ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

Kuželosečky v úlohách MO

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Pavla Flajtingrová

Přírodovědná studia, Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Honzík

Plzeň, 31. BŘEZNA 2013

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 31. března 2013

……………………………………….

vlastnoruční podpis

Tímto bych chtěla poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce Mgr. Lukáši Honzíkovi za odborné vedení a cenné rady. Dále bych chtěla poděkovat své rodině za podporu a trpělivost.

Obsah

1. Úvod

Kuželosečky zaujímají důležitou část v odvětví geometrie. Již na základní škole jsme se s nimi setkali, když jsme rýsovali kružnici. Kuželosečky se ovšem nevyskytují jen na školách, ale můžeme se s nimi setkat v běžném životě, a to jak s člověkem vytvořenými, tak i přírodními. Nebýt kuželoseček, možná by ani na Zemi neexistoval život, protože Země obíhá okolo Slunce právě po eliptické dráze.

Vzhledem k tématu práce je část věnována samotné matematické olympiádě, která je rozvedena v kapitole 2. Třetí kapitola je věnována historii a teorii kuželoseček a jejich využití v praxi. Praktická část se zabývá samotným řešením příkladů z matematických olympiád, ve kterých se vyskytují kuželosečky (kapitola 4.). V poslední kapitole je samostatně připravený příklad, který by se mohl zařadit mezi příklady Matematické olympiády, popřípadě do jiných matematických soutěží.

2. Matematická olympiáda

„Pojetí MO je v souladu s Mezinárodní matematickou olympiádou (International Mathematical Olympiad), Mezinárodní olympiádou v informatice (International Olympiad in Informatics), Středoevropskou matematickou olympiádou (Middle European Mathematical Olympiad) a Středoevropskou olympiádou v informatice (Central European Olympiad in Informatics).“<http://www.math.muni.cz/mo/>[cit. 2013-02-13].

2.1 Historie a účel matematické olympiády

Matematická olympiáda poprvé proběhla ve školním roce 1950/1951, v letošním školním roce proběhne již 62. ročník. Tato olympiáda se stala vzorem i pro jiné oborové olympiády. Dnes se studenti mohou zúčastnit fyzikální, biologické, chemické, nebo dokonce astronomické olympiády.

Účelem matematické olympiády je najít talentované studenty a podporovat a rozvíjet jejich schopnosti. Matematická olympiáda nenabízí studentům pouze řešení složitých matematických úloh, ale vytváří soustavu odborných činností, které vedou k popularizaci matematiky, informatiky a všestranné péči o talentované žáky.

2.2 Kategorie matematické olympiády

Kategorií matematické olympiády je v současné době několik. **Kategorie Z5** je pro žáky 5. tříd základních škol. **Kategorie Z6** je pro žáky 6. tříd základních škol nebo 1. ročníků osmiletých gymnázií. **Kategorie Z7** je pro žáky 7. tříd základních škol nebo 2. ročníků osmiletých gymnázií. **Kategorie Z8** je pro žáky 8. tříd základních škol, 3. ročníků osmiletých gymnázií nebo 1. ročníků šestiletých gymnázií. **Kategorie Z9** je pro žáky 9. tříd základních škol, 4. ročníků osmiletých gymnázií nebo 2. ročníků šestiletých gymnázií. Tyto kategorie mají vždy školní a okresní kolo soutěže, kategorie Z9 má i kolo krajské. Pro střední školy jsou tyto kategorie: **Kategorie C** je pro žáky 1. ročníků středních škol, 5. ročníků osmiletých gymnázií nebo 3. ročníků šestiletých gymnázií. **Kategorie B** je pro žáky 2. ročníků středních škol, 6. ročníků osmiletých gymnázií nebo 4. ročníků šestiletých gymnázií. **Kategorie A** je pro žáky 3. - 4. ročníků středních škol, 7. – 8. ročníků osmiletých gymnázií nebo 5. – 6. ročníků šestiletých gymnázií. Tyto kategorie mají vždy školní a krajské kolo, kategorie A má navíc kolo ústřední. **Kategorie P** je pro žáky 1. - 4. ročníků středních škol, 5. – 8. ročníků osmiletých gymnázií nebo 3. – 6. ročníků šestiletých gymnázií. V této kategorii jsou úlohy zaměřené na informatiku a tato kategorie probíhá ve školním, krajském a ústředním kole.

2.3 Komise matematické olympiády

Ústřední komise matematické olympiády je stejná pro školní roky 2010/2011 – 2014/2015. Tato komise zadává jednotný termín jednotlivých kol a archivuje dokumenty spojené s matematickou olympiádou. V komisi je vždy zastupitel z každého kraje. Pod tuto komisi spadají i Krajské komise, Okresní komise a pověření učitelé na jednotlivých školách, kteří zabezpečují a dohlíží na správný průběh jednotlivých kol matematické olympiády. Úlohy a jejich správná řešení připravují Úlohové komise. Úlohová komise kategorií ABC má 11 členů. Úlohová komise kategorie Z má členů 9. Předsedou komisí je doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.

2.4 Ostatní matematické soutěže v ČR

V České Republice se dále konají dvě celostátní matematické soutěže. První z nich je Matematický klokan, který má původ v Austrálii a dnes se koná ve třiceti zemích Evropy a účastní se jí na dva a tři čtvrtě milionu soutěžících. V České Republice je jejím pořadatelem Jednota českých matematiků a fyziků ve spolupráci s Katedrou matematiky PdF UP a Katedrou algebry a geometrie PřF UP v Olomouci. Žáci soutěží v pěti věkových kategoriích a absolvují pouze školní kolo. Z výsledků se poté sestavují školní, krajské, ústřední, ale i mezinárodní žebříčky řešitelů. Jako druhá je Pythagoriáda, která je určena pro 5. – 8. ročníky základních škol a příslušné ročníky víceletých gymnázií. Úspěšní řešitelé mohou postoupit do okresního a krajského kola. V této soutěži se nemohou používat matematické tabulky ani kalkulačky.

3. Kuželosečky – jejich historie a teorie

Jak již bylo řečeno v úvodu, kuželosečky jsou specifickým odvětvím v geometrii. Můžeme se s nimi setkat v běžném životě, za zmínku stojí, že kuželosečky jsou důležitými křivkami ve vesmíru. Johannes Kepller (1571 – 1630) již v 17. století našeho letopočtu objevil, že planety naší sluneční soustavy se pohybují v eliptických drahách, kde jedno ohnisko je přímo ve středu Slunce. Toto tvrzení bylo později dokázáno pomocí Newtonova gravitačního zákona.

3.1 Historie kuželoseček

Historie kuželoseček však nesahá pouze do středověku. Již ve starověké antice se řada tehdejších matematiků zaobírala kuželosečkami. Řešení jednoho ze tří nejslavnějších antických konstrukčních problémů vede právě na kuželosečky. Jde o tzv. Délský problém, kde ve zjednodušené formě se jedná, jak pomocí kružítka a pravítka můžeme zkonstruovat krychli o dvojnásobném objemu, než je krychle původní. Tento problém byl „vyřešen“ až v 19. století, kdy pomocí nových dostupných metod bylo dokázáno, že tento problém nelze Euklidovsky - pouze pomocí pravítka a kružítka provést.

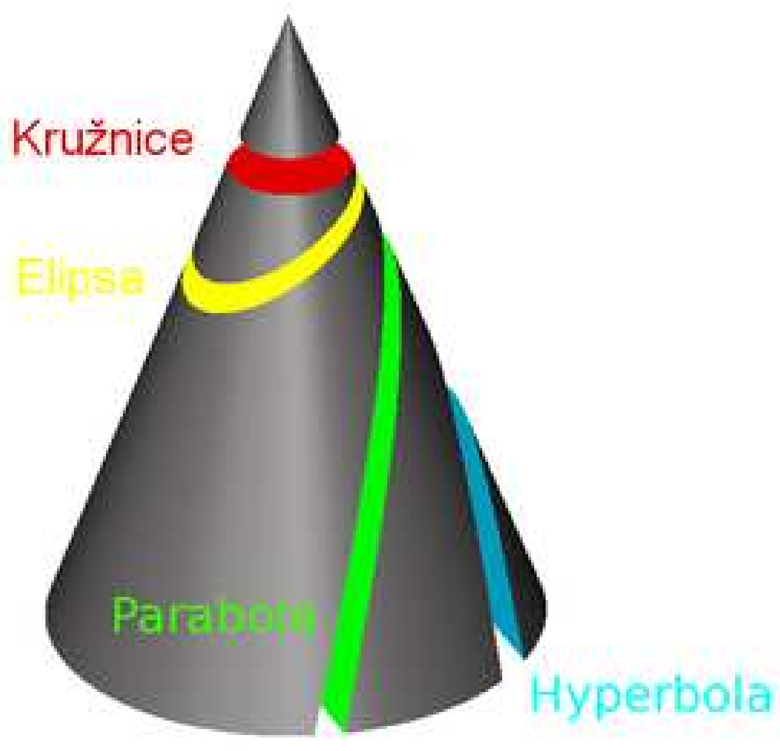
Ve 2. století před naším letopočtem Apollonios z Pergy sepsal osmisvazkové dílo s názvem Kuželosečky, kde byly poprvé uvedeny názvy „elipsa“, „parabola“, „hyperbola“. Slovo elipsa vychází z řeckého slova *ellipsis*, což v češtině znamená *vynechání, výpustka.* Latinské slovo *parabola* v češtině překládáme jako *podobenství a* latinské *hyperbolen* znamená v češtině *nadsázka.*

3.2 Teorie kuželoseček

3.2.1 Vznik kuželoseček

Kuželosečkami obecně nazýváme rovinné útvary, které vznikají řezem rotačních kuželových ploch, který neprochází vrcholem kužele. Jsou to kuželosečky regulární (vlastní) a řadíme mezi ně kružnici, elipsu, parabolu a hyperbolu, a vznikají následovně – Viz. Obrázek 3.2.1.1

- Pokud je rovina řezu kolmá na osu rotačních kuželových ploch, vzniká nám kružnice.
- Pokud je rovina řezu rovnoběžná s povrchovou přímkou rotačních kuželových ploch, vzniká nám parabola.
- Pokud je úhel svíraný rovinou řezu s osou rotačních kuželových ploch menší než polovina úhlu vrcholového, vzniká nám hyperbola.
- Pokud je úhel svíraný rovinou řezu s osou rotačních kuželových ploch větší než polovina úhlu vrcholového a zároveň je menší než 90°, vzniká nám elipsa.



Obrázek 3.2.1.1

Mezi kuželosečky můžeme zařadit i ty, které vznikají řezem rotačních kuželových ploch, který prochází vrcholem kužele. Tyto kuželosečky nazýváme singulární (nevlastní) a patří sem bod, dvě splývající přímky a různoběžky protínající se ve vrcholu kužele.

- Pokud je řez kolmý na osu rotačních kuželových ploch a zároveň prochází vrcholem rotačního kužele, vzniká nám bod (vrchol kužele).
- Pokud je řez rovnoběžný s povrchovou přímkou rotačních kuželových ploch a zároveň prochází vrcholem rotačního kužele, vzniká nám dvojice splývajících přímek.
- Pokud je úhel svíraný rovinou řezu s osou rotačních kuželových ploch menší, než polovina úhlu vrcholového a zároveň prochází vrcholem rotačního kužele, vznikají nám dvě různoběžky protínající se ve vrcholu rotačního kužele.

Nadále se ovšem budeme bavit pouze o kuželosečkách regulárních, které jsou hlavní náplní praktické části této práce. V dalším textu předpokládejme, že jsme ve dvojrozměrném euklidovském prostoru $\mathcal{E}_2$.

Definice 3.1

Množinu všech bodů $X=[x;\ y]\in\mathcal{E}_2$, jejichž souřadnice splňují rovnici $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, kde $A,\ B,\ C,\ D,\ E\in\mathbb{R}$, a alespoň jedno z čísel $A,\ B\neq 0$ nazýváme kuželosečkou.

3.3.2 Kružnice

Definice 3.2

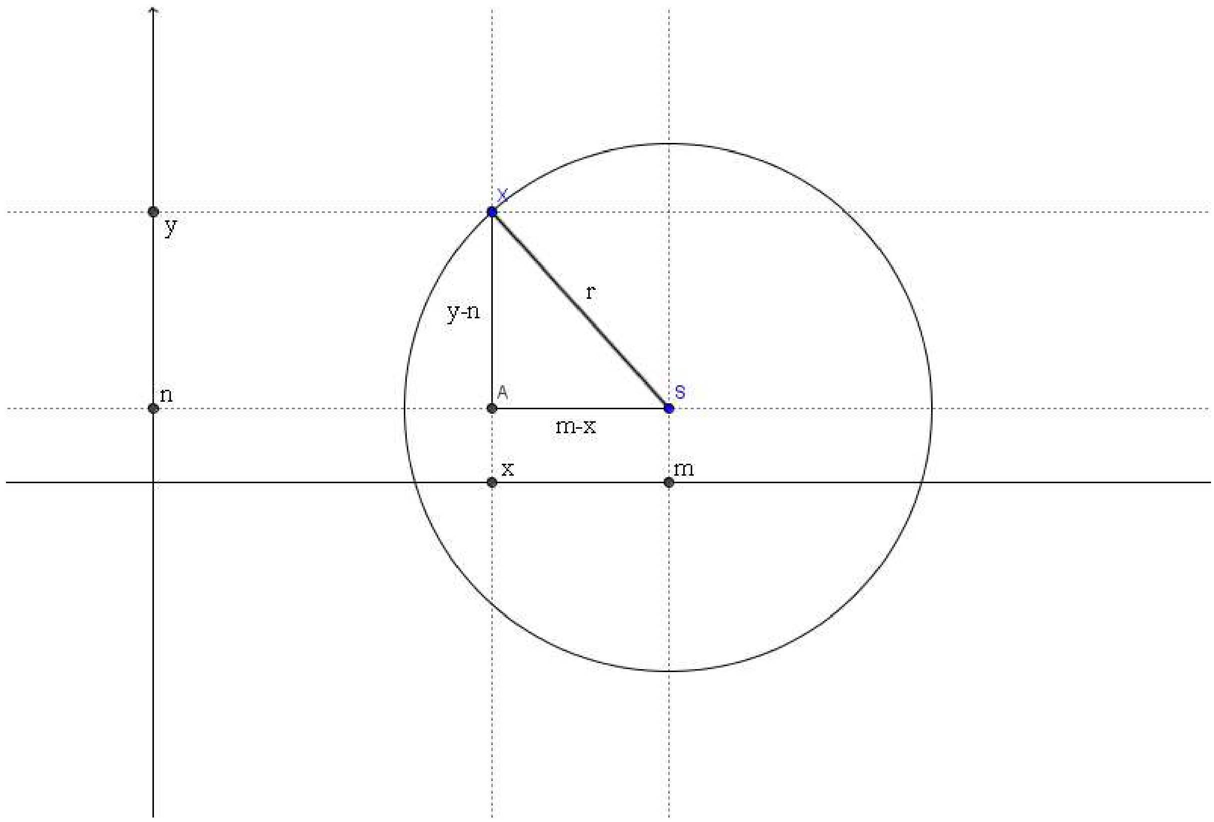
Kružnice je množina všech bodů $X=[x;\ y]\in\mathcal{E}_2$, které mají stejnou vzdálenost od středu $S=[m;\ n]$, která se rovná $|XS|=r$, kde $r>0$.

$$k_r=\{X\in\mathcal{E}_2:\ |XS|=r,\ r>0\}$$

Vzdálenost r nazýváme poloměrem kružnice. V analytické geometrii můžeme rovnici kružnice zapsat takto

$$(x-m)^2+(y-n)^2=r^2\ .$$

Tento vzorec lze snadno odvodit pomocí Pythagorovy věty (Viz. Obrázek 3.3.2.1).



Obrázek 3.3.2.1

V analytické geometrii můžeme najít několik významných typů kružnic.

- První z nich je *středová kružnice.* Souřadnice středu této kružnice jsou $S=[0;\ 0]$, poté lze rovnici středové kružnice zapsat $x^2+y^2=r^2$.
- Kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic a poloměrem $r=1$ nazýváme *jednotková kružnice* a rovnice jednotkové kružnice má tvar $x^2+y^2=1$. Ta má významné postavení u goniometrických funkcí.
- Jako poslední je třeba uvést *kružnici vrcholovou*, která má souřadnice středu $S=[r;\ 0]$.

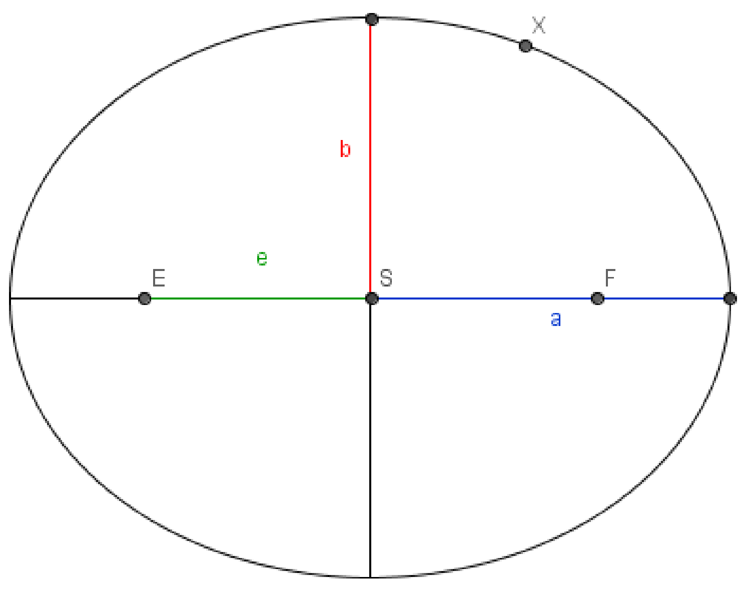
3.3.3 Elipsa

Definice 3.3

Množina všech bodů $X=[x;\ y]\in \mathcal{E}_2$, které mají od dvou pevně daných bodů $E,\ F$ součet vzdáleností konstantní, se nazývá elipsou.

$$k_e=\{X\in \mathcal{E}_2:\ |XE|+|XF|=2a,\ 0<|EF|<2a\}$$

Body $E,\ F$ se nazývají ohniska a ve středu úsečky EF leží střed $S=[m;\ n]$. Vzdálenost $|SE|=|SF|=e$, kde e se nazývá excentricitou elipsy. Elipsa má dvě osy. Hlavní osa je přímka procházející středem a ohnisky. Vedlejší osa elipsy je na hlavní osu kolmá a prochází středem elipsy. Hlavní poloosa je vzdálenost středu od nejvzdálenějšího bodu elipsy a značíme ji a. Vedlejší poloosa je vzdálenost středu od nejbližšího bodu elipsy a značíme ji b.Součet vzdáleností všech bodů elipsy od ohnisek $|XE|+|XF|=2a$. Pro naše účely postačí, když budeme uvažovat pouze dva případy natočení elipsy a to takové, že hlavní poloosa elipsy je rovnoběžná s jednou osou soustavy souřadnic. Situace je znázorněna na Obrázku 3.3.3.1



Obrázek 3.3.3.1

Nyní můžeme rovnici elipsy, která má hlavní poloosu rovnoběžnou s $x-\mathrm{ovou}$ osou souřadnic, zapsat takto

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1.$$

Rovnici elipsy, která má hlavní poloosu rovnoběžnou s $y-\mathrm{ovou}$ osou souřadnic

$$\frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1.$$

Zvláštním případem elipsy je kružnice. Tato situace nastává v tom případě, když ohniska splynou v jeden bod, což je zároveň střed kružnice.

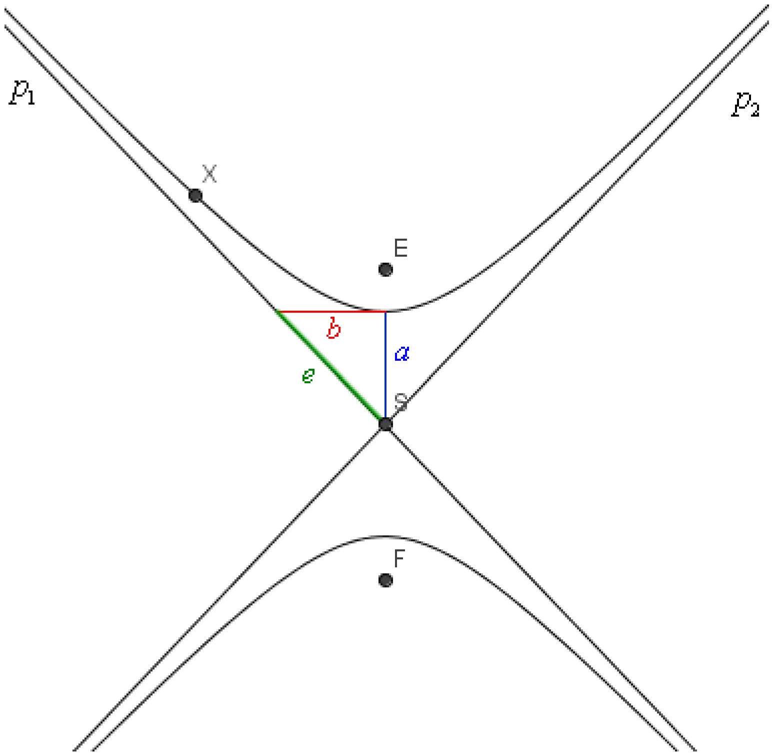
3.3.4 Hyperbola

Definice 3.4

Množina všech bodů $X=[x;\ y]\in\mathcal{E}_2$, které mají konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností od pevně daných bodů $E,\ F$, která je rovna $2a$, se nazývá hyperbola.

$$k_h=\{X\in\mathcal{E}_2:\ \left\||XE|-|XF|\right\|=2a,\ 0<2\mathrm{a}<|EF|\}$$

Body $E,\ F$ nazýváme ohnisky hyperboly a bod $S=[m;\ n]$ nazýváme jejím středem, který leží ve středu úsečky EF. Vzdálenost $|SE|=|SF|=e$, kde e se nazývá excentricitou hyperboly. Hyperbola má dvě osy. Hlavní osa je přímka procházející středem a ohnisky. Vedlejší osa hyperboly je na hlavní osu kolmá a prochází středem hyperboly. Hlavní poloosa je velikost vzdálenosti středu od nejbližšího bodu hyperboly a značí se a. Pro vedlejší poloosu, která se značí b, platí rovnice $e^2=a^2+b^2$, tj. k určení hyperboly stačí znát dva z prvků $a,\ b,\ e$, kde $e>a,\ b$. Přímky $p_1,\ p_2$ nazýváme asymptotami hyperboly. Pro naše účely postačí, když budeme uvažovat pouze dva případy natočení hyperboly a to takové, že hlavní poloosa hyperboly je rovnoběžná s jednou osou soustavy souřadnic. Situace je znázorněna na Obrázku 3.3.4.1



Obrázek 3.3.4.1

Nyní můžeme rovnici hyperboly, která má hlavní poloosu rovnoběžnou s $x-\text{ovou}$ osou souřadnic, zapsat takto

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1\,.$$

Rovnici hyperboly, která má hlavní poloosu rovnoběžnou s $y-\text{ovou}$ osou souřadnic

$$\frac{(y-n)^2}{a^2}-\frac{(x-m)^2}{b^2}=1\,.$$

Pokud $a=b$ mluvíme o rovnoosé hyperbole, u které platí, že asymptoty $p_1,\ p_2$ jsou na sebe navzájem kolmé.

Nejčastěji objevující se hyperbola na střední škole je taková, že její asymptoty jsou rovnoběžné s osami souřadnic. Její rovnici můžeme zapsat $(y-n)(x-m)=c$, kde $a=b=\sqrt{2|c|}$.

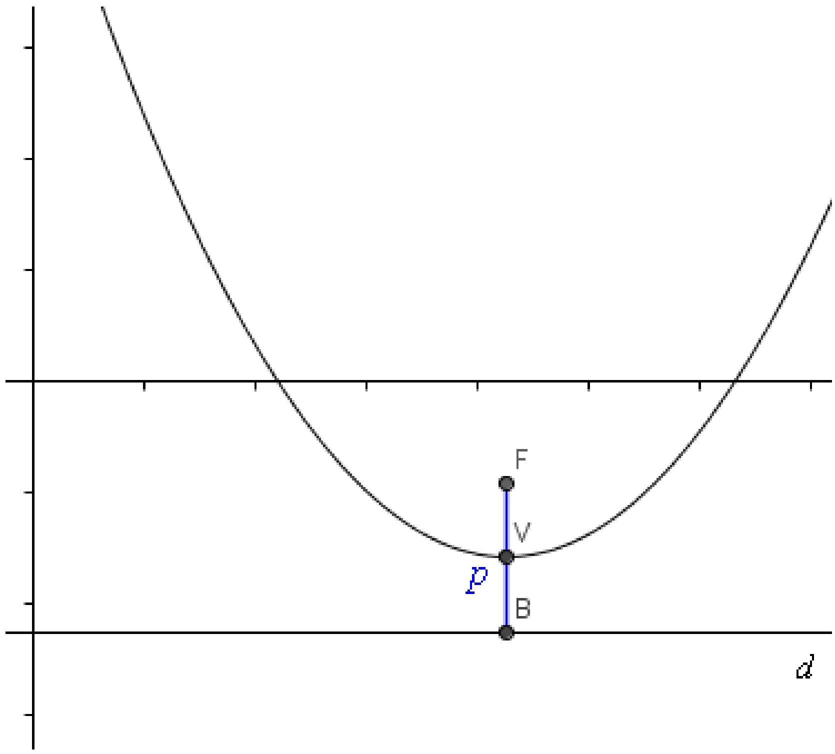
3.3.5 Parabola

Definice 3.5

Množina všech bodů $X=[x;\ y]\in \mathcal{E}_2$, které mají stejnou vzdálenost od dané přímky d a bodu $F=[x_0;\ y_0]$, který neleží na přímce d, se nazývá parabola.

$$k_p=\{X\in \mathcal{E}_2 :\ |Xd|=|XF|,\ F\notin d\}$$

Bod F se nazývá ohniskem paraboly a přímka d se nazývá řídící přímkou paraboly. Vzdálenost bodu F od přímky d je rovna p. Pro vrchol paraboly $V=[m;\ n]$ platí: $|VF|=|Vd|=\frac{p}{2}$. Bodem B označme bod, která je průnikem přímky d a polopřímky FV. Pro naše účely postačí, když budeme uvažovat pouze dva případy natočení paraboly a to takové, že řídící přímka paraboly je rovnoběžná s jednou osou soustavy souřadnic. Situace je znázorněna na Obrázku 3.3.5.1



Obrázek 3.3.5.1

Nyní můžeme rovnici paraboly, která má řídící přímku rovnoběžnou s $x-$ovou osou souřadnic a zároveň $y_0>n$, zapsat takto

$$(x-m)^2=2p(y-n).$$

Rovnice paraboly, která má řídící přímku rovnoběžnou s $x-\mathrm{ovou}$ osou souřadnic a zároveň $y_0 < n$

$$(x-m)^2 = -2p(y-n).$$

Rovnice paraboly, která má řídící přímku rovnoběžnou s $y-\mathrm{ovou}$ osou souřadnic a zároveň $x_0 > m$

$$(y-n)^2 = 2p(x-m).$$

Rovnice paraboly, která má řídící přímku rovnoběžnou s $y-\mathrm{ovou}$ osou souřadnic a zároveň $x_0 < m$

$$(y-n)^2 = -2p(x-m).$$

3.3 *Využití kuželoseček v praxi*

Jak již bylo zmíněno, s kuželosečkami se setkáváme denně, přestože si to možná neuvědomujeme. Kuželosečky jsou totiž důležitým prvkem v architektuře a stavebnictví. Ve starověkém Řecku zaznamenaly kamenné oblouky velký rozmach. Výhodou oblouku je, že jeho tlakem se váha horní části oblouku převádí do stran. Proto se oblouková klenba využívá při stavění stropů, střech, mostů a jiných staveb. Ideální oblouk má tvar řetězovky, popřípadě paraboly.

Gateway Arch v St Luis, též nazýváno „Brána na západ“

Hvězdárna v Rokycanech

Dále jako zajímavost je možné uvést, že v 50. letech minulého století byla v tehdejší Československé lidové armádě vynalezena časoměrně-hyperbolická metoda – autor doc. Ing. Vlastimil Pech, CSc., která slouží k velmi přesnému určení polohy zdroje radiových signálů.

4. Úlohy v matematických olympiádách

4.1 Úlohy řešené algebraicky

Úlohy obsažené v matematických olympiádách se dají řešit pomocí algebraického aparátu nebo geometrickou konstrukcí. V této kapitole jsou příklady, které jsou samostatně řešeny algebraicky.

Příklad 4.1.1 (61. ročník MO – školní kolo kategorie B)

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^2 + y^2 + x + y = 4$$

Řešení: Podle **definice 3.1** je zřejmé, že se jedná o rovnici kuželosečky. Naším úkolem bude teď zjistit, o jaký typ kuželosečky se jedná. Výraz na levé straně rovnosti výše doplňme na čtverec.

$$\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2+2\cdot\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}\right)=4+\frac{1}{2}$$

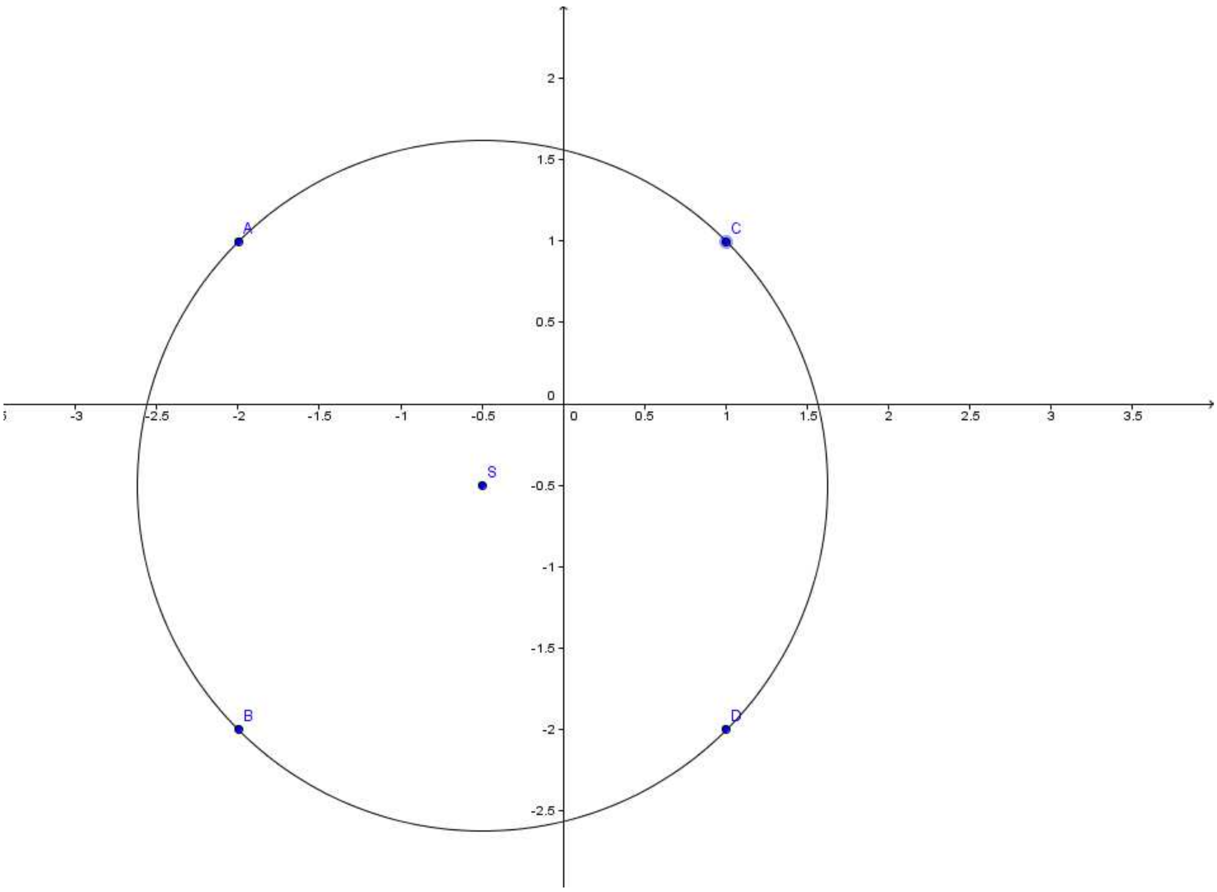
$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$$

Odtud podle **definice 3.2** je zřejmé, že se jedná o kružnici se středem v bodě $S=\left[-\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right]$, která má poloměr velikosti $r=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\doteq 2{,}12\,j$. Dále máme najít body ležící na této kružnici, přičemž všechny souřadnice těchto bodů musí být celočíselné. Díky tomu, že známe velikost poloměru r a souřadnice středu S, můžeme tvrdit, že přicházejí v úvahu pouze takové body, jejichž $x-ové$ souřadnice jsou z množiny $M=\{x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4\}=\{-2;\ -1;\ 0;\ 1\}$. Zbývá tedy ověřit, zda existují celočíselná y, která by společně se souřadnicemi x_1, x_2, x_3, x_4 tvořila uspořádané dvojice $[x,\ y]$. Toto ověříme dosazením do rovnice kružnice.

1) Po dosazení $x_1=-2$ dostaneme kvadratickou rovnici $(-2)^2+y^2+(-2)+y=4$, po úpravě máme $y^2+y-2=0$, a s využitím Vietových vzorců, které znějí: Mezi kořeny $x_1,\ x_2$ a koeficienty $a,\ b,\ c$ kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ platí tyto vztahy: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ a $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. Dostáváme $(y-1)(y+2)=0$. Řešením této rovnice jsou tedy celočíselné kořeny $y_1=1$ a $y`_1=-2$.
2) Po dosazení $x_2=-1$ dostaneme kvadratickou rovnici $(-1)^2+y^2+(-1)+y=4$, po úpravě máme $y^2+y-4=0$, jejíž kořeny ovšem neleží v množině $\mathbb{Z}$.
3) Po dosazení $x_3=0$ dostaneme kvadratickou rovnici $(0)^2+y^2+0+y=4$, po úpravě máme $y^2+y-4=0$, jejíž kořeny rovněž neleží v množině $\mathbb{Z}$.
4) Po dosazení $x_4=1$ dostaneme kvadratickou rovnici $1^2+y^2+1+y=4$, po úpravě máme $y^2+y-2=0$, a využitím Vietových vzorců dostaneme $(y-1)(y+2)=0$. Tuto rovnici jsme již řešili v případě 1).

Situace je znázorněna na Obrázku 4.1.1.1

Závěr: Rovnici $x^2+y^2+x+y=4$ vyhovují uspořádané dvojice $[x_1;\ y_1]=[-2;\ 1]$, $[x_1;\ y`_1]=[-2;\ -2]$, $[x_4;\ y_4]=[1;\ 1]$, $[x_4;\ y`_4]=[1;\ -2]$.



Obrázek 4.1.1.1

Příklad 4.1.2 (7. ročník MO – úloha II. kola kategorie B)

Určete reálné číslo p tak, aby rovnice

$$x^2-p(x-1)-9=0$$

o neznámé x měla rozdíl kořenů (ve vhodném pořádku) roven šesti. Řešte pak tuto rovnici.

Řešení: Nejprve si výraz upravíme do tvaru $ax^2+bx+c=0$.

$$x^2-px+(p-9)=0$$

Po úpravě výrazu je podle **definice 3.1** zřejmé, že se jedná o rovnici kuželosečky, konkrétně o parabolu, kde $B=0$, $D=0$, proto tuto rovnici budeme řešit jako kvadratickou rovnici s použitím Vietových vzorců, které znějí:

Mezi kořeny x_1, x_2 a koeficienty a, b, c kvadratické rovnice $ax^2+bx+c=0$ platí tyto vztahy: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ a $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$.

Po dosazení koeficientů dostáváme dvě rovnice o třech neznámých.

$$x_1\cdot x_2=p-9$$

$$x_1+x_2=p$$

Ze zadání dostaneme třetí rovnici, která zní: $|x_1-x_2|=6$.

1) Soustavu třech rovnic o třech neznámých budeme řešit pro případ, že $x_1-x_2\geq 0$. Ze třetí rovnice si vyjádříme $x_1=6+x_2$. Po dosazení do rovnic předešlých dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých:

$$(6+x_2)\cdot x_2=p-9$$

$$6+2x_2=p$$

Z druhé rovnice si vyjádříme $x_2=\frac{p-6}{2}$ a dosadíme do první rovnice $(6+\frac{p-6}{2})\cdot\frac{p-6}{2}=p-9$. Tuto rovnici nadále upravujeme až na kvadratickou rovnici v nulovém tvaru, kterou vyřešíme rozložením na součin:

$$3p-18+\frac{p^2-12p+36}{4}=p-9$$

$$12p-72+p^2-12p+36=4p-36$$

$$p^2-4p=0$$

$$p(p-4)=0$$

$$p_1 = 0,\ p_2 = 4$$

1.1) Po dosazení $p_1 = 0$ do původní rovnice $x^2 - p(x-1) - 9 = 0$ dostáváme rovnici $x^2 - 9 = 0$, která má kořeny $x_1 = 3,\ x_2 = -3$, které vyhovují podmínce $x_1 - x_2 \geq 0$.

1.2) Po dosazení $p_2 = 4$ do původní rovnice $x^2 - p(x-1) - 9 = 0$ dostáváme rovnici $x^2 - 4x - 5 = 0$, která má kořeny $x_1 = 5,\ x_2 = -1$, které vyhovují podmínce $x_1 - x_2 \geq 0$.

2) Soustavu třech rovnic o třech neznámých budeme řešit pro případ, že $x_1 - x_2 < 0$. Ze třetí rovnice si vyjádříme $x_1 = x_2 - 6$. Po dosazení do rovnic předešlých dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých:

$$(x_2 - 6) \cdot x_2 = p - 9$$

$$2x_2 - 6 = p$$

Z druhé rovnice si vyjádříme $x_2 = \dfrac{p+6}{2}$ a dosadíme do první rovnice $(\dfrac{p+6}{2} - 6) \cdot \dfrac{p+6}{2} = p - 9$. Tuto rovnici nadále upravujeme až na kvadratickou rovnici v nulovém tvaru, kterou vyřešíme rozložením na součin:

$$\frac{p^2 + 12p + 36}{4} - 3p - 18 = p - 9$$

$$p^2 + 12p + 36 - 12p - 72 = 4p - 36$$

$$p^2 - 4p = 0$$

$$p(p-4) = 0$$

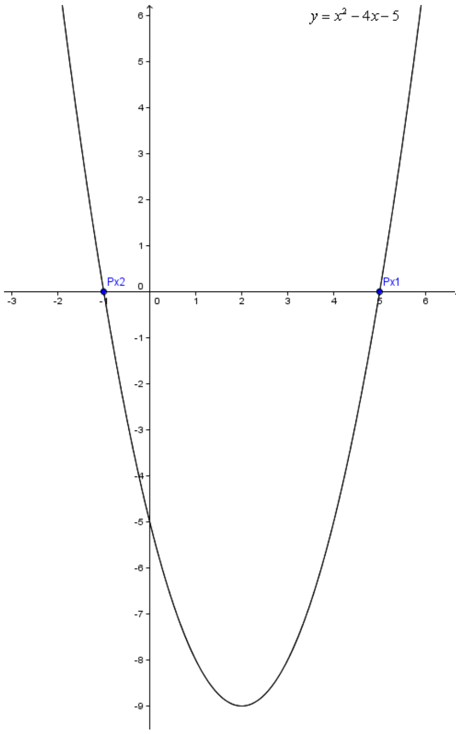
$$p_1 = 0,\ p_2 = 4$$

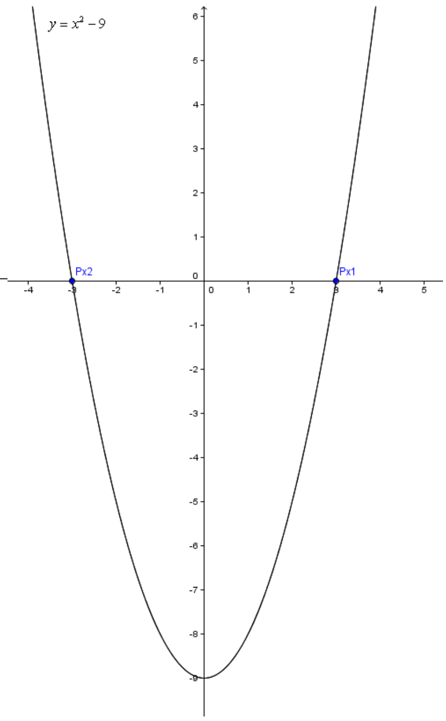
2.1) Po dosazení $p_1 = 0$ do původní rovnice $x^2 - p(x-1) - 9 = 0$ dostáváme rovnici $x^2 - 9 = 0$, která má kořeny $x_1 = 3,\ x_2 = -3$, které vyhovují podmínce $x_1 - x_2 \geq 0$.

2.2) Po dosazení $p_2 = 4$ do původní rovnice $x^2 - p(x-1) - 9 = 0$ dostáváme rovnici $x^2 - 4x - 5 = 0$, která má kořeny $x_1 = 5,\ x_2 = -1$, které vyhovují podmínce $x_1 - x_2 \geq 0$.

Situace je znázorněna na Obrázcích 4.1.2.1 a 4.1.2.2

Závěr: Požadavkům v zadání vyhovují dva parametry $p_1 = 0,\ p_2 = 4$. Pro $p = 4$ má rovnice kořeny $x_1 = 5,\ x_2 = -1$ (Viz. Obrázek 4.1.2.1). Pro $p = 0$ má rovnice kořeny $x_1 = 3,\ x_2 = -3$ (Viz. Obrázek 4.1.2.2)





Obrázek 4.1.2.1

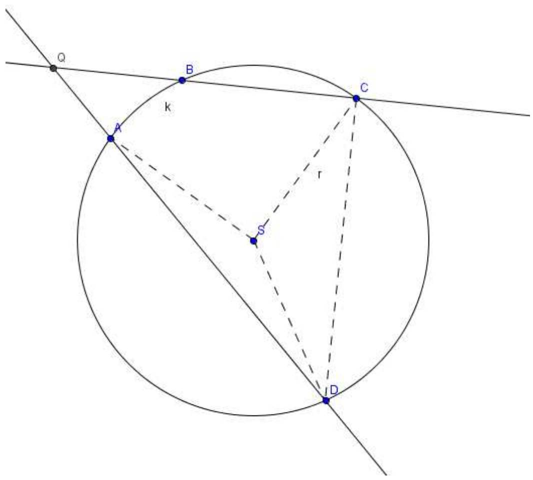
Obrázek 4.1.2.2

Příklad 4.1.3 (15. ročník MO – přípravné úlohy I. kola kategorie D)

Body $A,\ B,\ C,\ D$ dělí kružnici $k(S;\ r)$ na čtyři oblouky, jejichž délky jsou v poměru

$$\overset{\frown}{AB} \div \overset{\frown}{BC} \div \overset{\frown}{CD} \div \overset{\frown}{DA} = 1 \div 2 \div 4 \div 5.$$

Přímky $AD,\ BC$ se protnou v bodě Q. Vypočtěte vzdálenost QB a QD.



Řešení: Pro středové úhly platí

$$\sphericalangle ASB : \sphericalangle BSC : \sphericalangle CSD : \sphericalangle DSA = 1:2:4:5$$

$$\sphericalangle ASB + \sphericalangle BSC + \sphericalangle CSD + \sphericalangle DSA = 360^\circ .$$

Odtud $\sphericalangle ASB = 30^\circ,\ \sphericalangle BSC = 60^\circ,\ \sphericalangle CSD = 120^\circ,\ \sphericalangle DSA = 150^\circ$.

Trojúhelník BCS je rovnostranný, proto $|BC| = r$. Úhel $|\sphericalangle BSD| = |\sphericalangle BSC| + |\sphericalangle CSD| = 180^\circ$ Odtud $|BD| = 2r$. Úhel $|\sphericalangle BCD| = 90^\circ$, jelikož bod B leží na Thaletově kružnici nad úsečkou BD. Pomocí Pythagorovy věty můžeme vyjádřit $|CD|$.

$$|BD|^2 = |BC|^2 + |CD|^2$$

$$4r^2 = r^2 + |CD|^2$$

$$|CD| = \sqrt{3}r$$

Trojúhelník CSD je rovnoramenný, proto úhel $|\sphericalangle CDS| = 30^\circ$. Trojúhelník DSA je rovnoramenný, proto úhel $|\sphericalangle SDA| = 15^\circ$. Tím pádem úhel $|\sphericalangle CDQ| = 45^\circ$. Použitím goniometrické funkce dostaneme

$$\cos 45^\circ = \frac{|CD|}{|DQ|}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}r}{|DQ|}$$

$$|DQ| = \sqrt{6}r .$$

Trojúhelník CDQ je rovnoramenný, proto

$$|BQ| = |CQ| - |CB| = \sqrt{3}r - r = r \cdot (\sqrt{3} - 1) .$$

Závěr: Velikost úsečky QB je rovna $r \cdot (\sqrt{3} - 1)$ a velikost úsečky QD je rovna $\sqrt{6}r$.

4.2 Úlohy řešené konstrukčně

Úlohy obsažené v matematických olympiádách se dají řešit pomocí algebraického aparátu nebo geometrickou konstrukcí. V této kapitole jsou příklady, které jsou řešeny geometrickou konstrukcí.

Příklad 4.2.1 (7. ročník MO – úloha II. kola kategorie D)

Narýsujte dvě soustředné kružnice k_1, k_2 o středu S a poloměrech $r_1 = 8\ cm$, $r_1 = 1\frac{1}{2}\ cm$. Na menší kružnici k_2 zvolte bod T a v něm sestrojte tečnu t této kružnice. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají zároveň obou daných kružnic k_1, k_2 i přímky t.

Řešení:

Rozbor: 1) Množina možných vyhovujících středů kružnic, které se mají dotýkat kružnic k_1, k_2, je kružnice $k_3\left(S;\ \frac{r_1+r_2}{2}\right)$. Tyto kružnice jsou o poloměru $r = \frac{r_1-r_2}{2}$. Kružnice se zároveň mají dotýkat přímky t, která je tečnou k těmto kružnicím. Proto středy těchto kružnic leží na rovnoběžkách přímky t o vzdálenosti, která je rovna $\frac{r_1-r_2}{2}$.

2) Množina možných vyhovujících středů kružnic, které se mají dotýkat kružnic k_1, k_2, je kružnice $k_3\left(S;\ \frac{r_1-r_2}{2}\right)$. Tyto kružnice jsou o poloměru $r = \frac{r_1+r_2}{2}$. Kružnice se zároveň mají dotýkat přímky t, která je tečnou k těmto kružnicím. Proto středy těchto kružnic leží na rovnoběžkách přímky t o vzdálenosti, která je rovna $\frac{r_1+r_2}{2}$.

Zápis konstrukce:

1) $S;\ S[x;\ y]$
2) $k_1;\ k_1(S;\ 8cm)$
3) $k_2;\ k_2(S;\ 1{,}5cm)$
4) $T;\ T \in k_2$
5) $t;\ t \perp ST \wedge T \in t$
6) $k_3;\ k_3\left(S;\ \frac{r_1-r_2}{2}\right) = (S;\ 3{,}25\ cm)$
7) $k_4;\ k_4\left(S;\ \frac{r_1+r_2}{2}\right) = (S;\ 4{,}75\ cm)$
8) $p_1,\ p_2;\ p_1,\ p_2 \parallel t\ \wedge\ |p_1t| = |p_2t| = 3{,}25\ cm$
9) $A;\ A \in p_1k_4$

10) $B,\ C;\ B,\ C \in p_2 k_4$,

11) $p_3;\ p_3 \parallel t\ \wedge\ |p_3 t| = 4,75\ cm$

12) $D;\ D \in p_3 k_3$

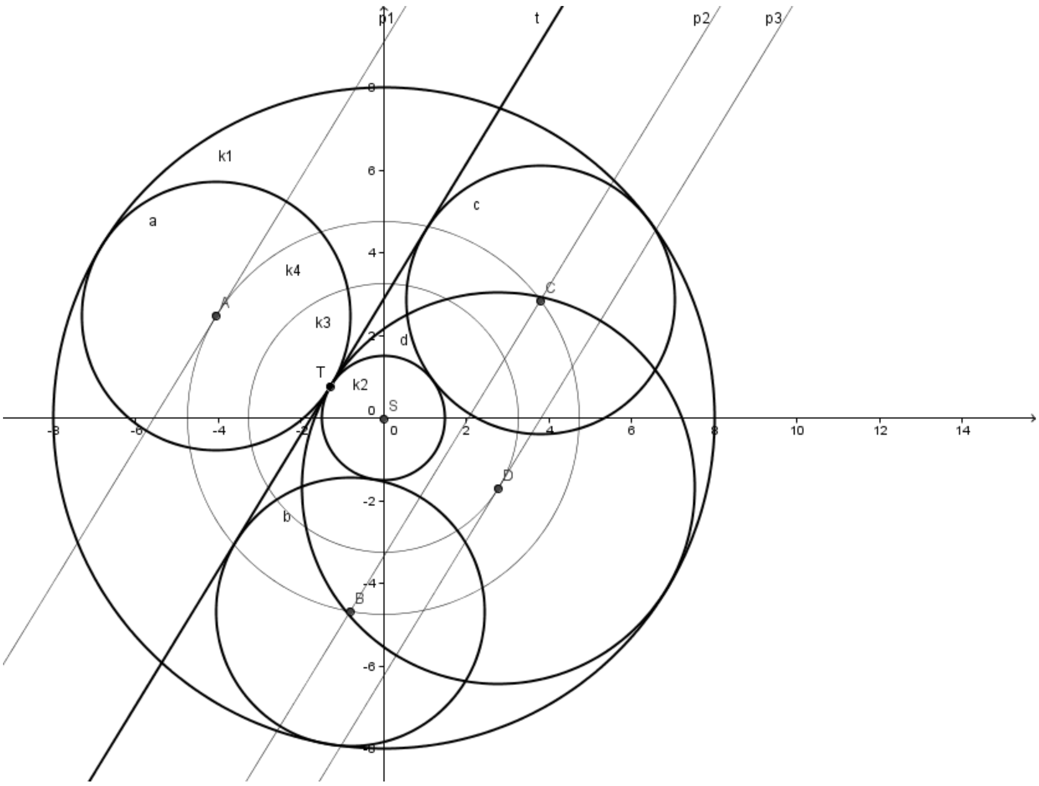
13) $a;\ a(A;\ 3,25\ cm)$

14) $b;\ b(B;\ 3,25\ cm)$

15) $c;\ c(C;\ 3,25\ cm)$

16) $d;\ d(D;\ 4,75\ cm)$

Konstrukce – Viz. Obrázek 4.2.1.1



Obrázek 4.2.1.1

Závěr: Tato úloha má čtyři řešení, kterými jsou kružnice $a,\ b,\ c,\ d$. Tento typ úlohy je jedním typem Apolloniových úloh, kde jsou dané dvě kružnice a přímka.

Příklad 4.2.2 (6. ročník MO – úloha II. kola kategorie B)

Nechť jsou dány dvě kružnice $k_1,\ k_2$, které mají společné dva různé body $C,\ M$. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby bod A byl bodem kružnice k_1, bod B bodem kružnice k_2 a bod M byl středem strany AB . Dokažte, že úloha má právě jedno řešení.

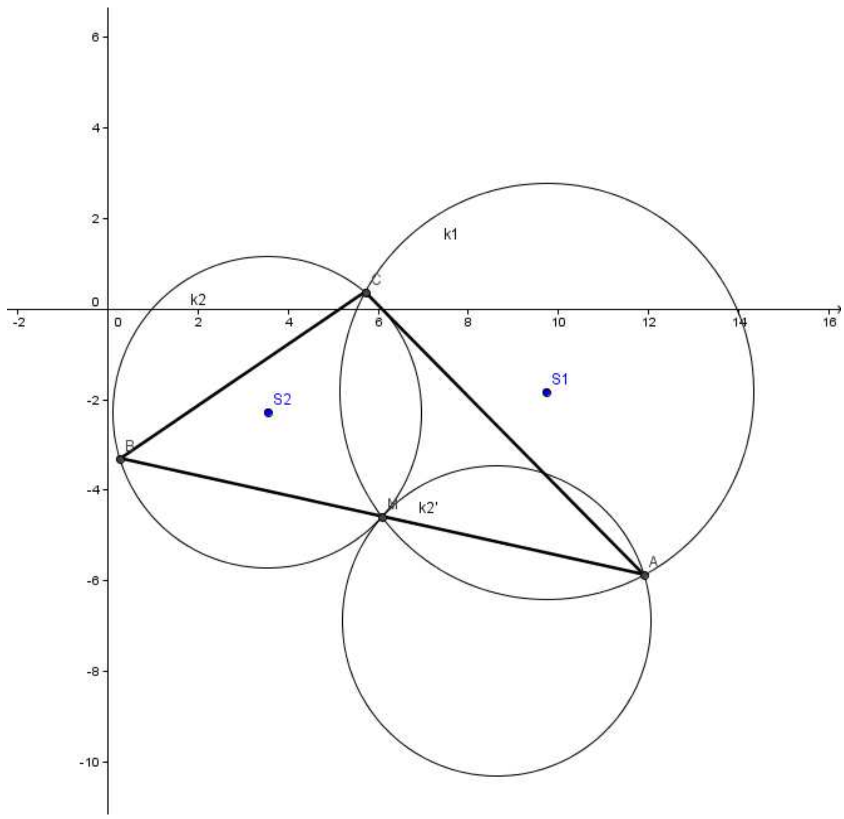
Řešení:

Rozbor: Body A, B jsou středově souměrné podle středu M, proto bod A musí ležet na průsečíku kružnice k_1 a kružnice $k_2^{'}$, která je obrazem kružnice k_2 podle středu M. Průsečíky kružnice k_1 a kružnice $k_2^{'}$ existují dva, ovšem jeden z nich je samotný bod M, který však má být středem strany AB. Proto bod A existuje právě jeden.

Zápis konstrukce:

1) $k_1;\ k_1(S_1;\ r_1)$
2) $k_2;\ k_2(S_2;\ r_2 \neq r_1)$
3) $C,\ M;\ C,\ M \in k_1 \cap k_2$
4) $k_2^{'};\ S(M):\ k_2 \to k_2^{'}$
5) $A;\ A \in k_1 \cap k_2^{'}$
6) $B;\ S(M):\ A \to B$
7) $\triangle ABC$

Konstrukce – Viz. Obrázek 4.2.2.1



Obrázek 4.2.2.1

Závěr: Úloha má právě jedno řešení, důkazem existence právě jednoho řešení je předešlý rozbor a konstrukce.

Příklad 4.2.3 (7. ročník MO – úloha I. kola kategorie B)

V rovině buďte dány dvě shodné kružnice $k_1 = (S_1;\ r)$, $k_2 = (S_2;\ r)$, které se navzájem dotýkají; označme t jednu ze společných vnějších tečen těchto kružnic.

V polorovině tS_1 sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala obou daných kružnic $k_1,\ k_2$ a přímky t.

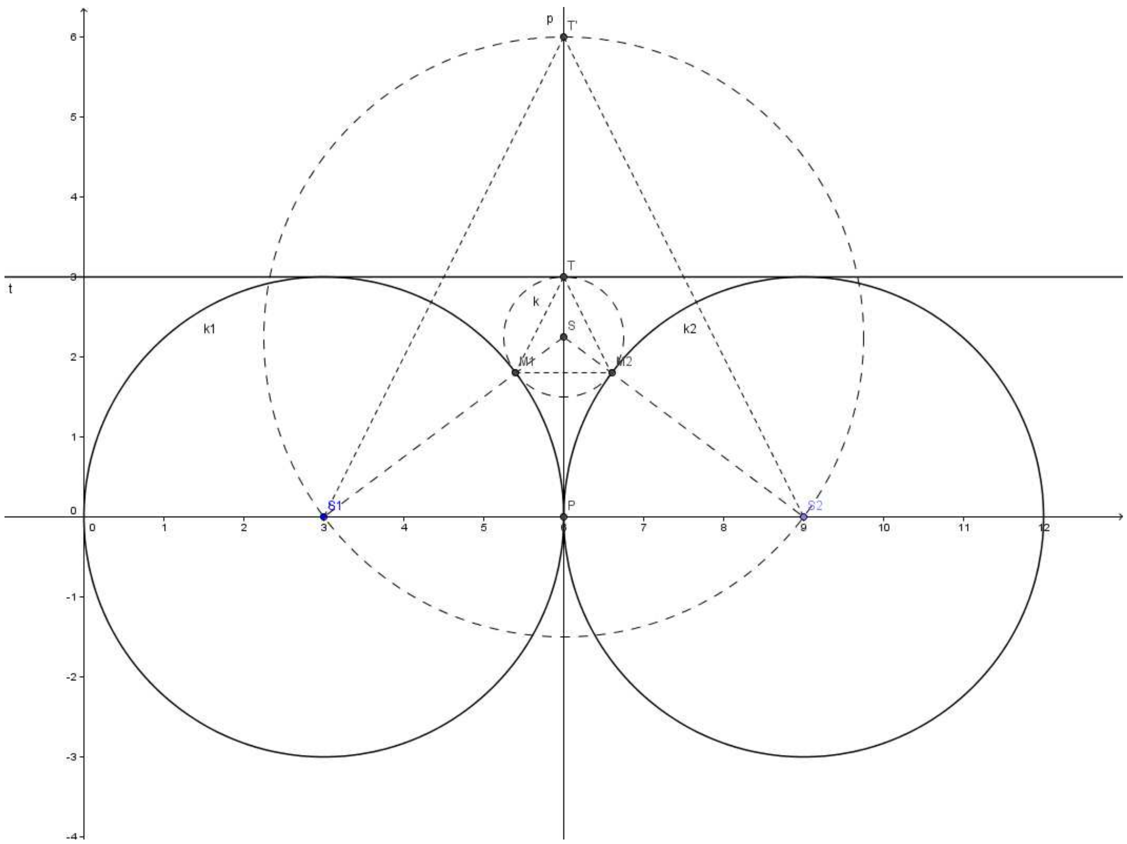
Řešení proveďte dvěma odlišnými způsoby.

Řešení:

Rozbor: Kružnice $k(S;\ x)$ se musí dotýkat kružnic $k_1,\ k_2$ vně. Pokud by se jedné z těchto kružnic dotýkala uvnitř a měla splňovat všechny zadané požadavky, s touto kružnicí by splynula. Střed kružnice k náleží přímce p, která je osou úsečky S_1S_2. Průnik přímky p s tečnou t si označme jako bod T. Průnik kružnice k_1 s úsečkou S_1S si označme jako bod M_1. Průnik kružnice k_2 s úsečkou S_2S si označme jako bod M_2. Jako poslední je bod T', který leží na polopřímce $\rightarrow PT$, kde bod P je bodem dotyku kružnic $k_1,\ k_2$, a $|PT| = r$ (Viz. Obrázek 4.2.3.1). Nyní můžeme říct, že

$$\frac{|ST|}{|ST'|} = \frac{|SM_1|}{|SS_1|} = \frac{|SM_2|}{|SS_2|} = \frac{x}{x+r} = \lambda,$$

kde λ je konstanta. Z toho vyplývá, že trojúhelníky TM_1M_2, $T'S_1S_2$ jsou stejnolehlé podle středu S, který je zároveň i středem pro kružnice opsané trojúhelníkům TM_1M_2, $T'S_1S_2$.

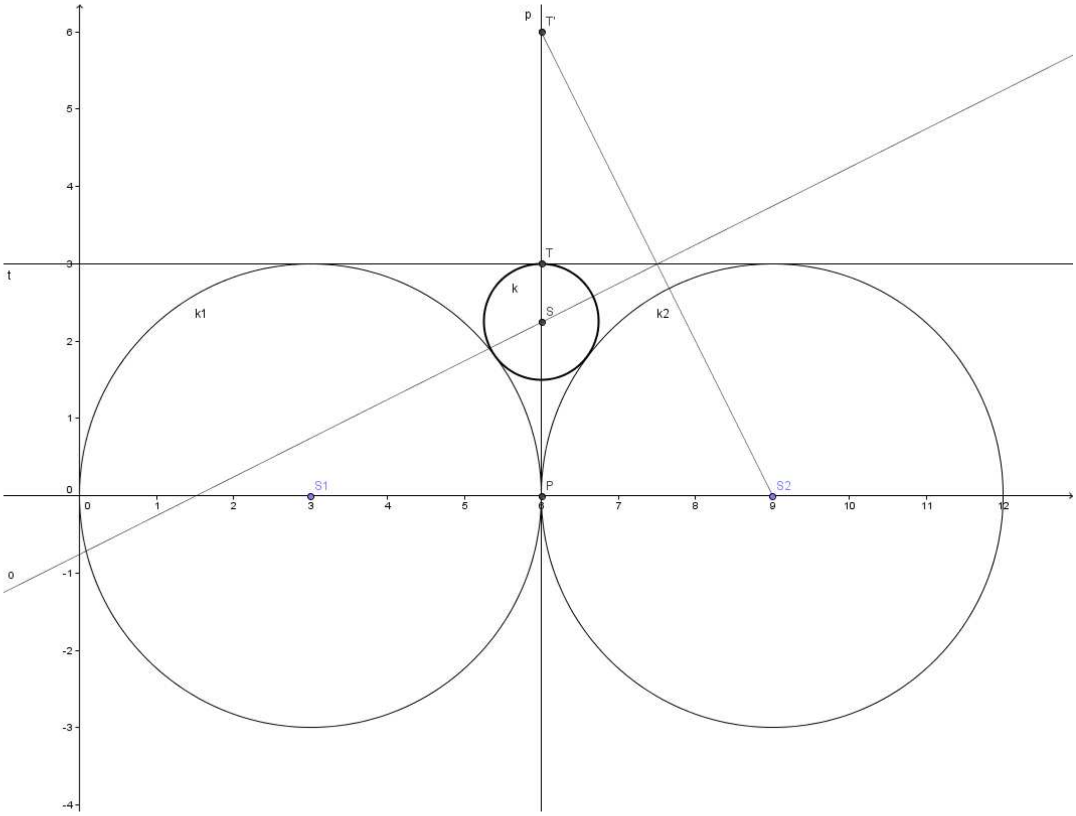


Obrázek 4.2.3.1

Zápis konstrukce:

1) $k_1;\ k_1(S_1;\ r)$
2) $k_2;\ k_2(S_2;\ r)$
3) $t;\ t \perp k_1 \wedge t \perp k_2$
4) $P;\ P \in k_1 \cap k_2$
5) $p;\ p \perp t \wedge P \in\ p$
6) $T';\ |PT'| = 2r \wedge |tT'| = r$
7) $o;\ o$ osa úsečky S_1T'
8) $S;\ S \in\ p \cap o$
9) $k;\ k(S;\ r)$

Konstrukce – Viz. Obrázek 4.2.3.2



Obrázek 4.2.3.2

Závěr: Úloha má právě jedno řešení, důkazem existence právě jednoho řešení je předešlý rozbor a konstrukce. Druhé řešení příkladu je uvedeno jako **Příklad 4.3.1**.

4.3 Úlohy řešené konstrukčně pomocí algebraického výpočtu

Úlohy obsažené v matematických olympiádách se dají řešit pomocí algebraického aparátu nebo geometrickou konstrukcí. V této kapitole jsou příklady, které jsou řešeny geometrickou konstrukcí, k níž jsou využity algebraické výpočty.

Příklad 4.3.1 (7. ročník MO – úloha I. kola kategorie B)

V rovině buďte dány dvě shodné kružnice $k_1 = (S_1;\ r)$, $k_2 = (S_2;\ r)$, které se navzájem dotýkají; označme t jednu ze společných vnějších tečen těchto kružnic.

V polorovině tS_1 sestrojte kružnici k tak, aby se dotýkala obou daných kružnic k_1, k_2 a přímky t.

Řešení proveďte dvěma odlišnými způsoby.

Řešení:

Rozbor: Kružnice $k(S;\ x)$ se musí dotýkat kružnic $k_1,\ k_2$ vně. Pokud by se jedné z těchto kružnic dotýkala uvnitř a měla splňovat všechny zadané požadavky, s touto kružnicí by splynula. Střed kružnice k náleží přímce p, která je osou úsečky S_1S_2.

Algebraický výpočet: Sestrojme si obdélník $PSRS_1$, kde bod P je bodem dotyku kružnic k_1, k_2 a bod R je bodem kruhu vymezeného kružnicí k_1 (Viz. Obrázek 4.3.1.1 a Obrázek 4.3.1.2). Poté podle Pythagorovy věty platí:

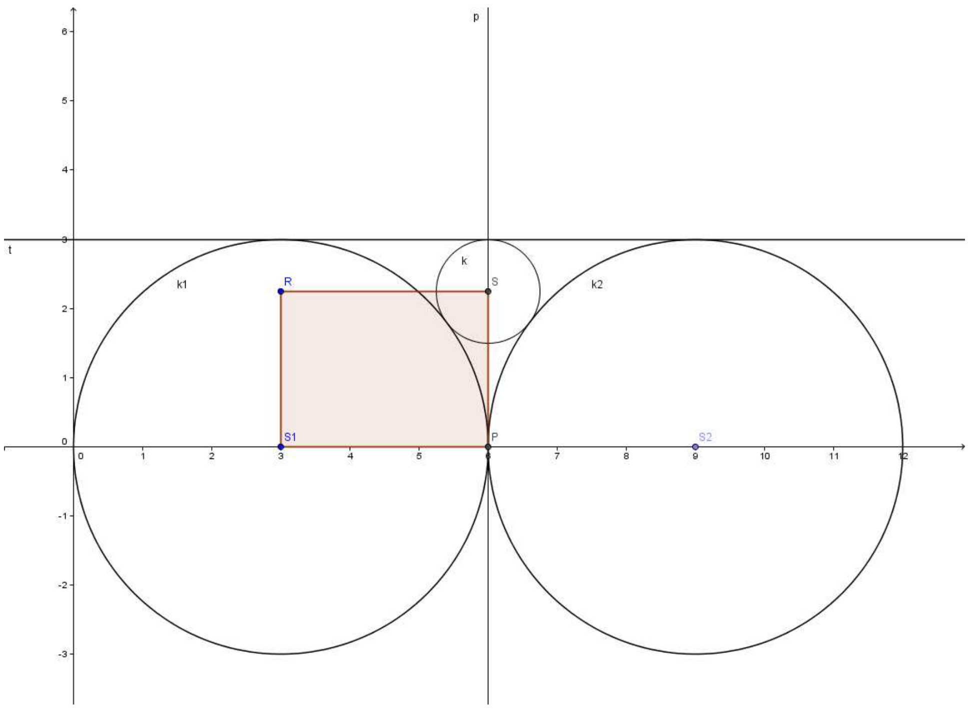
$$|S_1S|^2 = |S_1P|^2 + |SP|^2$$

$$(r+x)^2 = r^2 + (r-x)^2$$

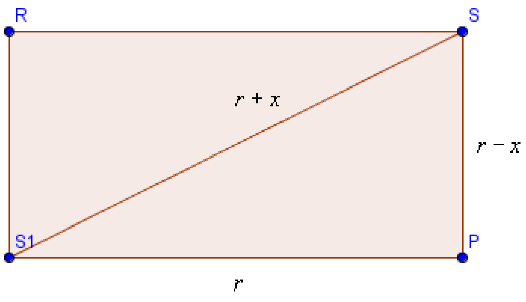
$$r^2 + 2rx + x^2 = r^2 + r^2 - 2rx + x^2$$

$$4rx = r^2$$

$$x = \frac{r}{4}$$



Obrázek 4.3.1.1

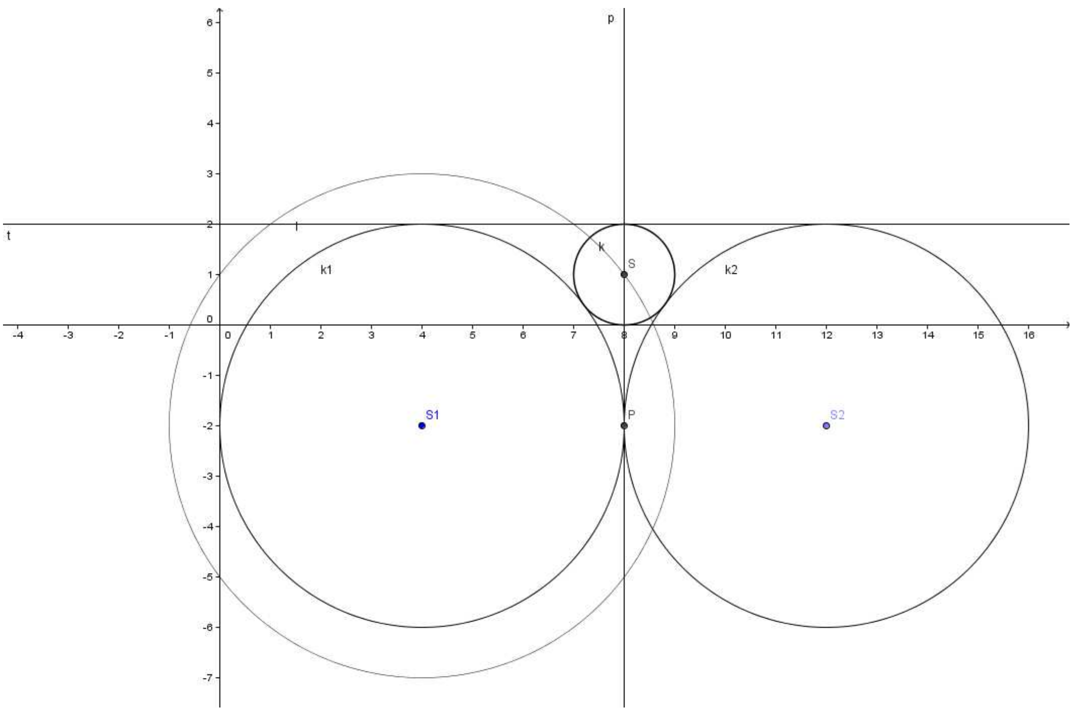


Obrázek 4.3.1.2

Zápis konstrukce:

1) $k_1;\ k_1(S_1;\ r)$
2) $k_2;\ k_2(S_2;\ r)$
3) $t;\ t \perp k_1 \wedge t \perp k_2$
4) $P;\ P \in k_1 \cap k_2$
5) $p;\ p \perp t \wedge P \in\ p$
6) $l;\ l\left(S_1;\ \dfrac{5r}{4}\right)$
7) $S;\ S \in l \cap p \wedge S \in \rightarrow Pp$
8) $k;\ k\left(S;\ \dfrac{r}{4}\right)$

Konstrukce – Viz. Obrázek 4.3.1.3



Obrázek 4.3.1.3

Závěr: Úloha má právě jedno řešení, důkazem existence právě jednoho řešení je předešlý rozbor a konstrukce. Druhé řešení příkladu je uvedeno jako **Příklad 4.2.3**.

Příklad 4.3.2 (8. ročník MO – úloha I. kola kategorie C)

Je dána kružnice $k(S;\ r)$ a v ní průměr AB, dále je dáno kladné číslo m. Na tečně t sestrojené v bodě B kružnice k určete bod X tak, že pro druhý průsečík Y přímky AX s kružnicí k platí vztah

$$XY = m$$

(Nejprve vypočítejte velikost úsečky AX a na základě výpočtu proveďte konstrukci.)

Řešení:

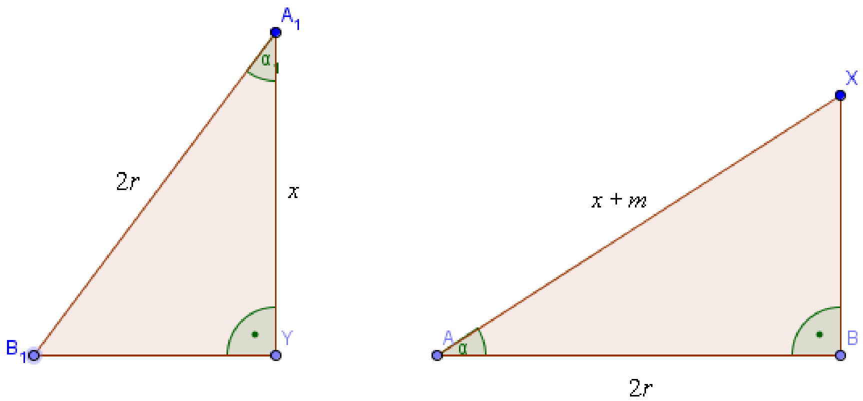
Rozbor: Trojúhelníky BYA a ABX jsou podobné, jelikož mají dva shodné úhly (Viz. Obrázek 4.3.2.1 a Obrázek 4.3.2.2)

$$\sphericalangle BAY = \sphericalangle BAX \wedge \sphericalangle BYA = \sphericalangle ABX$$

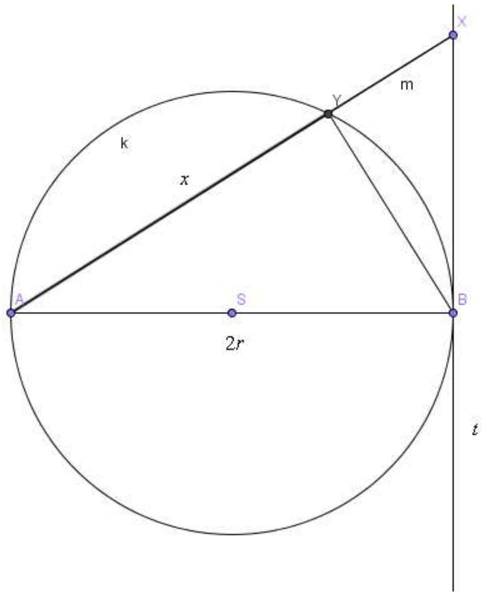
Velikost úsečky AY položme rovnou neznámé x. Díky podobnosti trojúhelníků můžeme říci, že

$$\frac{AY}{AB} = \frac{AB}{AX} = \lambda,$$

kde λ je konstanta.



Obrázek 4.3.2.1



Obrázek 4.3.2.2

Algebraický výpočet: Do rovnice $\frac{AY}{AB} = \frac{AB}{AX}$ dosadíme

$$\frac{x}{2r} = \frac{2r}{x+m}$$

$$x \cdot (x+m) = 4r^2$$

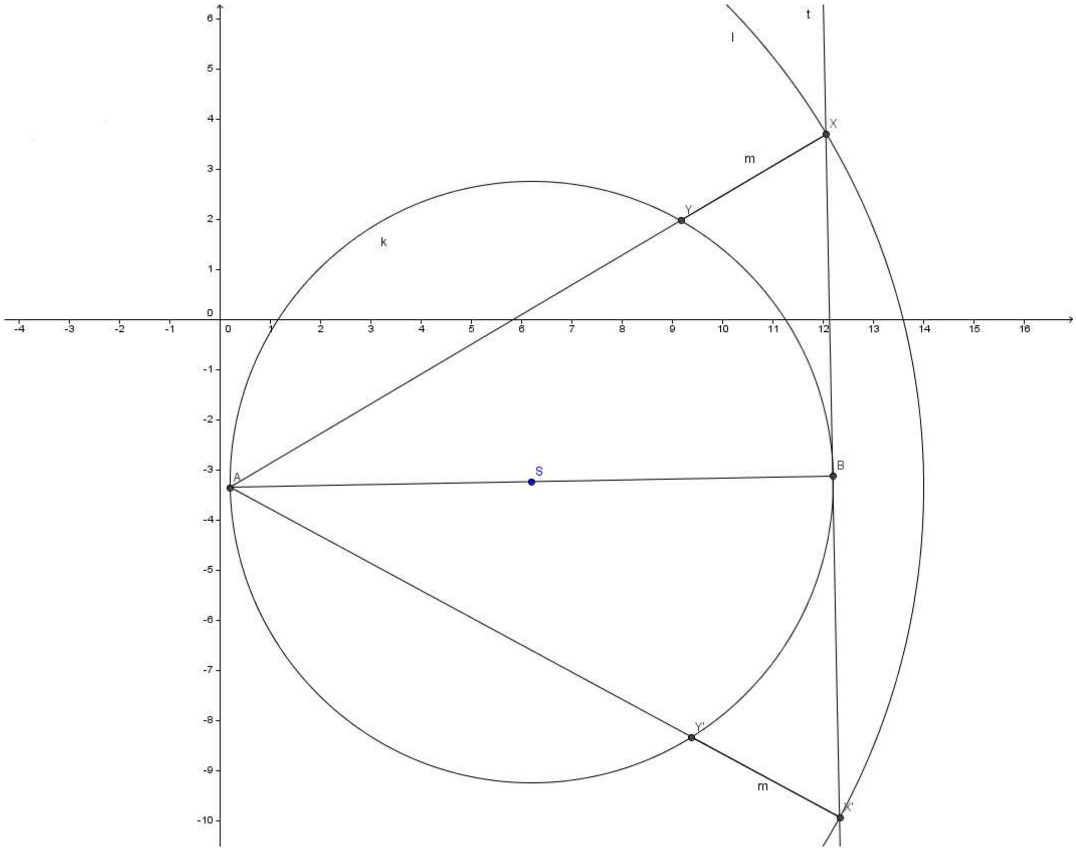
$$x^2 + xm - 4r^2 = 0$$

Dostáváme kvadratickou rovnici ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a = 1$, $b = m$, $c = -4r^2$. Pro výpočet diskriminantu dosadíme do vzorce $D = b^2 - 4ac$ a dostáváme $D = m^2 + 16r^2$. Dosazením do vzorce $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ dostáváme neznámou $x_{1,2} = -\frac{m \pm \sqrt{m^2 + 16r^2}}{2}$. Čísla m, r jsou daná, proto velikost úsečky $|AX| = x + m$, kde $x > 0$.

Zápis konstrukce:

1) $k;\ k(S,\ r)$
2) $A,\ B;\ A,\ B \in k \wedge |AB| = 2r$
3) $t;\ t \perp k \wedge B \in t$
4) $l;\ l(A;\ x+m)$
5) $X;\ X \in t \cap l$
6) $Y;\ Y \in AX \cap k$
7) $XY;\ |XY| = m$

Konstrukce – Viz. Obrázek 4.3.2.3



Obrázek 4.3.2.3

Závěr: Úloha má dvě řešení, která jsou osově souměrná podle přímky AB.

Příklad 4.3.3 (15. ročník MO – soutěžní úlohy II. kola kategorie A)

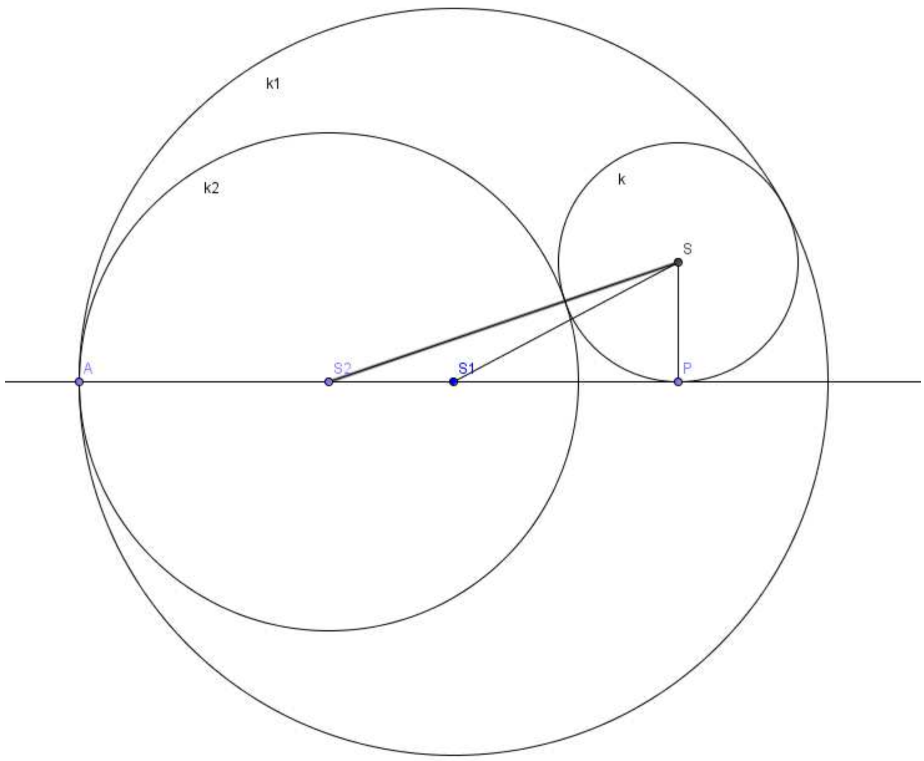
Je daná kružnice $k_1(S_1;\ r_1)$ a kružnice $k_2(S_2;\ r_2)$, kde $r_2 < r_1$. Tyto kružnice mají vnitřní dotyk v bodě A. Sestrojte kružnici k, která má vnitřní dotyk s kružnicí k_1, vnější dotyk s kružnicí k_2 a dotýká se přímky AS_1.

Řešení:

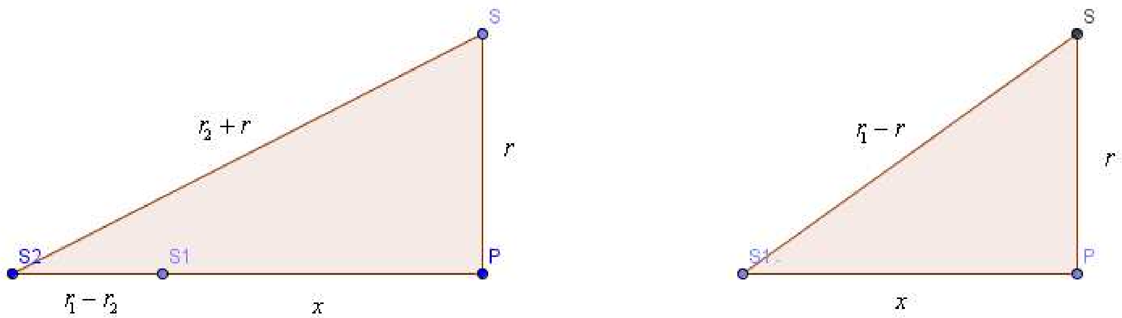
Rozbor: Označme si bod P bodem dotyku kružnice k s přímkou AS_1. Dále si označme vzdálenost $|S_1P| = x$. Pomocí dvou pravoúhlých trojúhelníků S_1PS, S_2PS dostáváme dvě rovnice o dvou neznámých (Viz. Obrázek 4.3.3.1 a Obrázek 4.3.3.2)

$$(r_2 + r)^2 = r^2 + (r_1 - r_2 + x)^2$$

$$(r_1 - r)^2 = x^2 + r^2$$



Obrázek 4.3.3.1



Obrázek 4.3.3.2

Algebraický výpočet: Obě dvě rovnice nejprve umocníme, po úpravě nám vyjde

$$2r_2r = r_1^2 - 2r_1r_2 + 2x(r_1 - r_2) + x^2$$

$$2r_1r = r_1^2 - x^2$$

Z druhé rovnice lze vyjádřit $r = \frac{r_1^2 - x^2}{2r_1}$, dosazením do první rovnice a jejím upravením dostáváme kvadratickou rovnici o neznámé x.

$$2r_2 \frac{r_1^2 - x^2}{2r_1} = r_1^2 - 2r_1 r_2 + 2x(r_1 - r_2) + x^2$$

$$r_1^2 r_2 - r_2 x^2 = r_1^3 - 2r_1^2 r_2 + 2x(r_1^2 - r_1 r_2) + r_1 x^2$$

$$(r_1 + r_2)x^2 + 2r_1(r_1 - r_2)x + r_1^2(r_1 - 3r_2) = 0$$

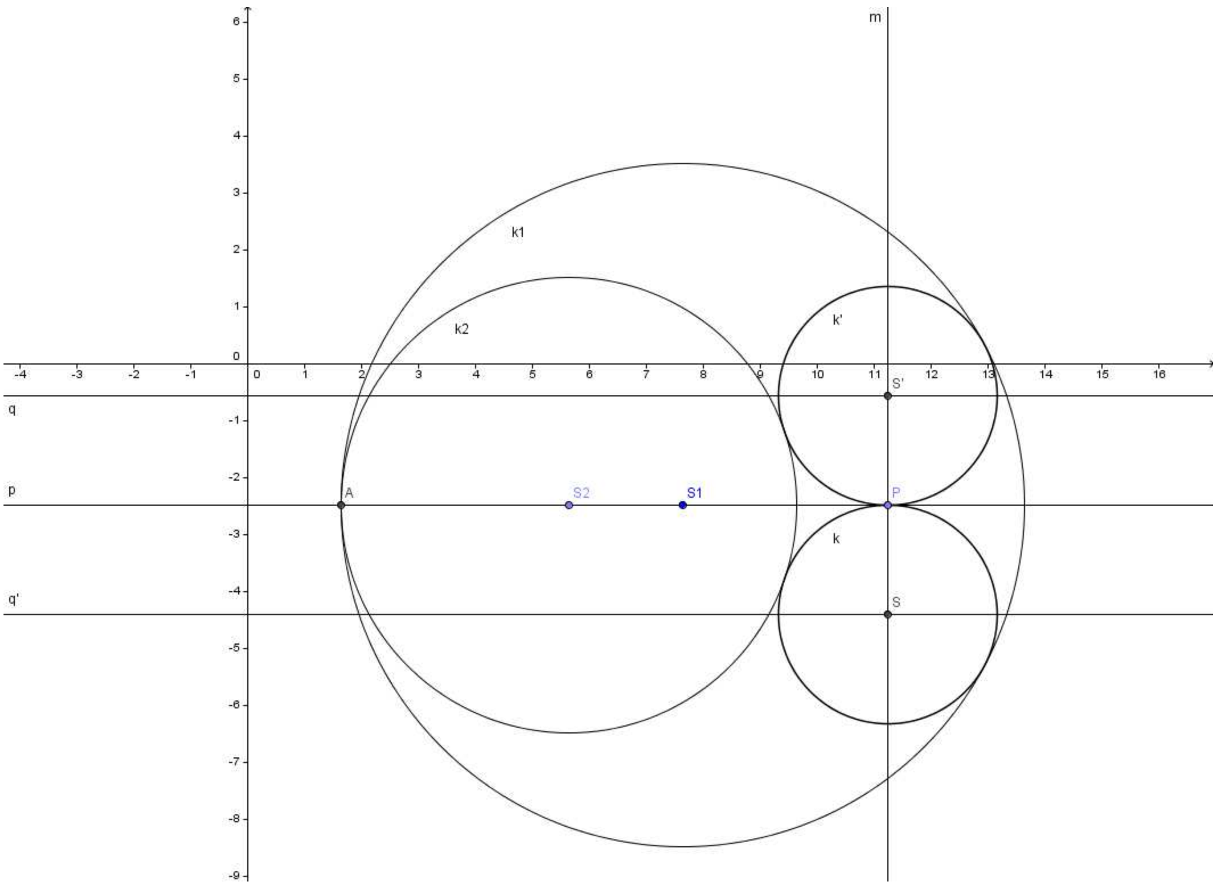
Kvadratickou rovnici máme ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a = r_1 + r_2$, $b = 2r_1(r_1 - r_2)$, $c = r_1^2(r_1 - 3r_2)$. Pro výpočet diskriminantu dosadíme do rovnice $D = b^2 - 4ac$ a dostáváme $D = (4r_1 r_2)^2$. Dosazením do rovnice $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ dostáváme neznámou $x_{1,2} = \frac{r_1(r_2 - r_1 \pm 2r_2)}{r_1 + r_2}$, konkrétně $x_1 = r_1\left(\frac{3r_2 - r_1}{r_1 + r_2}\right)$, $x_2 = -r_1$ (který nevyhovuje).

Zpětným dosazením dostáváme $r = \dfrac{r_1^2 - r_1\left(\frac{3r_2 - r_1}{r_1 + r_2}\right)^2}{2r_1}$.

Zápis konstrukce:

1) $k_1;\ k_1(S_1;\ r_1)$
2) $k_2;\ k_2(S_2;\ r_2)$
3) $A;\ A \in k_1 \cap k_2$
4) $p;\ A \in p \wedge S_1 \in p$
5) $P;\ P \in p \wedge |PS_1| = x \wedge |PS_2| > x$
6) $q;\ q \parallel p \wedge |qp| = r$
7) $m;\ m \perp p \wedge P \in m$
8) $S; S \in m \cap p$
9) $k;\ k(S;\ r)$

Konstrukce – Viz. Obrázek 4.3.3.3



Obrázek 4.3.3.3

Závěr: Úloha má dvě řešení, která jsou osově souměrná podle přímky p .

5. Samostatně připravený příklad

Zjistěte extrém funkce $f(x):\ y = x^2 + 5x + 6$, kde $x \in \mathbb{R}$. Řešení proveďte dvěma různými způsoby.

Řešení:

Rozbor: Grafem funkce je kuželosečka, konkrétně parabola, která je konkávní v celém definičním oboru. Proto budeme hledat minimum dané funkce. Úlohu lze řešit několika způsoby, jsou vybrány tři z nich, kde první dva z nich spadají do učiva druhého ročníku středních škol, a třetí metoda se vyučuje na některých středních školách ve čtvrtém ročníku.

1) Řešení pomocí rozkladu na čtverec

Jako první si rovnici $y = x^2 + 5x + 6$ rozložíme na čtverec.

$$y = \left[x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \left(\frac{5}{2} \right)^2 \right] - \left(\frac{5}{2} \right)^2 + 6$$

$$y = \left(x + \frac{5}{2} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

Rovnici si upravíme do tvaru $\left(y + \frac{1}{4} \right) = \left(x + \frac{5}{2} \right)^2$. Protože hledáme minimum dané funkce, musíme najít nejmenší možnou hodnotu $y-\text{ové}$ souřadnice. Víme, že minimální hodnota výrazu na pravé straně je rovna nule, protože výraz je umocněn na druhou. Proto v minimu funkce je $x = -\frac{5}{2}$ a $y = -\frac{1}{4}$.

2) Řešení pomocí průsečíků s osou x.

Víme, že parabola je souměrná podle osy, která prochází jejím vrcholem, což je v našem případě hledané minimum funkce. Proto si nalezneme průsečíky s osou x. Souřadnice těchto průsečíků jsou $P_{x_1} = [x_1;\ 0]$ a $P_{x_2} = [x_2;\ 0]$. Dostáváme kvadratickou rovnici

$$0 = x^2 + 5x + 6$$

S použitím Vietových vzorců, které znějí: Mezi kořeny x_1, x_2 a koeficienty a, b, c kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ platí tyto vztahy: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ a $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ dostáváme $x_1 = -2$ a $x_2 = -3$. Protože je graf funkce souměrný, víme, že $x-\text{ová}$ souřadnice vrcholu leží uprostřed mezi $x-\text{ovými}$ souřadnicemi průsečíků. Odtud dostáváme $x = -\frac{5}{2}$ a dosazením do původní rovnice funkce dostáváme $y = -\frac{1}{4}$.

3) Řešení pomocí derivace

Víme, že pokud vypočteme první derivace z funkce $f(x)$ a položíme ji rovnou nule, dostaneme $x-\text{ovou}$ souřadnici extrému dané funkce.

$$f(x) = x^2 + 5x + 6$$

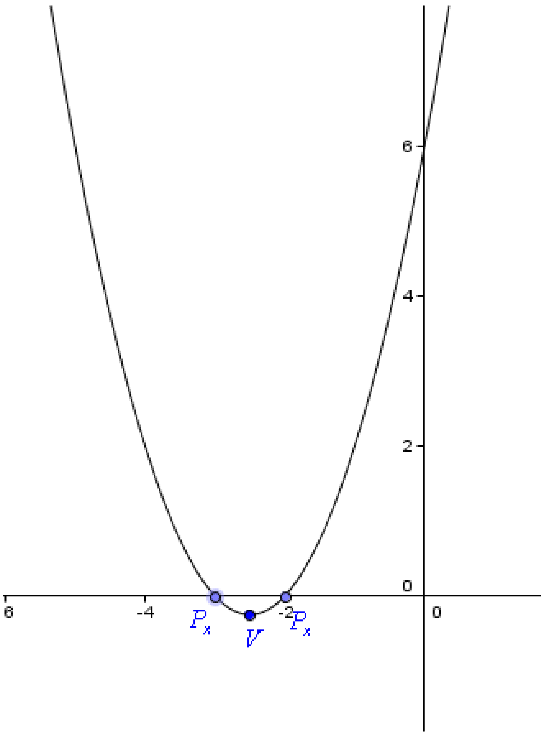
$$f'(x) = 2x + 5$$

$$0 = 2x + 5$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

Dosazením do původní rovnice funkce dostáváme $y = -\frac{1}{4}$.

Závěr: Řešením příkladu je bod $V = \left[-\frac{5}{2};\ -\frac{1}{4}\right]$, který je vrcholem paraboly. Situace je znázorněna na Obrázku 5.1. Řešení tohoto příkladu by se dále dalo provést metodou půlení intervalu, což je spíše záležitost výpočetní techniky, a samozřejmě existuje i vzorec pro výpočet vrcholu paraboly.



Obrázek 5.1

7. Závěr

Tato bakalářská práce je rozdělena do dvou hlavních částí. První z nich lze charakterizovat jako část teoretickou a druhou jako část praktickou. V první části jsme se nejprve zabývali matematickou olympiádou, její historií, účelem a organizací, a pro úplnost jsou uvedeny i ostatní matematické soutěže. Poté jsme se zabývali teorií kuželoseček, jejich historií a jejich využitím v praxi. Dále následuje teoretické popsání kuželoseček, kde jsme každou kuželosečku definovali a napsali její rovnici ve středovém tvaru.

Hlavním cílem této bakalářské práce bylo však rozčlenit příklady matematických olympiád obsahující kuželosečky a zjistit, jakého aparátu lze použít k jejich vyřešení. Na počátku vypracování této bakalářské práce se zdálo, že z pohledu metod řešení budou pouze dvě kapitoly, a to takové, kde se používá buď algebraických výpočtů, nebo geometrické konstrukce. Při procházení úloh matematických olympiád jsme ovšem narazili na nemalou skupinu příkladů, kde se tyto metody vyskytují zároveň. Proto jsme se rozhodli rozšířit práci o další kapitolu.

V kapitole, kde se úlohy řeší algebraicky, se nejčastěji vyskytuje parabola, kde se dá řešení často převést na kvadratickou rovnici o jedné neznámé. Tento typ příkladů je zde zastoupen **Příkladem 4.1.2**. V kapitole, kde se příklady řeší pomocí geometrické konstrukce, ovšem převládají jednoznačně kružnice. Domníváme se, že je to způsobeno tím, že ostatní kuželosečky se bez počítačových programů nedají přesně narýsovat. Příklady do této kapitoly jsme vybírali tak, aby v každém příkladě bylo využito jiného geometrického řešitelského aparátu. V **Příkladu 4.2.1** jsem narazila na typ Apolloniovy úlohy. Zabývají se Euklidovskými konstrukcemi kružnic (konstrukce pomocí kružítka a pravítka), které se mají dotýkat třech objektů a které jsou různě kombinovány. Mezi tyto objekty patří bod, kružnice a přímka. K řešení **Příkladu 4.2.2** jsme využili středové souměrnosti a v **Příkladě 4.2.3** jsme vyhledávali stejnolehlé trojúhelníky. V kapitole, kde se k sestrojení využívá algebraického výpočtu, se často vyskytují příklady, kde hledáme pravoúhlé trojúhelníky a díky Pythagorově větě pak dopočítáme hledanou délku, díky níž pak může provést samotnou konstrukci. Často se v úlohách matematických olympiád vyskytovaly příklady, kde byl uveden jiný matematický útvar než kuželosečka, jako například trojúhelník, čtverec atd. K sestrojení těchto příkladů se dalo využívat kuželoseček s určitou vlastností. Tyto příklady jsme však do práce nezahrnuli.

Na závěr bakalářské práce je prezentován vlastní příklad, který by mohl být použit v matematických olympiádách. Zadání tohoto příkladu je konstruováno tak, aby se dalo řešit více možnými způsoby s různou obtížností. Příklad by se tak mohl zařadit do různých kategorií matematických soutěží.

Doufám, že tato práce může sloužit jako pomůcka při výuce pro samotného učitele nebo jako užitečný zdroj informací pro žáky a studenty, kteří se pustí do řešení matematické olympiády nebo se budou o problematiku kuželoseček pouze zajímat.

8. Seznam použité literatury

- Ročenky matematické olympiády.
- HÁJKOVÁ, Ivana. *Kuželosečky a kvadriky ve výuce na SŠ.* Masarykova univerzita, Fakulta přírodovědecká, 2006. Diplomová práce. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/16896/prif_m/Text_prace.pdf.
- KONJATOVÁ, Petra. *Kružnice v analytické geometrii.* Plzeň, 2010. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky.
- LÁVIČKA, Miroslav. *KMA/G1 Geometrie 1: Pomocný učební text.* Plzeň, září 2008.115s.
- ŠMAUSOVÁ, Kateřina. *Analytická geometrie kvadratických útvarů v rovině.* Plzeň, 2010. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky.

Internetové zdroje:

- Československá lidová armáda. [online]. [cit. 2013-03-20]. Dostupné z: http://www.csla.cz/
- Matematická olympiáda. [online]. [cit. 2013-03-20]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/mo/
- Matematický Klokan. [online]. [cit. 2013-03-20]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net/
- Planet ware. [online]. [cit. 2013-03-20]. Dostupné z: http://www.planetware.com/

9. Resumé

The bachelor work deals with conics in Mathematical Olympiads. This work consists of two main parts. The first part is rather theoretical and it contains two chapters. The 2^{nd} chapter is about Mathematical Olympiads in the Czech Republic and covers these topics: their history, purpose and organization. The 3^{rd} chapter describes conics: their history, theory and usage. The second part of the work is rather practical. The 4^{th} chapter contains selection of various conic exercises from Mathematical Olympiads and their solutions. These exercises are solved with the use of algebraic calculations and geometric constructions. At the end of this work you can find exercise prepared by myself, which could be part of Mathematical Olympiads in the future.