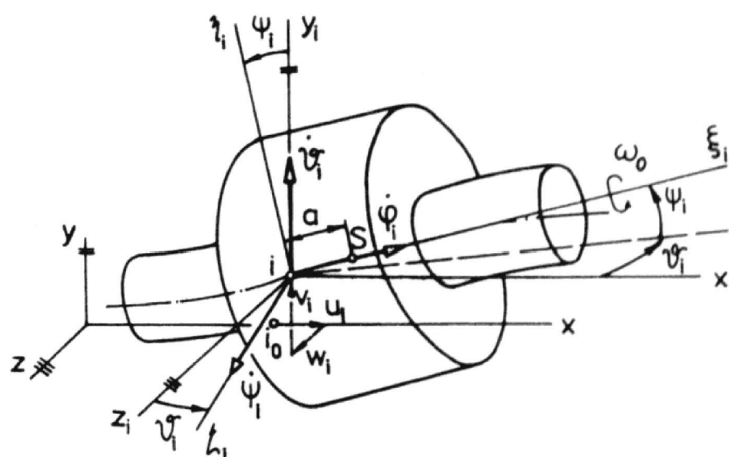
mentu průřezu $J_p = 2J$, modulu pružnosti v tahu E a modulu pružnosti ve smyku G ve tvaru

$$\mathbf{I}_1 = \rho A l \begin{bmatrix} 1 & l/2 & l^2/3 & l^3/4 \\ & l^2/3 & l^3/4 & l^4/5 \\ & & l^4/5 & l^5/6 \\ \text{sym.} & & & l^6/7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \rho J l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & l & l^2 \\ & & 4l^2/3 & 3l^3/2 \\ \text{sym.} & & & 9l^4/5 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{I}_3 = EJl \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 4 & 6l \\ \text{sym.} & & & 12l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_4 = \rho A l \begin{bmatrix} 1 & l/2 \\ \text{sym.} & l^2/3 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

$$\mathbf{I}_5 = \rho J_p l \begin{bmatrix} 1 & l/2 \\ \text{sym.} & l^2/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_6 = EA l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_7 = G J_p l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Případné tuhé kotouče jsou reprezentovány svojí hmotností m , momentem setrvačnosti I_0 k ose



Obrázek 4.9.: Rotačně symetrický kotouč, přejato z [Slavík et al. 2004]

symetrie a momentem setrvačnosti I k příčné ose (viz obr. 4.9). Kotouč přísluší konkrétnímu uzlu a vektor zobecněných souřadnic $\mathbf{q}^{(k)}$ kotouče je shodný s tou částí vektoru zobecněných souřadnic elementu, která přísluší danému uzlu

$$\mathbf{q}^{(k)} = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \varphi_i \quad \vartheta_i \quad \psi_i]^T. \quad (4.27)$$

Střed hmotnosti kotouče je umístěn ve vzdálenosti a od uzlu. Potom matice hmotnosti kotouče

$M^{(k)}$ a matice gyroskopických účinků kotouče $G^{(k)}$ jsou

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & m & 0 & 0 & 0 & ma \\ & & m & 0 & -ma & 0 \\ & & & I_0 & 0 & 0 \\ & & & & I + ma^2 & 0 \\ \text{sym.} & & & & & I + ma^2 \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

$$G^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & I_0 \\ \text{antisym.} & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Celkové koeficientové matice s -tého rotorového subsystému (dále index s) rotujícího úhlovou rychlostí ω_s lze potom sestavit energetickou sumací [Slavík et al. 2004], [Byrtus et al. 2010]. Vektor zobecněných souřadnic s -tého subsystému je uvažován ve tvaru

$$\mathbf{q}_s = [\dots \ u_i \ v_i \ w_i \ \varphi_i \ \vartheta_i \ \psi_i \ \dots] \in \mathbb{R}^{n_s}, \quad (4.30)$$

kde n_s je počet stupňů volnosti s -tého subsystému. Jestliže je matematický model subsystému následně doplněn o tlumicí účinky a o vazby na případné další subsystémy, lze jej formulovat ve tvaru

$$M_s \ddot{\mathbf{q}}_s + (\mathbf{B}_s + \omega_s \mathbf{G}_s) \dot{\mathbf{q}}_s + (\mathbf{K}_s + \omega_s \mathbf{C}_s) \mathbf{q}_s = \mathbf{f}_s^E(t) + \mathbf{f}_s^B(t) + \mathbf{f}_s^G(t), \quad (4.31)$$

kde $M_s, \mathbf{B}_s, \mathbf{K}_s \in \mathbb{R}^{n_s, n_s}$ jsou matice hmotnosti, tlumení a tuhosti, $\mathbf{G}_s \in \mathbb{R}^{n_s, n_s}$ je matice gyroskopických účinků, $\mathbf{C}_s \in \mathbb{R}^{n_s, n_s}$ je tzv. cirkulační matice a vektory pravé strany $\mathbf{f}_s^E(t), \mathbf{f}_s^B(t), \mathbf{f}_s^G(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$ jsou po řadě vektor vnějšího buzení, vektor ložiskových vazeb a vektor zubových vazeb.

Tlumení je často uvažováno jako proporcionální a matice tlumení \mathbf{B}_s je potom dána lineární kombinací matice hmotnosti a tuhosti. Matice tlumení \mathbf{B}_s a cirkulační matice \mathbf{C}_s může být za předpokladu, že materiálové tlumení ovlivňuje pouze průhyb rotoru, vyjádřena ve tvaru [Byrtus & Zeman 2011]

$$\mathbf{B}_s = \text{diag}\{\mathbf{0}, \mathbf{B}_i^l, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}, \quad \mathbf{C}_s = \text{diag}\{\mathbf{0}, \mathbf{B}_i^l \Omega, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\}, \quad (4.32)$$

kde matice \mathbf{B}_i^l, Ω jsou dány jako

$$\mathbf{B}_i^l = \begin{bmatrix} b_i^l & 0 \\ 0 & b_i^l \end{bmatrix}, \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.33)$$

Koeficienty b_i^l přísluší jednotlivým uzlům hřídele a lze je určit za zmíněných zjednodušujících

předpokladů a vzhledem k symetrii hřídele jako

$$b_i^l = 2D\sqrt{k_{v_i}m_{v_i}} = 2D\sqrt{k_{w_i}m_{w_i}}, \quad (4.34)$$

kde D je poměrný útlum a m_{v_i}, m_{w_i} jsou diagonální prvky matice hmotnosti a k_{v_i}, k_{w_i} jsou diagonální prvky matice tuhosti příslušející zobecněným souřadnicím v_i, w_i , které popisují průhyb rotoru.

4.2.2. Metoda modální syntézy pro rotorovou soustavu

Modely rotorových subsystémů lze vytvořit výše popsaným postupem metodou konečných prvků (viz kap. 4.2.1). Matematický model s -tého rotorového subsystému rotujícího úhlovou rychlostí ω_s lze vyjádřit v prostoru zobecněných souřadnic $\mathbf{q}_s(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$ ve tvaru

$$\mathbf{M}_s \ddot{\mathbf{q}}_s + (\mathbf{B}_s + \omega_s \mathbf{G}_s) \dot{\mathbf{q}}_s + (\mathbf{K}_s + \omega_s \mathbf{C}_s) \mathbf{q}_s = \mathbf{f}_s^E(t) + \mathbf{f}_s^B(t) + \mathbf{f}_s^G(t), \quad (4.35)$$

kde $\mathbf{M}_s \in \mathbb{R}^{n_s, n_s}$ je matice hmotnosti, $\mathbf{B}_s \in \mathbb{R}^{n_s, n_s}$ je matice tlumení, $\mathbf{G}_s \in \mathbb{R}^{n_s, n_s}$ je matice gyroskopických účinků, $\mathbf{K}_s \in \mathbb{R}^{n_s, n_s}$ je matice tuhosti a $\mathbf{C}_s \in \mathbb{R}^{n_s, n_s}$ antisymetrická tzv. cirkulační matice. Na pravé straně jsou vektor vnějšího buzení $\mathbf{f}_s^E(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$, vektor ložiskových vazebních sil $\mathbf{f}_s^B(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$ a vektor zubových vazebních sil $\mathbf{f}_s^G(t) \in \mathbb{R}^{n_s}$.

Po provedení modální analýzy přidružené konzervativní soustavy dostáváme modální matici \mathbf{V}_s s -tého subsystému a spektrální matici $\mathbf{\Lambda}_s$ s -tého subsystému, které splňují podmínky ortogonalita a normy [Zeman & Hlaváč, 2004]

$$\mathbf{V}_s^T \mathbf{M}_s \mathbf{V}_s = \mathbf{E}, \quad \mathbf{V}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{V}_s = \mathbf{\Lambda}_s, \quad (4.36)$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice. Lze zavést vektor modálních souřadnic \mathbf{x}_s s -tého subsystému tak, aby došlo k modální transformaci dle vztahu

$$\mathbf{q}_s = \mathbf{V}_s \mathbf{x}_s, \quad \dot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{V}_s \dot{\mathbf{x}}_s, \quad \ddot{\mathbf{q}}_s = \mathbf{V}_s \ddot{\mathbf{x}}_s. \quad (4.37)$$

Po dosažení této transformace do modelu (4.35) a po přenásobení celé rovnosti zleva maticí \mathbf{V}_s^T přechází model do tvaru

$$\underbrace{\mathbf{V}_s^T \mathbf{M}_s \mathbf{V}_s}_{\mathbf{E}} \ddot{\mathbf{x}}_s + \underbrace{(\mathbf{V}_s^T \mathbf{B}_s \mathbf{V}_s + \omega_s \mathbf{V}_s^T \mathbf{G}_s \mathbf{V}_s)}_{\tilde{\mathbf{B}}_s} \dot{\mathbf{x}}_s + \underbrace{(\mathbf{V}_s^T \mathbf{K}_s \mathbf{V}_s + \omega_s \mathbf{V}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{V}_s)}_{\tilde{\mathbf{K}}_s} \mathbf{x}_s = \mathbf{V}_s^T [\mathbf{f}_s^E(t) + \mathbf{f}_s^B(t) + \mathbf{f}_s^G(t)]. \quad (4.38)$$

tedy po uvážení podmínek ortogonalita a normy (4.36) a po označení vzniklých matic tak, jak je naznačeno ve (4.38), přechází model do tvaru

$$\ddot{\mathbf{x}}_s + (\tilde{\mathbf{B}}_s + \omega_s \tilde{\mathbf{G}}_s) \dot{\mathbf{x}}_s + (\mathbf{\Lambda}_s + \omega_s \tilde{\mathbf{C}}_s) \mathbf{x}_s = \mathbf{V}_s^T [\mathbf{f}_s^E(t) + \mathbf{f}_s^B(t) + \mathbf{f}_s^G(t)]. \quad (4.39)$$

Pro sestavení matematického modelu celé soustavy zavedeme vektor modálních souřadnic celého systému ve tvaru $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_s] \in \mathbb{R}^n$ a analogicky vektory pravé strany $\mathbf{f}^E(t) = [\mathbf{f}_s^E(t)] \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}^G(t) = [\mathbf{f}_s^G(t)] \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f}^B(t) = [\mathbf{f}_s^B(t)] \in \mathbb{R}^n$, kde n je počet stupňů volnosti celé soustavy,

daný jako součet počtu stupňů volnosti jednotlivých subsystémů. Matematický model celé soustavy pak lze vyjádřit ve tvaru

$$\ddot{\mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{B}} + \omega\tilde{\mathbf{G}})\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{\Lambda} + \omega\tilde{\mathbf{C}})\mathbf{x} = \mathbf{V}^T[\mathbf{f}^E(t) + \mathbf{f}^B(t) + \mathbf{f}^G(t)], \quad (4.40)$$

kde jednotlivé koeficientové matice jsou blokově diagonální ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{B}} = \text{diag}\{\tilde{\mathbf{B}}_s\}, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \text{diag}\left\{\frac{\omega_s}{\omega}\tilde{\mathbf{G}}_s\right\}, \quad \mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\mathbf{\Lambda}_s\}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \text{diag}\left\{\frac{\omega_s}{\omega}\tilde{\mathbf{C}}_s\right\}, \quad (4.41)$$

$$\mathbf{V} = \text{diag}\{\mathbf{V}_s\},$$

kde ω jsou referenční otáčky. Vektor zubových vazebních sil $\mathbf{f}^G(t) \in \mathbb{R}^n$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{f}^G(t) = -\mathbf{K}_G\mathbf{q} - \mathbf{B}_G\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}^I(t), \quad (4.42)$$

kde $\mathbf{K}_G \in \mathbb{R}^{n,n}$ je matice tuhosti zubových vazeb, $\mathbf{B}_G \in \mathbb{R}^{n,n}$ je matice tlumení zubových vazeb a $\mathbf{f}^I(t)$ je vektor vnitřního buzení v ozubení (buzení od kinematické úchylny ozubení apod.). Po použití modální transformace (4.37) ve vztahu (4.42) je vektor zubových vazebních sil dán jako

$$\mathbf{f}^G(t) = -\mathbf{K}_G\mathbf{V}\mathbf{x} - \mathbf{B}_G\mathbf{V}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}^I(t). \quad (4.43)$$

Analogicky pro vektor ložiskových vazebních sil lze při zanedbání vnitřního buzení v ložiskách psát

$$\mathbf{f}^B(t) = -\mathbf{K}_B\mathbf{q} - \mathbf{B}_B\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{K}_B\mathbf{V}\mathbf{x} - \mathbf{B}_B\mathbf{V}\dot{\mathbf{x}}, \quad (4.44)$$

kde $\mathbf{K}_B, \mathbf{B}_B \in \mathbb{R}^{n,n}$ jsou matice tuhosti a tlumení ložiskových vazeb. Vztahy (4.42) a (4.44) dosadíme do celkového modelu systému (4.40), takže matematický model přechází do tvaru

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{B}} + \omega\tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{B}}_B + \tilde{\mathbf{B}}_G)\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{\Lambda} + \omega\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}}_B + \tilde{\mathbf{K}}_G)\mathbf{x} = \\ = \mathbf{V}^T[\mathbf{f}^E(t) + \mathbf{f}^I(t)], \end{aligned} \quad (4.45)$$

kde bylo zavedeno označení

$$\tilde{\mathbf{B}}_G = \mathbf{V}^T\mathbf{B}_G\mathbf{V}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_B = \mathbf{V}^T\mathbf{B}_B\mathbf{V}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_G = \mathbf{V}^T\mathbf{K}_G\mathbf{V}, \quad \tilde{\mathbf{K}}_B = \mathbf{V}^T\mathbf{K}_B\mathbf{V}. \quad (4.46)$$

Modální syntéza s kondenzací

Dále bude uvažována modální transformace s *kondenzací* (též *redukci*), tedy taková modální transformace, při které je respektováno pouze $m_s < n_s$ vlastních tvarů s -tého subsystému. Vlastní tvary lze rozdělit na hlavní (*master*, dále levý horní index (m)) a vedlejší (*slave*, dále levý horní index (s)) tvary kmitu. Po vhodném přeskupení vlastních tvarů lze vyjádřit modální matici s -tého subsystému jako

$$\mathbf{V}_s = [{}^{(m)}\mathbf{V}_s | {}^{(s)}\mathbf{V}_s]. \quad (4.47)$$

Při metodě modální syntézy s kondenzací je uvažována neúplná modální transformace

$$\mathbf{q}_s = {}^{(m)}\mathbf{V}_s {}^{(m)}\mathbf{x}_s, \quad \dot{\mathbf{q}}_s = {}^{(m)}\mathbf{V}_s {}^{(m)}\dot{\mathbf{x}}_s, \quad \ddot{\mathbf{q}}_s = {}^{(m)}\mathbf{V}_s {}^{(m)}\ddot{\mathbf{x}}_s. \quad (4.48)$$

Zatímco v případě standardní modální transformace pomocí vztahu (4.37) je užívána plná (čtvercová) modální matice $\mathbf{V}_s \in \mathbb{R}^{n_s, n_s}$ subsystému, nyní je užívána transformace pomocí obdélníkové matice ${}^{(m)}\mathbf{V}_s \in \mathbb{R}^{n_s, m_s}$ do prostoru hlavních modálních souřadnic ${}^{(m)}\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^{m_s}$. Po aplikaci neúplné modální transformace (4.48) na model (4.35) a přenásobení zleva maticí ${}^{(m)}\mathbf{V}_s^T$ a po užití analogického postupu pro vyjádření vektorů pravých stran jako v (4.42) ÷ (4.44) přechází model do tvaru

$$\begin{aligned} {}^{(m)}\ddot{\mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{B}}^r + \omega \tilde{\mathbf{G}}^r + \tilde{\mathbf{B}}_B^r + \tilde{\mathbf{B}}_G^r) {}^{(m)}\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{\Lambda}^r + \omega \tilde{\mathbf{C}}^r + \tilde{\mathbf{K}}_B^r + \tilde{\mathbf{K}}_G^r) {}^{(m)}\mathbf{x} = \\ = {}^{(m)}\mathbf{V}^T [\mathbf{f}^E(t) + \mathbf{f}^I(t)], \end{aligned} \quad (4.49)$$

kde ${}^{(m)}\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^m$ je vektor hlavních modálních souřadnic, všechny koeficientové matice s prvním horním indexem r (redukované) jsou čtvercové řádu m a jejich tvar je zřejmý z analogie s (4.41). Tímto byl zredukován počet stupňů volnosti celé soustavy z n na $m < n$ při přibližném zachování požadovaných modálních vlastností systému. Jiný způsob redukce, zohledňující deformace vazeb, bude uveden dále.

Model zubové vazby

Zubový záběr může být za předpokladu relativně úzkých ozubených kol uvažován jako bodový ve středu šířky ozubení. V [Byrtus et al. 2010] je uvedeno odvození normálové deformace ozubení d_z mezi i -tým a j -tým uzlem modelu celého systému ve tvaru

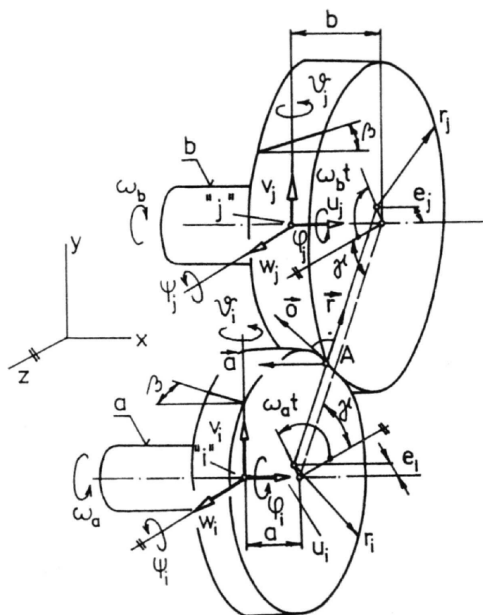
$$d_z = \boldsymbol{\delta}_i^T \mathbf{q}_i - \boldsymbol{\delta}_j^T \mathbf{q}_j + \Delta_z(t), \quad (4.50)$$

kde $\Delta_z(t)$ je kinematická úchylka ozubení a kde vektory $\boldsymbol{\delta}_i, \boldsymbol{\delta}_j$ jsou [Byrtus et al. 2010]

$$\boldsymbol{\delta}_i = \begin{bmatrix} \mp \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma \pm \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \cos \gamma \pm \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \pm r_p \cos \alpha \cos \beta \\ \pm r_p \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + a(\sin \alpha \cos \gamma \mp \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) \\ \pm r_p \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + a(\sin \alpha \sin \gamma \pm \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

$$\boldsymbol{\delta}_j = \begin{bmatrix} \mp \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \gamma \pm \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \\ -\sin \alpha \cos \gamma \pm \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \\ \mp r_k \cos \alpha \cos \beta \\ \mp r_k \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + b(\sin \alpha \cos \gamma \mp \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma) \\ \mp r_k \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + b(\sin \alpha \sin \gamma \pm \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Úhel α je úhel záběru v normálovém řezu, β je úhel sklonu zubů, γ je úhel odklonu spojnice středů valivých kružnic od roviny \widehat{xz} (viz obr. 4.10, více viz [Byrtus et al. 2010]), a a b jsou vzdálenosti středů kol od uzlů, v nichž jsou kola připojena, a r_p, r_k jsou poloměry pastorku



Obrázek 4.10.: Model dvou spoluzabírajících ozubených kol, přejato z [Slavík et al. 2004]

a kola. Na základě znalosti normálové deformace ozubení d_z , dané vztahem (4.50), lze sestavit funkci deformační energie z -té zubové vazby, ze které lze např. užitím Lagrangeových rovnic druhého druhu sestavit matici tuhosti zubové vazby \mathbf{K}_G^z ve tvaru

$$\mathbf{K}_G^z = k_z \mathbf{C}_z, \quad \mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \delta_i \delta_i^T & \dots & -\delta_i \delta_j^T & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -\delta_j \delta_i^T & \dots & \delta_j \delta_j^T & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

kde k_z je střední tuhost ozubení ve směru normály ke spoluzabírajícím bokům zubů. Případné tlumicí účinky zubové vazby lze modelovat za předpokladu proporcionálního tlumení maticí tlumení zubové vazby \mathbf{B}_G ve tvaru

$$\mathbf{B}_G^z = b_z \mathbf{C}_z, \quad (4.54)$$

kde b_z je koeficient tlumení ozubení. Při uvážení kinematické úchylny ozubení se přidává rovněž vektor vnitřního buzení $\mathbf{f}_G(t)$ ve tvaru [Byrtus et al. 2010]

$$\mathbf{f}_G^z(t) = \left(k_z \Delta_z(t) + b_z \dot{\Delta}_z(t) \right) \mathbf{c}_z, \quad (4.55)$$

$$\mathbf{c}_z = [\dots - \delta_i^T \dots \delta_j^T \dots]^T.$$

Případ, kdy je uvažována možnost ztráty zubového záběru, je podrobně popsán v [Byrtus 2002], [Byrtus et al. 2010]. Sílu přenášenou zubovým záběrem na s -tý rotující subsystém lze vyjádřit jako

$$\mathbf{f}_s^G = \pm \sum_z \tilde{\boldsymbol{\delta}}_z F_z(t, d_z, \dot{d}_z), \quad (4.56)$$

kde $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_z$ je rozšířený vektor geometrických parametrů ozubení pastorku - např. pro pastorek nasazený v i -tém uzlu s -tého subsystému je $\tilde{\boldsymbol{\delta}}_z = [\dots \boldsymbol{\delta}_i^T \dots]^T$. Celkovou sílu F_z přenášenou ozubením lze v tomto případě vyjádřit jako funkci deformace ozubení d_z ve tvaru

$$F_z(t, d_z, \dot{d}_z) = k_z(t) f^s(d_z) + f^v(d_z) \dot{d}_z, \quad (4.57)$$

kde $k_z(t)$ je tuhost ozubení³ a $f^s(d_z)$ je nelineární funkce tuhosti ozubení daná jako

$$f^s(d_z) = \begin{cases} d_z, & d_z > 0, \\ \alpha d_z, & d_z \in \langle -\mu_z, 0 \rangle, \\ d_z + (1 - \alpha)\mu_z, & d_z < -\mu_z, \end{cases} \quad \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \quad (4.58)$$

kde μ_z je boční vůle v ozubení. Funkce $f^v(d_z)$ je dána jako

$$f^v(d_z) = \begin{cases} b_1, & d_z > 0, \\ b_2, & d_z \in \langle -\mu_z, 0 \rangle, \\ b_3, & d_z < -\mu_z, \end{cases} \quad (4.59)$$

kde $b_i, i = 1, 2, 3$ jsou koeficienty viskózního tlumení. Potom lze výsledný vektor zubových vazbových sil v globálním konfiguračním prostoru vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{f}^G = \sum_{z=1}^Z \mathbf{c}_z F_z(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}_G(t), \quad (4.60)$$

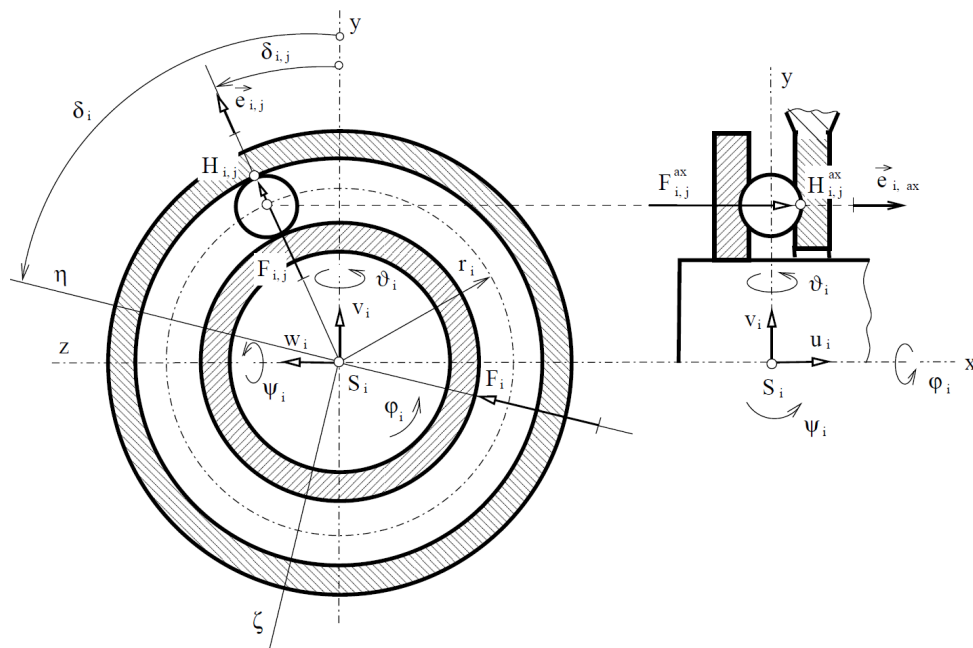
kde $\mathbf{f}_G(t)$ je vektor vnitřního buzení, který má tvar

$$\mathbf{f}_G(t) = \sum_{z=1}^Z \left(k_z \Delta_z(t) + b_z \dot{\Delta}_z(t) \right) \mathbf{c}_z. \quad (4.61)$$

Model ložiskové vazby

Modelování ložiskových vazeb je podrobně uvedeno v práci [Byrtus et al. 2010] a pro potřeby této práce byl model ložisek přejat z [Byrtus & Zeman 2011]. Pro ložiskovou vazbu prostřednictvím radi-axiálního valivého ložiska lze s využitím Hertzovy teorie kontaktu a při zanedbání vnitřního buzení v ložiskových vazbách formulovat vektor linearizovaných vazbových ložisko-

³Tuhost ozubení je v obecném případě funkcí času.



Obrázek 4.11.: Schéma ložiskové vazby, přejato z [Byrtus 2006]

vých sil ve tvaru [Byrtus et al. 2010]

$$\mathbf{f}^B = -\mathbf{K}_B \mathbf{q}(t) - \mathbf{B}_B \dot{\mathbf{q}}(t), \quad (4.62)$$

kde \mathbf{K}_B , \mathbf{B}_B jsou matice tuhosti a tlumení ložiskových vazeb, dané jako

$$\mathbf{K}_B = \sum_i \sum_j \mathbf{K}_{ij}, \quad \mathbf{B}_B = \beta_B \mathbf{K}_B, \quad \beta_B \in \mathbb{R}^+. \quad (4.63)$$

Matice \mathbf{K}_{ij} přísluší jednomu valivému elementu, viz obr. 4.11, a má tvar⁴

$$\mathbf{K}_{i,j} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & k_{ij} \mathbf{t}_{ij} \mathbf{t}_{ij}^T + k_{ij}^{ax} \mathbf{t}_{ij}^{ax} \mathbf{t}_{ij}^{axT} & \dots & -(k_{ij} \mathbf{t}_{ij} \mathbf{e}_{ij}^T + k_{ij}^{ax} \mathbf{t}_{ij}^{ax} \mathbf{e}_{ij}^{axT}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & -(k_{ij} \mathbf{e}_{ij} \mathbf{t}_{ij}^T + k_{ij}^{ax} \mathbf{e}_{ij}^{ax} \mathbf{t}_{ij}^{axT}) & \dots & k_{ij} \mathbf{e}_{ij} \mathbf{e}_{ij}^T + k_{ij}^{ax} \mathbf{e}_{ij}^{ax} \mathbf{e}_{ij}^{axT} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad (4.64)$$

⁴Index i přísluší vazbě, index j valivému elementu.

kde k_{ij} , k_{ij}^{ax} jsou linearizované tuhosti (radiální a axiální) valivého elementu a použité vektory mají tvar

$$\mathbf{t}_{ij} = [0, \cos \delta_{ij}, \sin \delta_{ij}, 0, -\xi_i \sin \delta_{ij}, \xi_i \cos \delta_{ij}]^T, \quad (4.65a)$$

$$\mathbf{t}_{ij}^{ax} = [1, 0, 0, 0, r_i \sin \delta_{ij}, -r_i \cos \delta_{ij}]^T, \quad (4.65b)$$

$$\mathbf{e}_{ij} = [0, \cos \delta_{ij}, \sin \delta_{ij}]^T, \quad (4.65c)$$

$$\mathbf{e}_{ij}^{ax} = [1, 0, 0]^T, \quad (4.65d)$$

kde ξ_i je vzdálenost středu čepu ložiska od toho uzlu i -tého hřídele, k němuž je ložisko vázáno, a δ_{ij} je úhel pozice středu j -tého elementu, viz [Byrtus et al. 2010]. Hodnoty tuhostí valivých elementů jsou různé pro různé typy geometrických parametrů a lze je určit pomocí Hertzovy teorie kontaktu [Byrtus et al. 2010].

Dvofázová redukce zohledňující deformace vazeb

Na tomto místě bude uveden alternativní způsob redukce matematického modelu, zohledňující základní vlastnosti deformace vazeb. Dříve uvedený způsob kondenzace umožňuje redukci počtu stupňů volnosti při přibližném zachování modálních vlastností systému v daném frekvenčním rozsahu. Podobně lze uvažovat o redukci, která zachovává ne modální vlastnosti, nýbrž požadované vlastnosti vazeb. Tato kapitola představuje metodu redukce počtu stupňů volnosti při přibližném zachování základních vlastností zubové vazby.

Metoda je založena na principu redukce ve dvou úrovních. V *první fázi* je sestaven matematický model systému použitím výše uvedené metody modální syntézy s kondenzací. Výsledkem je matematický model (4.49), který po doplnění o vliv nelineárních sil v zubové vazbě přechází do tvaru

$$\begin{aligned} {}^{(m)}\ddot{\mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{B}}^r + \omega \tilde{\mathbf{G}}^r + \tilde{\mathbf{B}}_B^r + \tilde{\mathbf{B}}_G^r) {}^{(m)}\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{\Lambda}^r + \omega \tilde{\mathbf{C}}^r + \tilde{\mathbf{K}}_B^r + \tilde{\mathbf{K}}_G^r) {}^{(m)}\mathbf{x} = \\ = {}^{(m)}\mathbf{V}^T [\mathbf{f}^E(t) + \mathbf{f}^I(t) + \mathbf{f}_N^G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)], \end{aligned} \quad (4.66)$$

kde ${}^{(m)}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ je vektor hlavních modálních souřadnic, $\tilde{\mathbf{B}}^r$, $\tilde{\mathbf{G}}^r$, $\tilde{\mathbf{B}}_B^r$, $\tilde{\mathbf{B}}_G^r \in \mathbb{R}^{m,m}$ jsou po řadě matice tlumení hřídele, matice gyroskopických účinků, matice tlumení ložiskové vazby a matice tlumení zubové vazby, $\mathbf{\Lambda}^r$, $\tilde{\mathbf{C}}^r$, $\tilde{\mathbf{K}}_B^r$, $\tilde{\mathbf{K}}_G^r \in \mathbb{R}^{m,m}$ jsou po řadě spektrální matice, cirkulační matice, matice tuhosti ložiskových vazeb a matice tuhosti zubových vazeb, ${}^{(m)}\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n,m}$ je modální matice a $\mathbf{f}_N^G \in \mathbb{R}^n$ je vektor nelineárních zubových sil.

Výsledkem první fáze redukce je tedy matematický model v prostoru redukovaných modálních souřadnic. Ve *druhé fázi* je východiskem matematický model (4.66), který je nutné dále vhodně transformovat. Lze uvážit dvě možnosti realizace, dále značené (A), (B).

(A) Redukce bez zahrnutí zubových vazeb Modální matici systému (4.66) lze získat provedením modální analýzy přidružené nerotující konzervativní soustavy, u které je uvažován vliv tuhosti ložiskových vazeb. Nerotující konzervativní soustava přidružená k soustavě (4.66) nabývá tvaru

$${}^{(m)}\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{\Lambda}^r + \tilde{\mathbf{K}}_B^r)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (4.67)$$

a výsledkem řešení problému vlastních hodnot této soustavy jsou modální matice $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m,m}$ a spektrální matice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m,m}$ dané jako

$$\mathbf{S} = \text{diag}\{\Upsilon_\nu^2\}, \quad \nu = 1 \dots m, \quad \mathbf{T} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{t}_1 & & \\ \hline & \dots & \\ \hline & & \mathbf{t}_m \end{array} \right], \quad (4.68)$$

kde Υ_ν jsou vlastní frekvence modelu (4.67). Pro každý vlastní tvar, tj. pro každý vlastní vektor \mathbf{t}_ν , $\nu = 1 \dots m$, provedeme výpočet deformace ozubení

$$d_{z_\nu} = -\tilde{\mathbf{c}}_z \mathbf{t}_\nu, \quad \tilde{\mathbf{c}}_z = {}^{(m)}\mathbf{V}^T \mathbf{c}_z, \quad (4.69)$$

kde vektor \mathbf{c}_z byl definován vztahem (4.55). Dále je účelné seřadit vlastní vektory v modální matici \mathbf{T} sestupně podle příslušné deformace v ozubení

$$d_{z_1} \geq d_{z_2} \geq \dots \geq d_{z_m} \quad (4.70)$$

pro odpovídající vlastní tvar kmitu, a stejným způsobem přeskupit i odpovídající prvky na diagonále spektrální matice \mathbf{S} . Podobně jako v předchozím případě sestavíme *master* transformační matici ${}^{(m)}\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m,p}$, která zahrnuje pouze prvních $p < m$ tvarů nejméně výrazněji se podílejících na deformaci ozubení. Druhotné modální souřadnice necht' jsou $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$. Potom lze provést druhotnou modální transformaci

$$\mathbf{x} = {}^{(m)}\mathbf{T} \mathbf{y}, \quad (4.71)$$

a analogickým způsobem jako při výše uvedených transformacích, tj. dosazením do modelu (4.66) a přenásobením celého modelu zleva maticí ${}^{(m)}\mathbf{T}^T$, lze vyjádřit výsledný model ve tvaru

$$\begin{aligned} & {}^{(m)}\ddot{\mathbf{y}} + {}^{(m)}\mathbf{T}^T (\tilde{\mathbf{B}}^r + \omega \tilde{\mathbf{G}}^r + \tilde{\mathbf{B}}_B^r + \tilde{\mathbf{B}}_G^r) {}^{(m)}\mathbf{T} {}^{(m)}\dot{\mathbf{y}} + \\ & + {}^{(m)}\mathbf{T}^T (\Lambda^r + \omega \tilde{\mathbf{C}}^r + \tilde{\mathbf{K}}_B^r + \tilde{\mathbf{K}}_G^r) {}^{(m)}\mathbf{T} {}^{(m)}\mathbf{y} = \\ & = {}^{(m)}\mathbf{T}^T {}^{(m)}\mathbf{V}^T [\mathbf{f}^E(t) + \mathbf{f}^I(t) + \mathbf{f}_N^G(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)]. \end{aligned} \quad (4.72)$$

I nadále je požadováno splnění podmínek ortogonalit a normy, které mají při druhotné modální analýze tvar

$${}^{(m)}\mathbf{T}^T {}^{(m)}\mathbf{T} = \mathbf{E}, \quad {}^{(m)}\mathbf{T}^T (\Lambda^r + \tilde{\mathbf{K}}_B^r) {}^{(m)}\mathbf{T} = {}^{(m)}\mathbf{S}, \quad (4.73)$$

kde první vztah odpovídá skutečnosti, že redukovaná matice hmotnosti je jednotková, kde ${}^{(m)}\mathbf{S}$ je spektrální matice druhotné transformace a \mathbf{E} jednotková matice.

(B) Redukce se zahrnutím lineárních zubových vazeb Analogicky jako ve výše uvedené metodě redukce typu (A), lze uvažovat o redukci na matematickém modelu, který zahrnuje lineární zubové vazby. Jedinou změnou zde bude provedení druhotné modální analýzy na přidruženém konzervativním nerotujícím systému, který ovšem nyní, oproti transformaci (4.67),

zahrnuje vliv lineárních zubových vazeb. Konzervativní model je tedy dán ve tvaru

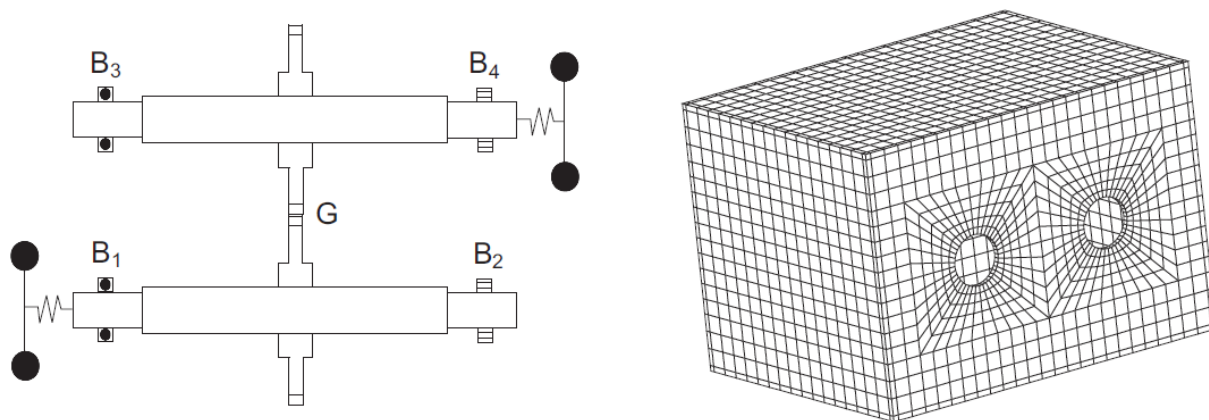
$${}^{(m)}\ddot{\mathbf{x}} + (\Lambda^r + \tilde{\mathbf{K}}_B^r + \tilde{\mathbf{K}}_G^r)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (4.74)$$

Následný postup je zcela analogický jako v případě (A), tedy výpočet deformací zubové vazby při jednotlivých tvarech kmitu, seřazení deformací ozubení a odpovídající přeskupení vlastních tvarů a vlastních čísel v maticích \mathbf{T} a \mathbf{S} , zahrnutí pouze těch s významnou deformací vazby a následná druhotná redukce pomocí obdélníkových matic ${}^{(m)}\mathbf{T}$, ${}^{(m)}\mathbf{S}$. Dojde tedy ke změně transformovaného modelu, kdy

$${}^{(m)}\mathbf{T}^T (\Lambda^r + \tilde{\mathbf{K}}_B^r + \tilde{\mathbf{K}}_G^r) {}^{(m)}\mathbf{T} = {}^{(m)}\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{p,p}. \quad (4.75)$$

4.2.3. Aplikace na testovací převodovku - výsledky numerických simulací

Na základě teorie uvedené v předchozích odstavcích byl vytvořen model testovací převodovky [Byrtus & Zeman 2011], která je uvedena na obr. 4.12. Jedná se o jednostupňovou převodovku, tedy o soustavu sestávající ze dvou rotorových subsystémů a jednoho statorového subsystému. Skříň převodovky (statorový subsystém) byla uvažována jako dokonale tuhá a oba rotory byly modelovány metodou konečných prvků, jejíž možná realizace je shrnuta v kap. 4.2.1. Ložiska B_1, B_3 jsou kuličková, ložiska B_2, B_4 pak válečková s uvažováním čtyř kontaktních bodů. Analogicky jako v kap. 4.1 je v převodovce uvažována možnost ztráty zubového záběru. Vý-



Obrázek 4.12.: Schéma testovací převodovky - topologie hřídelových subsystémů a statorový subsystém

chozí matematický model celé soustavy je dán v prostoru modálních souřadnic ve tvaru uvedeném např. v (4.66). Tato kapitola shrnuje výsledky numerických simulací pohybu této silně nelineární soustavy.

Oba rotory byly modelovány metodou konečných prvků s diskretizací obou hřídelů na 14 hřídelových elementů (15 uzlů) a obě ozubená kola byla uvažována jako pevně nasazené tuhé kotouče - vybrané parametry systému jsou uvedeny v příloze A.5. Periferní části mají velké hmotnostní parametry vzhledem k ozubeným kolům, a vazba na tyto části je proto uvažována

jako dokonale torzně vetknutá do rámu. Model ústrojí byl částečně přejat z prací [Byrtus & Zeman 2011] a [Byrtus et al. 2010], kde jsou rovněž uvedeny veškeré potřebné parametry této soustavy. Nebude-li uvedeno jinak, je pro výpočty u obou hřídelů užíváno kondenzace na 24 stupňů volnosti. Dále bude ukázáno, že tato volba je dostatečná pro zachování přesnosti popisu nelineárních jevů, a rovněž bude uvedeno srovnání efektivity vybraných numerických přístupů popsanych v kap. 3.3 k řešení pohybu s ohledem na výpočetní čas.

V matematickém modelu systému byly zanedbány cirkulační účinky, neboť numerické experimenty ukázávají (viz dále), že vliv cirkulační matice je pro zkoumanou oblast otáček zanedbatelný a neprojeví se změnou kvality dále uváděných bifurkačních diagramů. Tato skutečnost souvisí s faktem, že prvky cirkulační matice jsou o několik řádů nižší než prvky matice tuhosti, a vzhledem k závislosti cirkulační matice na úhlové rychlosti otáčení hřídelů se tato projeví teprve pro vysoké otáčky, které jsou již mimo zkoumaný rozsah.

Pro nelineární model bylo uvažováno buzení hnacím momentem na vstupu, zátěžným momentem na výstupu a kinematickou úchylnou ozubení (danou analogicky jako v (4.10))

$$\Delta(t) = \sum_{k=1}^K (\Delta_k^C \cos k\omega_z t + \Delta_k^S \sin k\omega_z t), \quad (4.76)$$

s uvažováním pouze prvních tří sinových členů Fourierovy řady

$$\Delta_1^S = 5 \cdot 10^{-6}, \quad \Delta_2^S = \frac{\Delta_1^S}{2}, \quad \Delta_3^S = \frac{\Delta_1^S}{3}, \quad \Delta_j^C = 0, \quad j = 1 \dots \quad (4.77)$$

Campbellův diagram

Základní analýzou v dynamice rotorů je výpočet modálních vlastností rotujícího systému. Vlastní čísla systému popsaného homogenním modelem příslušejícím k modelu (4.49) jsou v daném případě, kdy jsou uvažovány gyroskopické a cirkulační účinky rotující soustavy, závislé na úhlové rychlosti rotace rotoru ω a lze je získat výpočtem vlastních čísel systémové matice (viz dále). Tato vlastní čísla nechť jsou $\lambda_\nu(\omega)$, $\nu = 1 \dots 2n$, kde n je počet stupňů volnosti. Vlastní čísla jsou komplexní ve tvaru $\lambda_\nu(\omega) = \alpha_\nu(\omega) + i\beta_\nu(\omega)$. Lze ukázat (viz např. [Byrtus et al. 2010]), že reálná část vlastních čísel $\alpha_\nu(\omega) = \Re\{\lambda_\nu(\omega)\}$ vypovídá o stabilitě, zatímco imaginární část nese informaci o vlastních frekvencích systému. Pro reálnou část zápornou se jedná o stabilní pohyb, zatímco v opačném případě jde o pohyb nestabilní. Závislost imaginárních částí vlastních čísel $\beta_\nu(\omega) = \Im\{\lambda_\nu(\omega)\}$ na úhlové rychlosti otáčení umožňuje určení kritických otáček rotoru, jak bude ukázáno dále.

Problém vlastních hodnot vede na shodný výsledek jak při výpočtu z modelu sestaveného v konfiguračním prostoru zobecněných souřadnic, tak při výpočtu z modelu převedeného do prostoru modálních souřadnic. Systém, který má v prostoru modálních souřadnic tvar

$$\ddot{\mathbf{x}} + (\tilde{\mathbf{B}} + \omega\tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{B}}_B + \tilde{\mathbf{B}}_G)\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{\Lambda} + \omega\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}}_B + \tilde{\mathbf{K}}_G)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (4.78)$$

lze převést do stavového prostoru připojením triviální identity $\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$. Při zavedení stavového vektoru [Byrtus et al. 2010] ve tvaru $\mathbf{u} = [\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}]^T$ má matematický model ve stavovém

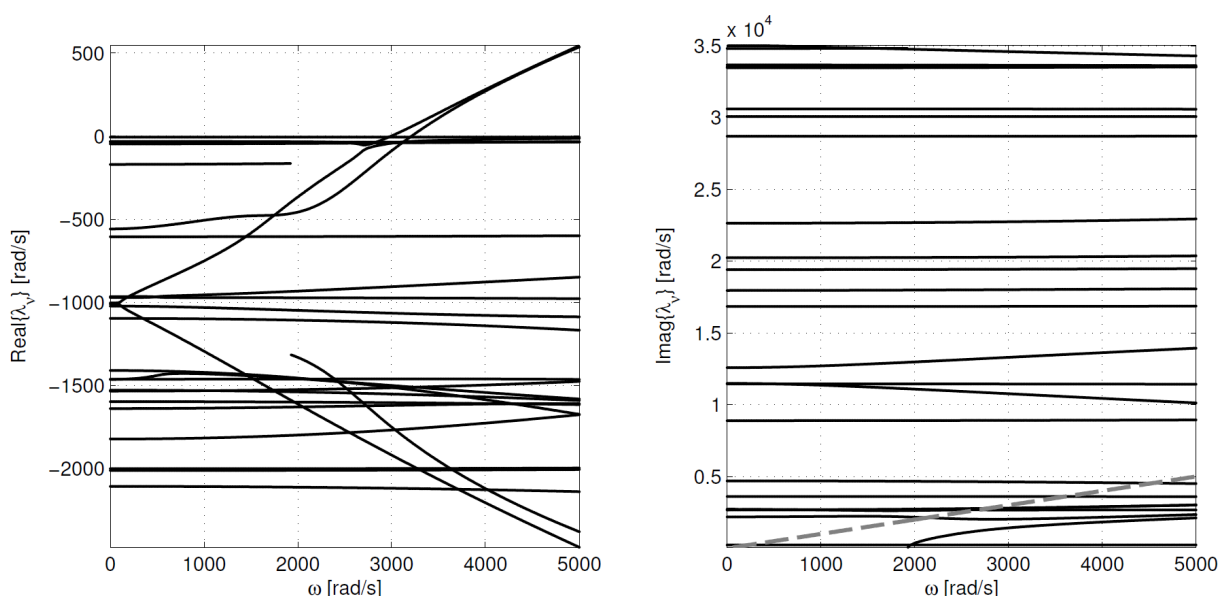
prostoru tvar

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\mathbf{u}, \quad (4.79)$$

kde \mathbf{A} je systémová matice, daná v tomto případě⁵ jako

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(\tilde{\mathbf{B}} + \omega\tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{B}}_B + \tilde{\mathbf{B}}_G) & -(\mathbf{\Lambda} + \omega\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{K}}_B + \tilde{\mathbf{K}}_G) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.80)$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice. Na obr. 4.13 je ukázán průběh reálných a imaginárních částí systémové matice \mathbf{A} v závislosti na rychlosti rotace ω hnacího hřídele. Z průběhu imaginárních částí



Obrázek 4.13.: Průběh reálných a imaginárních částí dvaceti nejnižších vlastních čísel systémové matice \mathbf{A} v závislosti na úhlové rychlosti ω hnacího hřídele

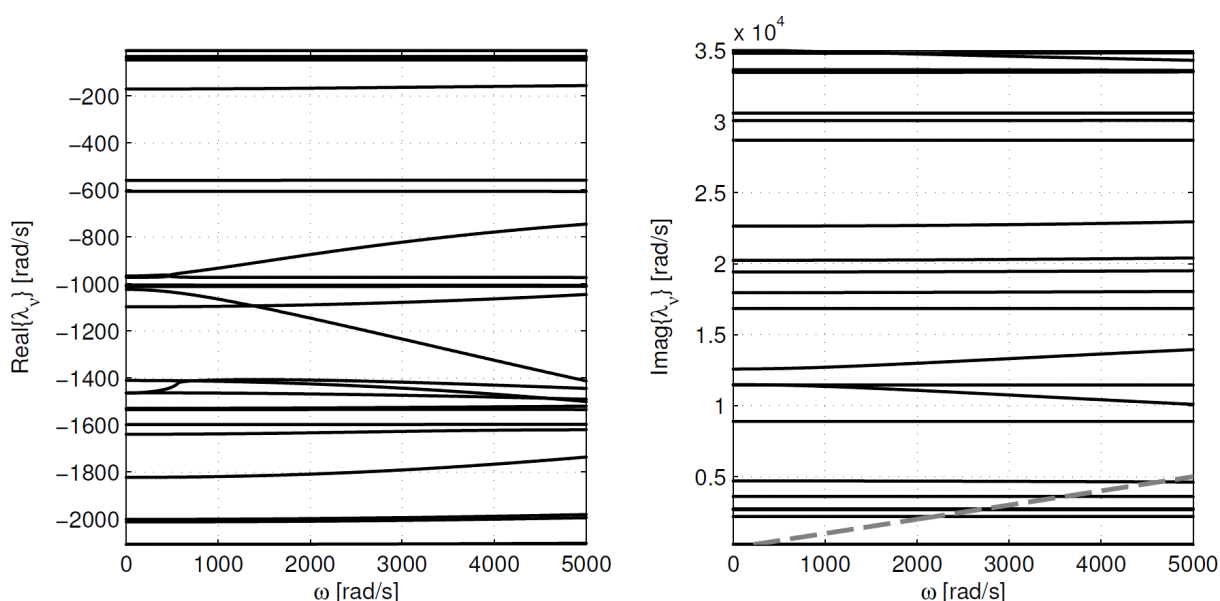
vlastních čísel lze identifikovat kritické úhlové rychlosti jako takové úhlové rychlosti ω_{krit} , při kterých dochází k protnutí průběhu imaginární části vlastního čísla s náběhovou přímkou (na obr. 4.13 čárkovaně). Často je účelné převést kritické úhlové rychlosti ω_{krit} [rad/s] na kritické otáčky n_{krit} [ot/min] pomocí vztahu

$$n_{krit} = \frac{30}{\pi} \omega_{krit}. \quad (4.81)$$

Z průběhů reálných částí vlastních čísel je zřejmé, že pro vyšší úhlové rychlosti se jeden z průběhů reálných částí vlastních čísel stává kladným a systém se stává nestabilním. Tento přechod k nestabilnímu pohybu však nastává pro vysoké úhlové rychlosti ω , které jsou mimo dále zkoumaný rozsah, a tedy lze konstatovat, že v dále zkoumaném pásmu otáček je systém stabilní.

⁵Tvar systémové matice závisí na řazení subvektorů ve stavovém vektoru a lokalizaci triviální identity, vlastní čísla jsou však pro všechny možné případy identická.

Nestabilita systému je způsobena vnitřním tlumením [Byrtus et al. 2010], konkrétně přítomností cirkulační matice \tilde{C} ve zkoumaném modelu. Diagramy na obr. 4.14 ukazují pro srovnání průběhy reálných a imaginárních částí vlastních čísel systému, v němž je zanedbána cirkulační matice. Je zřejmé, že tento systém je již stabilní. Je zde rovněž patrné, že vlastní čísla systému jsou při zanedbání cirkulační matice stále závislá na úhlové rychlosti hnacího hřídele ω , neboť v modelu je stále přítomna matice gyroskopických účinků, jejíž prvky jsou závislé na ω . V případě zanedbání jak cirkulačních, tak gyroskopických účinků by problém vlastních hodnot nebyl již frekvenčně (otáčkově) závislý a naznačené průběhy vlastních čísel by byly vzhledem k úhlové rychlosti ω konstantní.



Obrázek 4.14.: Průběh reálných a imaginárních částí dvaceti nejnižších vlastních čísel systé-
mové matice A v závislosti na úhlové rychlosti ω hnacího hřídele bez uvažování
cirkulační matice \tilde{C}

Nelineární analýza - bifurkační diagramy

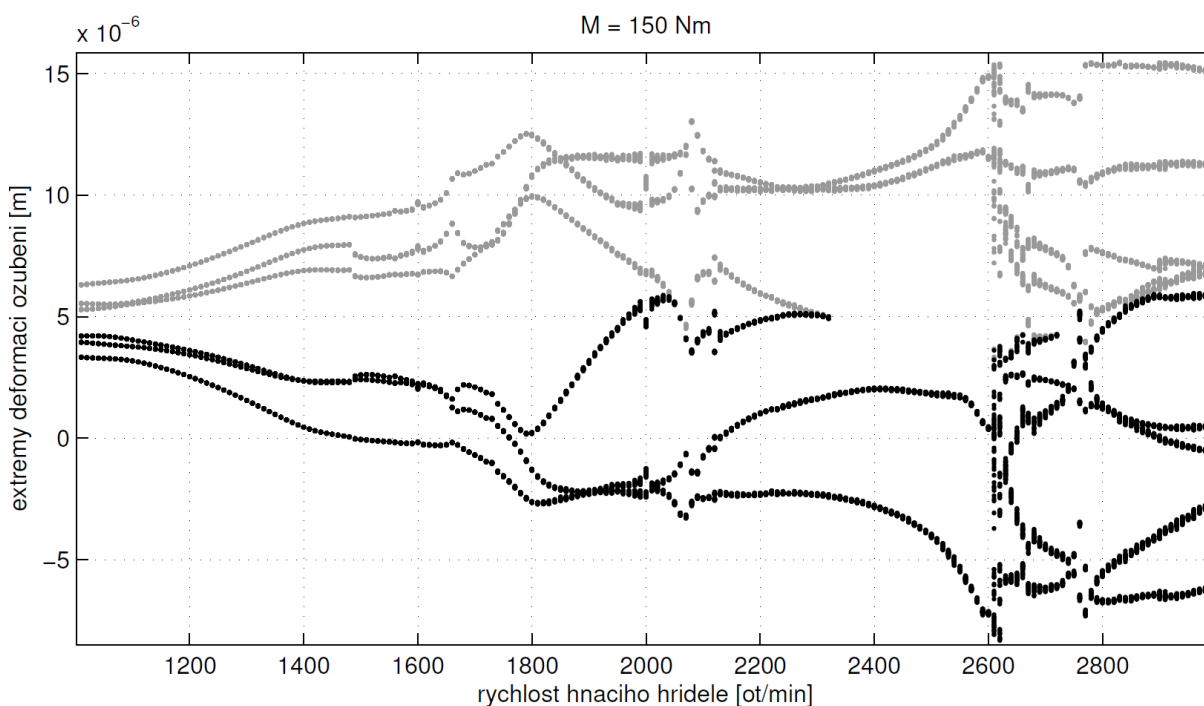
Nelineární analýzy byly provedeny na matematickém modelu ve tvaru (4.66) v časovém inter-
valu $t \in \langle 0; 0,05 \rangle$ s, který se vzhledem k vysokofrekvenčnímu buzení ukazuje jako dostatečný
k postižení zkoumaných jevů. Aby byly omezeny přechodové jevy při numerické simulaci v čas-
ové oblasti, byly počáteční podmínky uvažovány ve tvaru

$$\mathbf{x}(0) = [\mathbf{A}^r + \tilde{\mathbf{K}}_B^r + \tilde{\mathbf{K}}_G^r]^{(m)} \mathbf{V}^T \mathbf{f}^E(0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{0}, \quad (4.82)$$

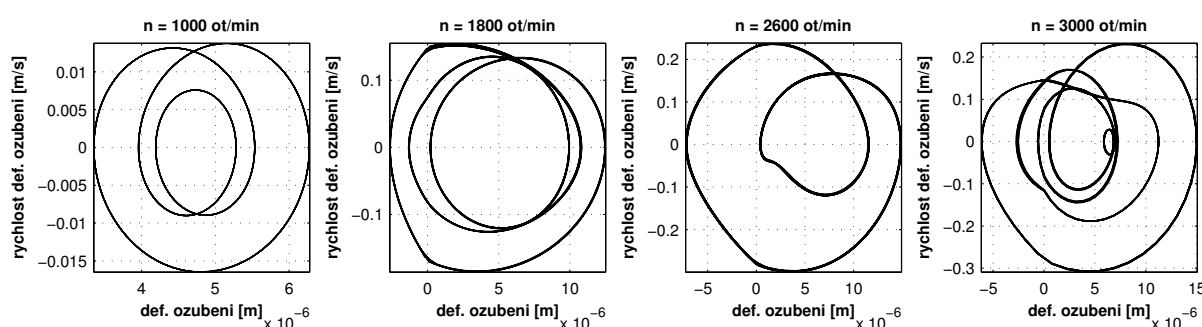
který odpovídá statickému vnějšímu zatížení. Pro sledování kvalitativní změny deformace v ozu-
bení v závislosti na změně otáček byly stejně jako v kap. 4.1 užity bifurkační diagramy, v nichž
jsou zobrazeny extrémní deformace v ozubení pro diskrétní otáčky v určitém otáčkovém pásmu.
Tyto diagramy umožňují pro daný zátěžný moment určit pásma, v nichž dochází k periodické

deformaci ozubení, pásma se zdvojením či dalším znásobením periody a pásma s chaotickým pohybem.

Bifurkační diagram pro hnací moment $M = 150 \text{ Nm}$ je ukázán na obr. 4.15. Zde je v daném otáčkovém pásmu $n \in (1000, 3000) \text{ ot/min}$, pro které byl výpočet prováděn, patrný většinou pohyb periodický s různými amplitudami deformace v ozubení s několika intervaly s kvaziperiodickým či chaotickým pohybem. Podobně jako v kap. 4.1 jsou na obr. 4.16 ukázány



Obrázek 4.15.: Bifurkační diagram - maxima (šedě) a minima (černě) deformace v ozubení v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M_h = 150 \text{ Nm}$

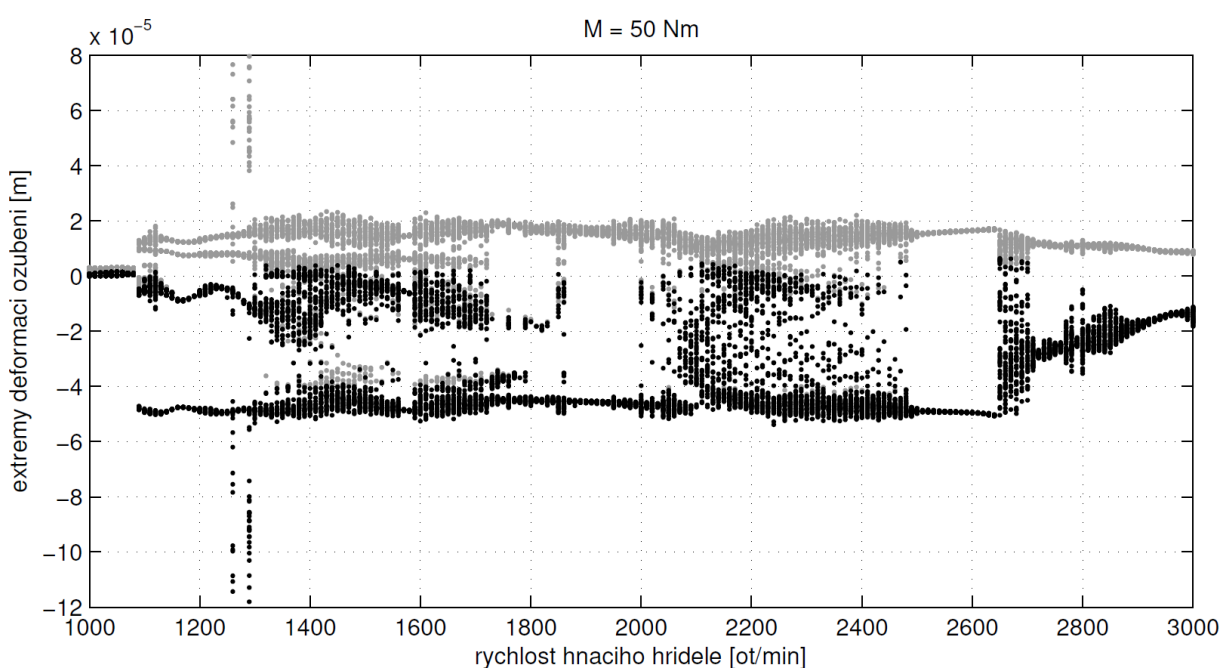


Obrázek 4.16.: Fázové trajektorie deformace ozubení pro vybrané otáčky při hnacím momentu $M_h = 150 \text{ Nm}$

fázové trajektorie deformace v ozubení pro vybrané otáčky při hnacím momentu $M_h = 150 \text{ Nm}$, které souvisí s bifurkačním diagramem na obr. 4.15.

Na obr. A.2 v příloze A.6 je uveden týž bifurkační diagram při uvažování cirkulační matice. Je zřejmé, že oba bifurkační diagramy jsou shodné, a tedy že v matematickém modelu jsou cirkulační účinky v daném otáčkovém rozsahu zanedbatelné a nelineární analýzy postačuje provádět na zjednodušeném modelu.

Obr. 4.17 ukazuje extrémní deformace ozubení v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M = 50$ Nm. Zde je patrné, že např. pro $n < 1080$ ot/min dochází k pohybu s periodickou deformací v ozubení, následně se objevuje skok v amplitudách a následný přechod k chaotickému pohybu s několika oblastmi periodického, resp. kvaziperiodického, pohybu, např. $n \in (1870, 1990) \cup (2500, 2660)$ ot/min. Pro $n > 2900$ ot/min je deformace v ozubení opět periodickou funkcí.

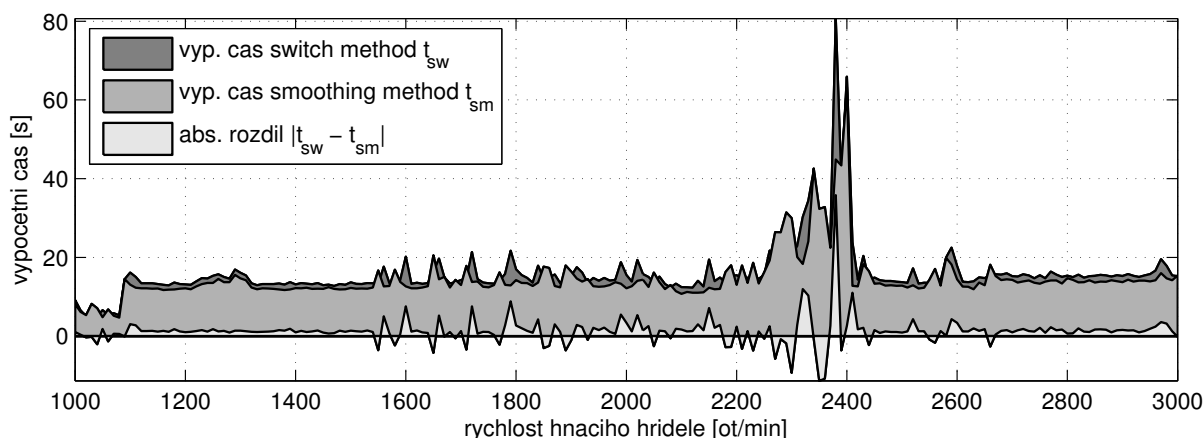


Obrázek 4.17.: Bifurkační diagram - maxima (šedě) a minima (černě) deformace v ozubení v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M_h = 50$ Nm

V příloze A.6 jsou na obr. A.3 ÷ obr. A.5 pro ilustraci uvedeny bifurkační diagramy pro jiné hodnoty vnějšího zatížení. Ukazuje se, že při vyšších hodnotách vnějšího zatížení se nelinearity neuplatňují v takové míře jako při nižších vnějších zatíženích, což je dáno snazším odlehnutím zubového záběru a přechodem k pohybu ve vůli při nižším vnějším zatížení.

Srovnání výpočetního času

Na obr. 4.18 je ukázán výpočetní čas obou použitých metod v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací a zátěžný moment $M = 50$ Nm. V souvislosti s bifurkačním diagramem na obr. 4.17 je vidět, jak závisí výpočetní čas na druhu pohybu. Při periodickém pohybu, který nastává např. v oblasti $n = (1000, 1080)$ ot/min, je zřejmý nižší výpočetní čas oproti pohybu s rázy, který nastává pro vyšší otáčky. Při srovnání obou užitých metod se ukazuje, že výpočetní

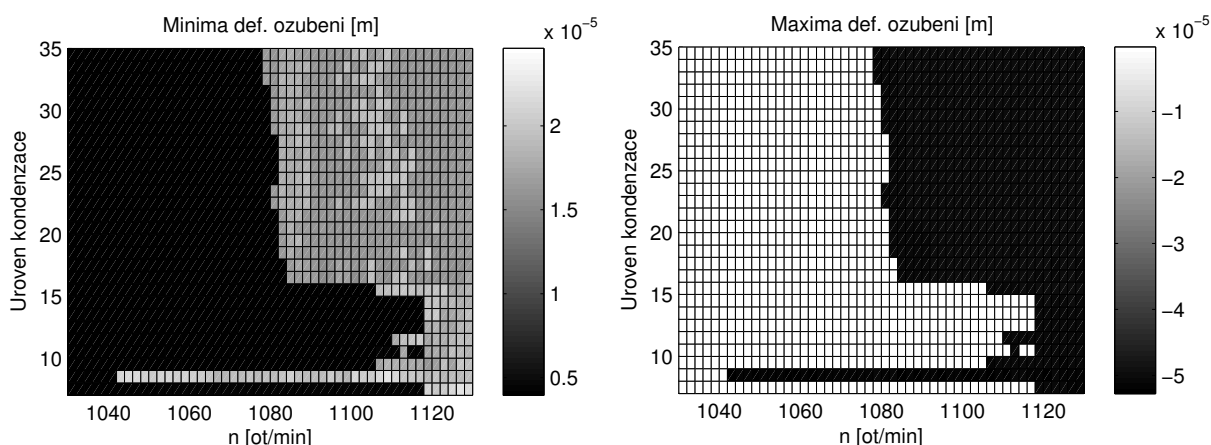


Obrázek 4.18.: Výpočetní čas pro obě uvažované metody řešení a absolutní rozdíl výpočetních časů v závislosti na kvalitativně různých druzích pohybu při otáčkách $n \in (1000, 3000)$ ot/min a hnacím momentu $M_h = 50$ Nm (viz obr. 4.17)

čas u obou metod zachovává shodný trend. Ve větší části dané oblasti se jako mírně efektivnější numerický přístup ukazuje metoda zhladčení.

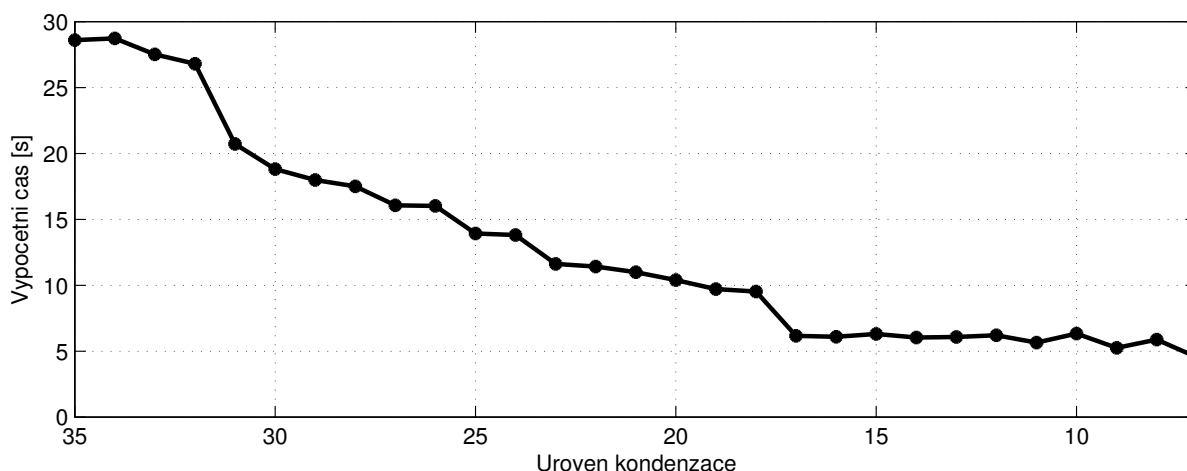
Vliv úrovně kondenzace na kvalitu bifurkačního diagramu a na výpočetní čas

Pro daný zátěžný moment byl sledován vliv úrovně kondenzace na kvalitativním zachování bifurkačního diagramu. Pro tuto analýzu byla vybrána bifurkace se zdvojením peridody při $n = 1100$ ot/min a pro hnací moment $M = 50$ Nm (viz obr. 4.17). Při výpočtech byly zazname-



Obrázek 4.19.: Vliv úrovně kondenzace subsystémů na polohu bifurkace zdvojením peridody pro $M = 50$ Nm

návány otáčky, pro které k bifurkaci dochází. Vliv úrovně kondenzace na lokalizaci bifurkace na otáčkové ose je ukázán na obr. 4.19. Z výsledků je patrné, že při vyšších úrovních kondenzace ($m_s > 16$) bifurkace nastává při blízkých otáčkách a její poloha se příliš nemění, zatímco



Obrázek 4.20.: Závislost výpočetního času na úrovni kondenzace při simulaci pohybu soustavy pro $n = 3000$ ot/min

při kondenzaci na méně než 15 stupňů volnosti se již projevují nepřesnosti a poloha bifurkace na otáčkové ose se mění. Při příliš nízké úrovni kondenzace tedy již není kvalitativně zachována struktura bifurkačního diagramu. Je zřejmé, že do určitého stupně kondenzace (zde do 16 stupňů volnosti) se bifurkace prakticky neposouvá, tedy lze užít kondenzace, která souvisí s významnou redukcí počtu stupňů volnosti soustavy a s výraznou úsporou výpočetního času. Na obr. 4.20 je uvedena závislost výpočetního času (při otáčkách $n = 3000$ ot/min) na úrovni kondenzace. Je zřejmé, že čím menší je úroveň kondenzace (čím nižší je počet stupňů volnosti výsledného kondenzovaného modelu), tím nižší je výpočetní čas. Je však potřeba zajistit, aby zároveň nedocházelo ke změně vlastností matematického modelu a ke zkreslování výsledků vlivem výše diskutovaného efektu změny kvality nelineárního chování při příliš nízké úrovni kondenzace.

Srovnání metod redukce

Na matematickém modelu testovací převodovky byly porovnány výše uvedené metody redukce, tj. metoda modální syntézy s kondenzací a dvouúrovňová metoda redukce zohledňující vliv pouze těch vlastních tvarů kmitu, které se významně podílejí na deformaci zubové vazby. Ve všech dále uváděných případech byla uvažována redukce na výsledný model o čtyřiceti stupních volnosti. V případě metody modální syntézy s kondenzací byl každý subsystém redukován na soustavu se dvaceti stupni volnosti, v případě dvouúrovňové redukce pak byla uvažována redukce v prvním kroku na 40 stupňů volnosti u každého subsystému a následná redukce výsledného syntetizovaného modelu (o celkovém počtu 80 stupňů volnosti) na soustavu se 40 stupni volnosti.

Pro představu o mechanismu výběru vlastních tvarů kmitu při druhotné redukcí matematického modelu jsou v tab. 4.2 ukázána pořadí vlastních vektorů v modální matici s permutovanými vlastními tvary, seřazenými sestupně podle velikosti deformace ozubení a jejich pozice v původní modální matici (před permutací sloupců). Deformace v ozubení je zde vyčíslena pro kmitání danými vlastními tvary kmitu, jež jsou normalizovány M -normou podle výše diskuto-

Pořadí vl. tvaru v permutované modální matici [-]	Deformace v ozubení d_z [m]	Pořadí vl. tvaru v nepermutované modální matici [-]
1	0,7869	3
2	0,4656	6
3	0,4653	7
4	0,2200	80
5	0,1872	10
6	0,1805	26
7	0,1799	29
8	0,1765	64
9	0,1761	48
10	0,1637	17

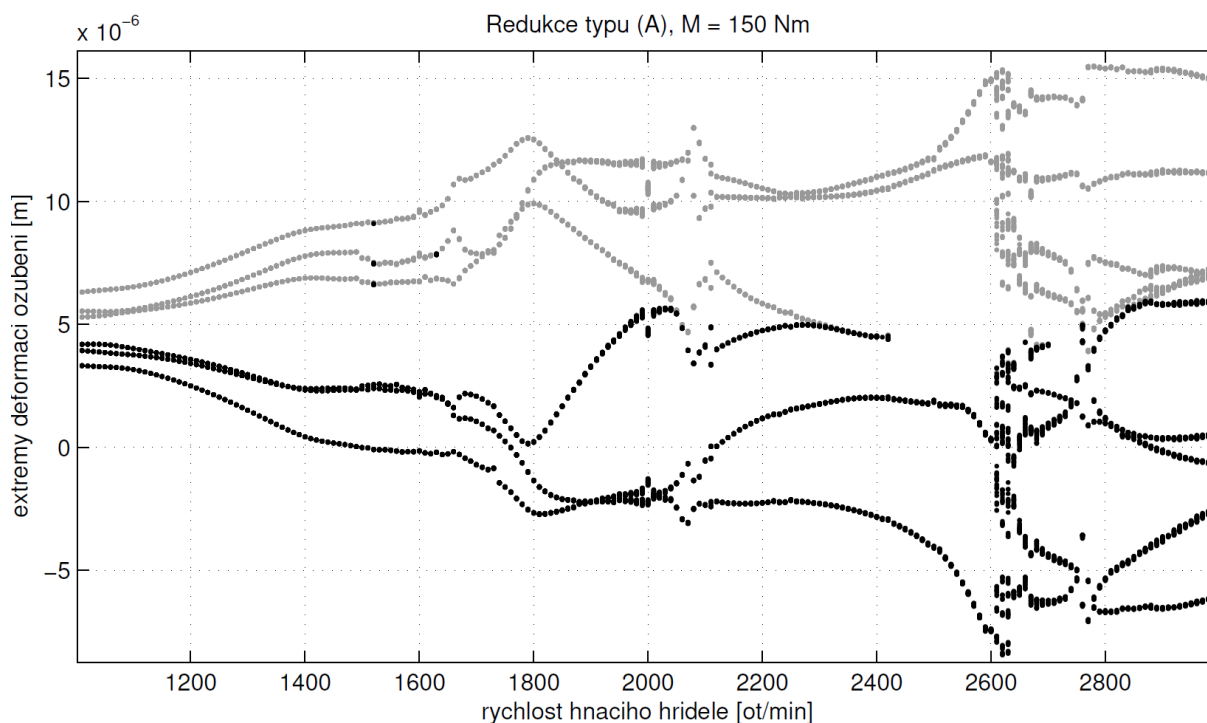
Tabulka 4.2.: Deformace ozubení pro různé vlastní tvary a pořadí vlastních tvarů v modální matici před seřazením podle velikosti deformace vazby

vaných podmínek. Tomu odpovídají i hodnoty deformace v ozubení d_z . Z tabulky je zřejmé, že při použití této metodiky se na první místa modální matice druhotné redukce dostávají vlastní tvary kmitu, z nichž sice některé přísluší nižším vlastním tvarům kmitu (viz 3., 6. a 7. vlastní tvar na prvních pozicích), ale hned následně rovněž nejvyšší vlastní tvar (80.). I dále se uplatňují také vyšší tvary kmitu.

Na obr. 4.21 je uveden bifurkační diagram extrémů deformace v ozubení v závislosti na úhlové rychlosti otáčení hnacího hřídele. Tento diagram je shodný s diagramem na obr. 4.15, resp. obr. A.2, kde jsou zobrazeny výsledky pro model redukovaný jednoúrovňovou modální syntézou s kondenzací. U diagramu 4.21 lze pozorovat pouze několik singularit patrných na $n = 1520$ ot/min a $n = 1630$ ot/min, kde se objevují na větvi maxima i minima. Lze však konstatovat, že kvalita bifurkačního diagramu zůstává prakticky nezměněna. Bifurkační diagram pro shodný model redukovaný metodou (B) je ukázán na obr. 4.22. Je zřejmé, že ačkoli zde je na několika místech lokálně zachována kvalita diagramu, navržená metoda typu (B) globálně poskytuje zcela odlišné výsledky než původní model, a je tedy pro použití v analýzách nelineárního chování nevhodná. Rozdíl je zřejmě způsoben přidáním zubové vazby, která zásadně ovlivňuje vlastnosti systému. Použitá druhotná transformační matice pak obsahuje vlastní tvary, které nepopisují fázi odléhání zubů. Použití této metody tedy není vhodné.

Shrnutí

Shodně jako v kapitole 4.1 byly nelineární jevy zkoumány prostřednictvím bifurkačních diagramů, jež poskytují informaci o otáčkových pásmech s klidným pohybem a pásmech s rázovým pohybem. Při analýze vlivu úrovně kondenzace na kvalitu nelineárních jevů se ukazuje, že lze velmi výrazně snížit počet stupňů volnosti při kvalitativním zachování bifurkačního diagramu. Ukazuje se dále, že z metod redukce je pro nelineární analýzy dobře použitelná metoda

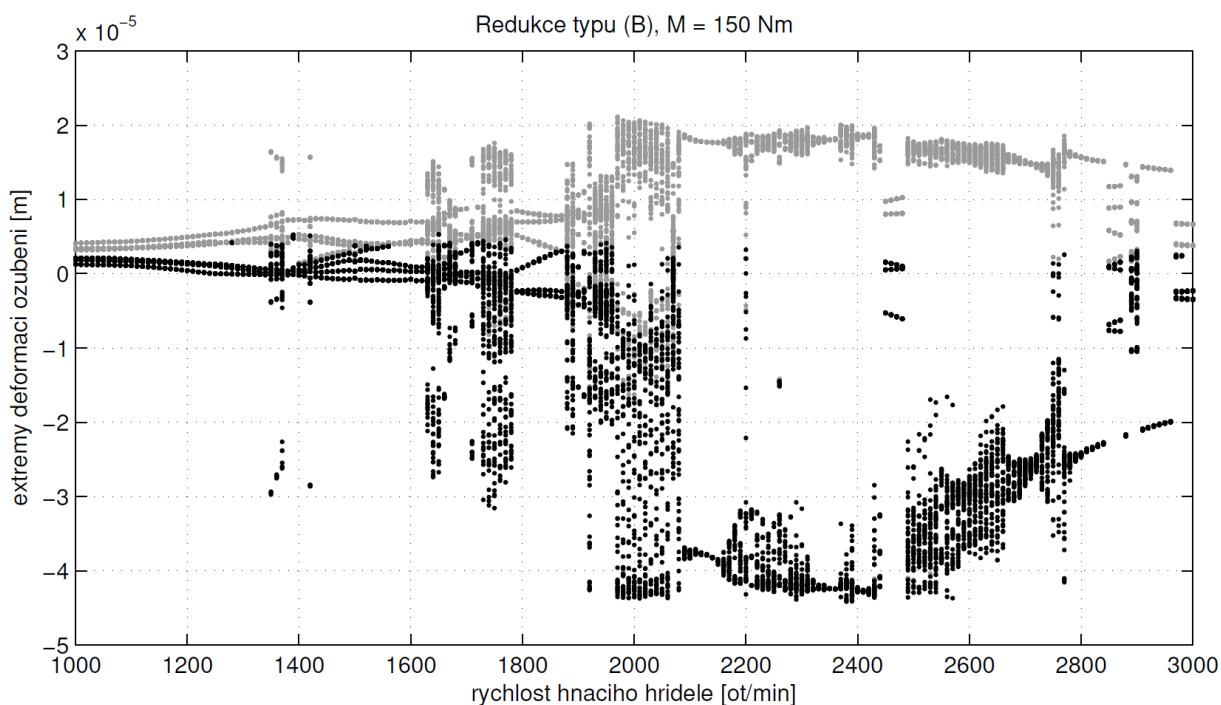


Obrázek 4.21.: Bifurkační diagram - maxima (šedě) a minima (černě) deformace v ozubení v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M_h = 150 \text{ Nm}$ na modelu redukovaném dvouúrovňovou metodou typu (A) při redukci na 40 stupňů volnosti

modální syntézy s kondenzací a navržená dvouúrovňová metoda redukce typu (A). Naopak dvouúrovňová metoda redukce typu (B) se ukazuje jako nevhodná.

4.3. Matematický model vibrolisu na zhutnění betonové směsi

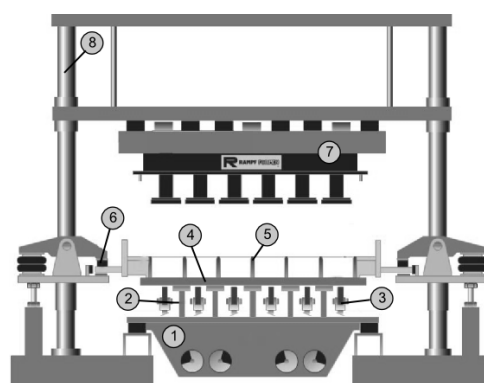
V této kapitole bude ukázán zjednodušený model vibrolisu na zhutnění betonové směsi. Jde o zařízení pro výrobu betonových prefabrikátů, určené ke zhutnění a zformování tekuté betonové směsi. Typickými výrobky zpracovávány pomocí této technologie (procesem tzv. *vibrolisování*) jsou nejrůznější profily zámkové dlažby, tenkostěnné tvárnice, betonové trubky apod. (více viz např. [Synáč 2011]). Při zhutnění dochází k vypuzení přebytečného vzduchu z betonové směsi, a tedy ke zlepšení mechanických vlastností výsledné tvárnice s ohledem na její pevnost a životnost. Kvalita zhutnění je klíčová pro kvalitu výsledného výrobku. Při špatném zhutnění betonu mohou ve výsledné tvárnici zůstat příliš velké vzduchové mezery, jejichž přítomnost v materiálu snižuje pevnost a životnost výrobku. Kromě samotného zhutnění je ovšem výrobek ovlivňován řadou dalších vlivů, např. složením a kvalitou betonové směsi, konstrukčním řešením vibrolisu či formy, prostředím, v němž dochází k tvrdnutí, apod.



Obrázek 4.22.: Bifurkační diagram - maxima (šedě) a minima (černě) deformace v ozubení v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M_h = 150$ Nm na modelu redukovaném dvouúrovňovou metodou typu (B) při redukci na 40 stupňů volnosti

4.3.1. Popis vibrolisu a princip jeho funkce

Vibrolis je součástí automatizované linky na výrobu betonových tvárnic. Na obr. 4.23 je ukázán čelní pohled na tento stroj. Důležitou součástí je tzv. *vibrační stůl* {1}⁶. Jde o těleso, které obsahuje dva páry rotorů s excentricky uloženou hmotou, které jsou v protifázi tak, že za rotace se navzájem ruší horizontální složka jejich odstředivých sil, takže je generován harmonický pohyb pouze ve směru vertikálním. Excentry mají proměnnou excentricitu nevývažků. Při přípravných krocích před samotnou vibrací je excentricita nulová, rotory negenerují žádný pohyb stolu, a teprve v okamžiku vibrace dochází ke změně excentricity. Rotory proto mohou být stále v chodu, což je výhodné jak z hlediska časové úspory (rotory se nemusí rozbíhat a dobíhat) tak kvůli zvýšení životnosti rotorů a jejich částí. Celý stůl je uložen v prostoru rámu na pryžových silentblo-



Obrázek 4.23.: Čelní pohled na vibrolis (vlevo) a označení jednotlivých částí

⁶Čísla odkazují k příslušnému označení v obr. 4.23.

cích. Další součástí jsou *vibrační lišty* {2}, které jsou pevně spojeny se stolem, a tzv. *dorazové lišty* {3}, jež jsou naopak pevně spojeny s rámem. Jsou v prostoru nehybné a v případě potřeby je nastavitelná jejich výška. Právě výška dorazů je jedním z parametrů, jejichž nastavením lze ovlivňovat kvalitu zhutnění. *Podložka* {4} je oblédníková, obvykle dřevěná deska, na kterou dosedá *forma* {5} na příslušné tvárnice. Jde o kovové těleso s otvory odpovídajícími příslušným profilům výrobku. Další součástí je *upínací zařízení* {6}, sloužící k uchycení formy k rámu. To je realizováno prostřednictvím hydraulického zařízení s nastavitelným tlakem sevření. Kontakt mezi formou a čelistmi je realizován pomocí pryžových silentbloků. Velikost tlaku v uchycení je dalším z nastavitelných parametrů, jimiž lze ovlivňovat kvalitu zhutnění. Poslední součástí je *razník* {7}, který slouží k přitlačení betonové směsi ve formě v průběhu vibrace.

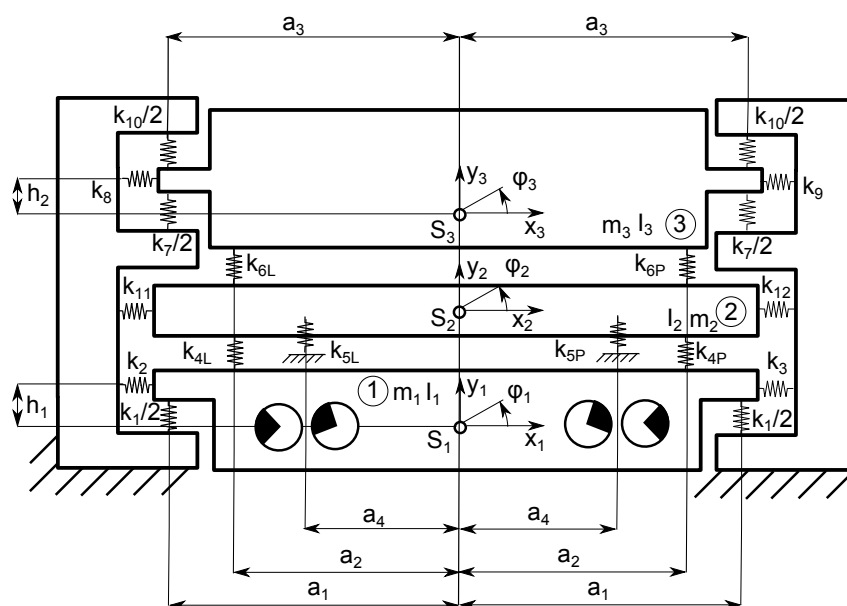
Vibrolisy jsou v současné době automatická zařízení, která pracují cyklicky. Jeden cyklus činnosti tohoto stroje sestává z několika fází. V první fázi ke stroji přijíždí pomocí transportního mechanismu podložka, jež je nakonec volně uložena v prostoru vibrolisu na dorazové lišty. Na ni se poté spouští příslušná forma. Dojde k naplnění formy betonovou směsí, která je pomocí stěrky rozprostřena rovnoměrně po celé ploše formy. Dále je betonová směs shora přitlačena razníkem a v následující fázi dochází k vlastní vibraci. Stůl začne kmitat ve vertikálním směru a při tomto pohybu pomocí vibračních lišt naráží zdola do podložky. Podložka dopadá zpět na vibrační lišty či na lišty dorazové, čímž dochází k vypuzování přebytečného vzduchu z betonové směsi, a tedy k samotnému zhutnění. Následně se forma zvedá a podložka se zformovanými a zhutněnými betonovými tvárnici opouští na dopravníku prostor vibrolisu. Celý proces se cyklicky opakuje.

Parametry ovlivňující kvalitu zhutnění

Jak již bylo výše uvedeno, kvalitu zhutnění ovlivňuje řada faktorů. Pro praxi jsou důležité ty z nich, které je možné snadno změnit nastavením konstrukčních parametrů vibrolisu. Důležitým parametrem je *výška dorazových lišt*, jež ovlivňuje zásadně kvalitu zhutnění. Změnou polohy dorazových lišt se mění výška, ze které forma dopadá, a tedy i rychlost při dopadu. S rostoucí rychlostí dopadu se zvyšuje energie uvolňovaná při rázu. Tato energie se z velké části disipuje právě při zhutnění betonové směsi. Dalším faktorem ovlivňujícím zhutnění je *doba vibrace*. K největšímu zhutnění dochází na počátku vibrace, se vzrůstajícím časem se již stav betonové směsi příliš nemění. Pokud je čas vibrace vyšší než 20 s, vliv na kvalitu zhutnění je minimální a dochází jen k nežádoucímu namáhání stolu [Staněk 1997]. Např. u vibrolisů Hess je doba vibrace asi 5 s. Kvalitu zhutnění rovněž ovlivňuje tlak čelistí pneumatického zařízení, v němž je uchycena forma, a parametry budiče - frekvence a amplituda jeho síly. *Frekvence budiče* je např. u vibrolisů Hess v základním nastavení 50 Hz, je ovšem v určitém intervalu v okolí této hodnoty nastavitelná. *Síla budiče* se dá ovlivnit nastavením excentricity dvojice rotorů. Velikost síly ovlivňuje kvalitu zhutnění, ovšem rovněž zvyšuje namáhání stolu, podložky, i formy, čímž se snižuje životnost těchto součástí.

4.3.2. Matematický model vibrolisu

V této kapitole bude odvozen jak lineární matematický model, který bude dále s výhodou využit pro problémy optimalizace, tak nelineární matematický model, který postihuje všechny



Obrázek 4.24.: Vibrolis jako soustava s devíti stupni volnosti

klíčové aspekty pohybu rázově buzeného vibrolisu. Na nelineárním modelu bude analyzován vliv vybraných parametrů soustavy na rázové síly přenášené do formy s betonovou směsí.

Některé z parametrů (geometrické, materiálové) byly převzaty z práce [Synáč 2011], ostatní (tuhosti a tlumení jednotlivých vazeb) byly pro potřeby této práce, kde je cílem pouze kvalitativní analýza rázového pohybu, odhadnuty. V případě hlubší analýzy a aplikace na reálné zařízení by bylo nutno tyto koeficienty určit experimentálně či numerickými postupy např. pomocí metody konečných prvků. Vybrané parametry, jež byly použity pro dále uváděné numerické simulace pohybu, jsou uvedeny v příloze A.4.

Lineární matematický model

Vibrolis je uvažován jako rovinný systém, sestávající ze tří tuhých těles (viz obr. 4.24), kterými jsou vibrační stůl (těleso 1 v uvedeném obrázku), podložka (těleso 2) a forma s betonovou směsí (těleso 3). Hmotnosti jednotlivých těles jsou m_i a jejich osové momenty setrvačnosti I_i , $i = 1, 2, 3$. Tělesa jsou vázána k rámu pomocí pružně viskózních vazeb podle obr. 4.24. Tuhosti k_1, k_2, k_3 reprezentují tuhost uložení budiče, tuhosti k_7, k_8, k_9, k_{10} reprezentují tuhost pneumatického upínacího zařízení. Pružné vazby k_{4s}, k_{5s}, k_{6s} , $s = P, L$, modelují v lineárním případě tuhost vazby mezi jednotlivými tělesy a v nelineárním případě, který bude prezentován dále, budou mít charakter pružných nárazek. Geometrie stroje je dána konstantami $a_i, i = 1 \dots 4$, $h_j, j = 1, 2$. Buzení je zajištěno dvěma páry rotorů s excentricitou e a hmotností Δm nevývažku. Poloha i -tého tělesa je určena horizontální výchylkou x_i a vertikální výchylkou y_i středu hmotnosti a úhlem natočení $\varphi_i, i = 1, 2, 3$. Matematický model lze odvodit např. z Lagrangeových rovnic II. druhu [Zeman & Hlaváč, 2004] ve standardním maticovém tvaru

$$M\ddot{q}(t) + B\dot{q}(t) + Kq(t) = f(t), \quad (4.83)$$

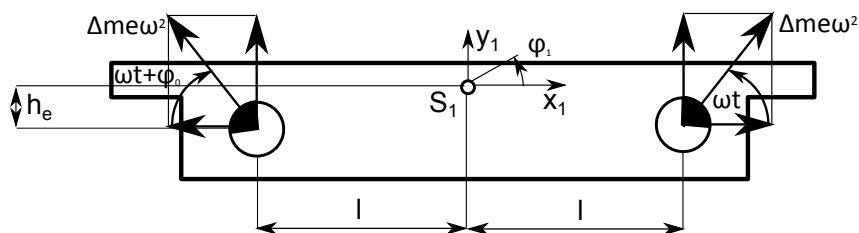
kde $M \in \mathbb{R}^{9,9}$ je matice hmotnosti, $B \in \mathbb{R}^{9,9}$ je matice tlumení, $K \in \mathbb{R}^{9,9}$ matice tuhosti a $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^9$ je vektor zobecněných souřadnic ve tvaru

$$\mathbf{q} = [x_1, y_1, \varphi_1, x_2, y_2, \varphi_2, x_3, y_3, \varphi_3]^T, \quad (4.84)$$

Matici tlumení B uvažujeme proporcionální matici tuhosti podle vztahu

$$B = \alpha K, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+. \quad (4.85)$$

Budič je reprezentován dvěma páry protiběžných excentrických rotorů, které zůstávají v průběhu pohybu v protifázi, čímž se vzájemně ruší horizontální složka odstředivé síly. Dále bude



Obrázek 4.25.: Schématické znázornění jednoho páru excentrů a působící síly

uvažován malý rozdíl úhlového natočení φ_0 (viz obr. 4.25) daný nedokonalě protiběžným pohybem rotorů. U každého rotoru je předpokládána konstantní úhlová rychlost otáčení rotoru ω . Vektor buzení lze odvodit např. pomocí principu virtuálních prací – pro první pár excentrů lze psát vektor buzení $\mathbf{f}_{e1}(t) \in \mathbb{R}^9$ ve tvaru

$$\mathbf{f}_{e1}(t) = \Delta m e \omega^2 \begin{bmatrix} \cos \omega t - \cos (\omega t + \varphi_0) \\ \sin \omega t + \sin (\omega t + \varphi_0) \\ h_e (\cos \omega t - \cos (\omega t + \varphi_0)) + l (\sin \omega t - \sin (\omega t + \varphi_0)) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

Odtud je zřejmé, že pro případ, kdy jsou excentry dokonale protiběžné, je $\varphi_0 = 0$ a vektor budících sil (4.86) přechází do tvaru

$$\mathbf{f}_{e1}(t) = 2 \Delta m e \omega^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \omega t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^9. \quad (4.87)$$

Analogickým způsobem lze sestavit vektor buzení od druhého páru excentrů \mathbf{f}_{e2} a potom celkový vektor buzení excentry $\mathbf{f}_e(t)$ je

$$\mathbf{f}_e(t) = \mathbf{f}_{e1} + \mathbf{f}_{e2}. \quad (4.88)$$

Optimalizace tuhosti uložení vibračního stolu

Na konzervativním modelu přidruženém k nekonzervativnímu systému (4.83) byla provedena optimalizace tuhosti budiče s cílem určit tuhost k_1 tak, aby první vlastní frekvence⁷ f_1 , charakterizovaná dominantním vertikálním kmitáním budiče, byla přeladěna na budicí frekvenci \bar{f}_1 . Po tomto přeladění bude docházet k maximálnímu využití energie budiče na kmitání v prvním módu. Pro určení vlastních tvarů a vlastních frekvencí soustavy je nutné provést modální analýzu, tedy řešení zobecněného problému vlastních hodnot [Zeman & Hlaváč, 2004]. Konzervativní soustava přidružená k (4.83) je dána ve tvaru

$$M\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (4.89)$$

a výsledkem modální analýzy [Zeman & Hlaváč, 2004] jsou spektrální matice Λ a modální matice \mathbf{V} ve tvaru

$$\Lambda = \text{diag}\{\Omega_\nu^2\}, \quad \nu = 1 \dots 9, \quad \mathbf{V} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_9 \end{array} \right], \quad (4.90)$$

kde Ω_ν^2 jsou kvadráty vlastních frekvencí a $\mathbf{v}_\nu, \nu = 1 \dots 9$, jsou vlastní vektory. Pro vlastní optimalizaci tuhosti k_1 formulujeme cílovou funkci ψ jako [Hlaváč 1995]

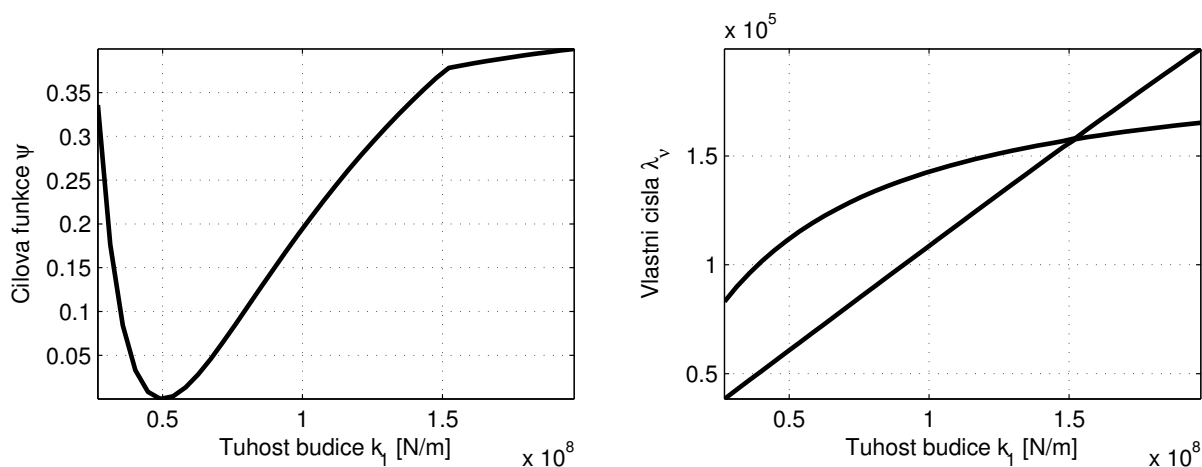
$$\psi = \psi(k_1) = \left(1 - \frac{f_1(k_1)}{\bar{f}_1} \right)^2, \quad (4.91)$$

kde \bar{f}_1 je první vlastní frekvence, na kterou je systém laděn, a $f_1 = f_1(k_1)$ je laděná první vlastní frekvence. Je zřejmé, že takto definovaná funkce je vždy nezáporná a minima nabývá pro $f_1(k_1) = \bar{f}_1$. Optimalizační úlohu nalezení optimální tuhosti \bar{k}_1 lze pak definovat jako hledání minima cílové funkce ψ , resp. argumentu cílové funkce v bodě nabývání minima

$$\bar{k}_1 = \arg \min_{k_1} [\psi(k_1)]. \quad (4.92)$$

Obr. 4.26 ukazuje průběh cílové funkce ψ a průběh prvních dvou vlastních čísel v závislosti na tuhosti k_1 budiče při optimalizaci na budicí frekvenci $\bar{f}_1 = 50$ Hz. Argument minima této cílové funkce je roven hledané optimální tuhosti \bar{k}_1 . V tab. 4.3 jsou uvedeny vlastní frekvence systému před optimalizací a po optimalizaci. Je zřejmé, že došlo k požadovanému přeladění první vlastní frekvence.

⁷Vlastní frekvence v [Hz] bude dále označována symbolem f , vlastní frekvence v [rad/s] symbolem Ω .



Obrázek 4.26.: Průběh cílové funkce ψ a průběhy prvních dvou vlastních čísel systému v závislosti na k_1

Pořadí vl. fr. [-]	Před optimalizací [Hz]	Po optimalizaci [Hz]
1	39,22	50,00
2	53,25	59,18
3	80,61	80,66
4	107,57	107,57
5	126,70	126,75
6	153,59	156,01
7	206,92	225,08
8	225,08	240,61
9	272,50	272,52

Tabulka 4.3.: Vlastní frekvence systému před optimalizací a po optimalizaci

Nelineární matematický model

Pro simulaci rázového pohybu vibrolisu byl uvažován fyzikální model uvedený na obr. 4.24, nyní ovšem s uvážením pružných vazeb k_{4L} , k_{4P} , k_{5L} , k_{5P} , k_{6L} , k_{6P} jakožto pružných narážek. Matematický model nelineární soustavy lze v tomto případě formulovat ve tvaru

$$M\ddot{q}(t) + B\dot{q}(t) + Kq(t) = f_N(h_p(q)) + f_e(t). \quad (4.93)$$

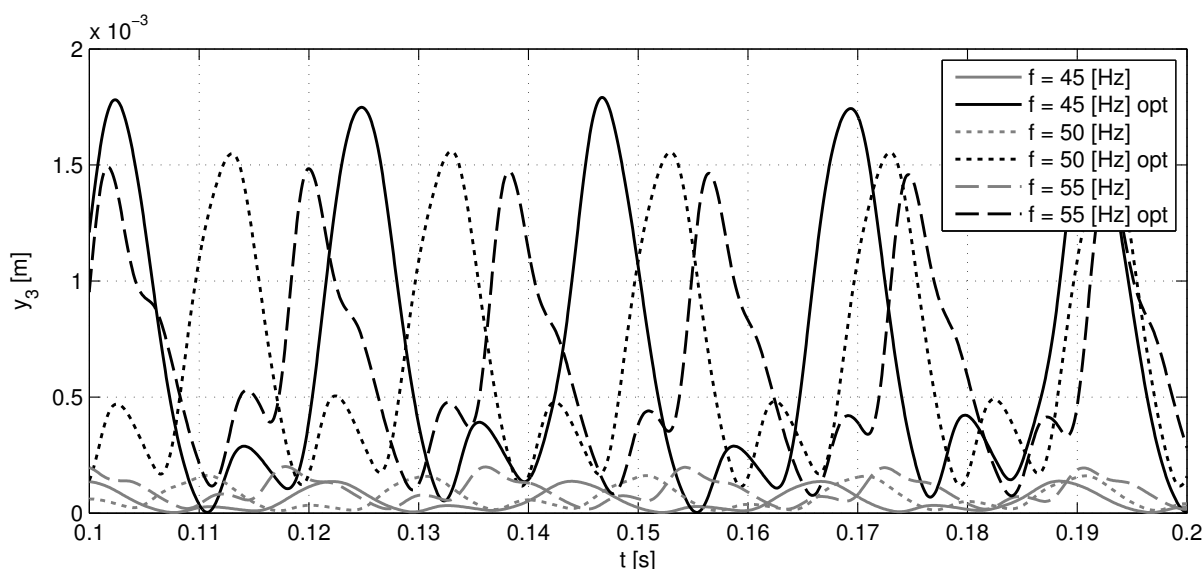
kde M , B , $K \in \mathbb{R}^{9,9}$ jsou matice hmotnosti, tlumení a tuhosti, $f_N(h_p(q)) \in \mathbb{R}^9$ je vektor nelineárních sil přenášených pružnými narážkami, a $f_e(t) \in \mathbb{R}^9$ je výše definovaný vektor buzení od excentrů. Zde matice tuhosti K obsahuje pouze tuhosti příslušející lineárním pružným vazbám. Funkce $h_p = h_p(q)$, $p = 1, \dots, 3$ jsou funkce přepínací hranice. Tyto funkce lze při posuvech x_i v horizontálním směru zanedbatelných vzhledem k příslušným rozměrům těles a vzhledem

k malým výchylkám φ_i popsat jako

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{q}) &= (\delta_1 + y_2 \mp a_2\varphi_2) - (y_1 \mp a_2\varphi_1), \\ h_2(\mathbf{q}) &= (\delta_2 + y_3 \mp a_2\varphi_3) - (y_2 \mp a_2\varphi_2), \\ h_3(\mathbf{q}) &= y_2 \mp a_4\varphi_2, \end{aligned} \quad (4.94)$$

kde δ_1, δ_2 jsou vzdálenosti středů těles 1 a 2 a těles 2 a 3 ve výchozí poloze. Vektor nelineárních sil $\mathbf{f}_N(h_p(\mathbf{q}))$ opět postihuje charakter nárazky – při pohybu bez kontaktu mezi příslušnými dvěma tělesy generuje nulovou sílu, zatímco při pohybu v kontaktu je aktivizována elastická síla v nárazce.

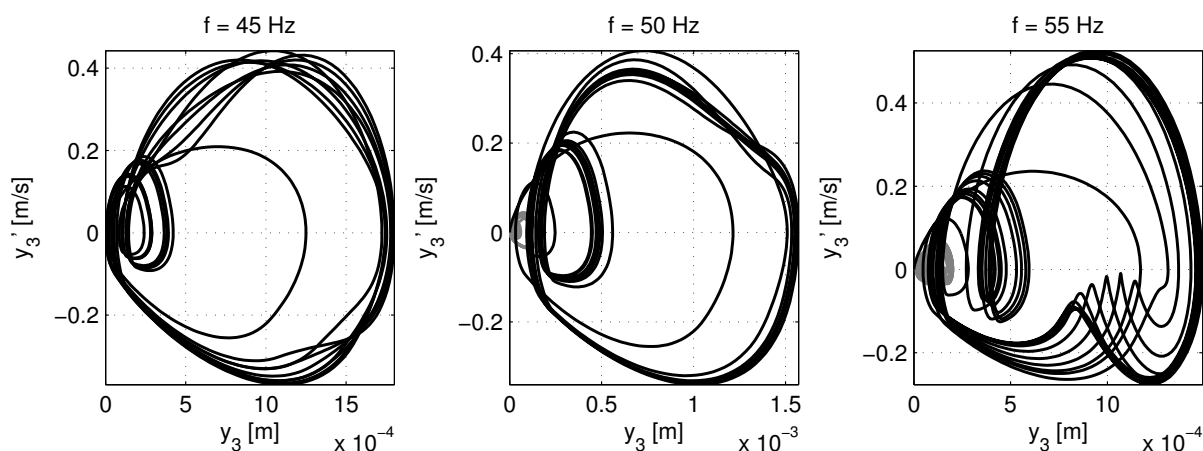
Obr. 4.27 ukazuje časové průběhy vertikálních výchylek formy $y_3 = y_3(t)$ pro vybrané budicí frekvence jak pro stav před optimalizací, tak po optimalizaci, tj. po naladění tuhosti budiče tak, aby se první vlastní frekvence shodovala s frekvencí budiče. Z výsledku je patrný nárůst výchylek po provedení výše uvedeného optimalizačního procesu. Z časových průběhů je rovněž zřejmé, že velikost těchto výchylek a kvalita časového průběhu je ovlivněna budicí frekvencí. Tento vliv bude analyzován dále. Následující obr. 4.28 ukazuje fázové trajektorie



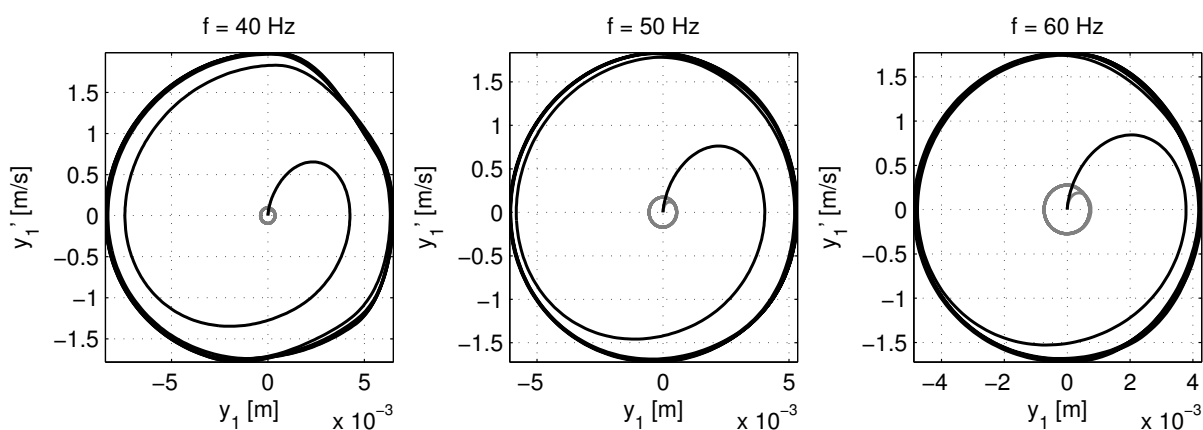
Obrázek 4.27.: Časové průběhy vertikální výchylky formy y_3 pro různé budicí frekvence pro stav před optimalizací a po optimalizaci

vertikální výchylky formy y_3 , příslušející výše uvedeným časovým průběhům, pro různé hodnoty budicí frekvence. Na obr. 4.29 jsou ukázány fázové trajektorie vertikálního pohybu budiče. Ukazuje se, že pohyb budiče není vzhledem ke své velké hmotnosti rázy významně ovlivněn a v ustáleném stavu je tento pohyb kvaziharmonický.

Na výše uvedeném nelineárním matematickém modelu byla provedena analýza rázové síly přenášené pružnými nárazkami. Pro simulace bylo uvažováno harmonické buzení stolu s frekvencí $f = \langle 40, 60 \rangle$ Hz. Pro zvolené konkrétní budicí frekvence z tohoto intervalu byla provedena numerická simulace pohybu jak pro soustavu s původními parametry, tak s parametry optimalizovanými postupem uvedeným v kap. 4.3.2 tak, aby první vlastní frekvence odpovídala



Obrázek 4.28.: Fázové trajektorie vertikální výchylky formy y_3 pro různé budící frekvence pro stav před optimalizací (šedě) a po optimalizaci (černě)



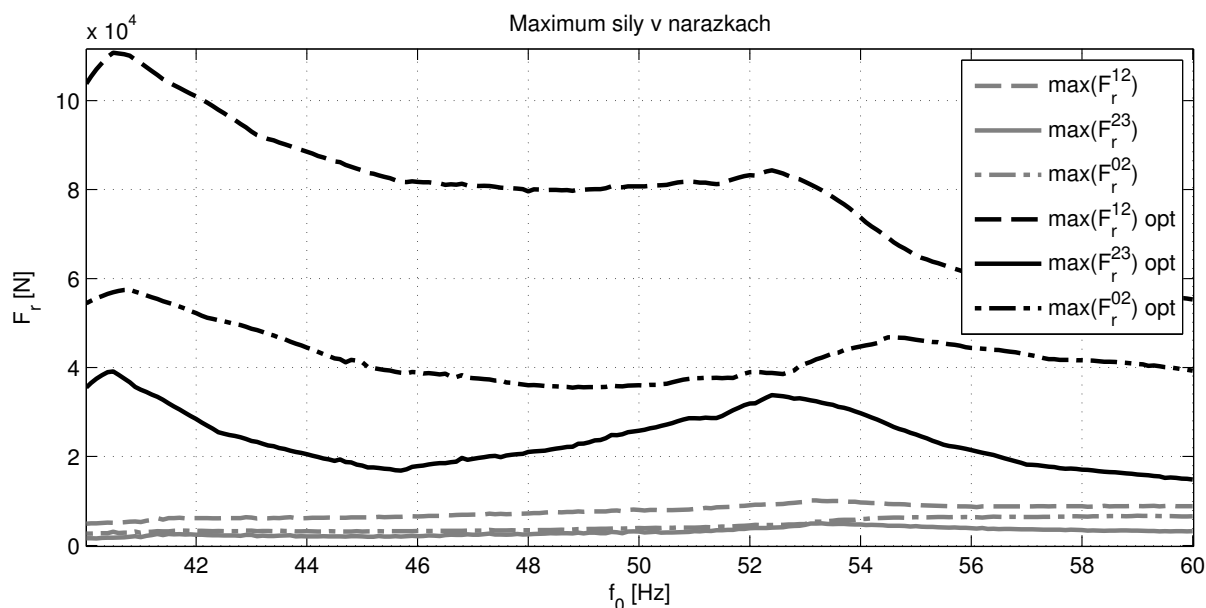
Obrázek 4.29.: Fázové trajektorie vertikální výchylky budiče y_1 pro různé budící frekvence pro stav před optimalizací (šedě) a po optimalizaci (černě)

frekvenci buzení. Necht' F_r^{ij} je označení síly přenesené nárazkou mezi i -tým a j -tým tělesem⁸. V grafu na obr. 4.30 je ukázána závislost maximální rázové síly $^M F_r^{ij}$ přenášené pružnými nárazkami na frekvenci buzení. Tato síla je dána jako

$$^M F_r^{ij}(f) = \max_{t>0} F_r^{ij}(f, t). \quad (4.95)$$

Po provedení optimalizace je v daném frekvenčním pásmu patrné zvýšení maximálních rázových sil. Z průběhů těchto funkcí je zřejmé, pro které frekvence buzení bude rázová síla $^M F_r^{23}$ v nárazkách formy maximální. Právě rázové síly působící na formu s betonovou směsí hrají klíčovou roli pro rychlost a kvalitu zhutnění. Zároveň je vidět závislost rázových sil přenášených ostatními nárazkami, jež jsou pro optimalizovaný model rovněž v celém uvažovaném pásmu budící frekvence vyšší.

⁸Index 0 necht' zde náleží rámu.



Obrázek 4.30.: Maximum síly přenášené nárazkami v závislosti na frekvenci budiče pro systém s původními parametry (šedě) a optimalizovanými parametry (černě)

Shrnutí

Na matematickém modelu vibrolisu byla provedena optimalizace tuhosti uložení vibračního stolu s cílem naladit první vlastní frekvenci systému do rezonance s budicí frekvencí. Tento postup byl uplatněn pro různé hodnoty budicí frekvence s cílem nalézt takovou kombinaci tuhosti uložení vibračního stolu a budicí frekvence, aby rázová síla přenášená na formu byla maximální. Ukazuje se rovněž, že optimalizace provedená na lineárním modelu má požadovaný vliv i v modelu nelineárním, zřejmě vzhledem k velké hmotnosti vibračního stolu, jehož pohyb není rázy výrazně ovlivněn. V případě hlubší analýzy by bylo potřeba zajistit, aby při provozu soustavy v rezonanci s první vlastní frekvencí nedocházelo k překročení přípustného namáhání součástí.

5. Závěr

Tato práce se zabývá matematickým modelováním kmitání mechanických soustav s rázy. Úvodní kapitola stručně shrnuje historický vývoj dané oblasti a popisuje širokou třídu aplikací, jež jsou motivací pro studium rázů v kmitajících mechanických soustavách. Následující kap. 2 podává přehled o základních matematických modelech rázu, jimiž jsou elementární teorie rázu, Kelvinův-Voigtův model, Huntův-Crossleyův model rázu a Hertzova teorie rázu. V kap. 3 je uvedena teorie nehladkých systémů a vybrané metody pro jejich řešení – metoda přepínání modelů a metoda zhladčení nehladkých funkcí.

Aplikační část je věnována matematickému modelování a analýze konkrétních mechanických soustav s rázy. Nejprve je odvozen zjednodušený matematický model torzního kmitání jednostupňové převodovky s uvažováním možnosti odlehnutí zubového záběru. Model ve formě silně nelineární soustavy se čtyřmi stupni volnosti je implementován v systému MATLAB a formou bifurkačních diagramů, zobrazujících závislost extrémů deformace ozubení na otáčkách hnacího hřídele, je demonstrováno nelineární chování systému. V následující části je popsán způsob modelování rotorů metodou konečných prvků a formulace matematického modelu systému sestávajícího ze subsystémů metodou modální syntézy s kondenzací. Na tomto základě je v systému MATLAB vytvořen komplexní matematický model testovací převodovky s uvažováním možnosti odlehnutí zubového záběru. Je ukázán vliv úrovně kondenzace na výpočetní čas a na zachování charakteru nelineárního chování systému. Při vybraných numerických simulacích je uvedeno srovnání výpočetního času při užití obou uvažovaných metod řešení. Je zde testována dvouúrovňová metoda redukce matematického modelu, která zohledňuje vlastní tvary kmitu s významnou deformací zubové vazby. Dále je uveden matematický model vibrolisu na zhutnění betonové směsi, na němž je provedena optimalizace tuhosti budiče a analýza vlivu budičí frekvence na rázové síly přenášené na formu s betonovou směsí.

Závěrem lze konstatovat, že z použitých numerických přístupů pro řešení nehladkých systémů se jako mírně vhodnější jeví metoda zhladčení nehladké funkce, která ve většině případů vykazuje poněkud nižší výpočetní čas než metoda přepínání modelů. V případě převodových ústrojí umožňují uvedené bifurkační diagramy predikovat takové oblasti otáček, při kterých bude docházet k pohybu s výskytem rázů v ozubení, a tedy ke zvýšenému namáhání ozubených kol. Zároveň lze pro konkrétní hnací a zátěžný moment určit oblasti s klidným chodem. Použité metody redukce se ukazují jako účelné, neboť vedou k výrazné úspoře výpočetního času, která je důležitá zejména při výpočetně náročných nelineárních analýzách. Z navržených metod dvouúrovňové redukce se metoda typu (A) ukazuje jako vyhovující, zatímco metoda typu (B) nikoli. Analýzy provedené na zjednodušeném torzním modelu převodovky se čtyřmi stupni volnosti ukazují, že v tomto případě systému s pouhými dvěma poddajnými členy se objevují plné kaskády bifurkací zdvojením periody, zatímco v případě komplexního modelu vytvořeného metodou konečných prvků, jenž je přesnějším modelem fyzikální reality, se podobné chování vyskytuje spíše lokálně. Tato skutečnost souvisí s prostorovým kmitáním hřídelů.

V budoucnu by bylo možno přistoupit ke komplexnímu modelování nelineárních jevů v převodových ústrojí zahrnující např. nelinearity ložiskových vazeb či vliv statoru, na nichž lze zkoumat vliv parametrů na odezvu na typická buzení. Další možností je hlubší studium alternativních způsobů redukce počtu stupňů volnosti s výběrem hlavních tvarů kmitu podle míry deformace nejrůznějších vazeb. Tento způsob by při vhodném zpracování umožňoval další redukci počtu stupňů volnosti při přibližném zachování nejen základních modálně-spektrálních vlastností, ale rovněž při zachování základních vlastností deformace vazby.

A. Přílohy

A.1. Příklad aplikace metody zhlazení nehladké funkce v prostředí MATLAB

```
function HBraz_SM
clear all; close all; clc;
% Parametry =====
m = 1;          % [kg] hmotnost HB
k = 1e6;        % [N/m] tuhost zavesu
b = 1e2;        % [Ns/m] tlumeni zavesu
kn = 5e9;       % [N/m] tuhost narazky
delta = 1e-4;  % [m] vule
eps = 1e17;    % konstanta pro sm. m.
% =====
opt = odeset('AbsTol',1e-8);
PP = [-1,0]; % Pocatecni podm.
t = [0 .1]; % cas simulace
[T, U] = ode45(@(t,u) fce(t,u,m,b,k,kn,delta,eps), t, PP, opt);

subplot(1,2,1); plot(T,U(:,1),'k-'); grid on; hold on;
subplot(1,2,2); plot(U(:,1),U(:,2),'k-'); grid on; hold on;

function du = fce(t,u,m,b,k,kn,delta,eps)

h = u(1)-delta;          % Fce prepinaci hranice

M = [m];                % Matice hmotnosti
B = [b];                % Matice tlumeni
K = [k+kn*(1/2+1/pi*atan(eps*h))]; % Matice tuhosti

f = 0;                  % vektor buzeni

A = -[zeros(1), -eye(1); % Systemova matice
      inv(M)*K, inv(M)*B];

F = [zeros(1,1); inv(M)*f]; % Vektor buz. ve st. pr.

du = A*u + F;
```

A.2. Příklad aplikace přepínacího modelu v prostředí MATLAB

```
function HBraz_SW
clear all; close all; clc;
% Parametry =====
m = 1;      % [kg] hmotnost HB
k = 1e6;    % [N/m] tuhost zavesu
b = 1e2;    % [Ns/m] tlumeni zavesu
kn = 5e9;   % [N/m] tuhost narazky
delta = 1e-4; % [m] vule
% =====

opt = odeset('AbsTol', 1e-8);
PP = [-1, 0]; % Pocatecni podm.
t = [0 .1]; % cas simulace
[T, U] = ode45(@(t,u) fce(t,u,m,b,k,kn,delta), t, PP, opt);

subplot(1,2,1); plot(T,U(:,1), 'k-'); grid on; hold on;
subplot(1,2,2); plot(U(:,1), U(:,2), 'k-'); grid on; hold on;

function du = fce(t,u,m,b,k,kn,delta)

h = u(1)-delta; % Fce prepinaci hranice

M = [m]; % Matice hmotnosti
B = [b]; % Matice tlumeni

if h < 0
    K = k; % Matice tuhosti - bez narazky
else
    K = k+kn; % Matice tuhosti - s narazkou
end

f = 0; % vektor buzeni

A = -[zeros(1), -eye(1); % Systemova matice
      inv(M)*K, inv(M)*B];

F = [zeros(1,1); inv(M)*f]; % Vektor buz. ve st. pr.

du = A*u + F;
```

A.3. Vybrané parametry torzního modelu kmitání jednostupňové převodovky

Parametr	Označení	Hodnota
Momenty setrvačnosti disků	$I_1 = I_4$ $I_2 = I_3$	0,1 [kgm ²] 0,00794 [kgm ²]
Tuhosti hřídelů	$k_1 = k_2$	$6,2905 \cdot 10^4$ [N/rad]
Koeficient proporcionálního tlumení hřídelů	α	$5 \cdot 10^{-4}$ [s]
Poloměry pastorku a kola	$r_p = r_k$	0,08 [m]
Boční vůle v ozubení	μ	10^{-4} [m]
Tuhost ozubení	k_z	$8 \cdot 10^8$ [N/m]
Tlumení ozubení	b_z	0 [Ns/m]

Tabulka A.1.: Použité parametry pro model torzního kmitání jednostupňové převodovky

A.4. Vybrané parametry vibrolisu na zhutnění betonové směsi

Parametr	Označení	Hodnota
Hmotnost budiče vč. excentrů	m_1	1020 [kg]
Hmotnost podložky	m_2	100 [kg]
Hmotnost formy	m_3	425 [kg]
Geometrické parametry (označení viz obr. 4.24)	a_1	0,71 [m]
	$a_2 = a_5$	0,44 [m]
	a_3	0,89 [m]
	a_4	0,33 [m]
	h_1	0,3 [m]
	h_2	0,1 [m]
Tuhosti vazeb (označení viz obr. 4.24)	$k_1 = k_7 = k_{10}$	$5 \cdot 10^7$ [N/m]
	$k_2 = k_3 = k_8 = k_9 =$	$5 \cdot 10^7$ [N/m]
	$k_{11} = k_{12}$ $k_{4s}, k_{5s}, k_{6s}, s = P, L,$	$1 \cdot 10^7$ [N/m]
Koeficient proporcionálního tlumení	α	$3 \cdot 10^{-3}$ [s]
Budicí frekvence	f_0	50 [Hz]
Výchozí vzdálenost těles 1 a 2	δ_1	$5 \cdot 10^{-5}$ [m]
Výchozí vzdálenost těles 2 a 3	δ_1	$1 \cdot 10^{-5}$ [m]

Tabulka A.2.: Použité parametry vibrolisu na zhutnění betonové směsi

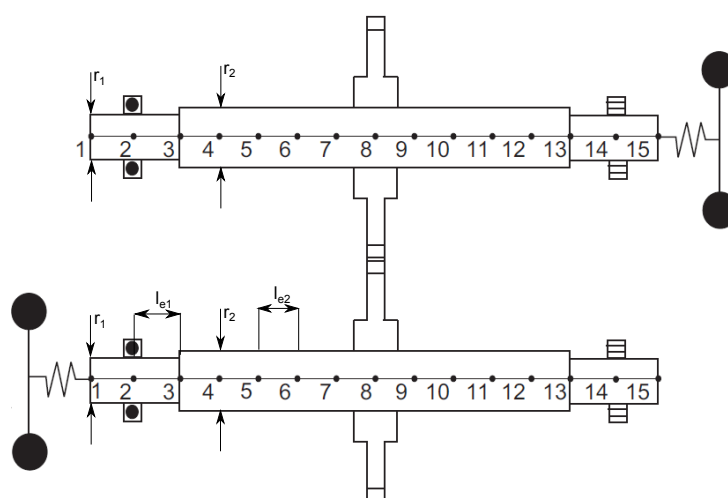
A.5. Parametry testovací převodovky

Parametr	Ozn.	Hodnota
Tuhost ozubení	k_z	$4 \cdot 10^8$ [N/m]
Poměrný útlum hřídelů	D	0,005 [-]
Počet zubů pastorku	p_z^p	40
Počet zubů kola	p_z^k	40
Normálový úhel záběru	α	20 [°]
Úhel sklonu boku zubů	β	15 [°]
Úhel spojnice středů valivých kružnic a roviny \widehat{xy} - viz obr. 4.10	γ	0 [°]
Poloměr valivé kružnice pastorku	r^p	80 [mm]
Poloměr valivé kružnice	r^k	80 [mm]
Boční vůle v ozubení	μ	$4 \cdot 10^{-5}$ [m]

Tabulka A.3.: Parametry ozubeného převodu testovací převodovky

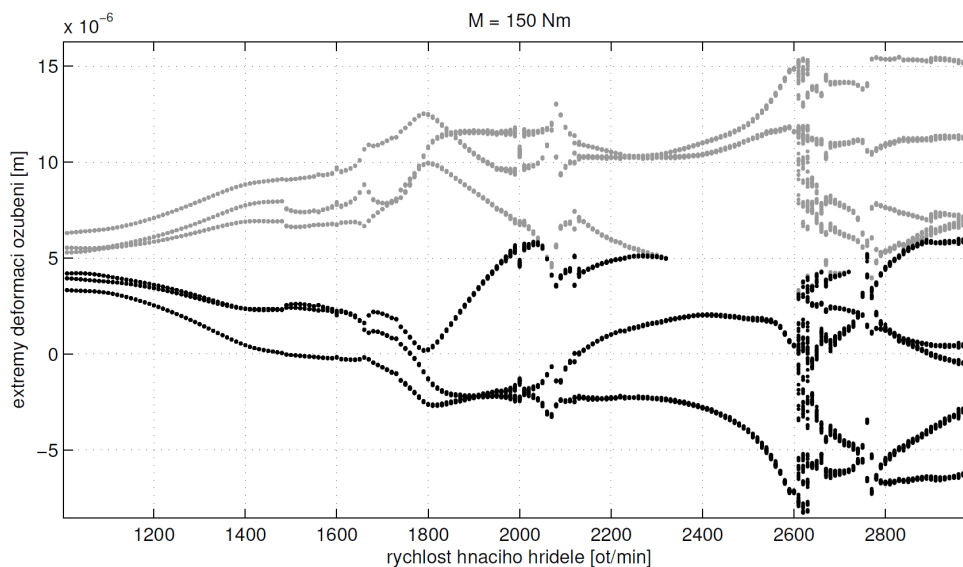
Parametr	Ozn.	Hodnota
Průměr zúžené části hřídelů	r_1	0,03 [m]
Průměr širší části hřídele	r_2	0,04 [m]
Délka konečného prvku ve zúžené části hřídele	l_{e1}	0,03 [m]
Délka konečného prvku v širší části hřídele	l_{e2}	0,026 [m]

Tabulka A.4.: Geometrické parametry rotorových subsystémů - viz obr. A.1

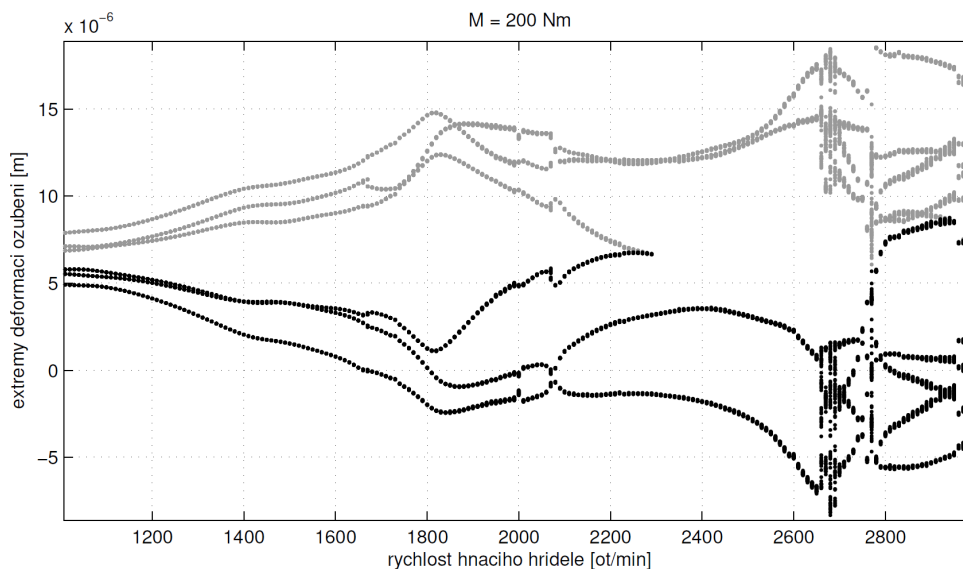


Obrázek A.1.: Diskretizace rotorových subsystémů

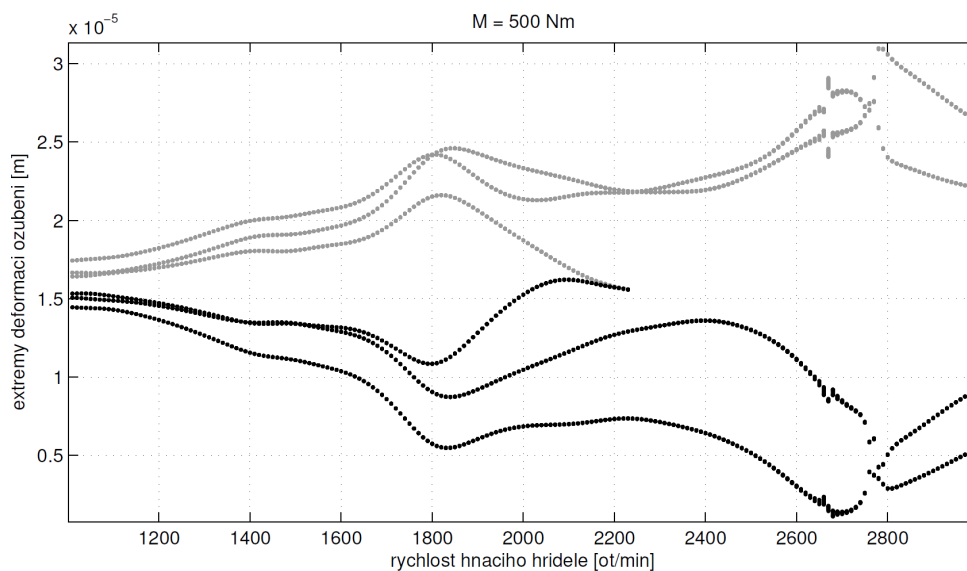
A.6. Bifurkační diagramy pro různé režimy vnějšího zatížení



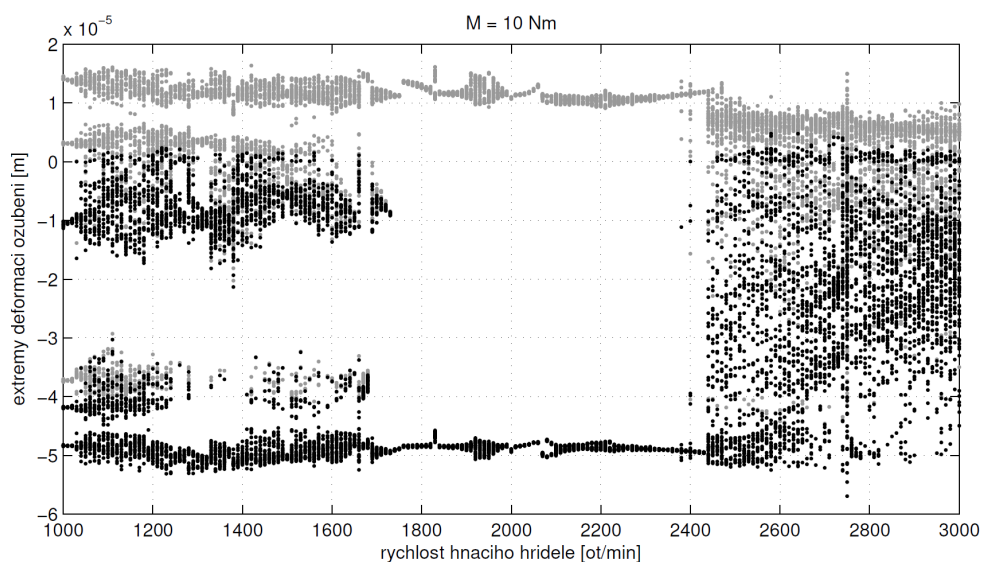
Obrázek A.2.: Bifurkační diagram - maxima (šedě) a minima (černě) deformace v ozubení v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M_h = 150$ Nm s uvažováním cirkulační matice \tilde{C}



Obrázek A.3.: Bifurkační diagram - maxima (šedě) a minima (černě) deformace v ozubení v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M_h = 200$ Nm



Obrázek A.4.: Bifurkační diagram - maxima (šedě) a minima (černě) deformace v ozubení v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M_h = 500$ Nm



Obrázek A.5.: Bifurkační diagram - maxima (šedě) a minima (černě) deformace v ozubení v závislosti na rychlosti hnacího hřídele pro hnací moment $M_h = 10$ Nm

Literatura

- [Batako et al. 2007] Batako, A. D. L., – Lalora, M. J. – Piiroinen, P. T.: *Numerical bifurcation analysis of a friction-driven vibro-impact system*. Journal of Sound and Vibration 308 (2007) 392–404, 2007. Dostupné z WWW: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X07003021>
- [Brousil et al. 1989] Brousil, J. – Slavík, J. – Zeman, V.: *Dynamika*. SNTL, 1989, ISBN 80-03-00164-1.
- [Byrtus 2002] Byrtus, M.: *Kmitání hřídelových soustav s ozubenými koly s uvažováním nelinearit*. Diplomová práce, Západočeská univerzita v Plzni, 2002.
- [Byrtus et al. 2010] Byrtus, M. – Hajžman, M. – Zeman, V.: *Dynamika rotujících soustav*. Západočeská univerzita v Plzni, 2010, ISBN 978-80-7043-953-1.
- [Byrtus 2006] Byrtus, M.: *Kmitání převodových ústrojí se silnými nelinearitami ve vazbách*. Dizertační práce, Západočeská univerzita v Plzni, 2006.
- [Byrtus & Zeman 2011] Byrtus, M. – Zeman, V.: *On modeling and vibration of gear drives influenced by nonlinear couplings*. Mechanism and Machine Theory 46 (2011) 375–397, 2011.
- [Cong et al. 2011] Cong, F. – Chen, J. – Dong, G. – Huang, K.: *Experimental validation of impact energy model for the rub-impact assessment in a rotor system* Mechanical Systems and Signal Processing 25 (2011) 2549–2558, 2011. Dostupné z WWW: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327011001580>
- [Gonda 1969] Gonda, J.: *Základy dynamiky strojov*. ALFA, n. p., Bratislava, 1969.
- [Hajžman et al. 2004] Hajžman, M. – Byrtus, M. – Zeman, V.: *Dynamická analýza a optimalizace převodových ústrojí*. Závěrečná výzkumná zpráva z řešení projektu FRVŠ 2282/2003/G1, 2003.
- [Hlaváč 1995] Hlaváč, Z.: *Dynamická syntéza a optimalizace*. Skriptum Západočeské univerzity v Plzni, 1995, ISBN 80-7082-205-8.
- [Hlaváč 2004] Hlaváč, Z.: *Dynamika pro kombinované studium*. Skriptum Západočeské univerzity v Plzni, 2004, ISBN 80-7043-279-9.
- [Hořejší 1980] Hořejší, J.: *Dynamika*. SNTL, 1980.

- [Janeček & Zeman 1985] Janeček, O. – Zeman, V.: *Technická dynamika*. VŠSE Plzeň, 1985
- [Leine 2000] Leine, R. I.: *Bifurcations in Discontinuous Mechanical Systems of Filippov-Type*. Technische Universiteit Eindhoven, 2000.
- [Leine 2004] Leine, R. I.: *Dynamics and bifurcations of non-smooth mechanical systems*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg 2007.
- [Luo 2007] Luo, G. W. – Lv, X. H. – Zhu, X. F.: *Dynamics of vibro-impact mechanical systems with large dissipation*. International Journal of Mechanical Sciences 50 (2008) 214–232, 2007. Dostupné z WWW: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740307001154>
- [Makarenkov & al. 2012] Makarenkov, O. – Jeroen, S. W. Lamb: *Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems: A survey*. Physica D 241 (2012) 1826–1844, 2012. Dostupné z WWW: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167278912001959>
- [Nayfeh & Balachandran 2004] Nayfeh, A. H. – Balachandran, B.: *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley-Wch Verlag GmbH & Co. KGaA, ISBN 978-0-471-59348-5.
- [Thompson & Stewart 2002] Thompson, J. M. T. – Stewart, H. B.: *Nonlinear Dynamics and Chaos*. John Wiley & Sons, Chichester, 2002, ISBN 0-471-87645-3.
- [Pavlovskaja & Wiercigroch 2007] Pavlovskaja, E. – Wiercigroch, M.: *Low-dimensional maps for piecewise smooth oscillators*. Journal of Sound and Vibration 305 (2007) 750–771, 2007. Dostupné z WWW: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X07003306>
- [Peterka 1981] Peterka, F.: *Úvod do kmitání mechanických soustav s vnitřními rázy*. Academia, Praha, 1981.
- [Slavík et al. 2004] Slavík, J. – Stejskal, V. – Zeman, V.: *Základy dynamiky strojů*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997.
- [Staněk 1997] Staněk, P.: *Hodnocení přenosu vibrací na betonovou směs u vibrolisů Colorbeton a Hencke*. Diplomová práce. Technická univerzita v Liberci, 1997.
- [Stewart 2000] Stewart, D. E.: *Rigid-Body Dynamics with Friction and Impact*. SIAM Review, 2000, dostupné z WWW <http://depts.washington.edu/amath/courses/533-winter-2011/Stewart00.pdf>
- [Stronge 2004] Stronge, W. J.: *Impact Mechanics* Cambridge University Press, 2000, ISBN 0 521 63286 2.
- [Synáč 2011] Synáč, V.: *Modelování a dynamická analýza formy na hutnění betonové směsi vibrolisu*, dostupné on-line na adrese portal.zcu.cz, 2011.

[Tung 2002] Tung, K. K.: *Chaos Theory History*. Dostupné z webu University of Wahington <http://depts.washington.edu/amath/courses/383-winter-2002/messages/msg00009.html>, ISBN 80-7043-337-X.

[Zeman & Hlaváč, 2004] Zeman, V. – Hlaváč, Z.: *Kmitání mechanických soustav*. Západočeská univerzita v Plzni, 2004, ISBN 80-7043-337-X.

Publikace autora související s tématem práce

- [A1] Dyk, Š. – Byrtus, M.: *Redukce matematických modelů převodových soustav s rázy v ozubení*. Sborník Studentské vědecké konference 2013, FAV/ZČU, ISBN 978-80-261-0238-0.
- [A2] Dyk, Š. – Byrtus, M.: *Modelling and vibration of mechanical systems with impact motions*. Proceedings of extended abstracts of Conference Applied Mechanics 2013, ISBN 978-80-248-2978-4.
- [A3] Dyk, Š. – Byrtus, M.: *Mathematical model of an impact-forming machine*. Proceedings of Conference Applied Mechanics 2012, ISBN 978-80-261-0097-3.
- [A4] Dyk, Š. – Byrtus, M.: *Dynamická analýza vibračního stroje na hutnění betonové směsi*. Sborník Studentské vědecké konference 2012, FAV/ZČU, ISBN 978-80-261-0127-7.
- [A5] Dyk, Š. – Byrtus, M.: *Stabilita a chaos v dynamice rotorů*. Sborník Studentské vědecké konference 2011, FAV/ZČU, ISBN 978-80-7043-998-2.
- [A6] Dyk, Š.: *Dynamika Lavalova a Stodola-Greenova rotoru*. Bakalářská práce, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, 2011.