ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

Kruhová inverze

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Hana Fuchsová

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň, 2013

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 10. června 2013

....

vlastnoruční podpis

Děkuji mému vedoucímu bakalářské práce Mgr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D., za jeho vedení, cenné rady, připomínky, za ochotu

Zde se nachází oficiální zadání bakalářské práce.

Zde se nachází rozhodnutí o náhradním termínu odevzdání bakalářské práce.

OBSAH

1 ÚVOD.. 8

2 KRUHOVÁ INVERZE 10

2. 1. DEFINICE, ZÁKLADNÍ POJMY A VLASTNOSTI.. 10

Příklad 2. 1. 1.. 11

2. 2. VÝZNAMNÉ BODY A OBJEKTY 12

3 KRUHOVÁ INVERZE V SYSTÉMU GEOMETRICKÝCH ZOBRAZENÍ 14

3. 1. GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ 14

3. 2. VZTAH MEZI OSOVOU SOUMĚRNOSTÍ A KRUHOVOU INVERZÍ............ 16

4 ZOBRAZENÍ BODŮ A DALŠÍCH OBJEKTŮ V KRUHOVÉ INVERZI.................... 17

4.1. OBRAZ BODU V ZÁVISLOSTI NA POLOZE VZORU 17

4. 2. ZOBRAZENÍ KRUŽNICE A PŘÍMKY PODLE POLOHY.................................. 18

4. 3. SAMODRUŽNÉ OBJEKTY.. 22

4. 4. ZPŮSOB EUKLIDOVSKÉ KONSTRUKCE OBRAZU V KRUHOVÉ INVERZI 24

Příklad 4. 4. 1.. 25

4. 5. Zobrazení kuželoseček v kruhové inverzi 26

5 APLIKACE KRUHOVÉ INVERZE.. 39

5. 1. POMOCNÉ ÚLOHY PŘI ŘEŠENÍ APOLLONIOVÝCH ÚLOH 40

Příklad 5. 1. 1.. 40

Příklad 5. 1. 2.. 41

Příklad 5. 1. 3.. 41

5. 2. APOLLONIOVY ÚLOHY 42

Příklad 5. 2. 1.: Apolloniova úloha typu BBp (bod, bod, přímka) 43

Příklad 5. 2. 2.: Apolloniova úloha typu BBk (bod, bod, kružnice)........................... 43

Příklad 5. 2. 3.: Apolloniova úloha typu Bpp (bod, přímka, přímka)......................... 44

Příklad 5. 2. 4.: Apolloniova úloha typu Bpk (bod, přímka, kružnice) 45

Příklad 5. 2. 5.: Apolloniova úloha typu Bkk (bod, kružnice, kružnice) 49

Příklad 5. 2. 6.: Apolloniova úloha typu pkk (přímka, kružnice, kružnice) 53

Příklad 5. 2. 7.: Apolloniova úloha typu kkk (kružnice, kružnice, kružnice) 55

5. 3. ÚLOHY S OMEZENOU NÁKRESNOU 58

Příklad 5. 3. 1 58

Příklad 5. 3. 2 59

6 ZÁVĚR 61

7 RESUMÉ 62

8 SEZNAM LITERATURY 63

9 SEZNAM OBRÁZKŮ 63

1 ÚVOD

S matematikou[1] se setkáváme každý den našeho života, i když si to nemusíme ani uvědomit. V našem životě má nezastupitelnou roli. První větší setkání s ní je již na základní škole. Díky ní se děti učí logickému myšlení, rozvíjí se jejich tvořivost a učí se zdůvodnit proč to tak je či není.

Samotná matematika se skládá z mnoha disciplín. Mezi nejvýznamnější a nejstarší patří geometrie[2]. Příroda kolem nás je plná nejrůznějších geometrických tvarů. Toho si všimli již pravěcí lidé a využili toho při výrobě svých nástrojů. Díky napodobování tvarů, které znali z přírody, se postupně začínají formovat první znalosti v oblasti geometrie. Zkušenosti, které lidé tímto způsobem získali, dále uplatňují například při stavbě svých obydlích apod. Již starověké civilizace si díky základním znalostem geometrie troufly vyměřovat pole, stavět lodě a dokonce realizovat také velice náročné stavební práce, jako například byly pyramidy, vodní nádrže, chrámy a další. Ovšem až díky starým Řekům byla matematika povznesena na vyšší úroveň. Řekové se od nezdůvodněných poznatků přenesli k teoriím, ve kterých hlavní roly měly důkazy předkládaných tvrzení. Mezi nejvýznamnější matematiky tamější doby patří Thales z Milétu, Pythagoras ze Samu, Euklides z Alexandrie, Aristoteles ze Stageiry či Apollonius z Pergy.

Jako téma své bakalářské práce jsem zvolila *Kruhovou inverzi,* kterou lze použít i při řešení tzv. Apolloniových úloh. Tato práce má za cíl přiblížit využití kruhové inverze, jak teoreticky, tak v praxi, protože většina lidí se s ní setká až na vysoké škole. Právě díky „neznalosti" kruhové inverze jsem se snažila, aby byl text srozumitelný a přehledný. Využívám také názorné ilustrace a příklady, které mají pomoci k snazšímu pochopení samotné látky.

Celou práci jsem rozdělila na 4 části:

- V první části je seznámení s kruhovou inverzí, zavádím její základní pojmy a vlastnosti. Dále uvádím významné body a objekty v kruhové inverzi
- V druhé části připomínám obecné rozřazení geometrického zobrazení. Přibližuji také vztah mezi osovou souměrností a kruhovou inverzí.

[1] slovo matematika pochází z řeckého slova *Mathematikós* = milující poznání
[2] z řeckých slov *gé* = země a *metrein* = měřit

- Ve třetí části teoreticky popisuji zobrazení bodů, kružnice a přímky podle polohy. V podbodě *Zobrazení kuželoseček v kruhové inverzi* chci formou diskuze přiblížit aplikaci kruhové inverze na elipsu, parabolu a hyperbolu.
- Ve čtvrté, závěrečné, části chci ukázat aplikaci kruhové inverze na prakticky zvolených příkladech.

Všechny obrázky jsou vytvořeny za pomocí matematického programu GeoGebra. Součástí práce je také přiložené CD, na kterém jsou všechny obrázky a dále také řešeny všechny příklady.

2 KRUHOVÁ INVERZE

2. 1. DEFINICE, ZÁKLADNÍ POJMY A VLASTNOSTI

K euklidovské rovině E_2 přidáme jeden prvek – tzv. **nevlastní bod** (značíme P_∞), který je prvkem každé přímky a leží vně každé kružnice v rovině E_2. Množina $M_2 = E_2 \cup \{P_\infty\}$ se nazývá **Möbiova rovina**. Bodům roviny E_2 říkáme **body vlastní.** Přímky roviny doplněné o bod nevlastní se nazývají **rozšířené přímky**.

(Lávička, 2007)

Nevlastní body nalezneme také v rozšířené euklidovské rovině $\overline{E_2}$. Touto skutečností se dostáváme k otázce, jaký je rozdíl mezi rozšířenou euklidovskou rovinou a Möbiovou[3] rovinou, když v obou rovinách figurují nevlastní body.

Do $\overline{E_2}$ patří euklidovská rovina rozšířená o nevlastní body, tzn., že máme například rovnoběžky d_1, d_2, které se protnou v nevlastním bodě $P\infty$ a rovnoběžky e_1 a e_2, které se protnou v bodě $E\infty$. V Möbiově rovině M_2 vystačíme pouze s jedním nevlastním bodem, rovnoběžky $d_1 – e_2$ se protnou v $P\infty$.

V Möbiově rovině M_2 je dána kružnice $\omega(S, r)$, dále uvažujme zobrazení INV(ω), které je definováno následujícím předpisem:

1. Obrazem středu S kružnice ω je nevlastní bod $P\infty$.
2. Obrazem nevlastního bodu $P\infty$ je střed S kružnice ω.
3. Obrazem libovolného bodu $X \neq S \wedge X \neq P\infty$ je bod X', který náleží polopřímce SX a též platí, že $|SX| \cdot |SX'| = r^2$

Kružnici ω budeme dále nazývat **základní kružnicí** kruhové inverze, střed S nazveme **středem kruhové inverze** a číslo r^2 pojmenujeme **koeficient (mocnost) kruhové inverze**, $\kappa \in R$, $\kappa \neq 0$. Pod koeficientem κ rozumíme zobrazení f: $M_2 \to M_2$, jehož zúžením na Euklidovskou rovinu E_2 je kruhová inverze. **Kruhovou inverzí** pak rozumíme zobrazení INV(ω), které se řídí již zmíněnými vlastnostmi.

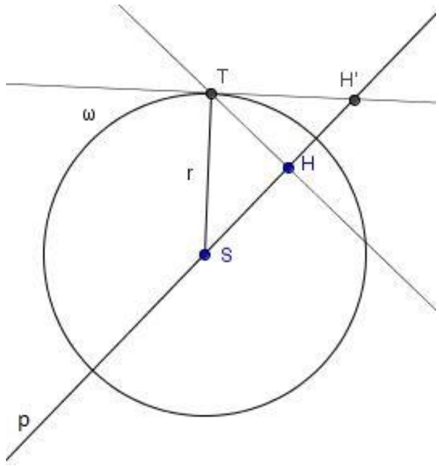
[3] August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) – německý matematik

Příklad 2. 1. 1.

Sestrojte obraz bodu H, který leží uvnitř kružnice ω(S, r).

Rozbor:

Nejdříve narýsujeme základní kružnici ω se středem S a libovolným poloměrem r. Dle zadání umístíme bod H do vnitřku kružnice. Sestrojíme přímku p, která vede body S, a H. V bodě H vztyčíme kolmici k přímce p, ta zároveň protne kružnici ω v bodě T. Z bodu T vedeme tečnu kružnice ω k přímce p. V místě, kde se tečna protne s přímkou p, vzniká bod H′, hledaný obraz bodu H.



Obrázek 2. 1. 1.

Konstrukce:

1) ω (S, r); H – podle zadání

2) p; p ∈ S ∧ p ∈ H

3) T; (H ⊥ p) ∩ ω

4) H′; ST ⊥ p

Diskuze:

Pokud by byl bod H vnějším bodem kružnice ω, postupovali bychom obdobně. Řešení plyne také z Euklidovy věty o odvěsně ($|SH| \cdot |SH'| = r^2$).

Pokud je koeficient $\kappa > 0$, tak kruhovou inverzi nazveme kladnou, jestli je $\kappa < 0$ tak zápornou. Jestliže se pohybujeme v euklidovském prostoru E_3, tak se už nebavíme o kruhové inverzi, ale o **kulové inverzi**.

V definici výše se nachází známá Euklidova věta o odvěsně ($|SX| \cdot |SX'| = r^2$). Pokud ji upravíme pomocí základních matematických postupů, dostaneme:

$$|SX'| = (r^2) / |SX|$$

Z této rovnice vidíme, že jde o nepřímou úměrnost, z toho plyne, že vzdálenost |SX| se nerovná vzdálenosti |SX′|. Pokud se například zvětší vzdálenost |SX|, tak se automaticky zmenší vzdálenost |SX′| a naopak.

Základní vlastnosti, které můžeme vyvodit z definice kruhové inverze, jsou:

- pokud X náleží základní kružnici ω, tak se X zobrazí na X′ ∧ X = X′.
- jestliže X patří vnitřku základní kružnice ω, tak X′ bude náležet vnějšku kružnice ω. [4]
- kruhová inverze je involutorní zobrazení. *(viz. kapitola 3)*

Teď víme, jak se pomocí kruhové inverze zobrazují body uvnitř/vně kružnice. Můžeme si tedy položit otázku, jak je to se zachováním úhlů? Máme základní kružnici ω(S, r) a dva body F, H ∧ F≠H ∧ F, H ≠ S, P∞. Ty v inverzi INV(ω) přecházejí na body F′ a H′, pak ∠SFH = ∠SH′F′.

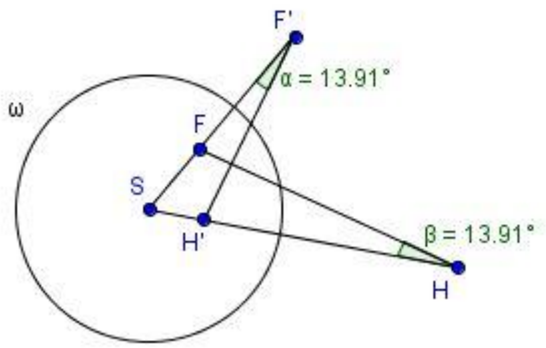
Podle Euklidovy věty o odvěsně pro body F, H a F´, H´ v kruhové inverzi platí $|SF| \cdot |SF'| = r^2$ a také $|SH| \cdot |SH'| = r^2$,

$|SF| \cdot |SF'| = |SH| \cdot |SH'| \qquad | : (|SF'| \cdot |SH|)$,

$|SF| / |SH| = |SH'| / |SF'|$.

Z *obrázku 2. 1. 2.* vidíme, že trojúhelníky jsou podobné podle věty *sus*, z toho tedy plyne

Δ SHF ~ Δ SF´H´ , potom ∠SFH = ∠SH´F´.



Obrázek 2.1.2.

2. 2. VÝZNAMNÉ BODY A OBJEKTY

Z předcházejících řádků můžeme odvodit, které geometrické objekty patří mezi nejvýznamnější body kruhové inverze. Jsou to bod, přímka a kružnice. Připomeňme je pomocí jejich vlastností.

Bod

„Bod nemá žádný díl.“ Tuto významnou větu nalezneme v Euklidových Základech, knize, která patří k nejvýznamnějším matematickým dílům. Body značíme v geometrii velkými tiskacími písmeny latinské abecedy, např. A, B, C. Dva body B, C mohou být různé (B ≠ C) anebo totožné (B = C).

[4] platí i naopak

Přímka

„Přímka je čára, která se svými body táhne rovně.“ Přímky značíme především malými písmeny latinské abecedy, např. a, b, p, nebo dvojicí bodů, které leží na přímce, např. přímka BC, apod. Dvě přímky si mohou být navzájem rovnoběžné (nemají společný bod), různoběžné (mají 1 společný bod, kterému se říká průsečík) a totožné (přímka BC = přímce DE).

Kružnice

Od pevného bodu S, vedeme vzdálenost r k jinému bodu B. Tento bod B leží na kružnici m. Bod S nazveme středem kružnice, pod r si představíme vzdálenost od bodu S k bodu B (nazýváme poloměrem kružnice). Zápis pro kružnici m je následovný – m(S, r). Body, jejichž vzdálenost je větší/ menší než r nazýváme vnitřní/ vnější body kružnice.

3 KRUHOVÁ INVERZE V SYSTÉMU GEOMETRICKÝCH ZOBRAZENÍ

3. 1. GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ

S geometrickým zobrazením se člověk setká již na základní škole. Pojďme připomenout jeho základní definici.

Geometrickým zobrazením (popř. geometrickou korespondencí či příbuzností) nazýváme předpis $\boldsymbol{f} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, který každému bodu X z množiny A (tzv. **vzoru**) přiřazuje nejvýše jeden bod $X' = f(X)$ z množiny B (tzv. **obraz**). Je-li rovněž přiřazení $f^{-1} : B \rightarrow A$ geometrickým zobrazením, potom jej nazýváme **inverzním zobrazením** k zobrazení f.

(Lávička 2006)

Rozdělme dále geometrická zobrazení podle jejich vlastností:

- **surjektivní** zobrazení (surjekce) – právě tehdy když $f(A) = B$
- **prosté** zobrazení, popř. **injektivní** (injekce) – různým vzorům jsou přiřazeny různé obrazy
- **vzájemně jednoznačné** zobrazení, popř. **bijektivní** (bijekce) – zobrazení f, které je zároveň prosté, surjektivní a každému prvku z množiny vzorů je přiřazen obraz
- **geometrická transformace** je jednoznačné zobrazení množiny A na sebe samu ($f : A \rightarrow A$)
- **identita** – právě tehdy když pro každé $X \in A$ je $f(X) = X$
- **involutorní** zobrazení – geometrická transformace na množině A, která je inverzní sama k sobě ($f = f^{-1}$) a zároveň není identitou

Geometrické zobrazení můžeme také rozdělit na zobrazení afinní, shodné nebo podobné. Připomeňme je v několika větách.

Afinní zobrazení

Mějme dva afinní prostory A_n a A_n'. Zobrazení $f : A_n \rightarrow A_n'$ pojmenujeme afinním zobrazením, právě tehdy když pro každé tři libovolné různé kolineární vzory $E, F, G \in A_n$ a jejich obrazy $E', F', G' \in A_n'$ platí:

- obrazy E', F', G' jsou buď opět tři různé kolineární body anebo splynou

- pokud jsou E′, F′, G′ tři různé kolineární body, tak musí platit (E, F, G) = (E′, F′, G′)[5]

Afinní zobrazení můžeme rozdělit dále na zobrazení shodné a podobné.

Shodná zobrazení

Mějme dva euklidovské prostory E_n a E_n'. Afinní zobrazení $f : E_n \rightarrow E_n'$ nazveme shodným zobrazením, právě tehdy když pro každé dva libovolné vzory F, G $\in E_n$ a jejich obrazy F′, G′ $\in E_n'$ platí:

- $|FG| = |F'G'|$
- shodná zobrazení zachovávají obsahy, objemy a velikost úhlů

Shodná zobrazení můžeme dále rozdělit na shodnosti přímé a nepřímé. Přímé shodnosti zachovávají orientaci úhlů a nepřímé orientaci obracejí. Mezi přímé shodnosti řadíme identitu, posunutí, otočení a středovou souměrnost. Do nepřímých shodností zařadíme osovou souměrnost a posunutou souměrnost.

U shodných zobrazení můžeme nalézt také body, které se zobrazí samy na sebe. Pojmenujme je společným názvem **samodružné body**. V některých matematických oborech je tento bod pojmenován také jako „pevný bod.“ Jelikož v následujících kapitolách dokážeme existenci samodružných bodů v kruhové inverzi a také v ní nemusíme rozlišovat vzor a obraz, můžeme ji zařadit mezi involutorní zobrazení.

Podobná zobrazení

Mějme dva euklidovské prostory E_n a E_n'. Afinní zobrazení $f : E_n \rightarrow E_n'$ nazveme podobným zobrazením, právě když existuje reálné číslo $k > 0$ a pro každé dva libovolné vzory F, G a jejich obrazy F′, G′ platí:

- $|F'G'| = k \cdot |FG|$
- podobná zobrazení zachovávají velikost úhlů, poměry obsahů a objemů

Stejně jako u shodností rozlišujeme podobnosti přímé a nepřímé. Mezi nejvýznamnější podobnosti patří stejnolehlost.

[5] (E, F, G) – dělící poměr tří kolineárních bodů

3. 2. VZTAH MEZI OSOVOU SOUMĚRNOSTÍ A KRUHOVOU INVERZÍ

Na první pohled nám nemusí být jasné, jaké vlastnosti mohou mít tyto dvě věci společné. Nejprve v pár větách připomeneme něco o osové souměrnosti.

Mějme přímku o. **Osovou souměrností** s osou o rozumíme zobrazení, které libovolnému bodu F přímky o přiřadí bod F′ tak, že F = F′. Dále libovolnému bodu X, který neleží na přímce o, je přiřazen bod X′ a přímka o je osou úsečky XX′.

Udělejme seznam společných vlastností osové souměrnosti a kruhové inverze:

- Z předchozích vět o osové souměrnosti vyplývá, že osa o je přímka, na které se nacházejí **samodružné body**. V kapitole *4. 3.* se dozvíme, že samodružné body nalezneme také v kruhové inverzi.
- V kruhové inverzi není třeba rozlišovat mezi vzorem a obrazem, protože patří mezi tzv**. involutorní zobrazení**. To samé můžeme říci i o osové souměrnosti.
- Dále víme, že osovou souměrnost je **nepřímé zobrazení** (obrací orientaci úhlů), v kapitole *4. 2.* dokážeme, že to samé platí i pro kruhovou inverzi.

Nakonec si uvědomme, že jak kruhová inverze, tak osová souměrnost jsou určitým typem inverze INV(p). Jestliže je p *kružnice*, mluvíme o **kruhové inverzi**. Pokud p je kružnice s nekonečně velkým poloměrem a středem v nevlastním bodě P∞, tzn. *přímka*, jedná se o **osovou souměrnost**.

4 ZOBRAZENÍ BODŮ A DALŠÍCH OBJEKTŮ V KRUHOVÉ INVERZI

4.1. OBRAZ BODU V ZÁVISLOSTI NA POLOZE VZORU

V *kapitole 2. 1.* jsme definovali základní vlastnosti kruhové inverze a Euklidův prostor jsme doplnili o nevlastní bod P∞. Než se začneme věnovat samotnému zobrazení objektů, uvědomme si, že v kruhové inverzi se vše týká především přímek a kružnic.

Nazvěme přímky a kružnice jako **kruhové křivky**. Shrňme některé jejich základní vlastnosti, které platí o kruhových křivkách v Möbiově rovině. Jsou-li a, b kruhové křivky, poté

- a bude rozšířená přímka, pokud se na ní bude nacházet nevlastní bod P∞, jestliže nevlastní bod nebude patřit rozšířené přímce a, bude se jednat o kružnici
- pokud jsou přímky a, b rozšířenými přímkami, tak se vždy protnou alespoň v jednom bodě
- kruhové křivky se protínají nejvýše ve dvou bodech
- pro určení kruhové křivky nám stačí libovolné 3 body

U poslední vlastnosti si musíme uvědomit, jaké je postavení libovolných 3 bodů. Můžeme dostat několik variant:

1. body F, G, H jsou kolineární, tzn. body ležící na stejné přímce – kruhovou křivkou je rozšířená přímka
2. body F, G, H jsou nekolineární – kruhovou křivkou je kružnice opsaná Δ FGH
3. jeden z bodů F, G, H je nevlastním bodem – protože se pohybujeme v Möbiově rovině, může nastat i tato možnost. Kruhovou křivkou bude opět rozšířená přímka.Z toho plyne, že v kruhové inverzi se kruhová křivka zobrazí opět na kruhovou křivku. Nazvěme tento proces **kruhovým zobrazením**.

Víme, že se obraz v kruhové inverzi zobrazí podle umístění vzoru. Pokud je vzor uvnitř základní kružnice ω, obraz se zobrazí vně této kružnice a naopak. Jak je to, ale se zachováním tvaru kruhové křivky?

4. 2. ZOBRAZENÍ KRUŽNICE A PŘÍMKY PODLE POLOHY

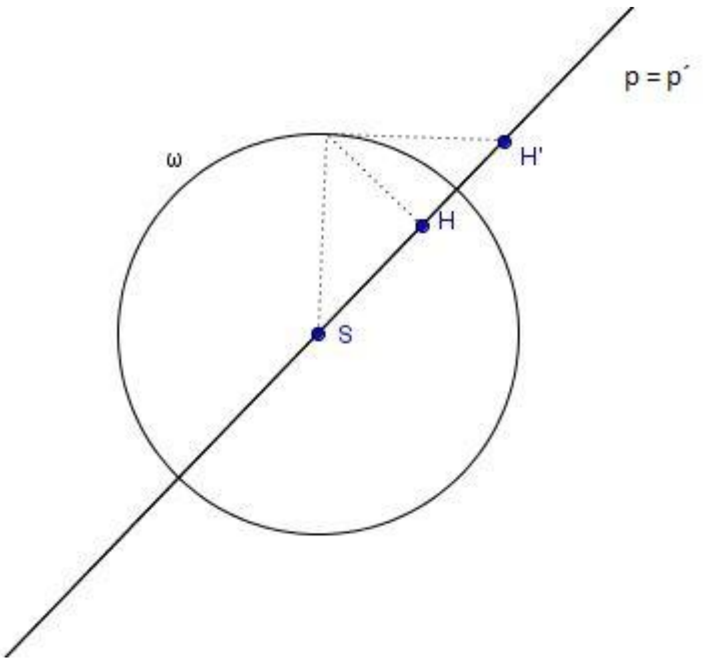
Nejdříve řekněme, jaké umístění bude mít kruhová křivka vůči základní kružnici ω. Již víme, že nezáleží, jestli objekt leží uvnitř či vně základní kružnice. Zatím nevíme, co se stane, když bude procházet středem kružnice ω, popř. nebude procházet jejím středem.

Rozdělme tedy umístění kruhových křivek do několika částí, tím zjistíme, jak se zobrazí jejich vzor po aplikaci kruhové inverze INV(ω).

1. Přímka p prochází středem kruhové inverze S.
2. Přímka p neprochází středem kruhové inverze S.
3. Kružnice l prochází středem kruhové inverze S.
4. Kružnice l neprochází středem kruhové inverze S.

add 1.

Víme, že libovolný bod H, H≠S, se v kruhové inverzi zobrazí na bod H´ *(př. 2. 1. 1.)* a body H, H´, S jsou kolineární. Z toho plyne, že libovolné body se zobrazí opět na přímku p. Bod S, který je středem kruhové inverze, se zobrazí na nevlastní bod P∞, tento bod můžeme také považovat za bod, které leží na přímce v M_2. Dále se nevlastní bod P∞, který leží na přímce p, zobrazí do bodu S. Z tohoto důvodu se také bod S zobrazí na přímku p. Z toho plyne, že se přímka p zobrazí sama na sebe, tzn. p = p´.

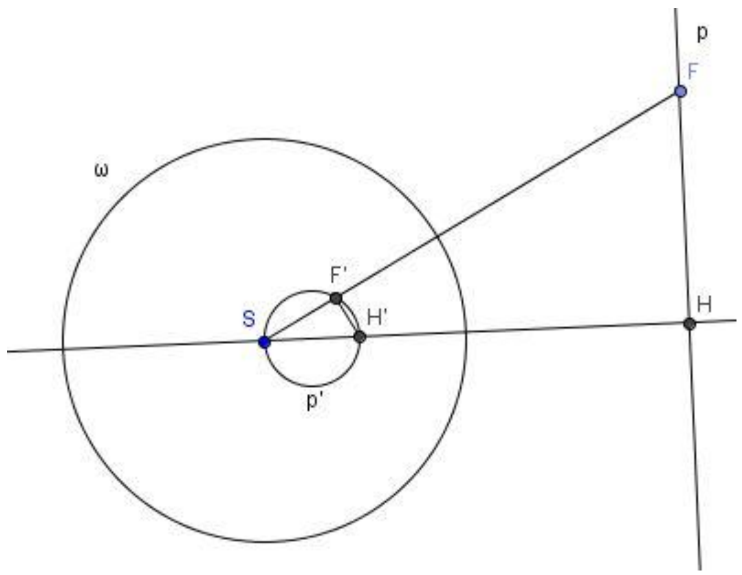


Obrázek 4. 2. 1.

add 2.

Přímku p umístíme jako vnější přímku kružnice ω. *(obr. 4. 1. 2.)* Zvolme bod H jako patu kolmice vedené ze středu S k přímce p. H´ bude její obraz ve výsledné aplikaci kruhové inverze. Nadále platí, že |SH| · |SH´| = r^2. Dále si na přímce p zvolme libovolný bod F, F ≠ H. V průsečíku přímky SF a Thaletovo kružnice p´, kterou jsme sestrojili nad průměrem SH´, nám vznikne bod F´. V kruhové inverzi ω(S, r) je bod F´ obrazem bodu F.

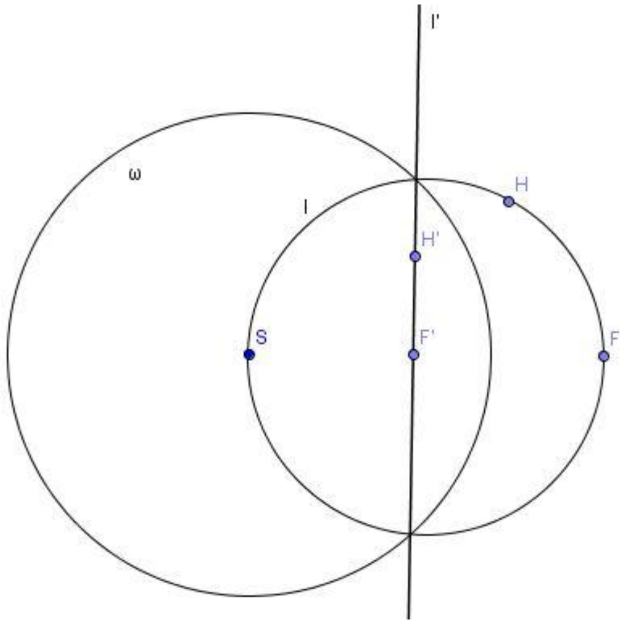
Z věty sus, o podobnosti trojúhelníků SH´F´ a SHF, nám vyplývá následující rovnost |SF´| / |SH´| = |SH| / |SF|. Po úpravě dostáváme |SF´| · |SF| = |SH| · |SH´|. Víme také, že |SF´| · |SF| = r^2, proto i |SH| · |SH´| = r^2. Uvědomme si tedy, že každý libovolný bod přímky p se zobrazí na kružnici p´. Nevlastní bod P∞ se také zobrazí na kružnici p´, jelikož se zobrazí do bodu S.



Obrázek 4. 2. 2.

add 3.

Kruhová inverze je v geometrickém zobrazení involucí, z tohoto důvodu vycházíme také z *add 2.* Přímka, která neprochází středem kružnice S, se zobrazí na kružnici, která prochází středem kružnice S a naopak kružnice, která prochází středem kružnice S, se zobrazí na přímku, která neprochází středem kružnice S. *(obr. 4. 2. 3.)*

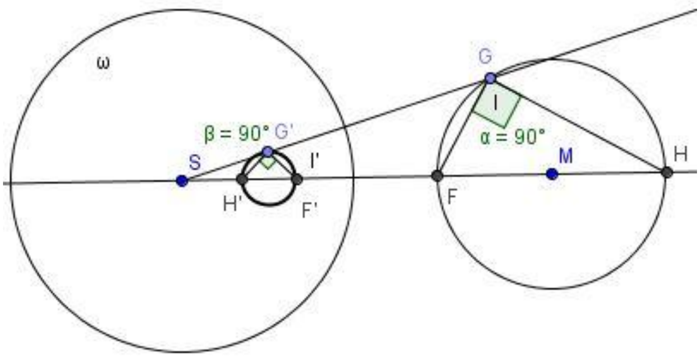


Obrázek 4. 2. 3.

add 4.

Kružnici l umístíme tak, aby neprocházela středem kruhové inverze S. Střed M kružnice l a střed S základní kružnice kruhové inverze ω spojíme přímkou p. Přímka p nám protne kružnici l ve dvou bodech F a H. Po aplikaci kruhové inverze nám tyto body přejdou na body F´ a H´, stále budou, ale ležet na přímce p. Zvolme si proto libovolný bod G, tak aby G ≠ F, H. Sestrojme nad průměrem F´H´ Thaletovu kružnici l´ a dokažme, že bod G´ bude ležet na obrazu kružnice l, tzn. na kružnici l´.

Z *obrázku 4. 2. 4.* vidíme, že ∠ FGH = 90°. Z věty sus, o podobnosti trojúhelníků, tedy vyplývá, že |∠ FGH| = |∠ F´G´H´|, případně |∠ F´G´H´| = 180° - |∠ FGH|. Jelikož se ∠ FGH = 90°, tak i ∠ F´G´H´ se musí rovnat 90°. Z toho plyne, že bod G´ leží na Thaletově kružnici l´. Tímto jsme dokázali, že obrazem kružnice l, která neprochází středem S kruhové inverze je kružnice l´, která též neprochází jejím středem S.



Obrázek 4. 2. 4.

Shrňme tedy ještě jednou zobrazení kruhových křivek v kruhové inverzi INV(ω).

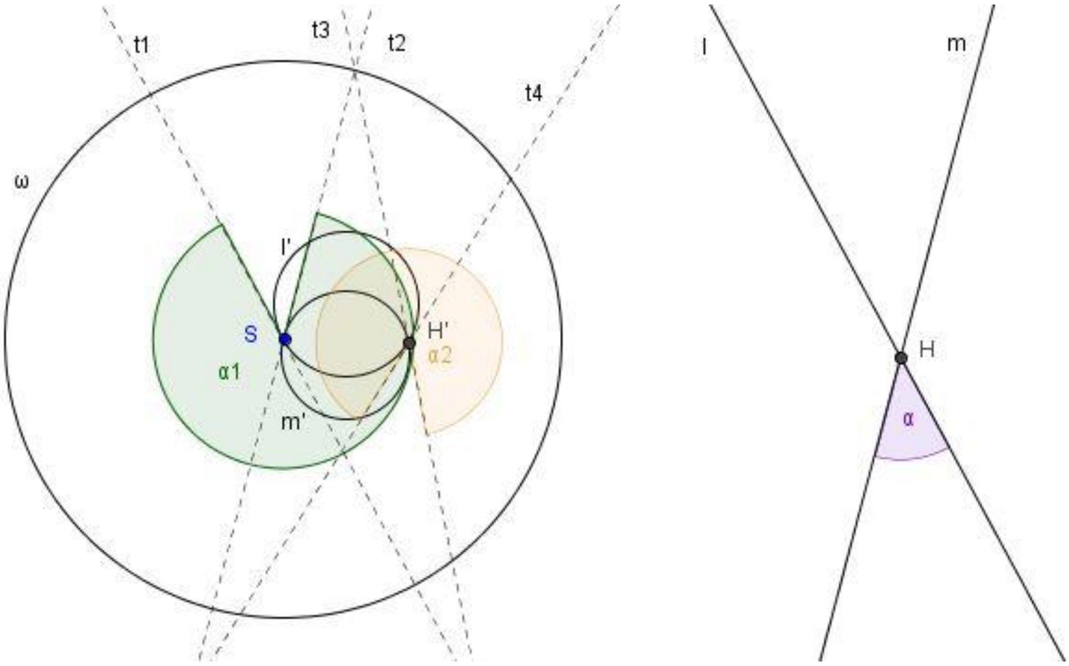
V Möbiově rovině je dána kružnice ω se středem S. Po aplikaci kruhové inverze platí:

- **Přímka** p, která **prochází** středem kruhové inverze S, se zobrazí na **přímku** p´ = p.
- **Přímka** p, která **neprochází** středem kruhové inverze S, se zobrazí na **kružnici** p´ procházející středem kruhové inverze S.
- **Kružnice** l, která **prochází** středem kruhové inverze S, se zobrazí na **přímku** l´, která neprochází středem kruhové inverze S.
- **Kružnice** l, která **neprochází** středem kruhové inverze S, se zobrazí na **kružnici**, která neprochází středem kruhové inverze S.

Dokázali jsme, že obrazem kruhové křivky je opět kruhová křivka. Pokud dvě kruhové křivky svírají určitý úhel o velikosti α, potom v kruhové inverzi také jejich obrazy svírají **úhel α stejné velikosti**, ale **opačného smyslu**.

Důkaz: Chceme určit úhel, který svírají dvě protínající se kružnice. Tento úkol si můžeme převést na určení úhlu, který svírají tečny v jednom z průsečíků. Pokud máme přímku a kružnici, tak je vhodné kružnici nahradit tečnou. Z toho plyne, že je lepší tyto úkoly, co nejvíce zjednodušit a pracovat pouze s úhlem, který svírají dvě přímky.

Je dána kruhová inverze ω(S, r) a přímky l, m, které se protínají v bodě H, H ≠ S. Ani jedna z přímek neprochází středem inverze S. Z vlastností aplikace kruhové inverze víme, že se tyto dvě přímky zobrazí na kružnice l´ a m´, které prochází středem S základní kružnice kruhové inverze ω. Kromě bodu S se také obě kružnice protínají v bodě H´, který je obrazem bodu H. Jelikož nás zajímá jaký úhel svírají tyto kružnice v bodě S, tak si to zjednodušíme na určení úhlu, který svírají tečny těchto kružnic v bodě H´, popř. v bodě S. Úhel tečen t_1, t_2 v bodě S bude odpovídat úhlu, který svírají tečny t_3, t_4 v bodě H´ kružnic l´ a m´. Tečny t_1 a t_2 jsou rovnoběžné s přímkami l a m, a proto budou svírat stejný úhel. Z toho plyne, že i tečny t_3, t_4 budou svírat stejný úhel jako obě přímky. Opačný smysl obou úhlů je zde jasný. Důkaz by se mohl zjednodušit a to tím, že by některá z přímek l, m procházela středem S.



Obrázek 4. 2. 5.

4. 3. SAMODRUŽNÉ OBJEKTY

Ve *3. kapitole* jsme připomněli, co je to samodružný bod. Nalezneme, ale takovýto bod také v kruhové inverzi? Víme, že libovolný bod H, který leží uvnitř základní kružnice ω, se po aplikaci kruhové inverze INV(ω) zobrazí do vnějšího okolí této kružnice. To samé platí také obráceně. Z toho vyplývá, že body nejsou samodružné, pokud leží mimo základní kružnici ω. Pokud libovolný bod H umístíme na kružnici ω, tak ze základních vlastností kruhové inverze víme, že se zobrazí na bod H´, H = H´, tzn., že **základní kružnice** je množinou samodružných bodů.

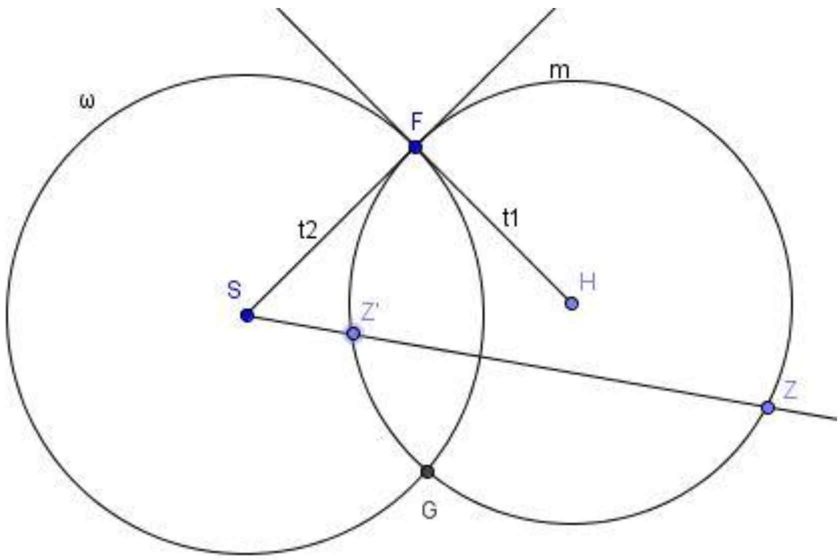
Jestliže nacházíme v kruhové inverzi samodružné body, je jasné, že zde nalezneme také **samodružné objekty**. To jsou objekty, které se, stejně jako samodružný bod, zobrazí samy na sebe.

Jaký objekt nás napadne jako první, pokud má být samodružný? Je to **přímka**, která prochází středem S kruhové inverze. Tento fakt jsme dokázali *v kapitole 4. 2., add 1.*

Položme si otázku, jestli kromě základní kružnice, existují v kruhové inverzi také nějaké jiné samodružné kružnice.

Vzpomeňme si, že když se protínají dvě kružnice m(H, r_0) a ω(S, r) které jsou na sebe kolmé, tak tečna jedné bude procházet středem druhé kružnice. To samé platí také opačně. Bude tedy kružnice m samodružná?

1. Předpokládejme, že kružnice m(H, r_0) kolmo protíná základní kružnici ω(S, r). Chceme dokázat, že obraz libovolného bodu na kružnici m bude, po použití kruhové inverze INV(ω), opět na kružnici m. Průsečíky F, G kružnic m a ω jsou samodružné. Z kolmosti obou kružnic je také jasné, že $t_1 \perp t_2$, popř. $t_3 \perp t_4$. Na kružnici m umístěna libovolný bod Z, Z ≠ F, G. Označme Z´ jako průsečík polopřímky SZ a kružnice m. Pro mocnost středu S ke kružnici m platí $|SZ| \cdot |SZ'| = |SG|^2 = r^2$. Z definice základních vlastností kruhové inverze je zřejmé, že obrazem bodu Z na kružnici m je bod Z´, který patří téže kružnici m. Z toho plyne, že kružnice m je samodružná.



Obrázek 4. 3. 1.

2. Předpokládejme naopak, že kružnice m je samodružná a m ≠ ω. Chceme dokázat, že m ⊥ ω. Kružnice m by nebyla samodružná, kdyby obsahovala pouze body vnitřní oblasti základní kružnice ω, protože její obraz by obsahoval pouze body z oblasti vnější, a naopak. Z toho plyne, že kružnice m musí obsahovat jak body vnější, tak vnitřní základní kružnice ω, abychom ji mohli nazývat samodružnou kružnicí. Proto kružnice m musí protínat kružnici ω ve dvou bodech F a G, F ≠ G. Obrazem libovolného bodu Z, Z ≠ F, G, kružnice m bude bod Z´, který se zobrazí též na kružnici m. Zároveň platí $|SZ| \cdot |SZ'| = r^2$. Průsečíky kružnic F, G jsou

samodružné body, proto se zobrazí sami na sebe. Z toho vyplývá, že $|SZ| \cdot |SZ'| = |SG|^2 = r^2$. Takže přímka SG má pouze jediný společný bod s kružnicí ω a to je bod G. Z toho plyne, že SG ⊥ HG a to znamená, že m ⊥ ω.

Zde jsme dokázali, že když dvě kružnice m a základní kružnice ω jsou na sebe kolmé, tak m je **samodružnou kružnicí**.

4. 4. ZPŮSOB EUKLIDOVSKÉ KONSTRUKCE OBRAZU V KRUHOVÉ INVERZI

Při konstrukcích geometrických úloh v praxi používáme rýsovací potřeby. Ty jsou z velké části zastoupeny pravítkem a kružítkem, někdy využíváme i pomocných rýsovacích potřeb, jako např. trojúhelník s ryskou, úhloměr apod. Těmito pomocnými pravítky si ulehčujeme práci. Avšak konstrukce, které je možno sestrojit jen za pomoci pravítka a kružítka nazýváme **euklidovské konstrukce**. Jak název napovídá, tak mají tyto konstrukce blízký vztah k Euklidovi a jeho prvním třem postulátům, které najdeme v knize *Základy*[6].

- Budiž úkolem od kteréhokoli bodu ke kterémukoli bodu vésti přímku.
- A přímku omezenou nepřetržitě rovně prodloužiti.
- A z jakéhokoli středu a jakýmkoli poloměrem narýsovati kruh.

(Lávička, 2007)

Pravítko a kružítko dostává v euklidovských konstrukcích zcela jiný význam, než jsme zvyklí. Euklidovské pravítko používáme především ke konstrukci přímek, úseček. Tedy jen ke spojení dvou libovolně vzdálených bodů. S tímto pravítkem neměříme vzdálenosti mezi body a ani s jeho pomocí nesestrojujeme rovnoběžky, popř. kolmice. Euklidovské kružítko lze využít k sestrojení kružnice z pevně zvoleného bodu o libovolném poloměru. Stejně jako klasickým kružítkem, tak i tím euklidovským můžeme přenášet délku, neboť mezi těmito kružítky není nutné dělat rozdíly.

Než budeme řešit samotné konstrukční úlohy, ať už se jedná o euklidovské konstrukce či Apolloniovy úlohy, zamysleme se krátce nad správnou volbou středu základní kružnice kruhové inverze ω. Při vhodné volbě středu základní kružnice ω se původní úloha převede na úlohu inverzní, která je, jak již víme, jednodušší. V úlohách, ve kterých využíváme kruhovou inverzi, se, pokud to půjde, řiďme následujícími doporučeními.

[6] S největší pravděpodobností je tato kniha dílem generací, kterou Euklides doplnil a zakončil.

1. Nachází-li se v úloze bod, zvolme si ho za střed základní kružnice kruhové inverze ω.
2. Jestliže v zadané úloze mají kružnice společný bod, zvolíme ho za střed základní kružnice ω.

Stejně důležité, jako zvolení středu inverze kružnice ω, je zvolení jejího správného poloměru, který by neměl být příliš malý, protože vhodnou volbou můžeme získat například samodružné kružnice. Dobré je vycházet z faktu, že vnitřní oblast kružnice se zobrazí na její vnější oblast a naopak.

Příklad 4. 4. 1.

Sestrojte pomocí euklidovské konstrukce obraz bodu F, který se nachází v kružnici ω(S, r).

Rozbor:

Úlohu budeme řešit obdobně jako v *příkladu 2. 1. 1.*, ale s pouze s pomocí euklidovských prostředků. Kružnici ω(S, r) a bod F naneseme podle zadání. Body S a F vedeme přímku p, na této přímce vzniká bod S´, který je stejně vzdálený k bodu F jako bod S. Sestrojíme kružnice k_1 a k_2, se středy v bodech S, S´ a vzdáleností SS´. V průsečíku těchto kružnic dostáváme bod P, tímto bodem a bodem F vedeme přímku l. V průsečíku kružnice ω a přímky l, vzniká bod T. Dále narýsujeme přímku m, na které se nachází body S, T, a stejným postupem jako u přímky p vznikne také bod, S´´. Následně sestrojíme kružnice o_1 a o_2(stejný postup jako u kružnic k_1 a k_2). V průsečíku těchto kružnic vznikne bod R, ze kterého vedeme k bodu T přímku n. Přímky n, a p se nám protnou v hledaném obrazu bodu F.

Konstrukce:

1) ω(S, r), F – podle zadání

2) p; $p \in S \wedge p \in F$

3) S´; $(|SF| = |FS'|) \wedge S' \in p$

4) k_1, k_2; $k_1(S, |SS'|)$, $k_2(S', |S'S|)$

5) P; $P \in (k_1 \cap k_2)$

6) l; $l \in P \wedge l \in P$

7) T; $T \in (\omega \cap l)$

8) m; m $\in$ S $\wedge$ m $\in$ T

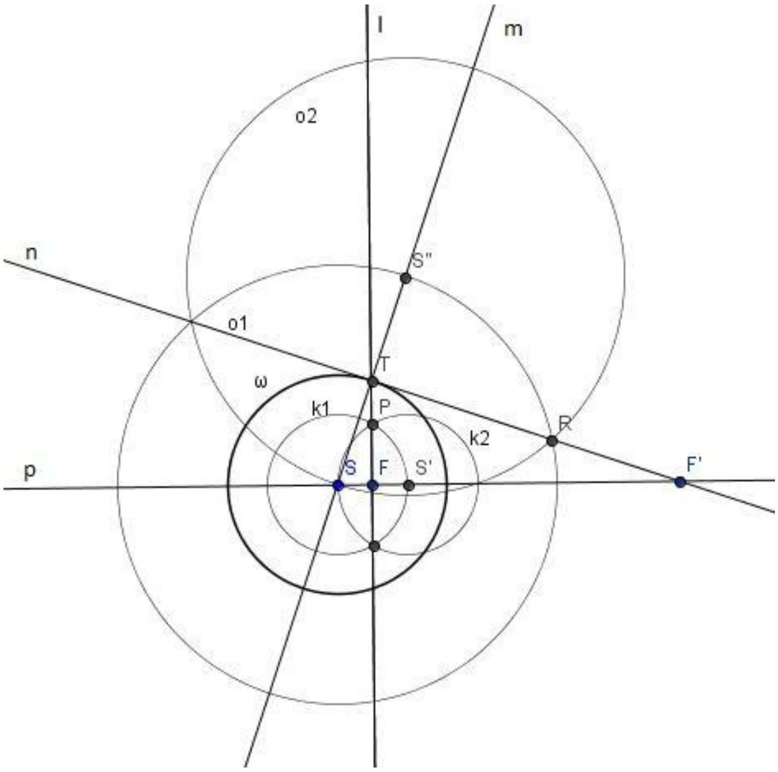
9) S´´; (|ST| = |TS´´|) $\wedge$ S´´ $\in$ m

10) o_1, o_2; o_1(S, |SS´´|), o_2(S´´, |S´´S|)

11) R; R $\in$ ($o_1 \cap o_2$)

12) n; n $\in$ T $\wedge$ n $\in$ R

13) F´; F´ $\in$ (n $\cap$ p)



Obrázek 4. 4. 1.

Diskuze:

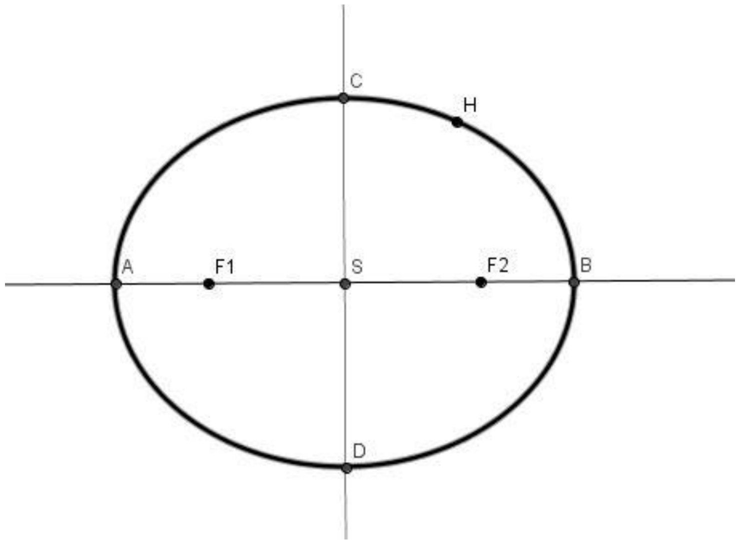
Ze zápisu konstrukce vidíme, že řešení pomocí euklidovských prostředků je velice zdlouhavé, oproti *příkladu 2. 1. 1.*, ale také vede k hledanému obrazu bodu F.

4. 5. Zobrazení kuželoseček v kruhové inverzi

Ukažme chování kuželoseček při aplikaci kruhové inverze. Vyberme elipsu, hyperbolu a parabolu. Ze všeho nejdříve připomeneme jejich vlastnosti. Samotnou aplikaci kruhové inverze na těchto kuželosečkách berme spíše jako diskuzi, ve které ukážeme, jak se mohou zobrazit.

Elipsa je množina všech bodů v euklidovské rovině E_2, které mají konstantní součet vzdáleností 2a, od pevně zvolených bodů F_1 a F_2. Tyto body pojmenujme *ohniska*. Pokud na elipse umístíme libovolný bod (např. H), tak úsečka, která bude spojovat bod H s jedním z ohnisek, nazveme *průvodič*. Za *střed elipsy* zvolíme střed S úsečky F_1F_2. Pod pojmem *excentricita* si zaveďme vzdálenost ohnisek od středu.

V místě, kde přímka F_1F_2 protíná elipsu, jsou *hlavní vrcholy* A, B. Těmito body vedeme přímku AB, kterou nazýváme *hlavní osa*. Úsečka AS, popř. SB je *hlavní poloosa*. *Vedlejší vrcholy* C, D najdeme v místě, kde osa úsečky F_1F_2 protíná elipsu. Dále přímku CD označme jako *vedlejší osu* a pod pojmem *vedlejší poloosa* si představme úsečku CS, popř. SD.

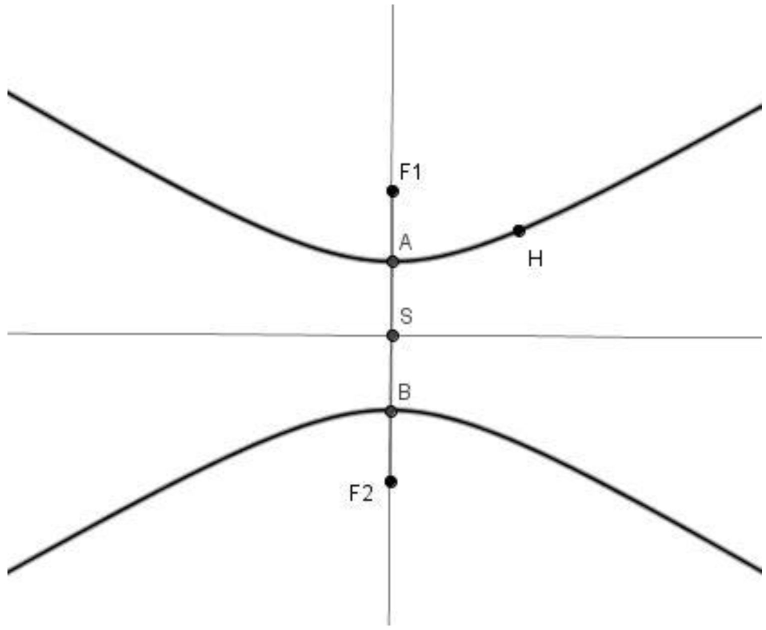


Obrázek 4. 5. 1.

Hyperbola je množina všech bodů v euklidovské rovině E_2, které mají konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností 2a, od pevně zvolených bodů F_1 a F_2. Tyto body pojmenujme *ohniska*. Pokud na hyperbole umístíme libovolný bod (např. H), tak úsečky, které spojují bod H s ohnisky, budou *průvodiče*. Za *střed hyperboly* zvolíme střed S úsečky F_1F_2. Pod pojmem *excentricita (lineární výstřednost)* si zaveďme vzdálenost ohnisek od středu. Dále víme, že se hyperbola skládá ze dvou částí, kterým říkáme *větve hyperboly*, tyto větve nemají žádný společný bod.

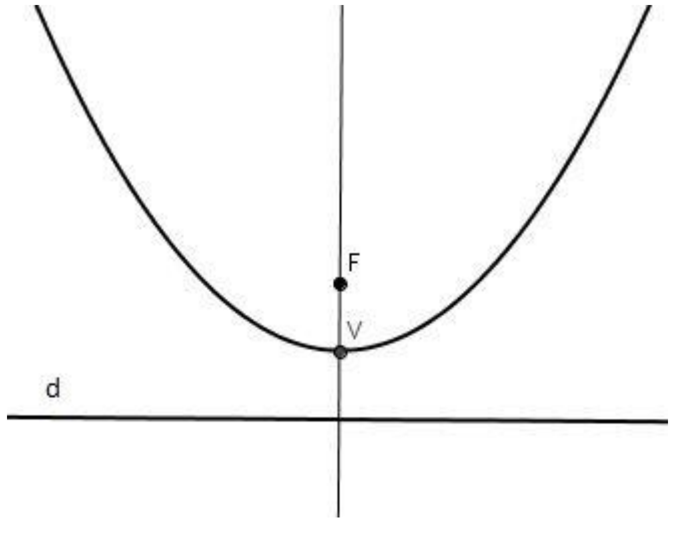
V místě, kde přímka F_1F_2 protíná hyperbolu, jsou (*hlavní) vrcholy* A, B. Těmito body vedeme přímku AB, kterou nazýváme *hlavní osa*. Úsečka AS, popř. SB je *hlavní poloosa*. Na rozdíl od elipsy *vedlejší osa* úsečky F_1F_2 hyperbolu neprotíná.

Z předchozích řádků o hyperbole vidíme, že má velice podobné vlastnosti jako elipsa.



Obrázek 4. 5. 2.

Parabola je množina všech bodů v euklidovské rovině E_2, které od bodu F a přímky d (F $\notin$ d) mají shodné vzdálenosti. *Ohniskem* paraboly je bod F, přímku d pojmenujme *direkční (řídící) přímka*. Pod pojmem *parametr* (p), se skrývá vzdálenost direkční přímky d od ohniska F. Úsečku libovolného bodu H a ohniska, dále kolmici tímto bodem k direkční přímce nazveme *průvodiče*. *Osou paraboly* je osa souměrnosti a její průsečík V s parabolou nazveme *vrcholem paraboly*.



Obrázek 4. 5. 3.

Hyperbolu, elipsu i parabolu označíme společným názvem **regulární kuželosečky**. I přes to, že každá z těchto kuželoseček má definici, speciální pro každou z nich. Můžeme u nich najít společné vlastnosti.

Všechny body $X \in E_2$, jejichž vzdálenost od pevně zvoleného bodu F a od pevně zvolené přímky d ($F \notin d$) jsou v konstantním poměru

$$|XF| / |X, d| = \varepsilon > 0,$$

leží na regulární kuželosečce, jejímž ohniskem je bod F a jejíž direkční přímkou příslušnou k ohnisku F je přímka d. Navíc platí:

- $\varepsilon < 1 \leftrightarrow$ k je elipsa
- $\varepsilon = 1 \leftrightarrow$ k je parabola
- $\varepsilon > 1 \leftrightarrow$ k je hyperbola

(Lávička, 2008)

Pokud bychom brali, že kružnice může být speciálním případem elipsy, tak by zřejmě platilo, že pro ni je $\varepsilon = 0$.

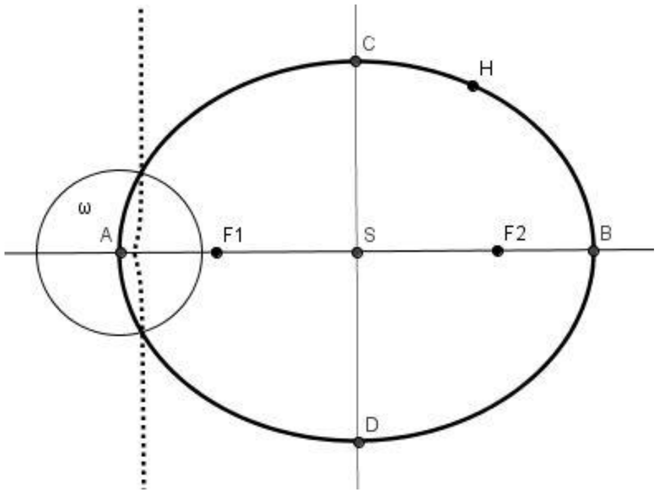
Připomněli jsme základní vlastnosti zkoumaných kuželoseček. Nyní můžeme přejít k samotné aplikaci kruhové inverze na nich.

Zobrazení elipsy v kruhové inverzi

Ze všeho nejdříve si uvědomme, kde všude se může nacházet střed kružnice. Určeme základní body, které si zvolíme pro střed základní kružnice ω. Jsou to – hlavní a vedlejší vrcholy, ohniska, střed, dále body, které se nacházejí na vně, uvnitř a na samotné elipse. V některých případech nás může ovlivnit také poloměr kružnice ω.

1. *Střed kružnice ω v jednom z hlavních vrcholů, libovolný poloměr*

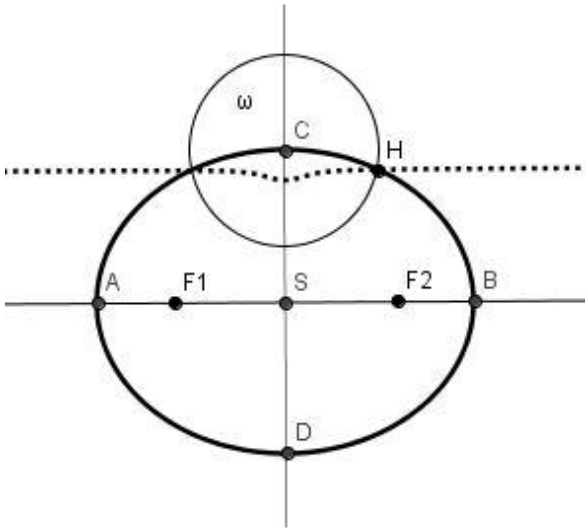
   Obraz elipsy tvarově připomíná přímku, která se v průniku kružnice ω s elipsou prohne směrem k hlavnímu vrcholu, který je středem ω.



Obrázek 4. 5. 4.

2. *Střed kružnice ω v jednom z vedlejších vrcholů, libovolný poloměr*

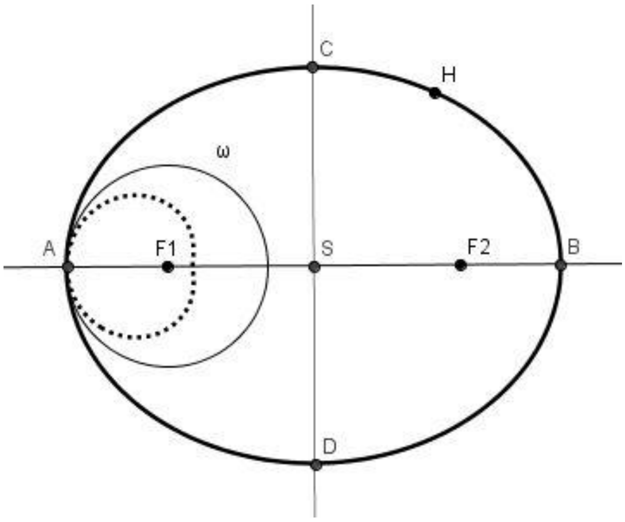
   Tvarově téměř stejná jako v předchozím případě, pouze je prohnutá ke středu elipsy.



Obrázek 4. 5. 5.

3. *Střed kružnice ω v ohnisku, libovolný poloměr*

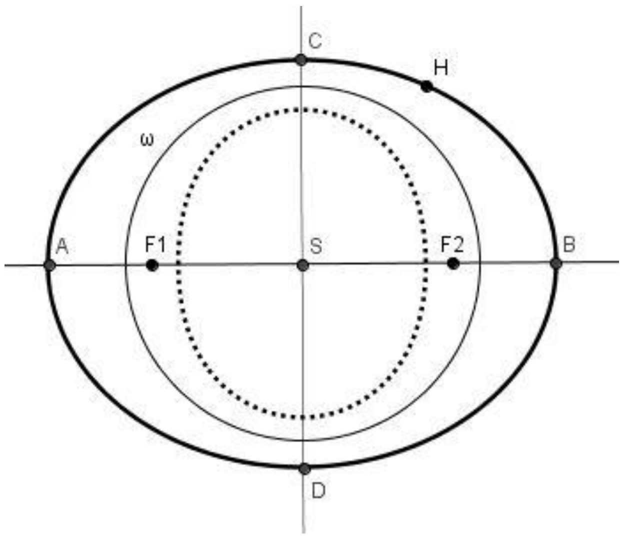
   Obraz tvarem připomíná elipsu, část je prohnuta směrem k ohnisku, u kterého se nachází základní kružnice kruhové inverze ω. Pokud bude mít kružnice různé poloměry, tak se zachová stále stejný tvar obrazu. Zajímavé je, že výsledný obraz bude ležet ve stejné poloze jako kružnice ω, např. při vnitřním doteku ω s elipsou se bude výsledný obraz také dotýkat elipsy.



Obrázek 4. 5. 6.

4. *Střed kružnice ω stejný jako střed elipsy, libovolný poloměr*

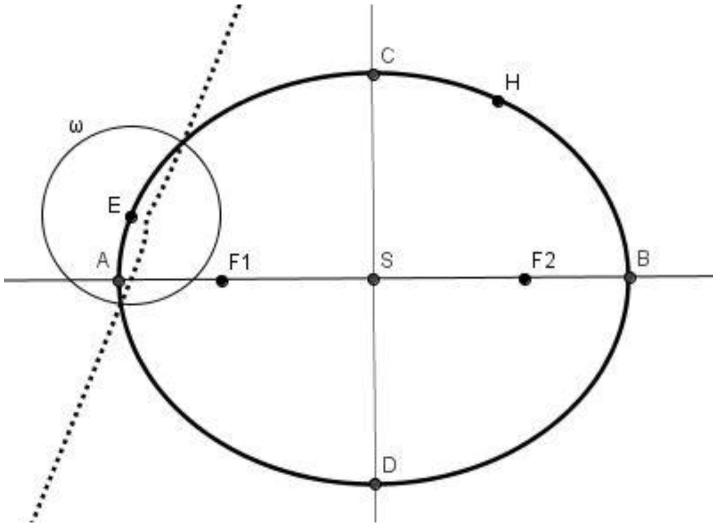
   V této poloze je obraz podobný elipse, ovšem její hlavní vrcholy bychom našli naproti vedlejších vrcholů vzoru. Se zvětšujícím se poloměrem kružnice ω se zvětšuje výsledný obraz v kruhové inverzi.



Obrázek 4. 5. 7.

5. *Střed kružnice ω v libovolném bodu, který se nachází na elipse, libovolný poloměr*

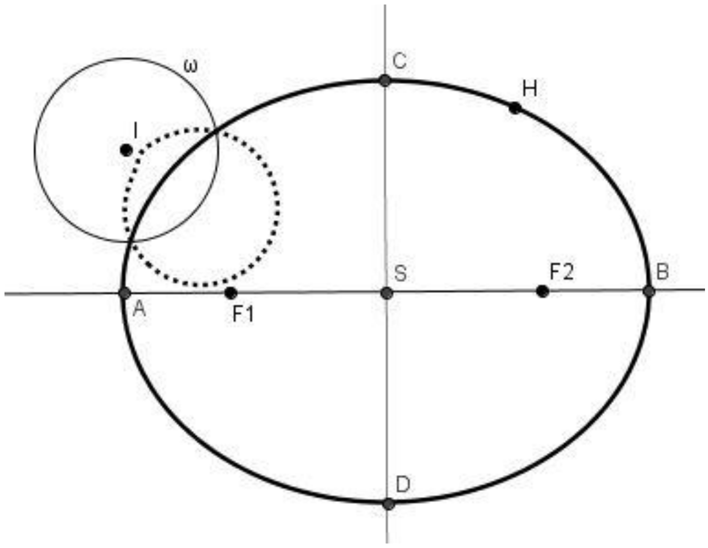
   Po aplikaci kruhové inverze dostáváme obraz podobný přímce, která se prohýbá směrem ke středu elipsy. Pokud se ovšem blížíme k ohniskům, tak se začíná prohýbat k hlavním vrcholům vzoru.



Obrázek 4. 5. 8.

6. *Střed kružnice ω v bodě, který leží vně elipsy, libovolný poloměr*

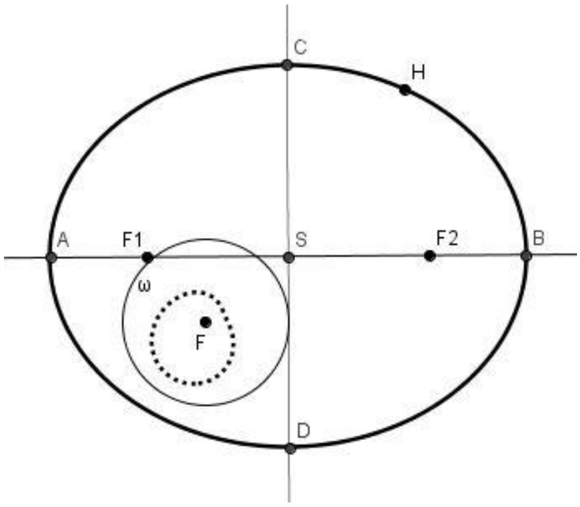
   Zde je zajímavé, že se obraz nezobrazí všude, ale jen v některých místech. Čím je vnější bod elipsy blíž, tím větší je výsledný obraz. Tvarově připomíná kružnici, která je zašpičatělá směrem ke středu základní kružnice kruhové inverze ω.



Obrázek 4. 5. 9.

7. *Střed kružnice ω v bodě, který se nachází uvnitř elipsy, libovolný poloměr*

   Obraz je tvarově stejný jako v případě, když bod leží vně elipsy. Zajímavé je, že se zobrazí v každém místě a je zrcadlově překlopený, tzn. osově souměrný.



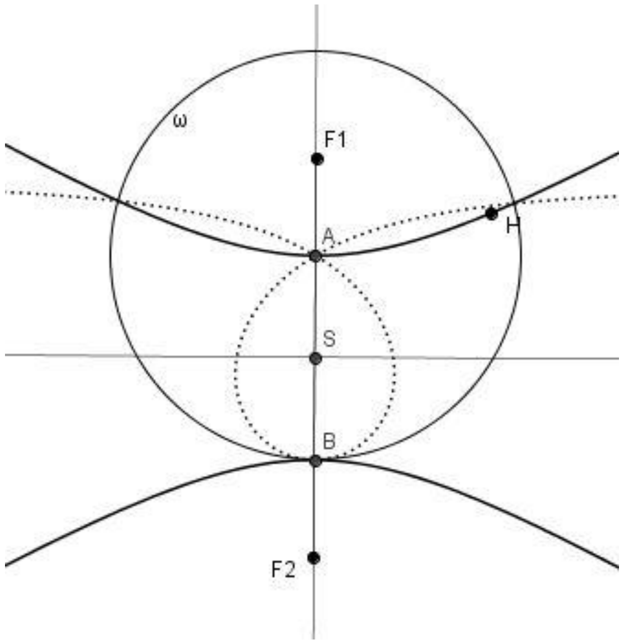
Obrázek 4. 5. 10.

Zobrazení hyperboly v kruhové inverzi

Obdobně jako u zobrazení elipsy umístíme střed základní kružnice ω do hlavních vrcholů, ohnisek, středu, vnitřku a vnějšku hyperboly a také na její křivku.

1. *Střed kružnice ω v jednom z hlavních vrcholů, libovolný poloměr*

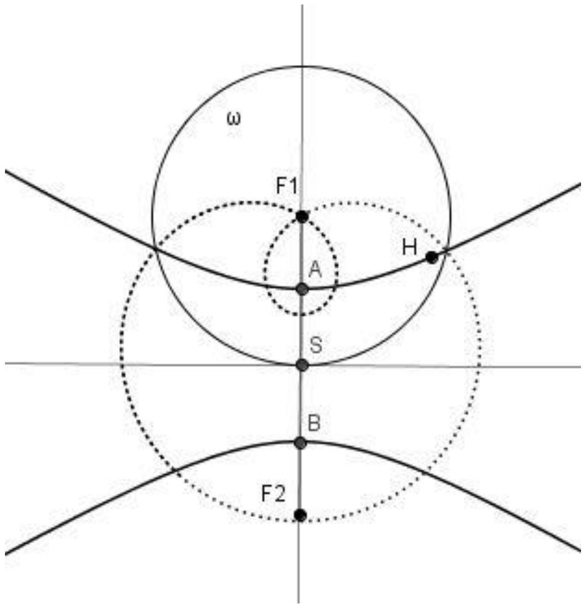
   Obraz hyperboly v kruhové inverzi připomíná tvarem přímku, která se uvnitř kružnice mění na smyčku. Čím větší má kružnice ω poloměr, tím větší je samotný obraz hyperboly po aplikaci kruhové inverze.



Obrázek 4. 5. 11.

2. *Střed kružnice ω v ohnisku, libovolný poloměr*

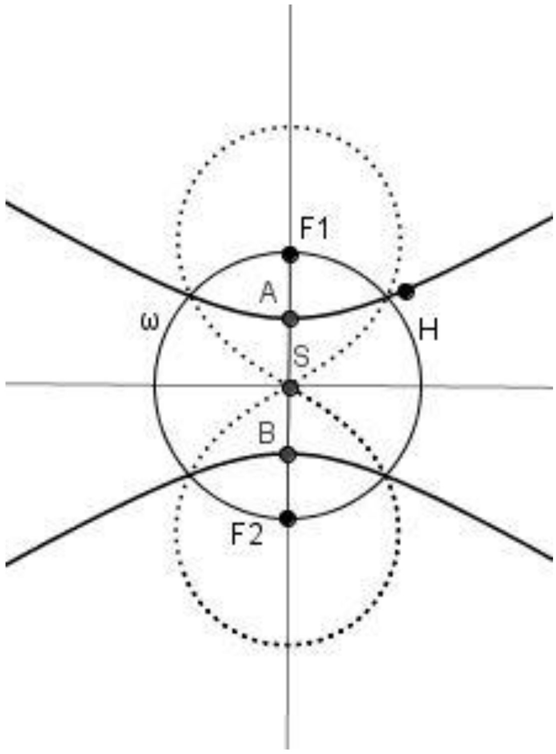
   V této poloze dostáváme dva tvary. Pokud se kružnice ω dotýká vrcholu hyperboly, dostáváme tvar podobný kružnici, která se v ohnisku mírně prohýbá a prochází daným vrcholem. V ostatních případech se hyperbola změní na kružnici se smyčkou.



Obrázek 4. 5. 12.

3. *Střed kružnice ω ve středu hyperboly, libovolný poloměr*

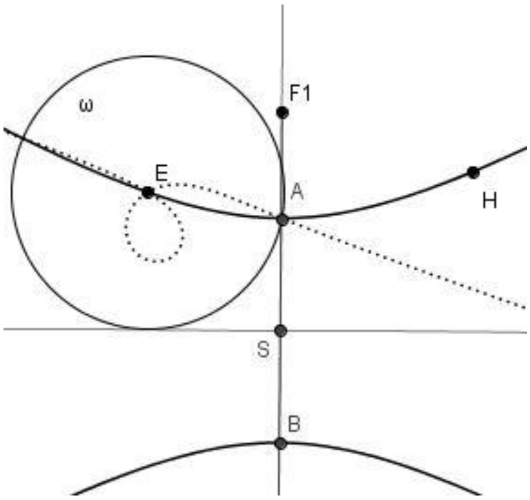
   Po aplikaci kruhové inverze výsledný obraz hyperboly připomíná osmičku, která se zvětšuje, když se zvětšuje poloměr základní kružnice ω.



Obrázek 4. 5. 13.

4. *Střed kružnice ω v libovolném bodu, který se nachází na hyperbole, libovolný poloměr*

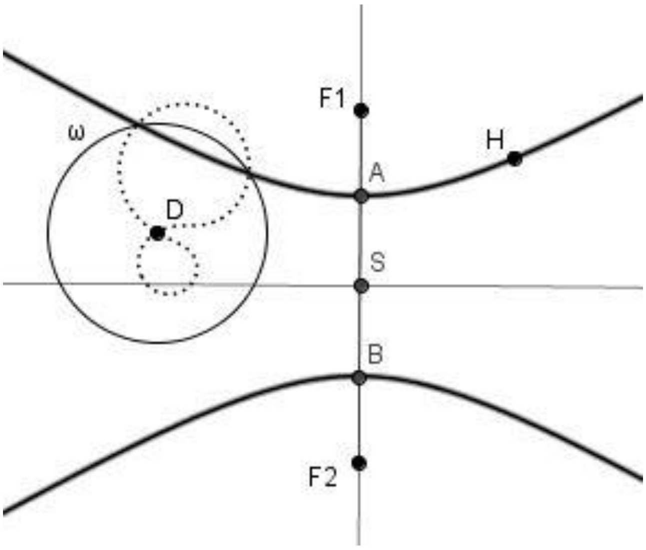
   Dostáváme opět tvar přímky, který přechází vevnitř kružnice ω do smyčky, ta směřuje k vrcholu.



Obrázek 4. 5. 14.

5. *Střed kružnice ω v bodě, který leží vně hyperboly, libovolný poloměr*

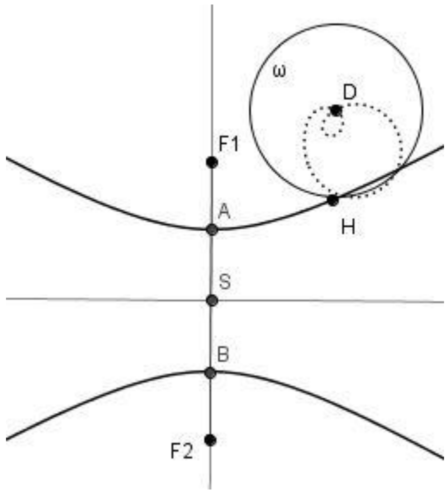
   Obraz hyperboly se nachází v základní kružnici ω, tvarem připomíná osmičku, jejíž jedna část je větší. Záleží, u kterého vrcholu jsme.



Obrázek 4. 5. 15.

6. *Střed kružnice ω v bodě, který leží uvnitř hyperboly, libovolný poloměr*

   V této poloze obraz hyperboly tvarově opět připomíná kružnici, která prochází středem základní kružnice ω a v něm tvoří smyčku.



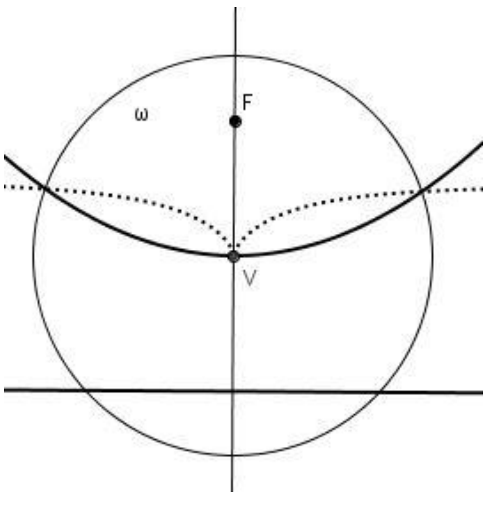
Obrázek 4. 5. 16.

Zobrazení paraboly v kruhové inverzi

Za střed základní kružnice ω postupně zvolíme vrchol, ohnisko, křivku, řídící přímku paraboly. Dále také její vnější a vnitřní oblast.

1. *Střed kružnice ω ve vrcholu paraboly, libovolný poloměr*

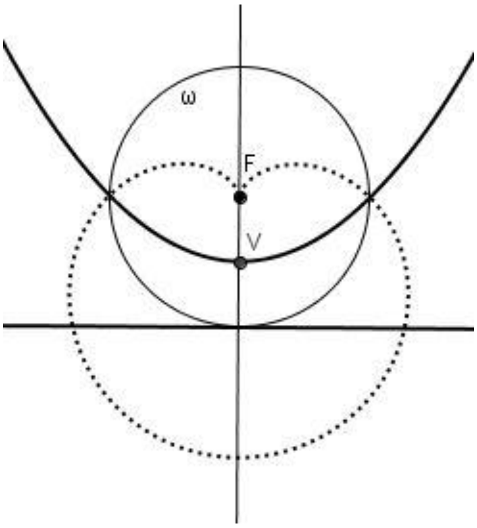
   V takto zvoleném bodě se při aplikaci kruhové inverze se obraz paraboly podobá přímce, která se uvnitř základní kružnice ω ostře láme ze shora ve vrcholu vzoru.



Obrázek 4. 5. 17.

2. *Střed kružnice ω v ohnisku, libovolný poloměr*

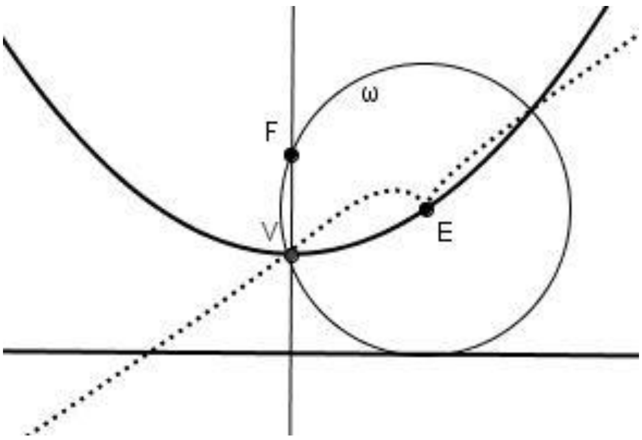
   Obraz paraboly připomíná tvarově kružnici, která je ostře zlomená v ohnisku. Tento obraz paraboly může připomínat také tvar srdce.



Obrázek 4. 5. 18.

3. *Střed kružnice ω v libovolném bodu, který se nachází na parabole, libovolný poloměr*

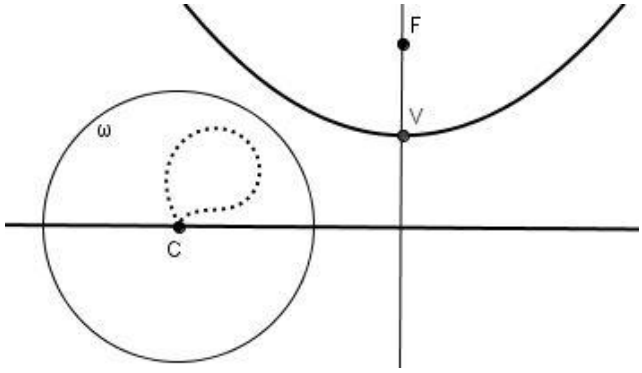
   Dostáváme tvar, který je stejný jako v případě základní kružnice ω se středem na křivce hyperboly, tzn. přímka, která přechází uvnitř kružnice do smyčky směřující k vrcholu.



Obrázek 4. 5. 19.

4. *Střed kružnice ω na řídící přímce paraboly, libovolný poloměr*

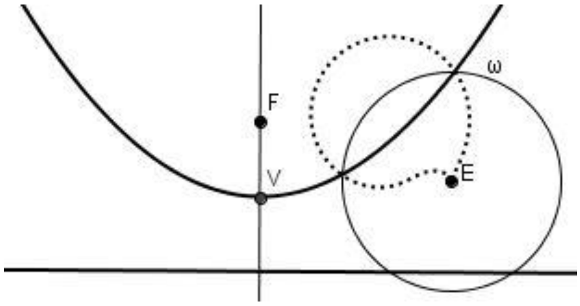
   V tomto případě je zajímavé, že se obraz paraboly nezobrazí od určité vzdálenosti. Tvar uvnitř kružnice ω připomíná kružnici se špičkou. Pokud protneme kružnici, tak výsledný obraz ji také protne.



Obrázek 4. 5. 20.

5. *Střed kružnice ω v bodě, který leží vně paraboly, libovolný poloměr*

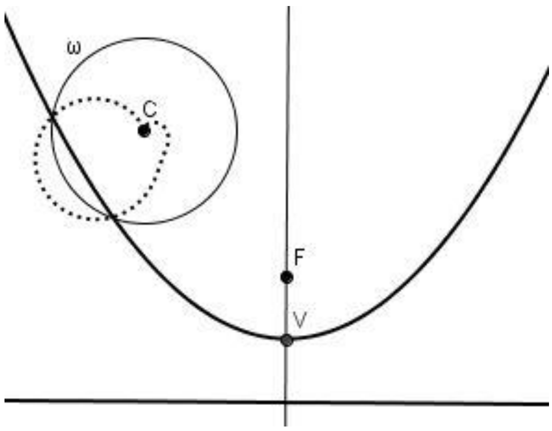
   Tvarově stejný obraz jako v předchozím případě. Z toho plyne, že řídící přímka nijak neovlivňuje tvar výsledného obrazu



Obrázek 4. 5. 21.

6. *Střed kružnice ω v bodě, který leží uvnitř paraboly, libovolný poloměr*

   Po aplikaci kruhové inverze vzniká kružnice připomínající srdce. To zvětšuje své strany podle toho, které části paraboly je blíže.



Obrázek 4. 5. 22.

5 APLIKACE KRUHOVÉ INVERZE

S kruhovou inverzí se běžně nesetkáme v učivu základní ani střední školy. Většinou se o ní poprvé člověk doslechne až na vysoké škole. Proto může nastat otázka, jestli je kruhová geometrie. Speciálními úlohami, ve kterých nám kruhová inverze ulehčuje jejich řešení, jsou Apolloniovy úlohy a úlohy s omezenou nákresnou. Než ukážeme jejich samotné řešení, řekneme o nich něco bližšího.

Apollonios z Pergy (262 př. n. l. – 200 př. n. l.) patří k jedněm z nejvýznamnějších řeckých matematiků v helénistickém období. Věnoval se také fyzice a astronomii. Je autorem mnoha knih, např. osmisvazkového díla *Kuželosečky, O odtínání v poměru, O dotycích*. Poslední zmíněná dvoudílná kniha nebyla zachována, ale je známa z děl Pappose z Alexandrie. Tato kniha pojednává o konstrukcích kružnic, které se dotýkají zadaných útvarů (přímka, bod, kružnice). Tyto úlohy dnes nazýváme jako **Apolloniovy úlohy**.

V minulosti se Apolloniovy úlohy těšily velkému zájmu. Věnovali se jim významní matematici jako Pierre de Fermat, Isaac Newton či Francois Viéte. Apollonius požadoval, aby se tyto úlohy řešily pouze euklidovskými prostředky, tzn. jen s využitím pravítka a kružítka. Ve znění Apolloniových úloh se vyskytují pouze bod, přímka a kružnice, tj. 3 objekty, které se mohou libovolně kombinovat. Tvoříme kombinace třetí třídy z 3 prvků s opakováním.

$$C'_k(n) = C'_3(3) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{5}{3} = 10$$

Z rovnice je vidět, že Apolloniovy úlohy mají 10 variant a každá úloha může mít až 8 řešení.

1. BBB	6. Bkk
2. BBp	7. ppp
3. BBk	8. ppk
4. Bpp	9. pkk
5. Bpk	10. kkk

Speciálním typem Apolloniových úloh jsou Pappovy úlohy. V Pappově úloze alespoň jeden ze zadaných prvků je bod, který leží na přímce nebo kružnici. Celkem máme 6 typů těchto úloh.

5. 1. POMOCNÉ ÚLOHY PŘI ŘEŠENÍ APOLLONIOVÝCH ÚLOH

Část Apolloniových úloh řešíme pomocí kruhové inverze. Po vhodné volbě středu pro základní kružnici ω se úloha převede na vnitřní úlohu, která se dá se již lépe řešit. Ukažme postup řešení pomocných vnitřních úloh. Řešení úloh je řazeno tak, aby na sebe navazovalo.

U některých řešení využíváme znalostí, které jsme načerpali již na ZŠ. Jedná se o sestrojení tečny ke kružnici z bodu, společné tečny dvou kružnic a sestrojení kružnice vepsané a opsané trojúhelníku. Počítá se s tím, že je každý umí sestrojit.

Příklad 5. 1. 1.

Sestrojte chordálu[7] dvou neprotínajících se kružnic k(A, r) a m(B, r).

Rozbor:

Přímku p vedeme středem kružnic k(A, r) a m(B, r). Dále najdeme společné tečny obou kružnic. V průniku libovolně zvolené tečny a obou kružnic dostaneme body P a Q. Určíme střed S na úsečce PQ. Tímto středem vedeme kolmici k přímce p. Kolmá přímka k přímce je hledaná chordála 2 neprotínajících se kružnic.

Konstrukce:

1) p; $p \in A \wedge B$

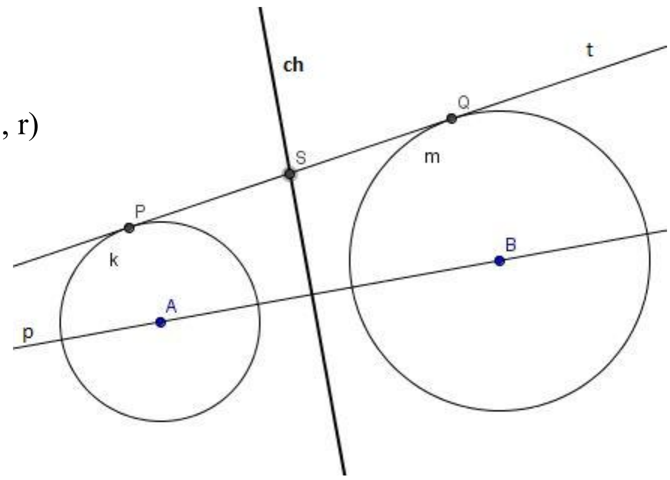
2) t; tečna kružnic kružnic k(A, r), m(B, r)

3) P; $P \in (k \cap t)$

4) Q; $Q \in (m \cap t)$

5) S; $S \in t \wedge (S = |PQ| / 2)$

6) ch; $S \perp p$



Obrázek 5. 1. 1.

Diskuze:

Tato úloha má 1 řešení.

---

[7]Přímka c, která je množinou všech bodu v rovině majících stejnou mocnost k nesoustředným kružnicím k_1 a k_2, se nazývá **chordála** kružnic k_1, k_2. (Lávička, 2007)

Příklad 5. 1. 2.

Převeďte neprotínající se kružnice k(A, r), m(B, r) na soustředné kružnice.

Rozbor:

V průsečíku přímky p, prochází středy kružnic, a chordály ch vznikne bod Q. Z bodu Q vedeme ke kružnici m(B, r) tečnu t_1. V průsečíku kružnice m a tečny t_1 dostáváme bod T. Dále zkonstruujeme kružnici l(Q, |QT|). Dostaneme body P_1 a P_2. Zvolíme základní kružnici kruhové inverze ω a po aplikaci kruhové inverze se nám kružnice k a m zobrazí na soustředné kružnice se středem v bodě P_2.

Konstrukce:

1) p; $p \in A \wedge B$

2) ch; chordála kružnic k(A, r) a m(B, r)

3) Q; $Q \in (p \cap ch)$

4) t_1; tečna vedená z bodu Q ke kružnici m(B, r)

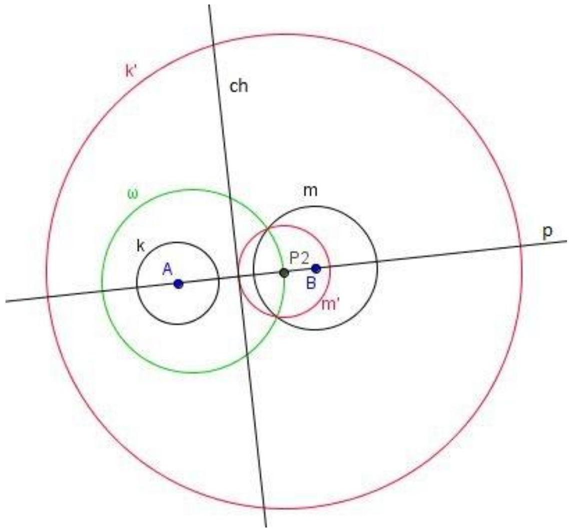
5) T; $T \in (t_1 \cap m)$

6) l; l (Q, |QT|)

7) P_1, P_2; $P_1, P_2 \in (l \cap p)$

8) ω; ω (P_1, $|P_1P_2|$)

9) Inv(ω); k kružnice → k´ kružnice, m kružnice → m´ kružnice



Obrázek 5. 1. 2.

Diskuze:

Tato úloha má 1 řešení.

Příklad 5. 1. 3.

Sestrojte kružnice, které se dotýkají 3 kružnic. 2 kružnice jsou soustředné a 3. leží v mezikruží těchto 2 kružnic.

Rozbor:

Hledané kružnice se mají dotýkat všech 3 kružnic, proto za středy kružnic l_1 a l_2 zvolíme bod A a velikost poloměru bude $\frac{r1 \pm r2}{2}$. Dále zkonstruujeme kružnice m_1 a m_2 se středem v bodě B a poloměrem $r_3 \pm \frac{r1 - r2}{2}$. V průniku kružnice l_1 s kružnicemi m_1 a m_2 vzniknou body $P_1 - P_4$, které později zvolíme za střed hledaných kružnic $o_1 - o_4$ s poloměrem $\frac{r1 - r2}{2}$. Obdobně postupujeme u dalších 4 hledaných kružnic.

Konstrukce:

1) l_1; $l_1(A, \frac{r1 + r2}{2})$

2) m_1; $m_1(B, r_3 + \frac{r1 - r2}{2})$

3) m_2; $m_2(B, r_3 - \frac{r1 - r2}{2})$

4) P_1, P_4; $P_1, P_4 \in (l_1 \cap m_1)$

5) P_2, P_3; $P_2, P_3 \in (l_1 \cap m_2)$

6) $o_1 - o_4$; $o_1 - o_4(P_1 - P_4, \frac{r1 - r2}{2})$

7) l_2; $l_2(A, \frac{r1 - r2}{2})$

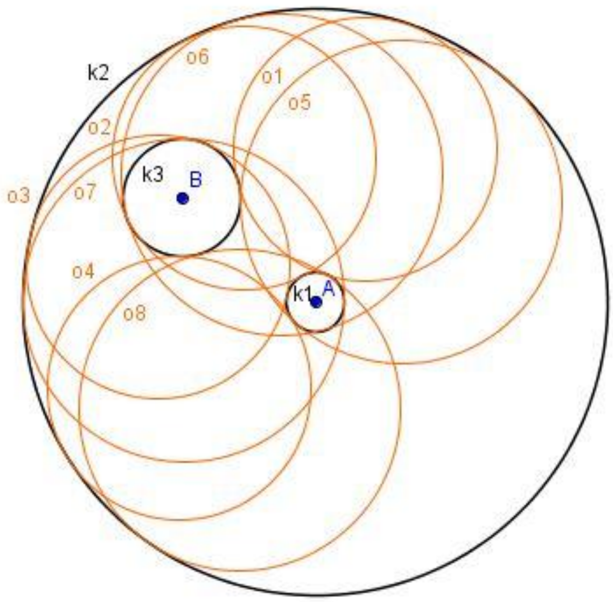
8) n_1; $n_1(B, r_3 + \frac{r1 + r2}{2})$

9) n_2; $n_2(B, r_3 - \frac{r1 + r2}{2})$

10) Q_1, Q_4; $Q_1, Q_4 \in (l_2 \cap n_1)$

11) Q_2, Q_3; $Q_2, Q_3 \in (l_2 \cap n_2)$

12) $o_5 - o_8$; $o_5 - o_8(Q_1 - Q_4, \frac{r1 + r2}{2})$



Obrázek 5. 1. 3.

Diskuze:

Tato úloha má 8 řešení.

5. 2. APOLLONIOVY ÚLOHY

Jak již víme, máme 10 typů Apolloniových úloh. Každá tato úloha má několik variant řešení. Nebudeme představovat všechny, ukážeme řešení pouze těch, ve kterých využíváme vlastnosti kruhové inverze.

Příklad 5. 2. 1.: Apolloniova úloha typu BBp (bod, bod, přímka)

Sestrojte kružnici m, která prochází body F, H a dotýká se přímky p.

- Je dána přímka p a dále body F, H neleží na přímce p. Body F, H leží ve stejné polorovině a přímka p je různoběžná s přímkou FH.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Sestrojíme přímku p a body F, H podle výchozího zadání úlohy. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě F a poloměrem FH. Pomocí kruhové inverze se přímka p zobrazí na kružnici p´, bod F se zobrazí na nevlastní bod a bod H je samodružný. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení tečen t_1, t_2 z bodu H ke kružnici p´. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z tečen $m´_1$ a $m´_2$ dá hledané kružnice m_1 a m_2.

Konstrukce:

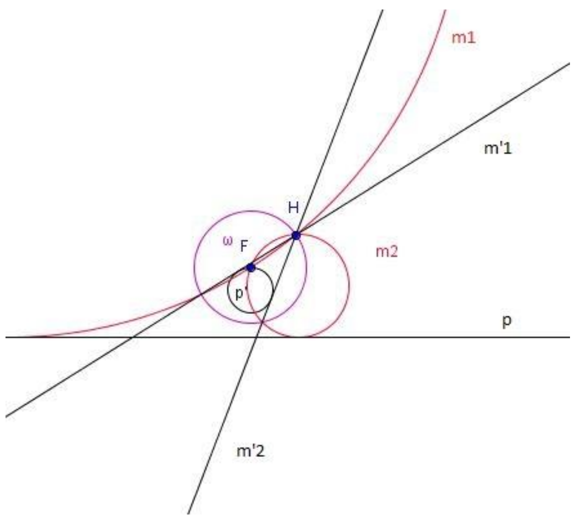
1)p, F, H – podle zadání

2) ω; ω(F; |FH|)

3) Inv(ω); p přímka → p´ kružnice

4) $m´_1$, $m´_2$; tečny z bodu H ke kružnici p´

5) Inv(ω); $m´_1$ přímka → m_1 kružnice, $m´_2$ přímka → m_2 kružnice



Obrázek 5. 2. 1.

Diskuze:

Tato úloha má právě 2 řešení, protože z bodu H ke kružnici p´ lze vést 2 tečny, které se zobrazí na výsledné kružnice m_1 a m_2.

Příklad 5. 2. 2.: Apolloniova úloha typu BBk (bod, bod, kružnice)

Sestrojte kružnici m, která prochází body F, H a dotýká se kružnice l(S, r).

- Je dána kružnice l a body F, H leží vně (uvnitř) kružnice l.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Sestrojíme kružnici l a body F, H podle výchozího zadání úlohy. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě F a poloměrem FH. Pomocí kruhové inverze se kružnice l zobrazí na kružnici l´, bod F se zobrazí na nevlastní bod a bod H je samodružný. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení tečen m'_1, m'_2 z bodu H ke kružnici l´. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z tečen m'_1, m'_2 dá hledané kružnice m_1 a m_2.

Konstrukce:

1)l(S, r), F, H – podle zadání

2) ω; ω(F; |FH|)

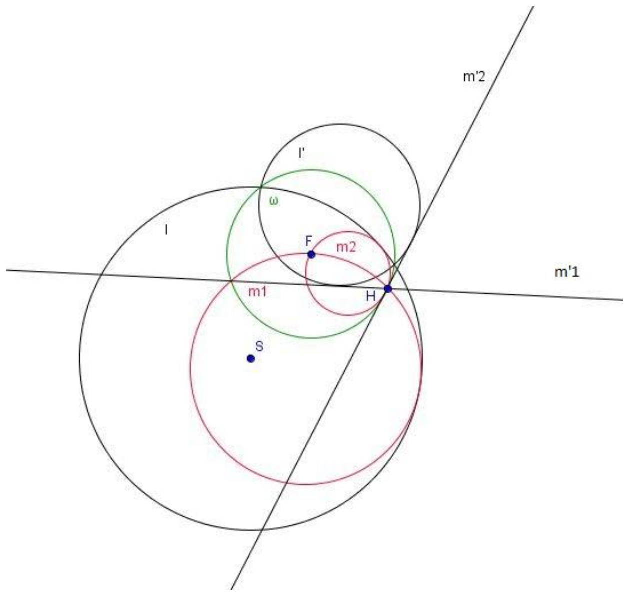
3) Inv(ω); l kružnice → l´ kružnice

4) m'_1, m'_2; tečny z bodu H ke kružnici l´

5) Inv(ω); m'_1 přímka → m_1 kružnice, m'_2 přímka → m_2 kružnice

Diskuze:

Tato úloha má právě 2 řešení, protože z bodu H ke kružnici l´ lze vést 2 tečny, které se zobrazí na výsledné kružnice m_1 a m_2.



Obrázek 5. 2. 2.

Příklad 5. 2. 3.: Apolloniova úloha typu Bpp (bod, přímka, přímka)

Sestrojte kružnici m, která prochází bodem H a dotýká se přímek p_1 a p_2.

- Jsou dány různoběžky p_1, p_2 a dále bod H neleží na žádné z přímek p_1,p_2.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Sestrojíme přímky p_1, p_2 a bod H podle výchozích zadání úlohy. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě H a libovolným poloměrem r. Pomocí kruhové inverze se přímky p_1, p_2 zobrazí na kružnice p'_1, p'_2 a bod F se zobrazí na nevlastní bod. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení tečen kružnic p'_1 a p'_2. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z tečen m'_1 a m'_2 dá hledané kružnice m_1 a m_2.

Konstrukce:

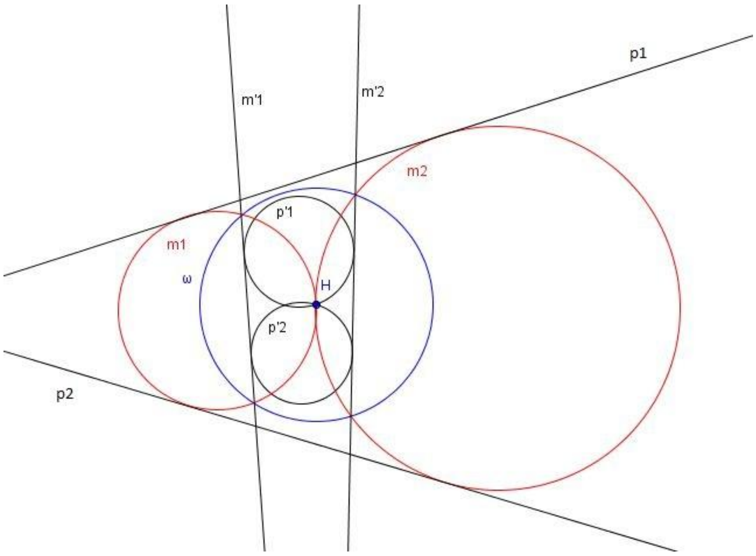
1) H, p_1, p_2 – podle zadání

2) ω; ω(H, r) – libovolná velikost r

3) Inv(ω); p_1 přímka → p'_1 kružnice, p_2 přímka → p'_2 kružnice

4) m'_1, m'_2; společné tečny kružnic p'_1 a p'_2

5) Inv(ω); m'_1 přímka → m_1 kružnice, m'_2 přímka → m_2 kružnice



Obrázek 5. 2. 3.

Diskuze:

Tato úloha má právě 2 řešení, protože 2 protínající se kružnice mají 2 společné tečny, ze kterých pomocí aplikace kruhové inverze vzniknou výsledné kružnice m_1 a m_2.

Příklad 5. 2. 4.: Apolloniova úloha typu Bpk (bod, přímka, kružnice)

Sestrojte kružnici m, která prochází bodem H a dotýká se přímky p a kružnice l(S, r).

a) Je dán bod H, který nenáleží přímce p ani kružnici l. Přímka p neprochází kružnicí l. Bod H a kružnice l patří do stejné poloroviny určené přímkou p. Bod H leží vně kružnice l.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Umístíme bod H, přímku p a kružnici l(S, r) podle zadání. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě H. Pomocí kruhové inverze se kružnice l(S, r) zobrazí na kružnici l´, přímka p se zobrazí na kružnici p´ a bod H se zobrazí na nevlastní bod. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení společných tečen kružnic l´ a p´. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z tečen $m´_1$, $m´_2$, $m´_3$ a $m´_4$ dá hledané kružnice m_1, m_2, m_3 a m_4.

Konstrukce:

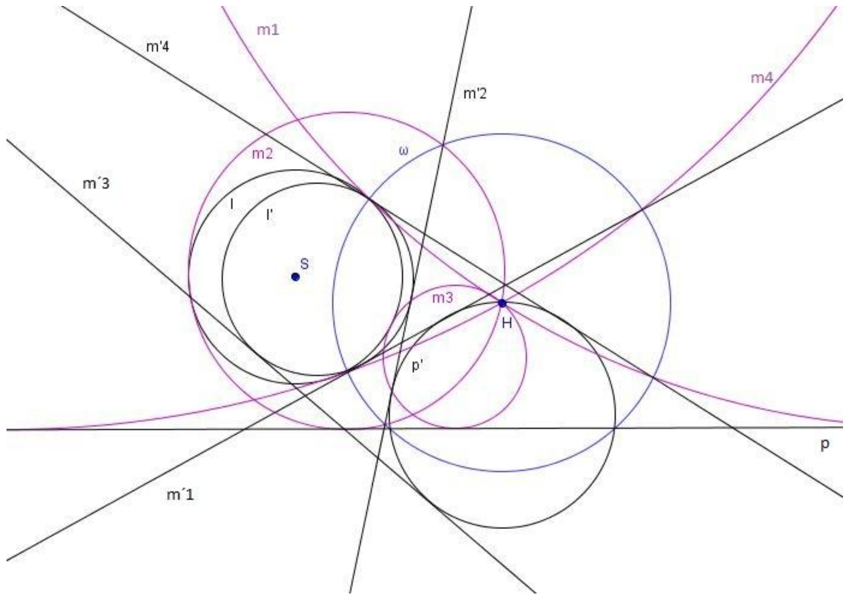
1) H, p, l(S, r) – podle zadání

2) ω; ω(H, r)

3) Inv(ω); l kružnice → l´kružnice, p přímka → p´ kružnice

4) $m´_1$, $m´_2$, $m´_3$, $m´_4$; společné tečny kružnic l´ a p´

5) Inv(ω); $m´_1$ přímka → m_1 kružnice, $m´_2$ přímka → $m´_2$ kružnice, $m´_3$ přímka → m_3 kružnice, $m´_4$ přímka → m_4 kružnice



Obrázek 5. 2. 4. a)

Diskuze:

Tato úloha má celkem 4 řešení, protože kružnicím l´ a p´ lze sestrojit 4 společné tečny, ze kterých pomocí aplikace kruhové inverze vzniknou výsledné kružnice.

b) Je dán bod H, který nenáleží přímce p ani kružnici l. Přímka p je tečnou kružnice l. Bod H a kružnice l patří do stejné poloroviny určené přímkou p. Bod H leží vně kružnice l.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Umístíme bod H, přímku p a kružnici l(S, r) podle zadání. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě H, budeme pracovat s tím, že kružnice ω a l jsou na sebe ortogonální, tzn. kolmé. Pomocí kruhové inverze se kružnice l(S, r) zobrazí sama na sebe, přímka p se zobrazí na kružnici p´ a bod H se zobrazí na nevlastní bod. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení společných tečen kružnic l´ a p´. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z tečen $m´_1$, $m´_2$, $m´_3$ dá hledané kružnice m_1, m_2 a m_3.

Konstrukce:

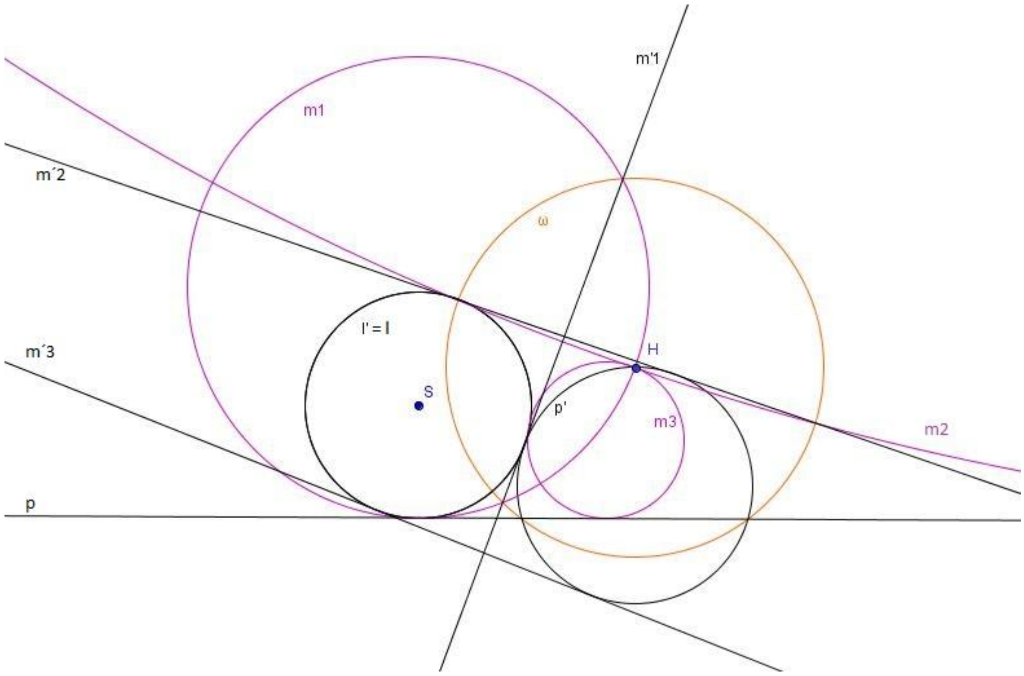
1) H, p, l(S, r) – podle zadání

2) ω; ω(H, r), ω⊥l

3) Inv(ω); l kružnice = l´kružnice, p přímka → p´ kružnice

4) $m´_1$, $m´_2$, $m´_3$; společné tečny kružnic l´ a p´

5) Inv(ω); $m´_1$ přímka → m_1 kružnice, $m´_2$ přímka → $m´_2$ kružnice, $m´_3$ přímka → m_3 kružnice



Obrázek 5. 2. 4. b)

Diskuze:

Tato úloha má celkem 3 řešení, protože kružnice p´ a l´ jsou ortogonální a mají 3 společné tečny. Po zpětné aplikaci kruhové inverze dostáváme hledané kružnice. Kdyby kružnice l a ω nebyly ortogonální, tak nám vyjde stejný počet řešení.

c) Je dán bod H, který neleží na přímce p ani kružnici l. Dále přímka p je sečnou kružnice l.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Umístíme bod H, přímku p a kružnici l(S, r) podle zadání. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě H. Pomocí kruhové inverze se kružnice l(S, r) zobrazí na kružnici l´, přímka p se zobrazí na kružnici p´ a bod H se zobrazí na nevlastní bod. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení společných tečen kružnic l´ a p´. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z tečen $m´_1$ a $m´_2$ dá hledané kružnice m_1, m_2.

Konstrukce:

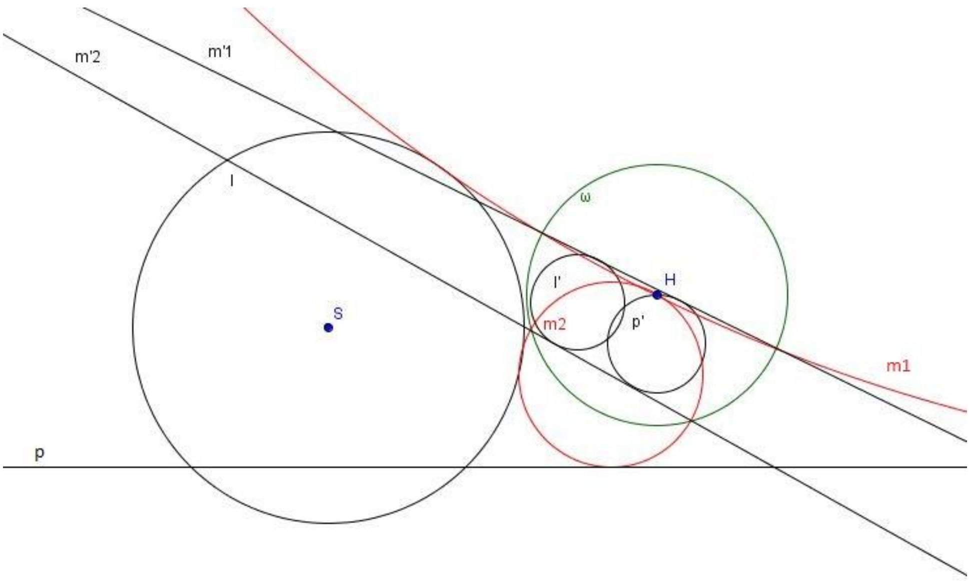
1) H, p, l(S, r) – podle zadání

2) ω; ω(H, r)

3) Inv(ω); l kružnice → l´kružnice, p přímka → p´ kružnice

4) $m´_1$, $m´_2$; společné tečny kružnic l´ a p´

5) Inv(ω); $m´_1$ přímka → m_1 kružnice, $m´_2$ přímka → $m´_2$ kružnice



Obrázek 5. 2. 4. c)

Diskuze:

Tato úloha má celkem 2 řešení, protože kružnicím l´ a p´ lze sestrojit 2 společné tečny, ze kterých pomocí kruhové inverze vzniknou výsledné kružnice.

Příklad 5. 2. 5.: Apolloniova úloha typu Bkk (bod, kružnice, kružnice)

Sestrojte kružnici m, která se dotýká kružnic $l_1(S_1, r_1)$ a $l_2(S_2,r_2)$ a prochází bodem H.

a) Jsou dány nesoustředné kružnice l_1 a l_2 . Dále kružnice l_1 leží uvnitř kružnice l_2 a bod H je vně kružnice l_1 a uvnitř kružnice l_2.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Umístíme bod H a kružnice $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2,r_2)$ podle zadání. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě H. Pomocí kruhové inverze se kružnice $l_1(S_1, r_1)$ zobrazí na kružnici l'_1, kružnice $l_2(S_2,r_2)$ na kružnici l'_2 a bod H se zobrazí na nevlastní bod. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení společných tečen kružnic l'_1 a l'_2. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z tečen m'_1, m'_2, m'_3 a m'_4 dá hledané kružnice m_1, m_2, m_3 a m_4.

Konstrukce:

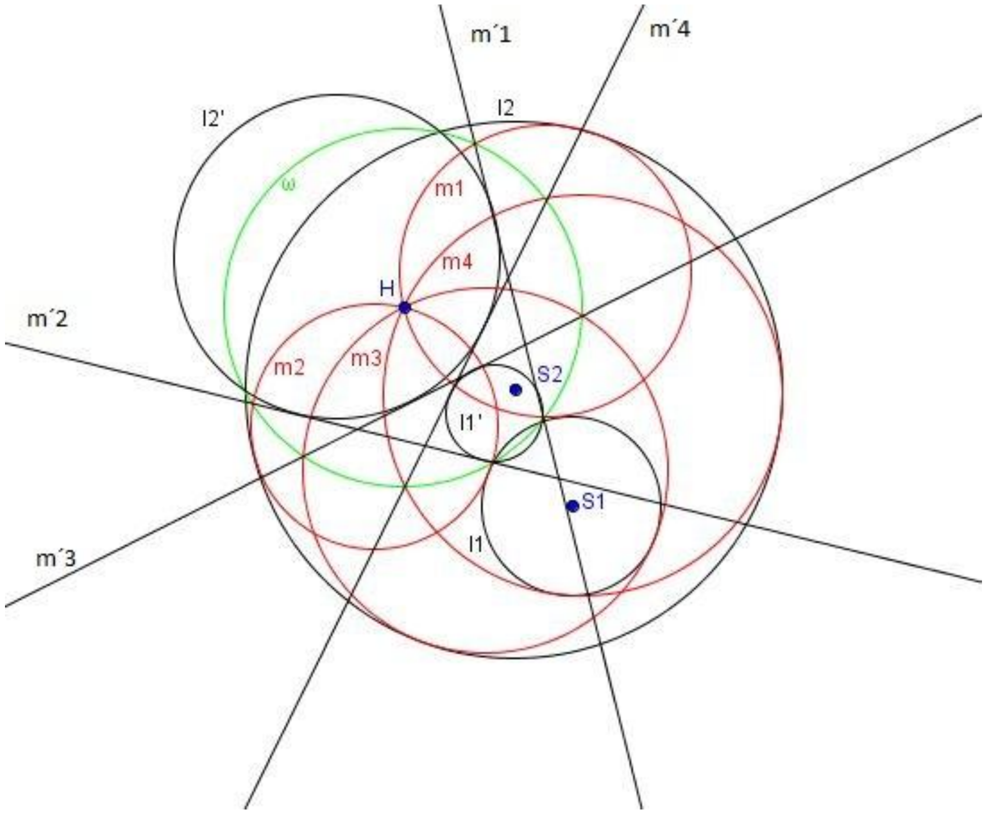
1) H, $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$ – podle zadání

2) ω; ω(H, r)

3) Inv(ω); l_1 kružnice → l'_1 kružnice, l_2 kružnice → l'_2 kružnice

4) m'_1, m'_2, m'_3, m'_4; společné tečny kružnic l'_1 a l'_2

5) Inv(ω); m'_1 přímka → m_1 kružnice, m'_2 přímka → m'_2 kružnice, m'_3 přímka → m_3 kružnice, m'_4 přímka → m_4 kružnice



Obrázek 5. 2. 5. a)

Diskuze:

Tato úloha má celkem 4 řešení, protože kružnicím l'_1 a l'_2 lze sestrojit 4 společné tečny, ze kterých nám pomocí kruhové inverze vzniknou výsledné kružnice.

b) Jsou dány kružnice l_1, l_2, které mají vnitřní dotek a dále bod H neleží na kružnicích l_1 a l_2

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Umístíme bod H a kružnice $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$ podle zadání. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě H. Pomocí kruhové inverze se kružnice $l_1(S_1, r_1)$ zobrazí na kružnici l'_1, kružnice $l_2(S_2, r_2)$ na kružnici l'_2 a bod H se zobrazí na nevlastní bod. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení společných tečen kružnic l'_1 a l'_2. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z tečen m'_1, m'_2, m'_3 dá hledané kružnice m_1, m_2, m_3.

Konstrukce:

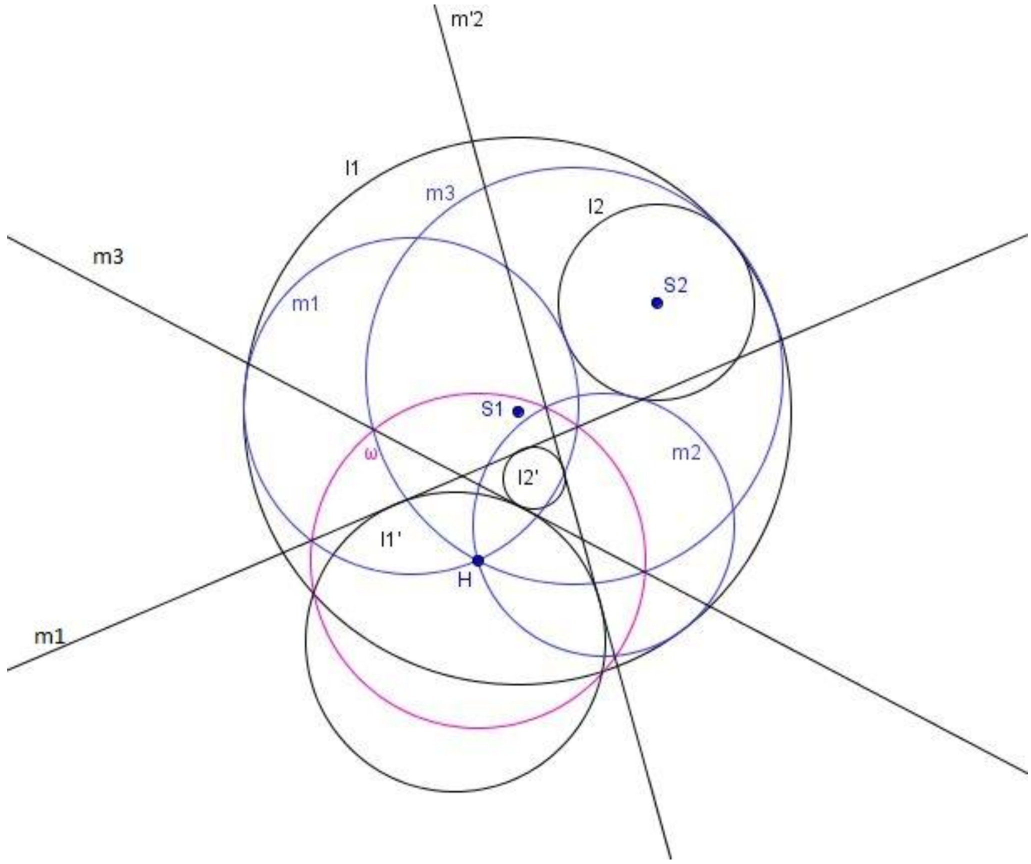
1) H, $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$ – podle zadání

2) ω; ω(H, r)

3) Inv(ω); l_1 kružnice → l'_1 kružnice, l_2 kružnice → l'_2 kružnice

4) m'_1, m'_2, m'_3; společné tečny kružnic l'_1 a l'_2

5) Inv(ω); m'_1 přímka → m_1 kružnice, m'_2 přímka → m'_2 kružnice, m'_3 přímka → m_3 kružnice



Obrázek 5. 2. 5. b)

Diskuze:

Tato úloha má celkem 3 řešení, protože kružnicím l'_1 a l'_2 lze sestrojit 3 společné tečny, ze kterých vzniknou pomocí kruhové inverze výsledné kružnice.

c) Jsou dány kružnice l_1, l_2, které mají vnější dotek a dále bod H leží vně kružnic l_1 a l_2

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Umístíme bod H a kružnice $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2,r_2)$ podle zadání. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě H. Pomocí kruhové inverze se kružnice $l_1(S_1, r_1)$ zobrazí na kružnici l'_1, kružnice $l_2(S_2,r_2)$ na kružnici l'_2 a bod H se zobrazí na nevlastní bod. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení společných tečen kružnic l'_1 a l'_2. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z tečen m'_1, m'_2, m'_3 dá hledané kružnice m_1, m_2, m_3.

Konstrukce:

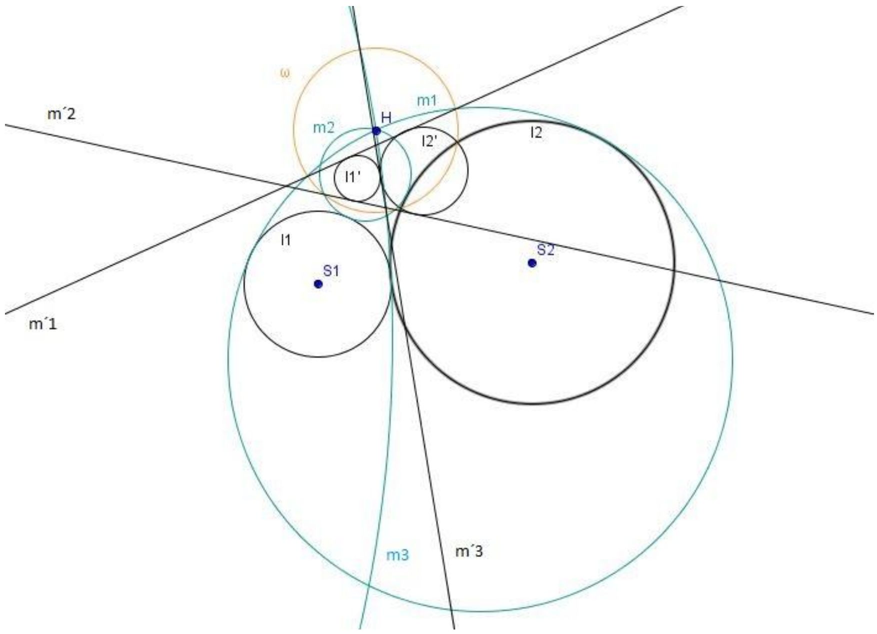
1) H, $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$ – podle zadání

2) ω; ω(H, r)

3) Inv(ω); l_1 kružnice → l'_1 kružnice, l_2 kružnice → l'_2 kružnice

4) m'_1, m'_2, m'_3; společné tečny kružnic l'_1 a l'_2

5) Inv(ω); m'_1 přímka → m_1 kružnice, m'_2 přímka → m'_2 kružnice, m'_3 přímka → m_3 kružnice



Obrázek 5. 2. 5. c)

Diskuze:

Tato úloha má celkem 3 řešení, protože kružnicím l'_1 a l'_2 lze sestrojit 3 společné tečny, ze kterých pomocí kruhové inverze vzniknou výsledné kružnice.

d) Jsou dány kružnice l_1, l_2, které nemají žádný bod dotyku a dále bod H leží vně kružnic l_1, l_2.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Umístíme bod H a kružnice $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2,r_2)$ podle zadání. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě H. Pomocí kruhové inverze se kružnice $l_1(S_1, r_1)$ zobrazí na kružnici l'_1, kružnice $l_2(S_2,r_2)$ na kružnici

l'_2 a bod H se zobrazí na nevlastní bod. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení společných tečen kružnic l'_1 a l'_2. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z tečen m'_1, m'_2, m'_3 a m'_4 dá hledané kružnice m_1, m_2, m_3 a m_4.

Konstrukce:

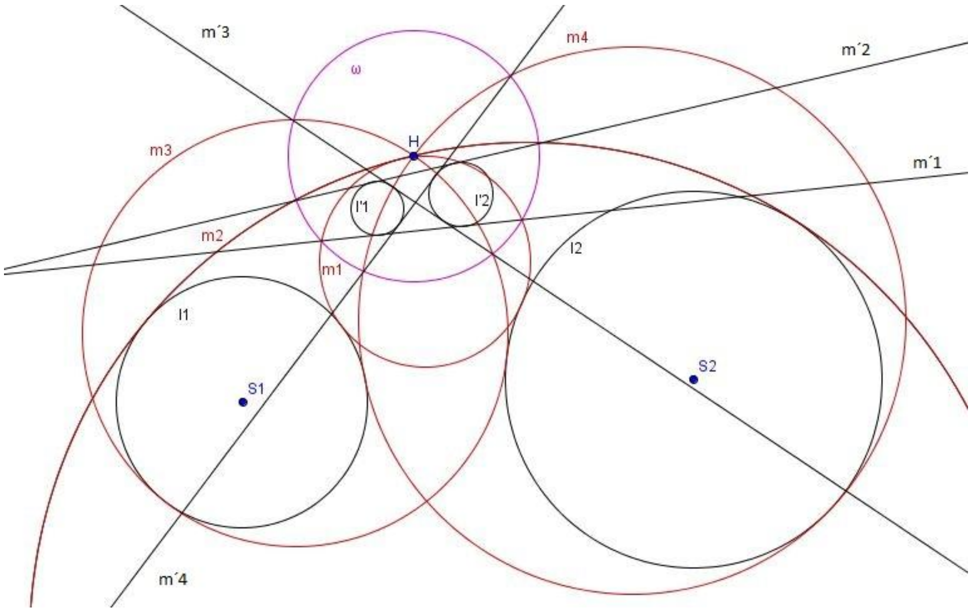
1) H, $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$ – podle zadání

2) ω; $\omega(H, r)$

3) Inv(ω); l_1 kružnice $\rightarrow$ l'_1 kružnice, l_2 kružnice $\rightarrow$ l'_2 kružnice

4) m'_1, m'_2, m'_3, m'_4; společné tečny kružnic l'_1 a l'_2

5) Inv(ω); m'_1 přímka $\rightarrow$ m_1 kružnice, m'_2 přímka $\rightarrow$ m'_2 kružnice, m'_3 přímka $\rightarrow$ m_3 kružnice, m'_4 přímka $\rightarrow$ m_4 kružnice



Obrázek 5. 2. 5. d)

Diskuze:

Tato úloha má celkem 4 řešení, protože kružnicím l'_1 a l'_2 lze sestrojit 4 společné tečny, ze kterých nám pomocí kruhové inverze vzniknou výsledné kružnice.

Příklad 5. 2. 6.: Apolloniova úloha typu pkk (přímka, kružnice, kružnice)

Sestrojte kružnici m, která se dotýká kružnic $l_1(S_1,r_1)$, $l_2(S_2,r_2)$ a přímky p.

- Jsou dány nesoustředné kružnice l_1 a l_2. Přímka p nemá s kružnicemi l_1,l_2 žádný společný bod. Kružnice l_1,l_2 leží ve stejné polorovině.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Umístíme kružnice $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$ a přímku p podle zadání. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme, tak aby se kružnice $l_1(S_1, r_1)$ a $l_2(S_2, r_2)$ zobrazily na soustředné kružnice l'_1 a l'_2, přímka p se zobrazí na kružnici p´. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení kružnic, když dvě jsou soustředné a třetí leží v mezikruží soustředných kružnic. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z kružnic m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5, m'_6, m'_7 a m'_8 dá hledané kružnice m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7 a m_8.

Konstrukce:

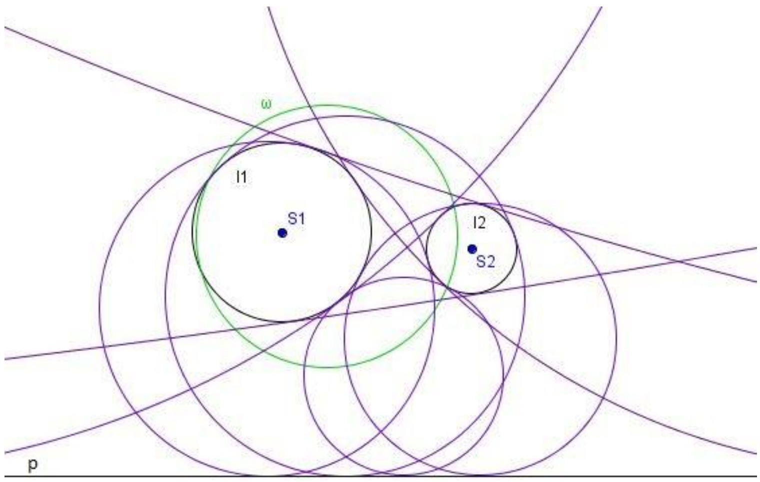
1) $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$, p – podle zadání

2) ω; umístíme tak, aby kružnice l'_1 a l'_2 byly soustředné

3) Inv(ω); l_1 kružnice $\rightarrow$ l'_1 kružnice, l_2 kružnice $\rightarrow$ l'_2 kružnice, p přímka $\rightarrow$ p´ kružnice

4) m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5, m'_6, m'_7, m'_8; výsledné kružnice z řešení vnitřní úlohy

5) Inv(ω); m'_1 kružnice $\rightarrow$ m_1 kružnice, m'_2 kružnice $\rightarrow$ m'_2 kružnice, m'_3 kružnice $\rightarrow$ m_3 kružnice, m'_4 kružnice $\rightarrow$ m_4 kružnice, m'_5 kružnice $\rightarrow$ m_5 kružnice, m'_6 kružnice $\rightarrow$ m_6 kružnice, m'_7 kružnice $\rightarrow$ m_7 kružnice, m'_8 kružnice $\rightarrow$ m_8 kružnice



Obrázek 5. 2. 6.

Diskuze:

Tato úloha má 8 řešení.

Příklad 5. 2. 7.: Apolloniova úloha typu kkk (kružnice, kružnice, kružnice)

Sestrojte kružnici m, která se dotýká kružnic $l_1(S_1,r_1)$, $l_2(S_2,r_2)$ a $l_3(S_3,r_3)$.

a) Jsou dány nesoustředné kružnice l_1,l_2 a l_3, které nemají žádný společný bod.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Umístíme kružnice $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$ a $l_3(S_3, r_3)$ podle zadání. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme, tak aby se kružnice $l_1(S_1, r_1)$ a $l_2(S_2, r_2)$ zobrazily na soustředné kružnice l'_1 a l'_2, kružnice l_3 se zobrazí na kružnici l'_3. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení kružnic, když dvě jsou soustředné a třetí leží v mezikruží soustředných kružnic. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z kružnic m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5, m'_6, m'_7 a m'_8 dá hledané kružnice m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7 a m_8.

Konstrukce:

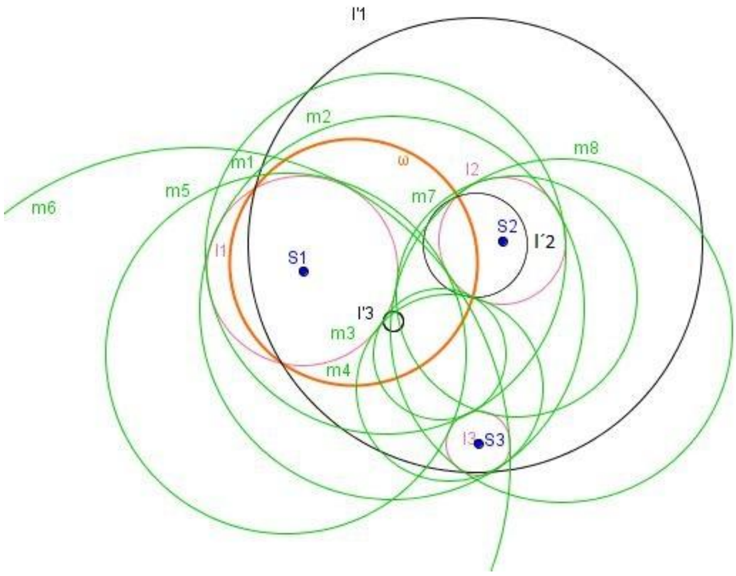
1) $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$, $l_3(S_3, r_3)$ – podle zadání

2) ω; umístíme tak, aby kružnice l'_1 a l'_2 byly soustředné

3) Inv(ω); l_1 kružnice → l'_1 kružnice, l_2 kružnice → l'_2 kružnice, l'_3 kružnice → l'_3 kružnice

4) m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5, m'_6, m'_7, m'_8; výsledné kružnice z řešení vnitřní úlohy

5) Inv(ω); m'_1 kružnice → m_1 kružnice, m'_2 kružnice → m'_2 kružnice, m'_3 kružnice → m_3 kružnice, m'_4 kružnice → m_4 kružnice, m'_5 kružnice → m_5 kružnice, m'_6 kružnice → m_6 kružnice, m'_7 kružnice → m_7 kružnice, m'_8 kružnice → m_8 kružnice



Obrázek 5. 2. 7. a)

Diskuze:

Tato úloha má 8 řešení.

b) Jsou dány nesoustředné kružnice l_1, l_2 a l_3, které se protínají v jednom bodě.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Umístíme kružnice $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$ a $l_3(S_3, r_3)$ podle zadání. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě H, zde se kružnice protínají. Pomocí kruhové inverze se kružnice $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$ a $l_3(S_3, r_3)$ zobrazí na přímky l'_1, l'_2 a l'_3. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení kružnice vepsané a kružnic připsaných trojúhelníku z přímek l'_1, l'_2 a l'_3. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z kružnic m'_1, m'_2, m'_3 a m'_4 dá hledané kružnice m_1, m_2, m_3 a m_4.

Konstrukce:

1) $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$, $l_3(S_3, r_3)$ – podle zadání

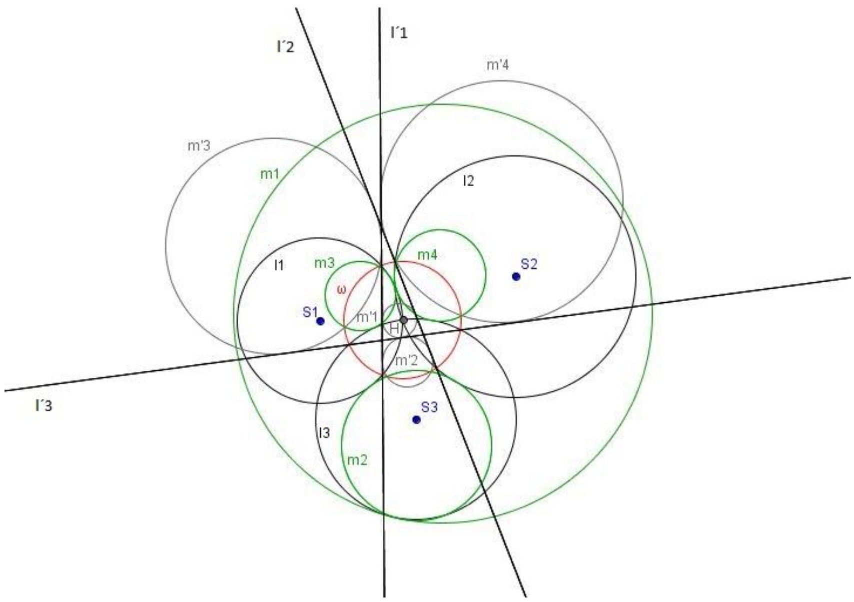
2) H; bod ve kterém se kružnice protínají

3) ω; ω(H, r)

4) Inv(ω); l_1 kružnice → l'_1 přímka, l_2 kružnice → l'_2 přímka, l'_3 kružnice → l'_3 přímka

5) m'_1, m'_2, m'_3, m'_4; kružnice vepsaná a kružnice připsané trojúhelníku z přímek l'_1, l'_2 a l'_3

6) Inv(ω); m'_1 kružnice → m_1 kružnice, m'_2 kružnice → m'_2 kružnice, m'_3 kružnice → m_3 kružnice, m'_4 kružnice → m_4 kružnice



Obrázek 5. 2. 7. b)

Diskuze:

Tato úloha má celkem 4 řešení, protože přímky l'_1 a l'_2, l'_3, které se protínají, mají 4 úhly a každý tento úhel má svojí osu. Tyto osy se protnou ve 4 bodech, dostáváme 4 kružnice, které pomocí kruhové inverze převedeme na hledané kružnice.

c) Jsou dány nesoustředné kružnice l_1, l_2 a l_3. Dvě z nich se protínají.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Umístíme kružnice $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$ a $l_3(S_3, r_3)$ podle zadání. Základní kružnici ω kruhové inverze zvolíme se středem v bodě E, zde se kružnice protínají. Pomocí kruhové inverze se kružnice $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$ a $l_3(S_3, r_3)$ zobrazí na přímky l'_1, l'_2 a kružnici l'_3. Nyní řešíme vnitřní úlohu – sestrojení kružnic, které se dotýkají přímek l'_1, l'_2 a kružnice l'_3. Opětovná aplikace kruhové inverze nám z kružnic m'_1, m'_2, m'_3 a m'_4 dá hledané kružnice m_1, m_2, m_3 a m_4.

Konstrukce:

1) $l_1(S_1, r_1)$, $l_2(S_2, r_2)$, $l_3(S_3, r_3)$ – podle zadání

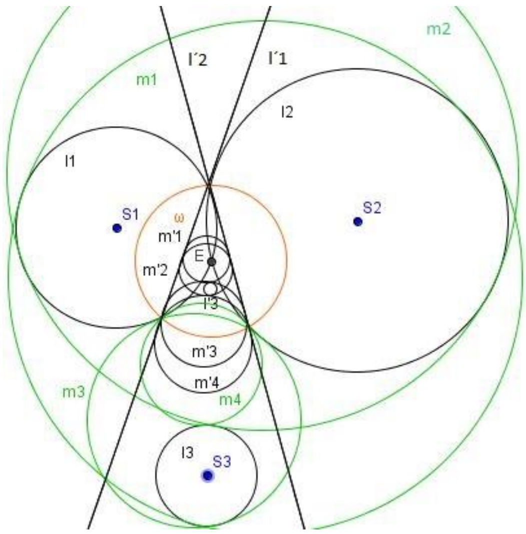
2) E; bod ve kterém se kružnice protínají

3) ω; $\omega(E, r)$

4) Inv(ω); l_1 kružnice $\rightarrow$ l'_1 přímka, l_2 kružnice $\rightarrow$ l'_2 přímka, l'_3 kružnice $\rightarrow$ l'_3 kružnice

5) m'_1, m'_2, m'_3, m'_4; kružnice dotýkající se přímek l'_1, l'_2 a kružnice l'_3

6) Inv(ω); m'_1 kružnice $\rightarrow$ m_1 kružnice, m'_2 kružnice $\rightarrow$ m'_2 kružnice, m'_3 kružnice $\rightarrow$ m_3 kružnice, m'_4 kružnice $\rightarrow$ m_4 kružnice



Obrázek 5. 2. 7. c)

Diskuze:

Tato úloha má 4 řešení, protože pomocí stejnolehlosti lze přímkám l'_1, l'_2 a kružnici l'_3 sestrojit 4 kružnice, které následně pomocí kruhové inverze převedeme na výsledné hledané kružnice.

5. 3. ÚLOHY S OMEZENOU NÁKRESNOU

U většiny příkladů, se kterými pracujeme, se setkáváme s neomezenou nákresnou. Ve skutečnosti, ale naše nákresna bývá omezená, např. konec papíru, tabule apod.. V takovýchto případech musíme přizpůsobit konstrukci dané situaci. Dostáváme tedy příklady stylu: *Sestrojte přímku HV, jestliže máme bod H a dvě různoběžky o a p, které se protínají v nepřístupném bodě V.* V úlohách bez nákresny využíváme stejnolehlosti, kruhové inverze atd. Na následujících příkladech ukážeme řešení s pomocí kruhové inverze.

Příklad 5. 3. 1.

Máme kružnice $m_1(S_1, r_1)$ a m_2 (S_2, r_2), které se protínají v bodech F a H. Středy obou kružnic a jeden z průsečíků jsou nepřístupné. Sestrojte tětivu těchto dvou kružnic.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Základní kružnici si zvolíme v bodě H, který je přístupný. Díky kruhové inverzi se nám zobrazí kružnice m_1 (S_1, r_1) na přímku m'_1 a kružnice m_2 (S_2, r_2) na přímku m'_2. V průsečíku přímek m'_1 a m'_2 dostáváme bod F′. Hledanou tětivu vedeme body H a F′.

Konstrukce:

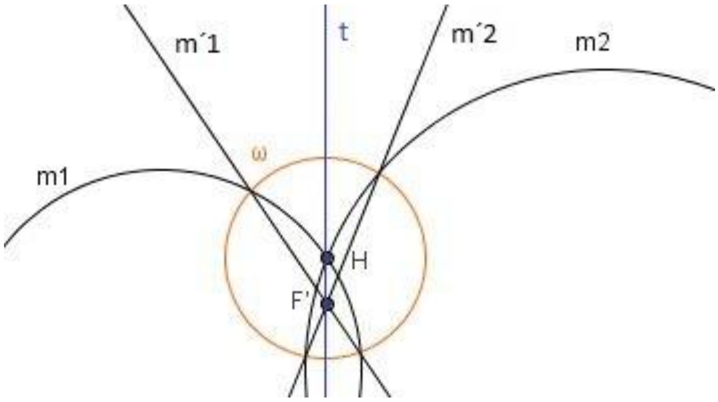
1) m_1, m_2, H, F – podle zadání

2) ω; ω (H, r)

3) Inv(ω); kružnice $m_1 \rightarrow$ přímka m'_1, kružnice $m_2 \rightarrow$ přímka m'_2

4) F'; $F' \in m'_1 \cap m'_2$

5) t; $t \in H, F'$



Obrázek 5. 3. 1.

Diskuze:

Vznik bodu F´ v průsečíkách přímek m'_1 a m'_2 můžeme také zkontrolovat tím, že tuto úlohu nebudeme brát jako nepřístupnou. Přístupný bod F se nám zobrazí do bodu F´, stejně jako v nepřístupném zadání.

Příklad 5. 3. 2.

Máme protínající se kružnice $m_1(S_1, r_1)$ a m_2 (S2, r_2) v bodech F a H. Tyto kružnice jsou nepřístupné v obou středech a průsečíku H. Sestrojte tečnu kružnice m_1 a m_2, které procházejí bodem F.

Rozbor:

Úlohu řešíme s využitím kruhové inverze. Základní kružnici zvolíme v bodě F, který je přístupný. Díky kruhové inverzi se kružnice m_1 (S_1, r_1) zobrazí na přímku m'_1 a kružnice m_2 (S_2, r_2) na přímku m'_2. Dále vedeme přímku t_1, která je rovnoběžná na přímku m'_1 a zároveň prochází také bodem F. To samé platí i pro rovnoběžnou přímku t'_2, která prochází bodem F. Dostáváme výsledné tečny kružnic.

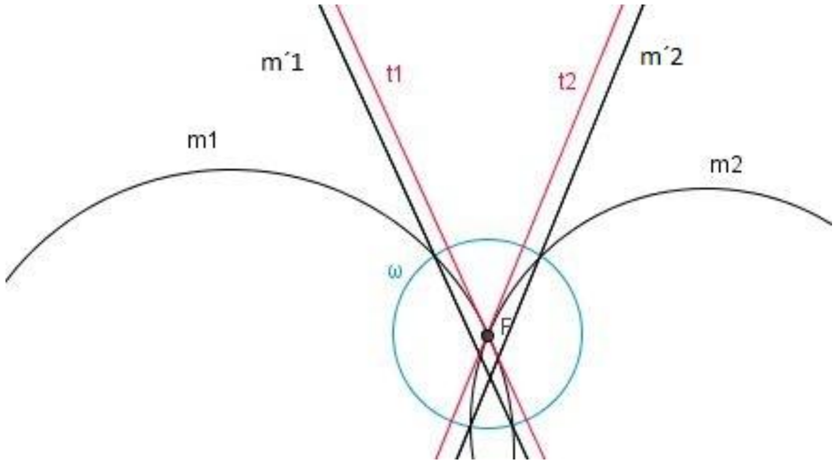
Konstrukce:

1) m_1, m_2, H, F – podle zadání

2) ω; ω (F, r)

3) Inv(ω); kružnice $m_1 \rightarrow$ přímka m'_1, kružnice $m_2 \rightarrow$ přímka m'_2

4) t_1, t_2; $t_1 \parallel m'_1$, $t_2 \parallel m'_2 \wedge t_1$, $t_2 \cap$ F



Obrázek 5. 3. 2.

Diskuze:

Tato úloha má 2 řešení, protože kružnicím m_1 a m_2 lze sestrojit 2 tečny, které budou procházet bodem F.

6 ZÁVĚR

Cílem mé bakalářské práce bylo seznámení s kruhovou inverzí, se kterou se mnozí z nás setkávají až při svém studiu na vysoké škole. Postupovala jsem od definic a základních vlastností kruhové inverze až k praktickým příkladům, na kterých je ukázána její užitečnost při řešení nejrůznějších úkolů.

Při samotném zpracování tohoto tématu jsem si uvědomila, jak je kruhová inverze užitečná v různých geometrických typech úloh, například u Apolloniových úloh nám některé z nich velice zjednodušuje.

Při zpracování kruhové inverze, jsem velice často využívala geometrický program GeoGebra, který se pro mě stal po několik měsíců velice dobrým a chytrým pomocníkem. Praktické příklady sestrojené pomocí tohoto programu najdete na přiloženém CD.

Na závěr bych ještě jednou velice ráda poděkovala mému vedoucímu bakalářské práce Mgr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D. za jeho cenné rady, připomínky a pevné nervy.

7 RESUMÉ

This bachelor thesis deals with circle inversion geometry. The main idea of this work is a detailed introduction to the circle inversion, especially to demonstrate its usefulness for solving various problems.

One part of my work is devoted to the basic attributes of the circle inversion (it explains how it works).

The final part of this works is devoted to practical examples. These examples were created in the geometric program GeoGebra.

8 SEZNAM LITERATURY

[1] VLADIMÍR, Blažek. *Geometrie III*. první. Ústí nad Labem: UJEP v Ústí nad Labem, 1995, 102 s. ISBN 80 - 7044 - 103 - 8.

[2] LEISCHNER, Pavel. *Geometrická zobrazení*. první. České Budějovice: Vlastimil Johanus TISKÁRNA, 2010, 120 s. ISBN 978 - 80 - 7394 - 243 - 4.

[3] KUŘINA, František. *10 Geometrických transformací*. první. Praha: Prometheus, 2002, 282 s. ISBN 80 - 7196 - 231 - 7.

[4] ŘÍHA, Ota. *Kruhová inverze*. první. Brno: Masarykova univerzita, 2010, 52 s. ISBN 978 - 80 - 210 - 5149 - 2.

[5] BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF. *Planimetrie*. první. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2009, 148 s. ISBN 978 - 80 - 7290 - 404 - 4.

[6] KUBÁT, Václav a Dana TRKOVSKÁ. *Analytická geometrie v afinních a euklidovských prostorech*. první. Praha: MATFYZPRESS, 2011, 360 s. ISBN 978 - 80 - 7378 - 144 - 6.

[7] LÁVIČKA, Miroslav. *Syntetická geometrie: Pomocný učební text k předmětu KMA/SG*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2007, 190 s.

[8] LÁVIČKA, Miroslav. *Geometrie 1. Pomocný učební text*. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2008, 115 s.

[9] LÁVIČKA, Miroslav. *Geometrie 2. Pomocný učební text.* Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2006, 120 s.

[10] KOLMAN. *Dějiny matematiky ve starověku*. 1. vyd. Praha: Academia, 1968.

Internetové zdroje:

[1] EVA, Patáková. *Apolloniovy úlohy* [online]. Plzeň, 2005 [cit. 2013-06-12]. Dostupné z: http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/autor/autor.html. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni.

[2]JOSEF, Janyška. *Geometrická zobrazení* [online]. Brno, 2012 [cit. 2013-06-12]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~janyska/ZobrazeniWS.pdf. Pomocný učební text. Masarykova univerzita v Brně

9 SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 2. 1. 1. 11
Obrázek 2. 1. 2. 12
Obrázek 4. 2. 1. 18
Obrázek 4. 2. 2. 19
Obrázek 4. 2. 3. 20
Obrázek 4. 2. 4. 20
Obrázek 4. 2. 5. 22
Obrázek 4. 3. 1. 23
Obrázek 4. 4. 1. 26
Obrázek 4. 5. 1. 27
Obrázek 4. 5. 2. 28
Obrázek 4. 5. 3. 28
Obrázek 4. 5. 4. 30
Obrázek 4. 5. 5. 30
Obrázek 4. 5. 6. 31
Obrázek 4. 5. 7. 31
Obrázek 4. 5. 8. 32
Obrázek 4. 5. 9. 32
Obrázek 4. 5. 10. 33
Obrázek 4. 5. 11. 33
Obrázek 4. 5. 12. 34
Obrázek 4. 5. 13. 34
Obrázek 4. 5. 14. 35
Obrázek 4. 5. 15. 35
Obrázek 4. 5. 16. 36
Obrázek 4. 5. 17. 36
Obrázek 4. 5. 18. 37
Obrázek 4. 5. 19. 37
Obrázek 4. 5. 20. 38
Obrázek 4. 5. 21. 38
Obrázek 4. 5. 22. 38
Obrázek 5. 1. 1. 40

Obrázek 5. 1. 2.	....	41
Obrázek 5. 1. 3.	....	42
Obrázek 5. 2. 1.	....	43
Obrázek 5. 2. 2.	....	44
Obrázek 5. 2. 3.	....	45
Obrázek 5. 2. 4. a)	....	46
Obrázek 5. 2. 4. b)	....	47
Obrázek 5. 2. 4. c)	....	48
Obrázek 5. 2. 5. a)	....	50
Obrázek 5. 2. 5. b)	....	51
Obrázek 5. 2. 5. c)	....	52
Obrázek 5. 2. 5. d)	....	53
Obrázek 5. 2. 6.	....	54
Obrázek 5. 2. 7. a)	....	55
Obrázek 5. 2. 7. b)	....	56
Obrázek 5. 2. 7. c)	....	57
Obrázek 5. 3. 1.	....	59
Obrázek 5. 3. 2.	....	60