OBSAH

1. Úvod

Astrofyzika je věda, která se zabývá zkoumáním fyzikálních zákonů v kosmu, popisem vlastností všech vesmírných objektů (např. hmotnost, hustota, rychlost otáčení, složení a další) a dějů probíhajících ve vesmíru (vznik a vývoj hvězd, výbuchy supernov) pomocí různých fyzikálních veličin. V astrofyzice se tedy můžeme setkat například se studiem záření, ze kterého získáváme mnoho důležitých informací o vesmírných objektech. Dále se zabýváme složením hvězdy, ze kterého lze určit její stáří, strukturou a podmínkami, které panují v jejím nitru (tlak, teplota, přenos energie, jaderné reakce a další) a hvězdnou atmosférou. Astrofyzika také zkoumá zajímavé objekty, jakými jsou např. dvojhvězdy, proměnné hvězdy, supernovy, černé díry a další.

Tato práce je tvořená jako sbírka příkladů, které jsou zaměřeny na záření hvězd, základy hvězdné spektroskopie a nitro hvězd. Sbírka by měla sloužit jako rozšíření a doplnění již existujících sbírek, jakou je například ŠIROKÝ, J.; ŠIROKÁ, M. *Základy astronomie v příkladech* vydaná v roce 1973, která obsahuje zajímavé příklady, v nichž jsou používány dnes již zastaralé hodnoty, které jsou v mé práci aktualizovány. Kromě této sbírky byla vydána například sbírka ŠTEFL V.; KORČÁKOVÁ D.; KRTIČKA J. *Úlohy z astrofyziky.*

2. Záření hvězd

Kapitola je zaměřena na procvičení pojmů zdánlivá vizuální hvězdná velikost, hvězdná velikost, zářivý výkon hvězdy, efektivní (povrchová) teplota hvězdy, bolometrická korekce, absolutní bolometrická hvězdná velikost a hustota zářivého toku.

2.1. Teorie záření hvězd

Velkou část informací o hvězdách získáváme studiem záření, které od nich přichází. Zjišťujeme například, odkud a v jakém množství k nám záření přichází. Ze záření určujeme jasnost objektů. Dále určujeme spektrum záření, jeho polarizaci a podobně.

Veškeré elektromagnetické záření, které k nám z hvězd přichází, má původ v jednotlivých atomech. Záření vzniká při přechodech elektronů mezi jednotlivými energetickými hladinami v atomech. Frekvence vyzářeného elektromagnetického vlnění závisí hlavně na tom, mezi jakými energetickými hladinami elektron přeskočí. Záření vznikající v atomech však může být ovlivněno i vnějším magnetickým polem (Zeemanův jev), nebo teplotou hvězdy. Pokud posuzujeme záření hvězdy na Zemi, musíme počítat také s tím, že se vlnová délka námi pozorovaného záření mění působením Dopplerova jevu.

Mezi fyzikální veličiny, které pomáhají popsat fotometrické vlastnosti hvězdy, například jejich jasnost, patří zdánlivá hvězdná velikost. Nejméně jasné hvězdy pozorovatelné lidským okem mají, podle starých pozorovatelů, zdánlivou hvězdnou velikost 6. Pro vzájemné srovnání svítivosti jednotlivých hvězd se převádí pozorované hodnoty zdánlivých hvězdných velikostí na hodnotu, která by byla naměřená, kdyby hvězda byla ve vzdálenosti 10 pc. Tato hodnota se nazývá absolutní hvězdná velikost.

Další zajímavou informací je množství energie, která k nám z hvězdy přichází. Ke zjištění tohoto množství slouží veličina hustota zářivého toku, což je tok záření, který za jednu sekundu projde jedním metrem čtverečným plochy, kolmo nastavené ke směru přicházejících paprsků.

Při výpočtech některých příkladů potřebujeme znát úhel, pod kterým se z dané hvězdy jeví poloměr oběžné dráhy Země. Tento úhel nazýváme roční paralaxa. Úhel, pod kterým je vidět průměr nebeského tělesa, označujeme jako úhlový průměr.

2.2. Základní vztahy teorie záření hvězd

Pogsonova rovnice pro rozdíl magnitud dvou hvězd

$$m_2 - m_1 = 2{,}5 \log \frac{I_1}{I_2},$$

kde m_1, m_2 jsou zdánlivé hvězdné velikosti dvou hvězd a I_1, I_2 intenzity světla těchto hvězd.

Vztah pro absolutní hvězdnou velikost

$$M = m + 5 - 5 \log r,$$

kde m je zdánlivá hvězdná velikost, r vzdálenost hvězdy v parsecích.

Vztah pro absolutní vizuální hvězdnou velikost

$$M_{\mathrm{V}} = m_{\mathrm{V}} + 5 - 5 \log r,$$

kde m_{V} je zdánlivá vizuální hvězdná velikost, r vzdálenost hvězdy v parsecích.

Vztah pro zářivý výkon hvězdy

$$L = 4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4 = 4\pi \cdot r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}},$$

kde R je poloměr hvězdy, σ Stefanova–Boltzmannova konstanta, T_{ef} je efektivní (povrchová) teplota, r vzdálenost hvězdy, F_{bol} hustota zářivého toku. Pro odlišení od roční paralaxy bude dále v textu Ludolfovo číslo označeno apostrofem π'.

Vztah pro roční paralaxu

$$\pi = \frac{1}{r}, \ [r] = \mathrm{pc}, \ [\pi] = '',$$

kde r je vzdálenost hvězdy.

Vztah pro bolometrickou korekci

$$BC = M_{\mathrm{bol}} - M_{\mathrm{V}},$$

kde M_{bol} je absolutní bolometrická hvězdná velikost, M_{V} absolutní vizuální hvězdná velikost.

Vztah pro výpočet poloměru hvězdy R v jednotkách poloměru Slunce R_{Sl} pomocí vizuální hvězdné velikosti M_{V} a termodynamické teploty T v kelvinech

$$\log\frac{R}{R_{\mathrm{Sl}}}=\frac{5\,900}{\{T\}}-0{,}20M_{\mathrm{V}}\,.$$

Vztah pro výpočet poloměru hvězdy v jednotkách poloměru Slunce R_{Sl} pomocí absolutní bolometrické hvězdné velikosti M_{bol} a termodynamické teploty T v kelvinech

$$\log\frac{R}{R_{\mathrm{Sl}}}=8{,}5-0{,}2M_{\mathrm{bol}}-2\log\{T\}\,.$$

Pokud známe absolutní bolometrickou hvězdnou velikost M_{bol} nebo zářivý výkon L, lze určit druhou z těchto veličin pomocí vztahu

$$\log\frac{L}{L_{\mathrm{Sl}}}=0{,}4\cdot(4{,}75-M_{\mathrm{bol}})\,,$$

kde L_{Sl} je zářivý výkon Slunce.

Wienův posunovací zákon

$$\lambda_{\mathrm{max}}=\frac{b}{T}\,,$$

kde λ_{max} je vlnová délka, při níž je hodnota spektrální hustoty zářivého toku při dané teplotě zářiče maximální, b Wienova konstanta, T termodynamická teplota tělesa.

2.3. Příklady k teorii záření hvězd

2.3.1. Příklad

Na kterou vlnovou délku připadá maximum energie ve spektru hvězd, jejichž povrchová teplota je 12 000 K?

převzato z [4]

Zápis:

$T = T_{\mathrm{ef}} = 12\,000\ \mathrm{K}$, $b = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$

Řešení:

Vlnovou délku, na kterou připadá maximum energie ve spektru zjistíme pomocí Wienova posunovacího zákona

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}.$$

Dosadíme číselně

$$\lambda_{\max} = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}}{12\,000},$$

tedy

$$\underline{\underline{\lambda_{\max} = 241{,}5\ \mathrm{nm}}}.$$

Odpověď:

Ve spektru hvězd s povrchovou teplotou 12 000 K připadá maximum energie na vlnovou délku 241,5 nm.

2.3.2. Příklad

Jaký je poměr intenzit světla hvězd 1. hvězdné velikosti a 6. hvězdné velikosti?

převzato z [4]

Zápis:

$m_1 = 1 \text{ mag}$, $m_2 = 6 \text{ mag}$, $\frac{I_1}{I_2} = ?$

Řešení:

Poměr intenzit světla se vyskytuje v Pogsonově rovnici

$$m_2 - m_1 = 2{,}5 \log \frac{I_1}{I_2},$$

kde

$$\log \frac{I_1}{I_2} = \frac{m_2 - m_1}{2{,}5}.$$

Dosazení číselně

$$\log \frac{I_1}{I_2} = \frac{6-1}{2{,}5},$$

$$\underline{\underline{\frac{I_1}{I_2} = 10^2}}.$$

Odpověď:

Poměr intenzit světla hvězd 1. a 6. hvězdné velikosti je roven 10^2.

2.3.3. Příklad

Jestliže se intenzita hvězdy zvýší $25 \cdot 10^3$ krát, o kolik se změní její hvězdná velikost?

převzato z [4]

Zápis:

$m_2 - m_1 = ?$, $\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{25\,000}$

Řešení:

Poměr intenzit světla se vyskytuje v Pogsonově rovnici

$$m_2 - m_1 = 2{,}5 \log \frac{I_1}{I_2}.$$

Dosazení číselně

$$m_2 - m_1 = 2{,}5 \log \frac{1}{25\,000},$$

$$m_2 - m_1 = -11,$$

tedy

$$\underline{\underline{m_1 - m_2 = 11\ \mathrm{mag}}}.$$

Odpověď:

Při nárůstu intenzity hvězdy 25 000krát se hvězdná velikost zmenší o 11mag.

2.3.4. Příklad

Pokud by se hvězdy Aldebaran a Sirius A nacházely ve stejné vzdálenosti od Země, byla by intenzita první hvězdy přibližně 6,6krát vetší. Při pozorování by se zjistila zdánlivá hvězdná velikost první hvězdy 0,85 mag a druhé –47 mag. Kolikrát je Aldebaran od Země dále? Vyhledejte přesné vzdálenosti a jejich poměr porovnejte se spočtenou hodnotou.

Zápis:

$m_1 = 0{,}85\ \text{mag}$, $m_2 = -1{,}47\ \text{mag}$, $\frac{I_1}{I_2} = 6{,}6$, $\frac{r_1}{r_2} = ?$

Řešení:

Vzdálenost a zdánlivá hvězdná velikost se vyskytuje ve vztahu pro absolutní hvězdnou velikost

$$M = m + 5 - 5\log r\,.$$

Z matematiky víme, že logaritmus podílu je roven rozdílu logaritmů, který dostaneme, odečteme-li od sebe vztahy pro absolutní hvězdné velikosti daných hvězd

$$M_2 - M_1 = m_2 + 5 - 5\log r_2 - \left(m_1 + 5 - 5\log r_1\right).$$

Rovnici upravíme a vyjádříme

$$\log\frac{r_2}{r_1} = \frac{M_2 - M_1 - m_2 + m_1}{-5}\,.$$

Rozdíl

$$M_2 - M_1$$

dostaneme ze vztahu

$$M_2 - M_1 = 2{,}5\log\frac{I_1}{I_2}\,,$$

tedy

$$\log\frac{r_2}{r_1} = \frac{2{,}5\log\frac{I_1}{I_2} - m_2 + m_1}{-5}\,.$$

Dosadíme číselně

$$\log\frac{r_2}{r_1}=\frac{2{,}5\log 6{,}6-\left(-1{,}47\right)+0{,}85}{-5},$$

$$\underline{\underline{\frac{r_1}{r_2}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{-1}\doteq 7{,}5}}\,.$$

Odpověď:

Aldebaran je od Země přibližně 7,5krát dále než Sirius A. Výsledek odpovídá poměru nalezených hodnot.

2.3.5. Příklad

Zdánlivá hvězdná velikost hvězdy je 4 mag. Jaká by byla hvězdná velikost této hvězdy, kdyby byla: a) ve vzdálenosti o 40 % menší, b) ve vzdálenosti o 40 % větší?

převzato z [4]

a)

Zápis:

$m_1 = 4$ mag, $r_\mathrm{m} = r - 0{,}4r$, $m_2 = ?$ mag

Řešení:

Vzdálenost a zdánlivá hvězdná velikost se vyskytují ve vztahu pro absolutní hvězdnou velikost

$$M = m + 5 - 5\log r\,.$$

Protože z definice víme, že absolutní hvězdná velikost je konstantní, tedy

$$M = m_1 + 5 - 5\log r\,,\; M = m_2 + 5 - 5\log(r - 0{,}4r)\,,$$

lze psát

$$m_1 + 5 - 5\log r = m_2 + 5 - 5\log(r - 0{,}4r)\,.$$

Vyjádříme m_2:

$$m_2 = m_1 + 5\log 0{,}6\,,$$

$$m_2 = 4 + 5\log 0{,}6\,,$$

$$\underline{\underline{m_2 \doteq 2{,}9\ \text{mag}}}\,.$$

Odpověď:

U hvězdy se zdánlivou hvězdnou velikostí 4 mag by byla ve vzdálenosti o 40 % menší hvězdná velikost přibližně rovna 2,9 mag.

b)

Zápis:

$m_1 = 4$ mag, $r_\mathrm{m} = r + 0{,}4r$, $m_2 = ?$ mag

Řešení:

Vzdálenost a zdánlivá hvězdná velikost se vyskytují ve vztahu pro absolutní hvězdnou velikost

$$M = m + 5 - 5\log r\,.$$

Protože z definice víme, že absolutní hvězdná velikost je konstantní, tedy

$$M = m_1 + 5 - 5\log r\,,\ M = m_2 + 5 - 5\log(r + 0{,}4r),$$

lze psát

$$m_1 + 5 - 5\log r = m_2 + 5 - 5\log(r + 0{,}4r).$$

Vyjádříme m_2:

$$m_2 = m_1 + 5\log 1{,}4\,,$$

$$m_2 = 4 + 5\log 1{,}4\,,$$

$$\underline{\underline{m_2 \doteq 4{,}7\ \text{mag}}}\,.$$

Odpověď:

U hvězdy se zdánlivou hvězdnou velikostí 4 mag by byla ve vzdálenosti o 40 % větší hvězdná velikost této hvězdy přibližně rovna 4,7 mag.

2.3.6. Příklad

Vypočtěte poloměr hvězdy Antares v jednotkách slunečního poloměru, je-li její zdánlivá vizuální hvězdná velikost $0{,}96\ \text{mag}$, paralaxa $0{,}005\,9''$ a povrchová teplota $3\,400\ \text{K}$.

převzato z [4]

Zápis:

$m_{\text{V}} = 0{,}96\ \text{mag}$, $\pi = 0{,}005\,9''$, $T_{ef} = T = 3\,400\,\text{K}$, $R = ?\ \text{R}_{\text{Sl}}$

Řešení:

Poloměr hvězdy lze vypočítat pomocí vztahu

$$\log\frac{R}{R_{\text{Sl}}} = \frac{5\,900}{\{T\}} - 0{,}20 M_{\text{V}},$$

kde M_{V} vypočteme pomocí m_{V} a π ze vztahu

$$M_{\text{V}} = m_{\text{V}} + 5 - 5\log r,$$

kde

$$r = \frac{1}{\pi},$$

tedy

$$M_{\text{V}} = m_{\text{V}} + 5 + 5\log\pi.$$

Po dosazení do vztahu pro poloměr dostaneme

$$\log\frac{R}{R_{\text{Sl}}} = \frac{5\,900}{\{T\}} - 0{,}20\left(m_{\text{V}} + 5 + 5\log\pi\right).$$

Dosazení číselně

$$\log\frac{R}{R_{\text{Sl}}} = \frac{5\,900}{3\,400} - 0{,}20\cdot\left(0{,}96 + 5 + 5\log 0{,}005\,9\right),$$

$$\underline{\underline{R \doteq 5{,}9\cdot 10^{2}\ \text{R}_{\text{Sl}}}}.$$

Odpověď:

Poloměr hvězdy Antares v jednotkách slunečního poloměru je přibližně $5{,}9\cdot 10^{2}\ \text{R}_{\text{Sl}}$.

2.3.7. Příklad

Vyjádřete bolometrickou korekci pomocí teploty a stanovte její hodnotu u hvězdy Proxima Centauri. Povrchová teplota je 3 042 K.

Zápis:

$T = 3042\ \mathrm{K}$, $BC = ?\ \mathrm{mag}$

Řešení:

Pro bolometrickou korekci platí vztah

$$BC = M_{\mathrm{bol}} - M_{\mathrm{V}}.$$

Vizuální hvězdnou velikost vyjádříme pomocí povrchové teploty a poloměru ze vztahu

$$\log \frac{R}{R_{\mathrm{Sl}}} = \frac{5\,900}{\{T\}} - 0{,}20 M_{\mathrm{V}},$$

$$M_{\mathrm{V}} = \left(\frac{5\,900}{\{T\}} - \log \frac{R}{R_{\mathrm{Sl}}} \right) \cdot 5$$

a absolutní bolometrickou hvězdnou velikost pomocí povrchové teploty a poloměru ze vztahu

$$\log \frac{R}{R_{\mathrm{Sl}}} = 8{,}5 - 0{,}2 M_{\mathrm{bol}} - 2 \log\{T\},$$

$$M_{\mathrm{bol}} = \left(8{,}5 - 2\log\{T\} - \log \frac{R}{R_{\mathrm{Sl}}} \right) \cdot 5.$$

Po dosazení do vztahu

$$BC = M_{\mathrm{bol}} - M_{\mathrm{V}},$$

dostaneme pro bolometrickou korekci

$$BC = \left(8{,}5 - 2\log\{T\} - \log \frac{R}{R_{\mathrm{Sl}}} \right) \cdot 5 - \left(\frac{5\,900}{\{T\}} - \log \frac{R}{R_{\mathrm{Sl}}} \right) \cdot 5,$$

po této úpravě dostaneme

$$BC = \left(8{,}5 - 2\log\{T\} - \frac{5\,900}{\{T\}} \right) \cdot 5.$$

Dosazení číselně

$$BC = \left(8{,}5 - 2\log 3\,042 - \frac{5\,900}{3\,042}\right)\cdot 5\,,$$

$$\underline{\underline{BC = -2{,}03\ \mathrm{mag}}}\,.$$

Odpověď:

Závislost bolometrické korekce na teplotě je určena vztahem

$$BC = \left(8{,}5 - 2\log\{T\} - \frac{5\,900}{\{T\}}\right)\cdot 5\,.$$

Pro teplotu 3 042 K je rovna –2,03 mag.

2.3.8. Příklad

Stanovte změnu zářivého výkonu hvězdy, jejíž poloměr se zmenší o 2 % a efektivní (povrchová) teplota se zvětší o 2 %.

převzato z [6]

Zápis:

$R_1 = R - 0{,}02R$, $T_{\mathrm{ef1}} = T_{\mathrm{ef}} + 0{,}02T_{\mathrm{ef}}$, $\Delta L = ?$

Řešení:

Změna zářivého výkonu znamená o kolik se změní původní zářivý výkon. To je hledáme rozdíl zářivých výkonů.

$$\Delta L = L_2 - L_1 .$$

Tedy

$$\Delta L = 4\pi \cdot (0{,}98R)^2 \cdot \sigma \cdot (1{,}02T_{\mathrm{ef}})^4 - 4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4 ,$$

po úpravě dostaneme

$$\Delta L = 4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4 \left(0{,}98^2 \cdot 1{,}02^4 - 1\right),$$

$$\Delta L = L \cdot (1{,}04 - 1),$$

$$\underline{\underline{\Delta L = 0{,}04\ L}} .$$

Kladná hodnota znamená přírůstek.

Odpověď:

Pro dané změny poloměru a povrchové teploty se zářivý výkon hvězdy zvětší o 4 %.

2.3.9. Příklad

Hvězda má efektivní (povrchovou) teplotu 10 000 K. Jak se zvýší zářivý výkon hvězdy, jestliže efektivní (povrchová) teplota naroste o 500 K?

převzato z [6]

Zápis:

$T_{\mathrm{ef}} = 10\,000\ \mathrm{K}$, $\Delta T_{\mathrm{ef}} = 500\ \mathrm{K}$, $\dfrac{L_1}{L} = ?$

Řešení:

Ze vzorce

$$L = 4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4$$

plyne, že $L \sim T_{\mathrm{ef}}^4$.

Proto se zářivý výkon změní tolikrát, kolikrát se změní T_{ef}^4.

Tedy

$$\frac{L_1}{L} = \frac{\left(T_{\mathrm{ef}} + \Delta T_{\mathrm{ef}}\right)^4}{\left(T_{\mathrm{ef}}\right)^4},$$

$$\frac{L_1}{L} = \frac{\left(10\,000 + 500\right)^4}{\left(10\,000\right)^4},$$

$$\frac{L_1}{L} \doteq 1{,}22.$$

Odpověď:

Jestliže efektivní (povrchová) teplota naroste o 500 K, zvýší se zářivý výkon hvězdy 1,22krát.

2.3.10. Příklad

U hvězdy α Tau Aldebaran K 5 III byl zjištěn úhlový průměr $0{,}021''$. Naměřená hodnota hustoty zářivého toku dopadajícího na vnější část atmosféry Země od této hvězdy je $3{,}2\cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$. Roční paralaxa je $0{,}050''$. Stanovte poloměr a efektivní (povrchovou) teplotu hvězdy.

převzato z [6]

Zápis:

$2\alpha = 0{,}021''$, $F_{\mathrm{bol}} = 3{,}2\cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$, $\pi = 0{,}050''$, $R = ?\ \mathrm{m}$, $T_{\mathrm{ef}} = ?\ \mathrm{K}$

Řešení:

K výpočtu poloměru hvězdy můžeme použít pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u povrchu hvězdy a úhlovým poloměrem α u pozorovatele.

Pro úhlový poloměr platí

$$\sin\alpha = \frac{R}{r}.$$

Pro malé úhly je

$$\sin\alpha \doteq \alpha,$$

proto lze psát

$$\alpha = \frac{R}{r}$$

a tedy

$$R = \alpha\cdot r,$$

kde

$$r = \frac{1}{\pi}$$

a po dosazení za r dostaneme

$$R = \alpha\cdot\frac{1}{\pi}.$$

Pokud neznáme přímo vztah pro efektivní (povrchovou) teplotu hvězdy.

Použijeme vztahy pro zářivý výkon hvězdy

$$L = 4\pi' \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4 = 4\pi' \cdot r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}},$$

ze kterých efektivní (povrchovou) teplotu hvězdy vyjádříme

$$T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}}{\sigma \cdot R^2}}.$$

Do získaného vztahu dosadíme za R a dostaneme

$$T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}}{\sigma \cdot (\alpha \cdot r)^2}}$$

$$T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{F_{\mathrm{bol}}}{\sigma \cdot \alpha^2}}.$$

Než provedeme číselné dosazení, převedeme zadaný úhel na radiány

$$\alpha = 0{,}021'' : 2 = 0{,}010\,5''$$

$$\alpha' = \frac{\alpha}{3\,600} \cdot \frac{\pi'}{180°} = \frac{0{,}010\,5''}{3\,600} \cdot \frac{\pi'}{180°} = 5 \cdot 10^{-8}.$$

Dosadíme číselně

$$T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{3{,}2 \cdot 10^{-8}}{5{,}671 \cdot 10^{-8} \cdot (5 \cdot 10^{-8})^2}},$$

$$\underline{\underline{T_{\mathrm{ef}} = 3{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{K}}}.$$

Nyní ještě dopočítáme poloměr hvězdy podle vztahu

$$R = \alpha' \cdot \frac{1}{\pi}.$$

Dosazení číselně ($1\ \mathrm{pc} = 3{,}086 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}$)

$$R = 5 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{0{,}050} \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m},$$

$$\underline{\underline{R = 3{,}14 \cdot 10^{10}\ \mathrm{m} = 45\ \mathrm{R_{Sl}}}}.$$

Odpověď:

Poloměr hvězdy je $45\ \mathrm{R_{Sl}}$ a efektivní (povrchová) teplota je $3{,}9 \cdot 10^3\ \mathrm{K}$.

zpracováno podle [6]

2.3.11. Příklad

Pro hvězdu nacházející se ve vzdálenosti $10{,}4\ \mathrm{pc}$ byla zjištěna hustota zářivého toku $1\cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$ a efektivní (povrchová) teplota $4\,800\ \mathrm{K}$.

Určete úhlový průměr hvězdy a zvažte, zda ho lze současnými interferometrickými metodami změřit. Odhadněte bolometrickou korekci, jestliže absolutní vizuální hvězdná velikost je $1{,}03\ \mathrm{mag}$. Údaje přibližně odpovídají hvězdě β Gem Polluks K0 III.

převzato z [6]

Zápis:

$r = 10{,}4\ \mathrm{pc}$, $F_{\mathrm{bol}} = 1\cdot 10^{-8}\ \mathrm{W\cdot m^{-2}}$, $T_{\mathrm{ef}} = 4\,800\ \mathrm{K}$, $M_{\mathrm{V}} = 1{,}03\ \mathrm{mag}$, $2\alpha = ?''$, $BC = ?\ \mathrm{mag}$

Řešení:

Nejprve spočteme úhlový poloměr. K výpočtu poloměru hvězdy můžeme použít pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u povrchu hvězdy a úhlovým poloměrem α u pozorovatele.

Pro úhlový poloměr platí

$$\sin\alpha = \frac{R}{r}.$$

Pro malé úhly je

$$\sin\alpha \doteq \alpha,$$

proto lze psát

$$\alpha = \frac{R}{r}.$$

Pro úhlový průměr platí

$$2\alpha = 2\frac{R}{r}.$$

Neznáme poloměr hvězdy R, který lze vypočítat ze vztahu pro efektivní (povrchovou) teplotu hvězdy

$$T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}}{\sigma \cdot R^2}} \, ,$$

tedy

$$R = \sqrt{\frac{r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}}{\sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4}} \, .$$

Dosadíme za R

$$2\alpha = 2\frac{\sqrt{\frac{r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}}{\sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4}}}{r} \, ,$$

$$2\alpha = 2\sqrt{\frac{F_{\mathrm{bol}}}{\sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4}} \, .$$

Nyní dosadíme číselně do vzorce pro úhlový průměr

$$2\alpha = 2\sqrt{\frac{10^{-8}}{5{,}671 \cdot 10^{-8} \cdot (4\,800)^4}} \, ,$$

$$2\alpha = 3{,}65 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{rad} \, .$$

Převod na vteřiny

$$2\alpha' = 2\alpha \cdot \frac{180°}{\pi'} \cdot 3\,600 = 3{,}65 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{180°}{\pi'} \cdot 3\,600 \, ,$$

tj.

$$\underline{\underline{2\alpha' = 0{,}008''}} \, .$$

Pro porovnání je například u nového interferometru ALMA rozlišení $\doteq 0{,}005''$, což je pod $0{,}008''$.

Pro bolometrickou korekci platí vztah

$$BC = M_{\mathrm{bol}} - M_{\mathrm{V}} \, .$$

M_{bol} dostaneme ze vztahu

$$\log \frac{L}{L_{\mathrm{Sl}}} = 0{,}4 \cdot (4{,}75 - M_{\mathrm{bol}})\,,$$

po úpravě

$$M_{\mathrm{bol}} = 4{,}75 - \frac{1}{0{,}4} \cdot \log \frac{L}{L_{\mathrm{Sl}}} = 4{,}75 - \frac{1}{0{,}4} \cdot \log \frac{4\pi' \cdot r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}}{L_{\mathrm{Sl}}}\,.$$

Dosadíme M_{bol}:

$$BC = 4{,}75 - \frac{1}{0{,}4} \cdot \log \frac{4\pi' \cdot r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}}{L_{\mathrm{Sl}}} - M_{\mathrm{V}}$$

Dosadíme číselně do vztahu pro bolometrickou korekci

$$BC = 4{,}75 - \frac{1}{0{,}4} \cdot \log \frac{4\pi' \cdot \left(10{,}4 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\right)^2 \cdot 10^{-8}}{3{,}86 \cdot 10^{26}} - 1{,}03$$

$$\underline{\underline{BC = -0{,}09\,\mathrm{mag}}}\,.$$

Odpověď:

Rozlišení současných přístrojů je nižší než spočtená hodnota, což znamená, že spočtená hodnota je měřitelná.

Bolometrická korekce je přibližně $-0{,}09\,\mathrm{Mag}$.

zpracováno podle [6]

2.3.12. Příklad

U Vegy byl zjištěn úhlový průměr $2\alpha = 0{,}003\,24''$ a hustota zářivého toku $F_{\mathrm{bol}} = 2{,}84 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$. Její vzdálenost je $r = 7{,}68\ \mathrm{pc}$. Stanovte poloměr, efektivní (povrchovou) teplotu a zářivý výkon.

převzato z [6]

Zápis:

$2\alpha = 0{,}003\,24''$, $F_{\mathrm{bol}} = 2{,}84 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$, $r = 7{,}87\ \mathrm{pc}$, $R = ?\ \mathrm{m}$, $T_{\mathrm{ef}} = ?\ \mathrm{K}$, $L = ?\ \mathrm{W}$

Řešení:

K výpočtu poloměru hvězdy můžeme použít pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem u povrchu hvězdy a úhlovým poloměrem α u pozorovatele.

Pro úhlový poloměr platí

$$\sin\alpha = \frac{R}{r}.$$

Pro malé úhly je

$$\sin\alpha \doteq \alpha,$$

proto lze psát

$$\alpha = \frac{R}{r}$$

a tedy

$$R = \alpha \cdot r$$

Než provedeme číselné dosazení, převedeme zadaný úhel na radiány

$$\alpha = 0{,}003\,24'' : 2 = 0{,}001\,62''$$

$$\alpha' = \frac{\alpha}{3\,600} \cdot \frac{\pi'}{180^\circ} = \frac{0{,}001\,62''}{3\,600} \cdot \frac{\pi'}{180^\circ} = 8 \cdot 10^{-9}.$$

$$R = \alpha' \cdot r$$

Dosazení číselně ($1\,\mathrm{pc} = 3{,}086 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}$)

$$R = 8 \cdot 10^{-9} \cdot 7{,}68 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m},$$

$$\underline{\underline{R = 1{,}90 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m} = 2{,}7\ \mathrm{R_{Sl}}}}.$$

Pro zářivý výkon dosadíme do vzorce

$$L = 4\pi' \cdot r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}.$$

Dosazení číselně

$$L = 4\pi' \cdot \left(7{,}68 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\right)^2 \cdot 2{,}84 \cdot 10^{-8},$$

$$\underline{\underline{L = 2{,}00 \cdot 10^{28}\ \mathrm{W} = 52{,}0\,\mathrm{L_{Sl}}}}.$$

Známe vztahy pro zářivý výkon hvězdy

$$L = 4\pi' \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4 = 4\pi' \cdot r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}},$$

ze kterých vyjádříme efektivní (povrchovou) teplotu hvězdy

$$T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}}{\sigma \cdot R^2}},$$

Dosadíme číselně

$$T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{\left(7{,}68 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\right)^2 \cdot 2{,}84 \cdot 10^{-8}}{5{,}671 \cdot 10^{-8} \cdot \left(1{,}86 \cdot 10^{9}\right)^2}},$$

$$\underline{\underline{T_{\mathrm{ef}} \doteq 9\,500\ \mathrm{K}}}.$$

Odpověď:

Poloměr hvězdy je $1{,}86 \cdot 10^9\,\mathrm{m} = 2{,}7\ \mathrm{R_{Sl}}$, zářivý výkon je $2{,}00 \cdot 10^{28}\ \mathrm{W} = 52{,}0\ \mathrm{L_{Sl}}$ a efektivní (povrchová) teplota je $9{,}50 \cdot 10^3\ \mathrm{K}$.

zpracováno podle [6]

V následujících příkladech 2.3.13 a 2.3.14 porovnejte, na kolik je výsledek ovlivněn zaokrouhlením podle počtu platných cifer.

2.3.13. Příklad

O kolik stupňů kelvina by se musela zmenšit efektivní (povrchová) teplota Slunce, aby se solární konstanta zmenšila o 1 %?

převzato z [4]

Tento příklad lze řešit dvěma způsoby.

a)

Zápis:

$\frac{\mathrm{d}K}{K} = 1\,\%$, $\mathrm{d}T_{ef} = ?\ \mathrm{K}$

Řešení:

Označíme-li K solární konstantu, r vzdálenost Země od Slunce, R_{Sl} poloměr Slunce a σ Stefanovu–Boltzmanovu konstantu, pak efektivní (povrchovou) teplotu Slunce lze vyjádřit vztahem

$$T_{ef} = \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot K}{\sigma \cdot R^2}}\,.$$

V našem případě je r, R a σ konstantní, je tedy

$$T_{ef} = k \cdot \sqrt[4]{K}\,.$$

Pro výpočet malých změn je potřeba spočítat diferenciál příslušné funkce, kde proměnná je K.

Pro výpočet diferenciálu je třeba napřed funkci derivovat. Pro derivování použijeme vzorec $\frac{\mathrm{d}\left(k \cdot x^{\mathrm{n}}\right)}{\mathrm{d}x} = k \cdot n \cdot x^{\mathrm{n}-1}$. Po derivaci funkce dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}T_{ef}}{\mathrm{d}K} = k \cdot \frac{1}{4} \cdot K^{-\frac{3}{4}}\,.$$

Diferenciál teploty pak bude vypadat

$$\mathrm{d}T_{ef} = k \cdot \frac{1}{4} \cdot K^{-\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}K\,.$$

Protože změna solární konstanty je uvedena v procentech, určíme napřed změnu teploty také v procentech, a proto rovnici vydělíme teplotou. Po úpravě dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{ef}}}{T_{\mathrm{ef}}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\mathrm{d}K}{K} \, .$$

Po dosazení dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{ef}}}{T_{\mathrm{ef}}} = \frac{1}{4} \cdot 1\% = 0{,}25\% \, .$$

Vezmeme-li efektivní (povrchovou) povrchovou teplotu Slunce $T = 6\,000\,\mathrm{K}$, je změna

$$\mathrm{d}T = 6\,000 \cdot 0{,}25\% \, ,$$

$$\underline{\underline{\mathrm{d}T = 2 \cdot 10\ \mathrm{K}}} \, .$$

Odpověď:

Efektivní (povrchová) teplota Slunce by se musela zmenšit o $2 \cdot 10\ \mathrm{K}$.

zpracováno podle [4]

b)

Zápis:

$\Delta K = -0{,}01\ K$, $K = 6\,000\ \mathrm{K}$, $\Delta K = ?\mathrm{K}$

Řešení:

Zjistit, o kolik stupňů by se musela efektivní (povrchová) teplota Slunce, znamená určit rozdíl mezi původní teplotou T_{ef} a teplotou po poklesu T'_{ef}.

Rozdíl teplot je

$$\Delta T_{\mathrm{ef}} = T'_{\mathrm{ef}} - T_{\mathrm{ef}} \, .$$

Označíme-li K solární konstantu, r vzdálenost Země od Slunce, R_{Sl} poloměr Slunce a σ Stefanovu–Boltzmanovu konstantu, pak efektivní (povrchovou) teplotu Slunce lze vyjádřit vztahem

$$T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot K}{\sigma \cdot R^2}} \, .$$

Nová hodnota solární konstanty je rovna

$$K' = K + \Delta K \, ,$$

$$K' = 0{,}99\ K \, .$$

Dosadíme do vztahu pro rozdíl teplot

$$\Delta T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot 0{,}99 K}{\sigma \cdot R^2}} - \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot K}{\sigma \cdot R^2}}\,.$$

Po úpravě dostaneme

$$\Delta T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot K}{\sigma \cdot R^2}} \cdot \left(\sqrt[4]{0{,}99} - \sqrt[4]{1}\right),$$

tedy

$$\Delta T_{\mathrm{ef}} = T_{\mathrm{ef}} \cdot \left(\sqrt[4]{0{,}99} - \sqrt[4]{1}\right).$$

Dosazení číselně

$$\Delta T_{\mathrm{ef}} = 6\,000 \cdot \left(\sqrt[4]{0{,}99} - \sqrt[4]{1}\right),$$

$$\underline{\underline{\Delta T_{\mathrm{ef}} = -2 \cdot 10\ \mathrm{K}}}\,.$$

Odpověď:

Efektivní (povrchová) teplota Slunce by se musela zmenšit o $2 \cdot 10\ \mathrm{K}$.

2.3.14. Příklad

U hvězdy α Cen A byl naměřen pokles hustoty zářivého toku o 1 %. O kolik stupňů kelvina poklesla efektivní (povrchová) teplota α Cen A, jestliže původní teplota dosahovala 5 790 K?

převzato z [6]

Tento příklad lze řešit dvěma způsoby, podobně jako v předchozím příkladu.

a)

Zápis:

$\Delta F_{\mathrm{bol}} = -0{,}01\, F_{\mathrm{bol}}$, $T_{\mathrm{ef}} = 5\,790\ \mathrm{K}$, $\Delta T_{\mathrm{ef}} = ?\ \mathrm{K}$

Řešení:

Zjistit, o kolik stupňů poklesla efektivní (povrchová) teplota, znamená určit rozdíl mezi původní teplotou T_{ef} a teplotou po poklesu T'_{ef}.

Rozdíl teplot je

$$\Delta T_{\mathrm{ef}} = T'_{\mathrm{ef}} - T_{\mathrm{ef}}\ .$$

Vztah pro efektivní (povrchovou) teplotu buď známe nebo ze vztahů pro zářivý výkon

$$L = 4\pi' \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4$$

$$L = 4\pi' \cdot r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}$$

sestavíme rovnici

$$4\pi' \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4 = 4\pi' \cdot r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}\ ,$$

ze které vyjádříme efektivní (povrchovou) teplotu

$$T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}}{\sigma \cdot R^2}}\ .$$

Nová hustota zářivého toku F'_{bol} je rovna

$$F'_{\mathrm{bol}} = F_{\mathrm{bol}} + \Delta F_{\mathrm{bol}}\ ,$$

$$F'_{\mathrm{bol}} = 0{,}99 F_{\mathrm{bol}}\ .$$

Dosadíme do vztahu pro rozdíl teplot

$$\Delta T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot 0{,}99 F_{\mathrm{bol}}}{\sigma \cdot R^2}} - \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}}{\sigma \cdot R^2}}\ .$$

Po úpravě dostaneme

$$\Delta T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{\frac{r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}}}{\sigma \cdot R^2}} \cdot \left(\sqrt[4]{0{,}99} - \sqrt[4]{1}\right),$$

tedy

$$\Delta T_{\mathrm{ef}} = T_{\mathrm{ef}} \cdot \left(\sqrt[4]{0{,}99} - \sqrt[4]{1}\right).$$

Dosazení číselně

$$\Delta T_{\mathrm{ef}} = 5\,790 \cdot \left(\sqrt[4]{0{,}99} - \sqrt[4]{1}\right),$$

$$\underline{\underline{\Delta T_{\mathrm{ef}} = -1 \cdot 10\ \mathrm{K}}}.$$

Odpověď:

Při poklesu hustoty zářivého toku o 1 % u hvězdy α Cen A, klesla její efektivní (povrchová) teplota o $1 \cdot 10\ \mathrm{K}$.

b)

Zápis:

$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{bol}}}{F_{\mathrm{bol}}} = 1\%$, $T_{\mathrm{ef}} = 5\,790\,\mathrm{K}$, $\mathrm{d}T_{\mathrm{ef}} = ?\ \mathrm{K}$

Řešení:

K řešení tohoto příkladu napřed potřebujeme najít vztah, ve kterém se vyskytuje teplota T_{ef} a hustota zářivého toku F_{bol}. K tomu využijeme vztahy pro zářivý výkon

$$\begin{aligned} L &= 4\pi' \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4 \\ L &= 4\pi' \cdot r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}} \end{aligned}.$$

Úpravou uvedených rovnic získáme vztah

$$4\pi' \cdot r^2 \cdot F_{\mathrm{bol}} = 4\pi' \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4$$

$$F_{\mathrm{bol}} = \frac{4\pi' \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4}{4\pi' \cdot r^2} = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T_{\mathrm{ef}}^4}{r^2}.$$

V našem případě je r, R a σ konstantní, je tedy

$$F_{\mathrm{bol}} = k \cdot T_{\mathrm{ef}}^4.$$

Pro výpočet malých změn je potřeba spočítat diferenciál příslušné funkce, kde proměnná je T_{ef}.

Pro výpočet diferenciálu je třeba napřed funkci derivovat. Pro derivování použijeme vzorec

$$\frac{\mathrm{d}\left(k \cdot x^{\mathrm{n}}\right)}{\mathrm{d}x} = k \cdot n \cdot x^{\mathrm{n}-1} .$$

Po derivaci funkce dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{bol}}}{\mathrm{d}T_{\mathrm{ef}}} = k \cdot 4 \cdot T_{\mathrm{ef}}^{3} .$$

Diferenciál hustoty zářivého toku pak bude vypadat

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{bol}} = k \cdot 4 \cdot T_{\mathrm{ef}}^{3} \cdot \mathrm{d}T_{\mathrm{ef}} .$$

Získanou rovnici vydělíme hustotou zářivého toku, abychom mohli dosadit její změnu v procentech. Po úpravě dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{bol}}}{F_{\mathrm{bol}}} = 4 \cdot \frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{ef}}}{T_{\mathrm{ef}}} .$$

Po dosazení dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{ef}}}{T_{\mathrm{ef}}} = \frac{1}{4} \cdot 1\% .$$

Nakonec dosadíme původní povrchovou teplotu a dopočítáme změnu teploty

$$\mathrm{d}T_{\mathrm{ef}} = 5\,790 \cdot 0{,}25\,\% ,$$

$$\underline{\underline{\mathrm{d}T_{\mathrm{ef}} \doteq 1 \cdot 10\ \mathrm{K}}} .$$

Odpověď:

Při poklesu hustoty zářivého toku o 1 % u hvězdy α Cen A, klesla její efektivní (povrchová) teplota přibližně o $1 \cdot 10\ \mathrm{K}$.

zpracováno podle [4]

Přesto, že je v příkladech 2.3.13 a 2.3.14 použit stejný postup a efektivní (povrchová) teplota u hvězdy α Cen A se lišila od efektivní (povrchové) teploty v příkladu se Sluncem jen velmi málo, je v důsledku výpočtu na jednu platnou cifru rozdíl mezi vypočtenými hodnotami 10 K. Pro Slunce tato hodnota představuje dvojnásobek hodnoty u hvězdy α Cen A.

2.3.15. Příklad

Předpokládejme znalost zářivého výkonu $3{,}86 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W}$ a absolutní bolometrickou hvězdnou velikost Slunce $4{,}75\ \mathrm{mag}$. Stanovte vzdálenost, do které by bylo možné pozorovat lidským zrakem Slunce při jeho hypotetickém vzdalování od Země. Odhadněte počet fotonů n dopadajících do oka za jednu sekundu. Pro jednoduchost předpokládejte, že všechny fotony mají stejnou vlnovou délku $550\ \mathrm{nm}$, plochu lidského oka zvolte $1\ \mathrm{cm}^2$.

převzato z [6]

Zápis:

$L = 3{,}86 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W}$, $M_{\mathrm{bol}} = 4{,}75\ \mathrm{mag}$, $\lambda = 550\ \mathrm{nm}$, $S = 1\ \mathrm{cm}^2$, $r = ?\ \mathrm{m}$, $n = ?\ \mathrm{s}^{-1}$

Řešení:

Vzdálenost se vyskytuje ve vzorci pro absolutní hvězdnou velikost

$$M = m + 5 - 5\log r\ .$$

Po úpravě dostaneme

$$\log r = \frac{M - m - 5}{-5}\ .$$

Dosadíme číselně. Protože jde o hranici pozorování zrakem, počítáme s $m = 6\ \mathrm{mag}$.

$$\log r = \frac{4{,}75 - 6 - 5}{-5}\ ,$$

$$\underline{\underline{r = 18\ \mathrm{pc} = 18 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m} = 6 \cdot 10^{17}\ \mathrm{m}}}\ .$$

Počet fotonů dopadajících do oka za jednu sekundu dostaneme jako podíl celkové energie přijímané okem za jednu sekundu a energie jednoho fotonu.

$$n = \frac{E_{\mathrm{celk}}}{E_{\mathrm{f}}}\ ,$$

kde energie fotonu je dána vztahem

$$E_{\mathrm{f}} = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

a celková energie je součin hustoty zářivého toku a plochy lidského oka.

$$E_{\mathrm{celk}} = F_{\mathrm{bol}} \cdot S \cdot \Delta t\ .$$

Po dosazení dostaneme

$$n = \frac{F_{\mathrm{bol}} \cdot S \cdot \Delta t \cdot \lambda}{h \cdot c}\ .$$

Vyjádříme hustotu zářivého toku

$$F_{\mathrm{bol}} = \frac{L}{4\pi' \cdot r^2}$$

a dosadíme do vzorce pro n

$$n = \frac{L \cdot S \cdot \Delta t \cdot \lambda}{4\pi' \cdot r^2 \cdot h \cdot c}.$$

Dosadíme číselně ($1\,\mathrm{pc} = 3{,}086 \cdot 10^{16}\ \mathrm{m}$)

$$n = \frac{3{,}86 \cdot 10^{26} \cdot 10^{-4} \cdot 1 \cdot 550 \cdot 10^{-9}}{4\pi' \cdot \left(18 \cdot 3{,}086 \cdot 10^{16}\right)^2 \cdot 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 299{,}8 \cdot 10^6},$$

$$\underline{\underline{n = 3 \cdot 10^4}}.$$

Odpověď:

Při hypotetickém vzdalování Slunce od Země by ho bylo možné pozorovat lidským zrakem do vzdálenosti 18 pc .

Za jednu sekundu dopadá do oka $\underline{\underline{n = 3 \cdot 10^4}}$ fotonů.

zpracováno podle [6]

3. Základy hvězdné spektroskopie

Tato kapitola je zaměřena na spektroskopii hvězd. Hlavně na vznik spektrálních čar a na to, čím a jak jsou spektrální čáry ovlivněny.

3.1. Teorie základů hvězdné spektroskopie

Šířka spektrálních čar se mění např. působením vnějšího magnetického pole (Zeemanův jev), nebo změnou teploty spojenou s pohybem atomů v obalu hvězdy. Dalším jevem ovlivňujícím šířku spektrální čáry je Dopplerův posuv vlnových délek v důsledku otáčení hvězdy.

3.2. Základní vztahy hvězdné spektroskopie

Vztah pro šířku spektrální čáry při teplotním rozšíření

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c} \cdot \sqrt{\frac{2k \cdot T}{m}},$$

kde λ je vlnová délka spektrální čáry, c rychlost světla, k Boltzmannova konstanta, T termodynamická teplota, m hmotnost atomu.

Vztah pro vlnovou délku spektrální čáry

$$\lambda = \left[R_{\mathrm{H}} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \right]^{-1},$$

kde R_{H} je Rydbergův vlnočet, n_1 a n_2 hlavní kvantová čísla odpovídající hladinám, mezi nimiž elektron přeskakuje.

Vztah pro šířku spektrální čáry plynoucí z Dopplerova jevu

$$\Delta\lambda = \lambda \cdot \frac{v_0}{c},$$

kde λ je vlnová délka spektrální čáry, c rychlost světla, v_0 složka rotační rychlosti.

Složka rotační rychlosti ve směru k pozorovateli se vypočítá $v \cdot \sin i$, kde v je rychlost rotační rychlosti a i úhel mezi směrem zorného paprsku a rotační osou.

3.3. Příklady k základům hvězdné spektroskopie

3.3.1. Příklad

Vyjádřete v elektronvoltech energii fotonů charakterizujících:

a) Lymanovu hranu o $\lambda = 91{,}2\ \text{nm}$,

b) nebulární čáru O III $\lambda = 500{,}7\ \text{nm}$,

c) čáru H_α Balmerovy série vodíku $\lambda = 656{,}3\ \text{nm}$,

d) emisní čáru NH_3 $\lambda = 1{,}3\ \text{cm}$,

e) čáru neutrálního vodíku $\lambda = 21\ \text{cm}$.

převzato z [6]

Řešení:

Pokud máme vyjádřit energii pomocí vlnové délky, použijeme vztah

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda}.$$

a) Dosazení číselně

$$E = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 299{,}8 \cdot 10^{6}}{91{,}2 \cdot 10^{-9}},$$

$$E = 2{,}18 \cdot 10^{-18}\ \text{J}.$$

Protože máme vyjádřit energii v elektronvoltech, využijeme vztahu

$$1\,\text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Tedy

$$\underline{\underline{E = \frac{2{,}18 \cdot 10^{-18}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\ \text{eV} = 13{,}6\ \text{eV}}}.$$

b) Dosazení číselně

$$E = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 299{,}8 \cdot 10^{6}}{500{,}7 \cdot 10^{-9}},$$

$$E = 3{,}967 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Tedy

$$\underline{\underline{E = \frac{3{,}967 \cdot 10^{-19}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\ \text{eV} = 2{,}476\ \text{eV}}}.$$

c) Dosazení číselně

$$E = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 299{,}8 \cdot 10^{6}}{653{,}3 \cdot 10^{-9}},$$

$$E = 3{,}041 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Tedy

$$\underline{\underline{E = \frac{3{,}041 \cdot 10^{-19}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 1{,}898\ \mathrm{eV}.}}$$

d) Dosazení číselně

$$E = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 299{,}8 \cdot 10^{6}}{1{,}3 \cdot 10^{-2}},$$

$$E = 1{,}5 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J}.$$

Tedy

$$\underline{\underline{E = \frac{1{,}5 \cdot 10^{-23}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 9{,}4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{eV}.}}$$

e) Dosazení číselně

$$E = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 299{,}8 \cdot 10^{6}}{0{,}21},$$

$$E = 9{,}5 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{J}.$$

Tedy

$$\underline{\underline{E = \frac{9{,}5 \cdot 10^{-25}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 5{,}9 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{eV}.}}$$

Odpověď:

Spočtené energie fotonů jsou a) $13{,}6\ \mathrm{eV}$, b) $2{,}476\ \mathrm{eV}$ c) $1{,}898\ \mathrm{eV}$ d) $9{,}4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{eV}$ e) $5{,}9 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{eV}$.

3.3.2. Příklad

Zjistěte, zda atomy vodíku zůstávají ve sluneční koróně i při teplotě $3 \cdot 10^6$ K a odůvodněte.

zpracováno podle [6]

Zápis:

$T = 3 \cdot 10^6$ K

Řešení:

Abychom zjistili, zda atomy vodíku zůstanou v koróně, potřebujeme zjistit, jestli rychlost, kterou se pohybují, překročí únikovou (parabolickou) rychlost.

Protože se atomy v koróně pohybují různými rychlostmi, nelze určit rychlosti všech atomů. Spočítáme pouze rychlost, kterou se pohybuje nejvíce atomů (nejpravděpodobnější rychlost).

Nejpravděpodobnější rychlost se vypočte podle vztahu

$$v_\mathrm{n} = \sqrt{\frac{2k \cdot T}{m}}\ .$$

Dosazení číselně

$$v_\mathrm{n} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}380 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^6}{1{,}661 \cdot 10^{-27}}}\ ,$$

$$\underline{\underline{v_\mathrm{n} = 2 \cdot 10^2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}}}\ .$$

Úniková rychlost se vypočte podle vztahu

$$v_\mathrm{n} = \sqrt{2G \cdot \frac{M_\mathrm{Sl}}{R_\mathrm{Sl}}}\ .$$

Dosazení číselně

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{2 \cdot 6{,}670 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1{,}989 \cdot 10^{30}}{6{,}963 \cdot 10^{8}}}\ ,$$

$$\underline{\underline{v_\mathrm{p} = 6 \cdot 10^2\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}}}\ .$$

Odpověď:

Protože nejpravděpodobnější rychlost atomů vodíku nepřekročila únikovou rychlost, zůstává většina atomů vodíku v koróně. Tuto rychlost má pouze většina atomů. Některé mají menší rychlost, ty také zůstávají v koróně a některé získají větší rychlost, ty uniknou (viz statistická fyzika).

3.3.3. Příklad

Stanovte vlnovou délku světla vyzářeného atomem vodíku při přechodu z energetické hladiny $n = 6$ na hladinu $n = 2$. O jakou sérii a barvu jde?

převzato z [6]

Zápis:

$n_1 = 2$, $n_2 = 6$, série=?, barva=?

Řešení:

Tento příklad je možné řešit pomocí některého ze dvou vztahů.

$$\lambda = \left[R_{\mathrm{H}} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \right]^{-1},$$

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda}.$$

Řešení pomocí vztahu

$$\lambda = \left[R_{\mathrm{H}} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \right]^{-1},$$

zde nebudu uvádět, jde jen o správné dosazení.

Pro řešení tedy použijeme vztah

$$E = \frac{h \cdot c}{\lambda}.$$

Energii vyzářeného světla dostaneme jako rozdíl mezi energiemi na 6. a na 2. energetické hladině.

Energie 6. a 2. energetické hladiny, které se vyskytují ve vztahu

$$E = E_6 - E_2,$$

vyjádříme pomocí vzorce

$$E_{\mathrm{n}} = \frac{E_1}{n^2},$$

$$E = \frac{E_1}{n_2^2} - \frac{E_1}{n_1^2} = \frac{h \cdot c}{\lambda},$$

kde

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\frac{E_1}{n_2^2} - \frac{E_1}{n_1^2}} = h \cdot c \cdot \left(\frac{n_1^2 \cdot n_2^2}{E_1 \cdot \left(n_1^2 - n_2^2\right)} \right).$$

Dosadíme číselně ($1\ \mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$)

$$\lambda = 6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 299{,}8 \cdot 10^{6} \cdot \left(\frac{2^2 \cdot 6^2}{-13{,}6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot \left(2^2 - 6^2\right)} \right),$$

$$\underline{\underline{\lambda = 410{,}3\ \mathrm{nm}}}\ .$$

Odpověď:

Jde o čtvrtou čáru Balmerovy série H_δ a fialovou barvu.

3.3.4. Příklad

Jakou spektrální čáru můžeme očekávat ve viditelné části spektra protuberance při excitaci vodíkových atomů elektrony o energii 2,0 eV?

převzato z [6]

Zápis:

$E = 2{,}0\ \text{eV}$, $\lambda = ?\ \text{nm}$

Řešení:

Vlnová délka se vypočte ze vzorce

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{E}.$$

Energie se využije celá nebo menší a při menší energii je větší vlnová délka. Proto platí

$$\lambda \geq \frac{h \cdot c}{E}.$$

Dosadíme číselně ($1\ \text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$)

$$\lambda \geq \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34} \cdot 299{,}8 \cdot 10^{6}}{2{,}0 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}},$$

$$\underline{\underline{\lambda \geq 6 \cdot 10^{2}\ \text{nm}}}.$$

Hledáme tedy čáru série s vlnovou délkou nejblíže $6 \cdot 10^{2}\ \text{nm}$. To splňuje čára Balmerovy série H_{α} o vlnové délce 656,28 nm.

Odpověď:

Ve viditelné části spektra protuberance při excitaci vodíkových atomů elektrony o energii 2,0 eV můžeme očekávat spektrální čáru Balmerovy série H_{α}.

zpracováno podle [6]

3.3.5. Příklad

Určete šířku spektrální čáry kyslíku O III s vlnovou délkou $\lambda = 500{,}7\ \text{nm}$, kterou můžeme identifikovat ve spektru plynné emisní mlhoviny o teplotě 10 000 K.

převzato z [6]

Zápis:

$\lambda = 500{,}7\ \text{nm}$, $T = 10\,000\ \text{K}$, $\Delta\lambda = ?\ \text{nm}$

Řešení:

Pokud počítáme šířku spektrální čáry při určité teplotě, použijeme vztah pro šířku spektrální čáry při teplotním rozšíření

$$\Delta\lambda = \frac{2\lambda}{c} \cdot \sqrt{\frac{2k \cdot T}{m}}\ .$$

Dosadíme číselně ($1\ \text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$)

$$\Delta\lambda = \frac{2 \cdot 500{,}7 \cdot 10^{-9}}{299{,}8 \cdot 10^{6}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 10\,000}{16 \cdot 1{,}661 \cdot 10^{-27}}}\ ,$$

$$\underline{\underline{\Delta\lambda = 0{,}01076\ \text{nm}}}\ .$$

Odpověď:

Šířka spektrální čáry, kterou lze identifikovat v daném spektru, je $0{,}01076\ \text{nm}$.

3.3.6. Příklad

Vypočítejte šířku čáry H_α, znáte-li, že pro rozšíření spektrálních čar srážkami platí $\Delta\lambda \cong \frac{\lambda^2}{c} \cdot \frac{1}{\pi' \cdot \Delta t_0} \cong \frac{\lambda^2}{c} \cdot \frac{n \cdot \sigma}{\pi'} \cdot \sqrt{\frac{2k \cdot T_{\mathrm{ef}}}{m}}$, kde $\Delta\lambda$ je vlnová délka čáry po rozšíření, λ nerozšířená vlnová délka čáry, c rychlost světla, n hustota atomů, σ Stefanova–Boltzmanova konstanta, k Boltzmanova konstanta, T_{ef} efektivní (povrchová) teplota, m hmotnost atomu vodíku, π' Ludolfovo číslo

Předpokládáme vodíkové atomy ve sluneční fotosféře při teplotě 5 780 K a hustotě atomů $1{,}5 \cdot 10^{23}\ \mathrm{m}^{-3}$, $\sigma = 3{,}6 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{m}^2$.

převzato z [6]

Zápis:

$n = 1{,}5 \cdot 10^{23}\ \mathrm{m}^{-3}$, $T = 5\,780\ \mathrm{K}$, $\sigma = 3{,}6 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{m}^2$, $\Delta\lambda = ?\ \mathrm{nm}$

Řešení:

Buď víme, že vlnová délka čáry H_α je 656,28 nm, nebo, že čára H_α vzniká při přechodu elektronu mezi hladinami $n_2 = 3, n_1 = 2$ a spočteme ji podle vztahu

$$\lambda = \left[R_{\mathrm{H}} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \right]^{-1}.$$

Do vzorce ze zadání dosadíme číselně a spočteme šířku čáry

$$\Delta\lambda \cong \frac{\left(656{,}28 \cdot 10^{-9}\right)^2}{299{,}8 \cdot 10^6} \cdot \frac{1{,}5 \cdot 10^{23} \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-20}}{\pi'} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 5\,780}{1 \cdot 1{,}661 \cdot 10^{-27}}},$$

$$\underline{\underline{\Delta\lambda = 2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{nm}}}.$$

Odpověď:

Šířka spektrální čáry H_α je $2{,}4 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{nm}$.

3.3.7. Příklad

Určete šířku spektrální čáry při rotačním rozšíření, je-li složka rychlosti $v_{\mathrm{rot}} \cdot \sin i = 3\,000 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Čáry vznikaly při přechodech elektronů z energetické hladiny $n_2 = 4$ na hladinu $n_1 = 2$.

Zápis:

$n_2 = 4$, $n_1 = 2$, $\Delta\lambda = ?$

Řešení:

Šířku spektrální čáry při rotačním rozšíření spočteme podle vztahu

$$\Delta\lambda = \lambda \cdot \frac{v_0}{c},$$

kde v_0 je složka rotační rychlosti ve směru k pozorovateli

$$\Delta\lambda = \lambda \cdot \frac{v_{\mathrm{rot}} \cdot \sin i}{c}.$$

Vlnovou délku nerozšířené čáry spočteme podle vztahu

$$\lambda = \left[R_{\mathrm{H}} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \right]^{-1}.$$

Po dosazení dostaneme

$$\Delta\lambda = \left[R_{\mathrm{H}} \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) \right]^{-1} \cdot \frac{v_{\mathrm{rot}} \cdot \sin i}{c}.$$

Dosadíme číselně

$$\Delta\lambda = \left[1{,}097 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) \right]^{-1} \cdot \frac{30\,000}{299{,}8 \cdot 10^6},$$

$$\underline{\underline{\Delta\lambda = 0{,}04865 \ \mathrm{nm}}}.$$

Odpověď:

Šířka spektrální čáry je 0,04865 nm.

3.3.8. Příklad

Velmi široké čáry způsobené rotačním rozšířením pozorujeme u hvězd spektrální třídy A.

Jestliže pro čáru H_γ o vlnové délce 434,0 nm jedné hvězdy byla zjištěna šířka čáry $\Delta\lambda = 0{,}08\ \mathrm{nm}$, jakých hodnot dosahuje $v_{\mathrm{rot}} \cdot \sin i$?

převzato z [6]

Zápis:

$\lambda = 434{,}0\ \mathrm{nm}$, $\Delta\lambda = 0{,}08\ \mathrm{nm}$, $v_{\mathrm{rot}} \cdot \sin i = ?\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Řešení:

Pro šířku spektrální čáry platí z Dopplerova jevu vztah

$$\Delta\lambda = \lambda \cdot \frac{v_0}{c}.$$

U rotující koule je namířena k pozorovateli jedna složka vektoru okamžité rychlosti $v_{\mathrm{rot}} \cdot \sin i$.

Pro rozšíření vlnové délky pak platí

$$\Delta\lambda = \lambda \cdot \frac{v_{\mathrm{rot}} \cdot \sin i}{c}.$$

Vyjádříme $v_{\mathrm{rot}} \cdot \sin i$:

$$v_{\mathrm{rot}} \cdot \sin i = \frac{\Delta\lambda \cdot c}{\lambda}.$$

Dosadíme číselně

$$v_{\mathrm{rot}} \cdot \sin i = \frac{0{,}08 \cdot 10^{-9} \cdot 299{,}8 \cdot 10^{6}}{434{,}0 \cdot 10^{-9}},$$

$$\underline{\underline{v_{\mathrm{rot}} \cdot \sin i = 55{,}0\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}}}.$$

Odpověď:

$v_{\mathrm{rot}} \cdot \sin i$ dosahuje rychlosti $55{,}0\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

zpracováno podle [6]

4. Nitro hvězd

Kapitola Nitro hvězd se zabývá jevy, které zde probíhají. Zkoumá, jakým způsobem probíhá přenos energie uvnitř hvězdy a jaká platí podmínka pro přenos energie. Dále zjišťuje, jaký je tlak uvnitř hvězdy, tlak záření, hustota, střední relativní hmotnost částic uvnitř hvězdy a další charakteristiky.

4.1. Základní vztahy fyziky nitra hvězd

Vztah pro vazebnou energii jádra atomu

$$\Delta E = \left(Z \cdot m_{\mathrm{p}} + N \cdot m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{j}}\right) \cdot c^2,$$

kde Z je počet protonů v jádře, m_{p} hmotnost protonu, N počet neutronů, m_{n} hmotnost neutronu, m_{j} hmotnost jádra, c rychlost světla.

Vztah pro tlak plynu

$$P_{\mathrm{g}} = \frac{R}{\mu_{\mathrm{r}}} \cdot \rho \cdot T,$$

kde R je plynová konstanta, ρ hustota, T termodynamická teplota, μ_{r} střední relativní hmotnost připadající na jednu částici.

Vztah pro střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi různých plynů

$$\mu_{\mathrm{r}} = \left(\frac{X}{\mu_1} + \frac{Y}{\mu_2} + \frac{C}{\mu_3}\right)^{-1},$$

kde X je hmotnostní zastoupení vodíku, Y hmotnostní zastoupení hélia, C hmotnostní zastoupení ostatních prvků, μ_1 střední částicová hmotnost vodíku, μ_2 střední částicová hmotnost hélia, μ_3 střední částicová hmotnost ostatních prvků.

Vztah pro střední částicovou hmotnost při úplné ionizaci, kdy elektrony uvolněné z obalu atomu považujeme za další částice

$$\mu = \frac{A}{Z+1},$$

kde A je nukleonové (hmotnostní) číslo prvku, Z protonové (atomové) číslo.

Vztah pro tlak záření

$$P_{\mathrm{r}} = \frac{4\sigma}{3c} \cdot T^4 ,$$

kde σ je Stefanova–Boltzmannova konstanta, c rychlost světla, T termodynamická teplota.

Podmínka konvekce

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} > \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{T}{P} \cdot \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} ,$$

kde T je termodynamická teplota, P tlak, r vzdálenost od středu hvězdy, γ Poissonova konstanta.

Rovnice hydrostatické rovnováhy

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -G \cdot \frac{M \cdot \rho}{r^2} ,$$

kde P je tlak, r vzdálenost od středu hvězdy, M hmotnost, ρ hustota, G gravitační konstanta.

Vztah pro teplotní gradient při přenosu zářením

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{3\kappa \cdot L \cdot r}{64\pi' \cdot \sigma \cdot r^2 \cdot T^3} \cdot \rho ,$$

kde T je termodynamická teplota, r vzdálenost od středu hvězdy, L zářivý výkon, σ Stefanova–Boltzmannova konstanta, ρ hustota, κ střední absorpční koeficient, tj. opacita hvězdného materiálu.

4.2. Příklady nitra hvězd

4.2.1. Příklad

Najděte vazebnou energii jádra atomu lithia ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}$, jestliže hmotnost atomu $M_{\mathrm{Li}} = 7{,}016\ 01\ \mathrm{m_u}$, hmotnost protonu je $1{,}007\ 83\ \mathrm{m_u}$, hmotnost neutronu je $1{,}008\ 67\,\mathrm{m_u}$.

převzato z [6]

Zápis:

$M_{\mathrm{Li}} = 7{,}016\ 01\ \mathrm{m_u}$, $m_{\mathrm{p}} = 1{,}007\ 83\ \mathrm{m_u}$, $m_{\mathrm{n}} = 1{,}008\ 67\ \mathrm{m_u}$, $\Delta E = ?\ \mathrm{eV}$

Řešení:

Na vazebnou energii je využita hmotnost nukleonů, o kterou je jádro lehčí než je hmotnost samotných nukleonů tvořících jádro.

Hmotnost atomu je hmotnost jádra a elektronového obalu. Uvažovaný atom má tři elektrony. Hmotnost jeho jádra určíme tak, že od hmotnosti atomu odečteme hmotnost elektronů

$$m_{\mathrm{j}} = M_{\mathrm{Li}} - 3m_{\mathrm{e}}.$$

Vazebnou energii jádra vypočteme podle vztahu

$$\Delta E = \left(Z \cdot m_{\mathrm{p}} + N \cdot m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{j}}\right) \cdot c^2,$$

$$\Delta E = \left(Z \cdot m_{\mathrm{p}} + N \cdot m_{\mathrm{n}} - M_{\mathrm{Li}} + 3m_{\mathrm{e}}\right) \cdot c^2$$

Dosadíme číselně

$$\Delta E = \left(3 \cdot 1{,}007\,83 \cdot 1{,}661 \cdot 10^{-27} + 4 \cdot 1{,}008\,67 \cdot 1{,}661 \cdot 10^{-27} - 7{,}016\,01 \cdot 1{,}661 \cdot 10^{-27} + 3 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\right) \cdot \\ \cdot \left(299{,}8 \cdot 10^{6}\right)^2,$$

$$\Delta E = 6{,}539 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}$$

Na elektronvolty převedeme vydělením hodnotou $1{,}602 \cdot 10^{-19}$,

$$\underline{\underline{\Delta E = 4{,}082 \cdot 10^{7}\ \mathrm{eV}}}.$$

Odpověď:

Vazebná energie atomu lithia je $4{,}082 \cdot 10^{7}\ \mathrm{eV}$.

4.2.2. Příklad

Zjistěte, kolik atomů uhlíku ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ je nejméně třeba, aby vazebná energie jader těchto atomů byla větší než vazebná energie jádra atomu železa ${}^{56}_{26}\mathrm{Fe}$, jestliže hmotnost atomu uhlíku je $M_\mathrm{C} = 12{,}011\ \mathrm{m_u}$, atomu železa je $M_\mathrm{Fe} = 55{,}845\ \mathrm{m_u}$, hmotnost protonu je $1{,}007\ 28\ \mathrm{m_u}$ a hmotnost neutronu je $1{,}008\ 66\ \mathrm{m_u}$.

Zápis:

$M_\mathrm{C} = 12{,}011\ \mathrm{m_u}$, $M_\mathrm{Fe} = 55{,}845\ \mathrm{m_u}$, $m_\mathrm{p} = 1{,}007\ 28\ \mathrm{m_u}$, $m_\mathrm{n} = 1{,}008\ 66\ \mathrm{m_u}$, $n_\mathrm{C} = ?$

Řešení:

Nejdříve je třeba určit vazebnou energii uhlíku a železa.

Na vazebnou energii je využita hmotnost nukleonů, o kterou je jádro lehčí než je hmotnost samotných nukleonů tvořících jádro.

Hmotnost atomu je hmotnost jádra a elektronového obalu. Hmotnost jádra tedy určíme tak, že od hmotnosti atomu odečteme hmotnost elektronů.

Atom uhlíku má šest elektronů takže vazebnou energii spočítáme podle vztahu

$$\Delta E = \left(Z \cdot m_\mathrm{p} + N \cdot m_\mathrm{n} - m_\mathrm{j}\right) \cdot c^2,$$

$$\Delta E_\mathrm{C} = \left(Z_\mathrm{C} \cdot m_\mathrm{p} + N_\mathrm{C} \cdot m_\mathrm{n} - M_\mathrm{C} + 6m_\mathrm{e}\right) \cdot c^2.$$

Atom železa má 26 elektronů takže vazebnou energii spočítáme podle vztahu

$$\Delta E = \left(Z \cdot m_\mathrm{p} + N \cdot m_\mathrm{n} - m_\mathrm{j}\right) \cdot c^2,$$

$$\Delta E_\mathrm{Fe} = \left(Z_\mathrm{Fe} \cdot m_\mathrm{p} + N_\mathrm{Fe} \cdot m_\mathrm{n} - M_\mathrm{Fe} + 26m_\mathrm{e}\right) \cdot c^2.$$

Určíme poměr vazebných energií

$$\frac{\Delta E_\mathrm{Fe}}{\Delta E_\mathrm{C}} = \frac{\left(Z_\mathrm{Fe} \cdot m_\mathrm{p} + N_\mathrm{Fe} \cdot m_\mathrm{n} - M_\mathrm{Fe} + 26m_\mathrm{e}\right) \cdot c^2}{\left(Z_\mathrm{C} \cdot m_\mathrm{p} + N_\mathrm{C} \cdot m_\mathrm{n} - M_\mathrm{C} + 6m_\mathrm{e}\right) \cdot c^2},$$

$$\frac{\Delta E_\mathrm{Fe}}{\Delta E_\mathrm{C}} = \frac{\left(Z_\mathrm{Fe} \cdot m_\mathrm{p} + N_\mathrm{Fe} \cdot m_\mathrm{n} - M_\mathrm{Fe} + 26m_\mathrm{e}\right)}{\left(Z_\mathrm{C} \cdot m_\mathrm{p} + N_\mathrm{C} \cdot m_\mathrm{n} - M_\mathrm{C} + 6m_\mathrm{e}\right)}.$$

Dosadíme číselně

$$\frac{\Delta E_{\mathrm{Fe}}}{\Delta E_{\mathrm{C}}}=\frac{\left(26\cdot 1{,}007\,28\cdot 1{,}661\cdot 10^{-27}+30\cdot 1{,}008\,66\cdot 1{,}661\cdot 10^{-27}-55{,}845\cdot 1{,}661\cdot 10^{-27}+26\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\right)}{\left(6\cdot 1{,}007\,28\cdot 1{,}661\cdot 10^{-27}+6\cdot 1{,}008\,66\cdot 1{,}661\cdot 10^{-27}-12{,}011\cdot 1{,}661\cdot 10^{-27}+6\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\right)},$$

$$\frac{\Delta E_{\mathrm{Fe}}}{\Delta E_{\mathrm{C}}}\doteq 7{,}03\,,$$

$$\Delta E_{\mathrm{Fe}}\doteq 7{,}03\cdot \Delta E_{\mathrm{C}}\,.$$

Poměr vazebných energií nám udává zároveň kolik atomů uhlíku by vyrovnalo vazebnou energii atomu železa. Ze zadání víme, že vazebná energie atomů uhlíku má být větší. Tedy

$$n_{\mathrm{C}}>7{,}03\,,$$

$$\underline{\underline{n_{\mathrm{C}}=8}}\,.$$

Odpověď:

Minimální počet atomů uhlíku, kdy součet vazebných energií jejich jader je větší než vazebná energie jádra atomu železa je, 8.

4.2.3. Příklad

Jak se bude měnit střední relativní hmotnost μ_{r} částic sluneční látky při předpokladu X=0,70 a Y=0,30, budeme-li hypoteticky postupovat od středu k povrchu Slunce?
Rozlišujte případy

a) hélium a vodík jsou plně ionizovány,

b) hélium a vodík jsou jednou ionizovány,

c) hélium je neutrální a vodík je zcela ionizován,

d) oba plyny jsou neutrální.

převzato z [6]

Řešení:

Střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi se vypočte podle vzorce

$$\mu_{\mathrm{r}} = \left(\frac{X}{\mu_{\mathrm{H}}} + \frac{Y}{\mu_{\mathrm{He}}}\right)^{-1}.$$

a)

Při úplné ionizaci platí pro střední částicovou hmotnost vztah

$$\mu = \frac{A}{Z+1}.$$

Dosadíme hodnoty pro vodík a helium

$$\mu_{\mathrm{H}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},\ \mu_{\mathrm{He}} = \frac{4}{2+1} = \frac{4}{3}.$$

Získané hodnoty dosadíme do celkového vzorce

$$\underline{\underline{\mu_{\mathrm{r}} = \left(\frac{0{,}70}{\frac{1}{2}} + \frac{0{,}30}{\frac{4}{3}}\right)^{-1} = 0{,}62}}.$$

b)

Jsou-li prvky jednou ionizovány, počítáme, jakoby hmotnost ionizovaného prvku byla rozdělena v poměru 1:1 s elektronem uvolněným po ionizaci, tedy za Z dosadíme 1, čímž dostaneme

$$\mu_{\mathrm{H}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2},\ \mu_{\mathrm{He}} = \frac{4}{1+1} = 2.$$

Získané hodnoty dosadíme do celkového vzorce

$$\underline{\underline{\mu_\mathrm{r} = \left(\frac{0{,}70}{\frac{1}{2}} + \frac{0{,}30}{2}\right)^{-1} = 0{,}65}}\,.$$

c)

Pro neutrální částici odpovídá střední částicová hmotnost hmotnosti částice uvedené v tabulkách, tedy za Z dosadíme 0, čímž dostaneme

$$\mu_\mathrm{H} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\,,\ \mu_\mathrm{He} = \frac{4}{0+1} = 4\,.$$

Získané hodnoty dosadíme do celkového vzorce

$$\underline{\underline{\mu_\mathrm{r} = \left(\frac{0{,}70}{\frac{1}{2}} + \frac{0{,}30}{4}\right)^{-1} = 0{,}68}}\,.$$

d)

Oba prvky jsou neutrální a tedy pro oba prvky za Z dosazujeme 0, čímž dostaneme

$$\mu_\mathrm{H} = \frac{1}{0+1} = 1\,,\ \mu_\mathrm{He} = \frac{4}{0+1} = 4\,.$$

Získané hodnoty dosadíme do celkového vzorce

$$\underline{\underline{\mu_\mathrm{r} = \left(\frac{0{,}70}{1} + \frac{0{,}30}{4}\right)^{-1} = 1{,}29}}\,.$$

Odpověď:

Střední relativní hmotnost bude postupně dosahovat hodnot $\underline{\underline{\mu_\mathrm{r} = 0{,}62}}$, $\underline{\underline{\mu_\mathrm{r} = 0{,}65}}$, $\underline{\underline{\mu_\mathrm{r} = 0{,}68}}$, $\underline{\underline{\mu_\mathrm{r} = 1{,}29}}$.

4.2.4. Příklad

Určete, jak se ve hvězdě změní tlak záření, zjistíme-li, že tlak plynu vzrostl dvakrát.

Zápis:

$P_{g2} = 2P_{g1}$, $\dfrac{P_{r1}}{P_{r2}} = ?$

Řešení:

Pro tlak plynu platí vztah

$$P_g = \frac{R}{\mu_r} \cdot \rho \cdot T$$

a pro tlak záření platí vztah

$$P_r = \frac{4\sigma}{3c} \cdot T^4 .$$

Ve vztahu pro tlak záření je neznámou teplota, kterou vyjádříme ze vztahu pro tlak plynu

$$\frac{P_g}{\rho} \cdot \frac{\mu_r}{R} = T .$$

Vztah pro teplotu dosadíme do vztahu pro tlak plynu

$$P_r = \frac{4\sigma}{3c} \cdot \left(\frac{P_g}{\rho} \cdot \frac{\mu_r}{R} \right)^4 .$$

Porovnáme tlaky záření

$$\frac{P_{r1}}{P_{r2}} = \frac{\dfrac{4\sigma}{3c} \cdot \left(\dfrac{P_{g1}}{\rho} \cdot \dfrac{\mu_r}{R} \right)^4}{\dfrac{4\sigma}{3c} \cdot \left(\dfrac{2P_{g1}}{\rho} \cdot \dfrac{\mu_r}{R} \right)^4} ,$$

$$\underline{\underline{\frac{P_{r1}}{P_{r2}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}}} .$$

Odpověď:

Vzrostl-li tlak plynu dvakrát, potom tlak záření vzrostl šestnáctkrát.

4.2.5. Příklad

Podle standardního modelu nitra má hvězdná látka v centrální části Slunce hustotu $1{,}622 \cdot 10^5\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a teplotu $1{,}57 \cdot 10^7\ \mathrm{K}$, hmotnostní zastoupení vodíku X=0,73 a helia Y=0,27, příspěvek těžších prvků lze v prvním přiblížení zanedbat. Vypočtěte tlak, který zde působí za předpokladu, že vodík a helium jsou plně ionizovány a chovají se jako ideální plyn. Vypočtěte rovněž tlak záření a oba tlaky porovnejte. Střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi označíme μ_r.

převzato z [6]

Zápis:

$\rho = 1{,}622 \cdot 10^5\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $T = 1{,}57 \cdot 10^7\ \mathrm{K}$, X=0,73, Y=0,27, $P_\mathrm{g} = ?\ \mathrm{Pa}$, $P_\mathrm{r} = ?\ \mathrm{Pa}$

Řešení:

Tlak plynu se vypočte podle vzorce

$$P_\mathrm{g} = \frac{R}{\mu_\mathrm{r}} \cdot \rho \cdot T\,,$$

kde střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi se vypočte podle vzorce

$$\mu_\mathrm{r} = \left(\frac{X}{\mu_\mathrm{H}} + \frac{Y}{\mu_\mathrm{He}}\right)^{-1}$$

a střední částicová hmotnost podle vzorce

$$\mu = \frac{A}{Z+1}\,.$$

Nejdříve spočítáme střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi

$$\mu_\mathrm{H} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\,,\ \mu_\mathrm{He} = \frac{4}{2+1} = \frac{4}{3}\,,$$

tedy

$$\mu_\mathrm{r} = \left(\frac{0{,}73}{\frac{1}{2}} + \frac{0{,}27}{\frac{4}{3}}\right)^{-1} = 0{,}6\,.$$

Dosadíme číselně do vztahu pro tlak plynu

$$P_{\mathrm{g}} = \frac{8{,}31 \cdot 10^{3}}{0{,}6} \cdot 1{,}622 \cdot 10^{5} \cdot 1{,}57 \cdot 10^{7},$$

$$\underline{\underline{P_{\mathrm{g}} = 3{,}5 \cdot 10^{16}\ \mathrm{Pa}}}.$$

Tlak záření se vypočte podle vzorce

$$P_{\mathrm{r}} = \frac{4\sigma}{3c} \cdot T^{4}.$$

Dosadíme číselně

$$P_{\mathrm{r}} = \frac{4 \cdot 5{,}671 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 3 \cdot 10^{8}} \cdot \left(1{,}57 \cdot 10^{7}\right)^{4},$$

$$\underline{\underline{P_{\mathrm{r}} = 1{,}5 \cdot 10^{13}\ \mathrm{Pa}}}.$$

Odpověď:

Tlak plynu je řádově 10^{3} krát větší, proto je tlak plynu zanedbatelný.

4.2.6. Příklad

Určete centrální tlak ve hvězdě spektrální třídy B0 o poloměru 8 R_{Sl}, hmotnosti 15 M_{Sl}. Centrální teplota je odhadována na $3{,}4 \cdot 10^7$ K, $\mu_r = 0{,}7$.

převzato z [6]

Zápis:

$r = 8\ R_{Sl}$, $m = M_{Sl}$, $T_c = 3{,}4 \cdot 10^7$ K, $\mu_r = 0{,}7$, $P_c = ?$ Pa

Řešení:

Ve hvězdě je tlak způsobený plynem a zářením.

Tlak plynu spočítáme podle vzorce

$$P_g = \frac{R}{\mu_r} \cdot \rho \cdot T \,.$$

Je třeba spočítat hustotu. K výpočtu použijeme vztah

$$\rho = \frac{M}{V} \,.$$

Nesmíme zapomenout, že jde o průměrnou hustotu, která bude menší než hustota u středu a nemusíme získat přesný výsledek. Pro přesnější výpočty by bylo třeba hodnotu odečíst z grafu nebo zjistit vztah pro hustotu jako funkci polohy.

Hvězdu považujeme za kouli, proto pro určení objemu použijeme vztah

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi' \cdot r^3$$

a po dosazení dostaneme

$$P_g = \frac{R}{\mu_r} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{M}{\pi' \cdot r^3} \cdot T \,.$$

Dosadíme číselně

$$P_g = \frac{8{,}31 \cdot 10^3}{0{,}7} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{15 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{\pi' \cdot \left(8 \cdot 6{,}96 \cdot 10^8\right)^3} \cdot 3{,}4 \cdot 10^7 \,,$$

$$\underline{\underline{P_g = 1{,}7 \cdot 10^{13}\ \text{Pa}}} \,.$$

Tlak záření spočítáme podle vzorce

$$P_r = \frac{4\sigma}{3c} \cdot T^4 \,.$$

Dosadíme číselně

$$P_{\mathrm{r}} = \frac{4 \cdot 5{,}671 \cdot 10^{-8}}{3 \cdot 3 \cdot 10^{8}} \cdot \left(3{,}4 \cdot 10^{7}\right)^{4},$$

$$\underline{\underline{P_{\mathrm{r}} = 3{,}4 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Pa}}}\,.$$

Odpověď:

Centrální tlak plynu je $1{,}7 \cdot 10^{13}\ \mathrm{Pa}$ a tlak záření je $3{,}4 \cdot 10^{14}\ \mathrm{Pa}$.

4.2.7. Příklad

Mějme dvě hvězdy se spektrálními třídami K0 V a K0 I. Určete

a) poměr zrychlení na povrchu obou hvězd,

b) poměr středních hustot těchto hvězd.

Tabulkové hodnoty charakteristik hvězd jsou pro K0 V: hmotnost je $0{,}8\ \mathrm{M_{Sl}}$, poloměr je $0{,}85\ \mathrm{R_{Sl}}$, teplota je 5 100 K a pro K0 I: hmotnost je $13\ \mathrm{M_{Sl}}$, poloměr je $200\ \mathrm{R_{Sl}}$, teplota je 4 100 K.

převzato z [6]

Zápis:

$M_{\mathrm{V}} = 0{,}8\ \mathrm{M_{Sl}}$, $R_{\mathrm{V}} = 0{,}85\ \mathrm{R_{Sl}}$, $\mathrm{T_V} = 5\,100\ \mathrm{K}$, $M_{\mathrm{I}} = 13\ \mathrm{M_{Sl}}$, $R_{\mathrm{I}} = 200\ \mathrm{R_{Sl}}$,

$\mathrm{T_I} = 4\,100\ \mathrm{K}$, $\dfrac{g_{\mathrm{V}}}{g_{\mathrm{I}}} = ?$, $\dfrac{\rho_{\mathrm{V}}}{\rho_{\mathrm{I}}} = ?$

Řešení:

a)

Gravitační zrychlení se vypočte podle vztahu

$$g = G \cdot \frac{M}{R^2} .$$

Dosadíme obecně

$$\frac{g_{\mathrm{V}}}{g_{\mathrm{I}}} = \frac{G \cdot \dfrac{M_{\mathrm{V}}}{(R_{\mathrm{V}})^2}}{G \cdot \dfrac{M_{\mathrm{I}}}{(R_{\mathrm{I}})^2}} = \frac{M_{\mathrm{V}}}{(R_{\mathrm{V}})^2} \frac{(R_{\mathrm{I}})^2}{M_{\mathrm{I}}} .$$

Dosadíme číselně

$$\frac{g_{\mathrm{V}}}{g_{\mathrm{I}}} = \frac{0{,}8\ \mathrm{M_{Sl}}}{(0{,}85\ \mathrm{R_{Sl}})^2} \cdot \frac{(200\ \mathrm{R_{Sl}})^2}{13\ \mathrm{M_{Sl}}} = \frac{0{,}8}{(0{,}85)^2} \cdot \frac{(200)^2}{13} ,$$

$$\underline{\underline{\frac{g_{\mathrm{V}}}{g_{\mathrm{I}}} \doteq 3 \cdot 10^3 .}}$$

Odpověď:

Poměr zrychlení na povrchu hvězd je $3 \cdot 10^3$.

b)

Hmotnost a objem se nemění, proto se střední hustota vypočte podle vztahu

$$\rho = \frac{M}{V} = M \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\pi' \cdot R^3} .$$

Dosadíme obecně

$$\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{\rho_{\mathrm{I}}} = \frac{M_{\mathrm{V}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\pi' \cdot (R_{\mathrm{V}})^3}}{M_{\mathrm{I}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\pi' \cdot (R_{\mathrm{I}})^3}} = \frac{M_{\mathrm{V}}}{M_{\mathrm{I}}} \cdot \frac{(R_{\mathrm{I}})^3}{(R_{\mathrm{V}})^3} .$$

Dosadíme číselně

$$\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{\rho_{\mathrm{I}}} = \frac{0{,}8\ \mathrm{M_{SI}}}{13\ \mathrm{M_{SI}}} \cdot \frac{(200\ \mathrm{R_{SI}})^3}{(0{,}85\ \mathrm{R_{SI}})^3} = \frac{0{,}8}{13} \cdot \frac{(200)^3}{(0{,}85)^3}$$

$$\underline{\underline{\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{\rho_{\mathrm{I}}} \doteq 8 \cdot 10^5}} .$$

Odpověď:

Poměr středních hustot hvězd je $8 \cdot 10^5$.

4.2.8. Příklad

Dokažte, že střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi plně ionizovaných atomů v nitru hvězd je rovna $\mu_\mathrm{r} = \dfrac{2}{1+3X+0{,}5Y}$, kde X, Y,označují relativní množství vodíku a helia.

převzato z [6]

Řešení:

Pro střední molekulovou hmotnost μ_r směsi plně ionizovaných plynů (vodík, helium, ostatní prvky) platí vztah

$$\mu_\mathrm{r} = \left(\frac{X}{\mu_\mathrm{H}} + \frac{Y}{\mu_\mathrm{He}} + \frac{C}{2}\right)^{-1}.$$

Pro střední částicovou hmotnost při úplné ionizaci platí vztah

$$\mu = \frac{A}{Z+1},$$

podle kterého spočteme μ_H a μ_He

$$\mu_\mathrm{H} = \frac{1}{2} \text{ a } \mu_\mathrm{He} = \frac{4}{3}.$$

Spočtené hodnoty dosadíme do vztahu pro střední molekulovou hmotnost

$$\mu_\mathrm{r} = \left(\frac{X}{\frac{1}{2}} + \frac{Y}{\frac{4}{3}} + \frac{C}{2}\right)^{-1} = \left(2X + \frac{3}{4}Y + \frac{C}{2}\right)^{-1}.$$

Protože podle zadání chceme, aby čitatel byl roven 2, rozšíříme výraz zlomkem $\frac{2}{2}$ a dostaneme

$$\mu_\mathrm{r} = \frac{2}{4X + \frac{3}{2}Y + C}.$$

Protože počítáme pro všechny prvky, platí pro součet relativních množství prvků vztah

$$X + Y + C = 1.$$

Tento vztah použijeme k další úpravě

$$\mu_{\mathrm{r}} = \frac{2}{X + Y + C + 3X + \dfrac{Y}{2} + 0} = \frac{2}{1 + 3X + \dfrac{Y}{2}} .$$

Máme hledaný vztah a důkaz je hotov.

zpracováno podle [6]

4.2.9. Příklad

Určete zda v místě $r = 0{,}9\ \mathrm{R_{Sl}}$ od středu Slunce probíhá přenos energie konvekcí nebo zářením. Parametry zvoleného místa jsou následující: $\rho = 1{,}5\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\kappa = 10\,\mathrm{m^2\cdot kg^{-1}}$ $T = 4\cdot 10^5\ \mathrm{K}$, $\gamma = \dfrac{c_\mathrm{P}}{c_\mathrm{V}} = \dfrac{5}{3}$, $P = 8{,}7\cdot 10^9\ \mathrm{Pa}$.

převzato z [6]

Řešení:

Přenos energie bude probíhat konvekcí (prouděním), pokud bude splněna podmínka konvekce

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} > \frac{\gamma - 1}{\gamma}\cdot\frac{T}{P}\cdot\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}.$$

Pro teplotní gradient při přenosu zářením platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{3\kappa\cdot L}{64\pi'\cdot\sigma\cdot r^2\cdot T^3}\cdot\rho$$

a rovnice hydrostatické rovnováhy je

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -G\cdot\frac{M\cdot\rho}{r^2}.$$

Po dosazení do předpisu podmínky konvekce dostáváme

$$\frac{3\kappa\cdot L}{64\pi'\cdot\sigma\cdot r^2\cdot T^3}\cdot\rho > \frac{\gamma-1}{\gamma}\cdot\frac{T}{P}\cdot G\cdot\frac{M\cdot\rho}{r^2}.$$

Protože jde o Slunce, počítáme s hmotností a zářivým výkonem Slunce.

Dosadíme číselně

$$\frac{3\cdot 10\cdot 3{,}86\cdot 10^{26}}{64\pi'\cdot 5{,}671\cdot 10^{-8}\cdot\left(0{,}9\cdot 6{,}96\cdot 10^8\right)^2\cdot\left(4\cdot 10^5\right)^3}\cdot 1{,}5 > \frac{\frac{5}{3}-1}{\frac{5}{3}}\cdot\frac{4\cdot 10^5}{8{,}7\cdot 10^9}\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{1{,}99\cdot 10^{30}\cdot 1{,}5}{\left(0{,}9\cdot 6{,}96\cdot 10^8\right)^2}$$

$$\underline{\underline{0{,}06 > 0{,}009}}.$$

Odpověď:

Podmínka konvekce je splněna, tedy přenos energie v místě $0{,}9\ \mathrm{R_{Sl}}$ od středu Slunce probíhá konvekcí.

zpracováno podle [6]

5. Konstanty

Použité konstanty:

Zářivý výkon Slunce $L_{\mathrm{Sl}} = 3{,}846 \cdot 10^{26}$ W

Poloměr Slunce $R_{\mathrm{Sl}} = 6{,}963 \cdot 10^{8}$ m

Hmotnost Slunce $M_{\mathrm{Sl}} = 1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg

Solární konstanta $K = 1{,}370 \cdot 10^{3}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$

Centrální hustota Slunce $\rho_{\mathrm{cSl}} = 1{,}622 \cdot 10^{5}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$

Boltzmannova konstanta $k = 1{,}380 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J \cdot K^{-1}}$

Rydbergův vlnočet $R_{\mathrm{H}} = 1{,}097 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}$

Rychlost světla $c = 299{,}8 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Stefanova–Boltzmannova konstanta $\sigma = 5{,}671 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}$

Gravitační konstanta $G = 6{,}670 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^{2} \cdot kg^{-2}}$

Planckova konstanta $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$

Atomová hmotnostní konstanta $m_{\mathrm{u}} = 1{,}661 \cdot 10^{-27}$ kg

Plynová konstanta $R = 8{,}310 \cdot 10^{3}\ \mathrm{J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$

Parsek $\mathrm{pc} = 3{,}086 \cdot 10^{16}$ m

Wienova konstanta $b = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$

6. Závěr

Cílem práce bylo zpracovat několik příkladů z astrofyziky, které by mohli zvládnout i studenti středních škol. Záměrem také bylo vybrat takové příklady, které v již zpracovaných sbírkách chybí nebo nejsou dostatečně vysvětleny.

Oba zmíněné požadavky byly splněny. Některé příklady sice vyžadují vzorce, které se na středních školách nevyučují, ale kromě těchto vzorců není potřeba využívat žádné pokročilé metody výpočtů.

Jako hlavní přínos své práce pokládám podrobné a hlavně srozumitelné řešení všech příkladů, což v mnoha ostatních sbírkách chybí. Ve všech příkladech jsem používal nejaktuálnější hodnoty astrofyzikálních a jiných konstant, které jsem poté vypsal do přehledu v závěru práce. Dále má práce obsahuje i několik zcela originálních příkladů, kterými jsem obohatil některé kapitoly.

U příkladů 2. 3. 10 – 13, 2. 3. 15, 3. 2. 4, 3. 2. 8, 4. 2. 8 a 4. 2. 9 jsem převzal zadání, ale řešení jsem doplnil nebo upravil.

U příkladů 2. 3. 1 – 3, 2. 3. 5 – 6, 2. 3. 8 – 9, 2. 3. 14, 3. 2. 1, 3. 2. 3, 3. 2. 5, 3. 2. 6, 4. 2. 1, 4. 2. 3, 4. 2. 5 – 7 jsem převzal zadání, ale řešení jsem vytvořil.

Příklady 2. 3. 4, 2. 3. 7, 3. 2. 2, 3. 2. 7, 4. 2. 2 a 4. 2. 4 jsem vytvořil celé.

Možnosti další práce vidím v možnosti přidání dalších příkladů do stávajících kapitol, obohacení práce o jiná témata a případně rozšíření teoretické části.

7. Použité internetové zdroje a literatura

1. *Wikipedia - The Free Encyclopedia* [online].

   [cit. 15.4.2013]. Dostupný na WWW: http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
2. MARKOVÁ, H.. *Bakalářská práce CCD fotometrie vybrané otevřené hvězdokupy II*. BRNO: 2008.
3. RANDA, M. a kol. *Astronomia - astronomický server fakulty pedagogické ZČU v Plzni* [online]. [cit. 25.2.2013]. Dostupný na WWW: http://astronomia.zcu.cz/
4. ŠIROKÝ, J.; ŠIROKÁ, M.. *Základy astronomie v příkladech*. Praha: SPN, 1973, ISBN 14-370-73.
5. ŠOLC, M.; ŠVESTKA, J.; VANÝSEK, V.. *Fyzika hvězd a vesmíru*. Praha: SPN, 1983, ISBN 14-387-83.
6. ŠTEFL, V.; KORČÁKOVÁ, D.; KRTIČKA, J.. *Úlohy z astrofyziky* [online]. [cit. 25.2.2013]. Dostupný na WWW: http://www.physics.muni.cz/astroulohy/
7. VANÝSEK, V.. *Základy astronomie a astrofyziky*. Praha: Academia, 1980, ISBN 509-21-857.
8. WILLIAMS, D.. *Sun Fact Sheet* [online]. [cit. 26.3.2013]. Dostupný na WWW: http://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/sunfact.html

8. Resume

This bachelor thesis includes solved problems from the field of astrophysics. This thesis is divided into three main parths Radiation of the stars, introduction to the star spectroscopy and Center of stars. Each part includes a short introduction into the topic, important formulas and after that practical solving of particular problems. At the end of this paper there is a list of physical constants that were used to solve all the problems.

9. Přílohy

Na přiloženém disku CD-ROM se nachází tato bakalářská práce v elektronické podobě.