ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Veronika Váňová

Přírodovědná studia – Matematická studia

Vedoucí práce: Doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2013

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 24. června 2013

....

vlastnoruční podpis

Děkuji vedoucímu práce panu Doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za ochotu, konzultace, připomínky a poskytování odborných rad při zpracování této bakalářské práce. Také bych chtěla poděkovat rodině za pomoc, podporu a trpělivost.

Obsah

ÚVOD

Tématem mé bakalářské práce je: „Numerické řešení algebraických rovnic“. Hledání kořenů rovnice je jedním ze základních a zároveň jedním z nejstarších problémů matematiky. Nalezení bodů, v nichž je funkční hodnota polynomu je rovna nule, je velmi složité, obzvlášť se zvyšujícím se stupněm polynomu. Zatímco pro rovnice druhého, třetího a čtvrtého stupně existují vzorce, u rovnic vyšších řádů způsob řešení pomocí vzorců neexistuje. Přibližný výsledek nám pomohou určit numerické metody zabývající se touto problematikou. Cílem této práce je některé z těchto metod objasnit.

Text práce je rozdělen do pěti kapitol. První kapitola nás okrajově seznamí s historií řešení algebraických rovnic. Jsou zde zmíněni někteří matematici, kteří se zasloužili o pokrok v tomto oboru.

Z hlediska klasifikace můžeme rovnice rozdělit na algebraické a nealgebraické. Mezi nealgebraické rovnice řadíme například rovnice exponenciální, logaritmické, diferenciální a goniometrické. Mezi algebraické rovnice patří rovnice o jedné neznámé, ty dále dělíme podle stupně, a soustavy algebraických rovnic o více neznámých. Já bych v následující kapitole chtěla upřesnit, které rovnice se řadí mezi algebraické.

Další kapitola bude zaměřena na některé možnosti řešení binomických, kvadratických a kubických rovnic. Chtěla bych čtenáře seznámit s postupy a s některými vzorci pro výpočet kořenů těchto rovnic.

Čtvrtá kapitola bude obsahovat základní vztahy, jejichž znalost využijeme při pozdějším řešení. Uvedu znění Rolleovy věty. Hlavním tématem v této části bude přiblížit a popsat separaci kořenů. Separace kořenů je způsob, jak nalézt intervaly, ve kterých se nachází právě jeden kořen. K tomu využijeme Sturmovu a Descartovu větu. Druhá z nich využívá souvislost mezi počtem kladných reálných kořenů a počtem znaménkových změn. Na konci kapitoly bych zařadila také metodu půlení intervalů, tzv. bisekci a Newtonovu metodu také známou jako metodu tečen.

Rozvoj vědy a pokrok ve výpočetní technice je možno vidět i v numerické matematice. Díky tomuto rozmachu máme možnost využít počítačové programy. Výsledky, které s jejich pomocí získáme, jsou přesnější a my nemusíme mít strach ze složitých postupů, pracných a časově náročných výpočtů. Proto bych v závěru práce chtěla zmínit počítačový software Maple a popsat některé nástroje tohoto programu, které mohou být využity při řešení algebraických rovnic.

1. HISTORIE

Matematika se začala vyvíjet velmi dávno. Již v počátcích lidského vývoje si lidé zaznamenávali různá množství, např. dobytka či peněz, také se snažili spočítat svůj úlovek. Postupně docházelo k vzestupu a s vývojem se objevují i první matematici.

Jedním z nejstarších problémů, kterým se matematika zabývá, je řešení rovnic. V algebře počtáři řešili úlohy dnes známé jako rovnice. Ve starém Egyptě se dochovaly dva matematické papyry. Prvním z nich je sbírka obsahující 87 úloh s návody a řešeními, druhý papyrus obsahuje 25 úloh. Jedná se o úlohy požadující určit neznámé množství splňující nějaké dané podmínky. Zadání jedné takové úlohy je například: *Hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15.* Nyní můžeme takovou úlohu zapsat lineární rovnicí ve tvaru:

$$x + \frac{1}{4}x = 15$$

V papyru je však úloha řešena metodou chybného předpokladu.

Kolem roku 2000 př.n.l. jsou staří Babyloňané schopni řešit kvadratické rovnice a o něco později kubické rovnice ve tvaru $ax^3 + bx^2 = c$. K řešení rovnic přispěl i řecký matematik Diofantos zvaný též „otec aritmetiky“. Je autorem spisu *Aritmetika* ze 3.st.n.l.. Tato sbírka se zabývá lineárními a kvadratickými rovnicemi. Diofantos zde zavádí znak pro neznámou. Neuvědomoval si ale, že kvadratická rovnice má dvě řešení.

Klasická algebra však vzniká až zásluhou arabského matematika Muhommada ibn Musa al-Chvárizmího. Napsal nejstarší učebnice o aritmetice a algebře, je též autorem knihy o systematickém řešení lineárních a kvadratických rovnic – al-Kitab al-muktasar fi hisáb al-gabr wa-al-mugábala (Krátká kniha o počtu připočítáváním a porovnáváním). Velký pokrok poté nastal po roce 1500 v Itálii. Dochází k řešení algebraických rovnic typu $x^3 + ax = b$; $x^3 = ax + b$; $x^3 + b = ax$. První, kdo nalezl metodu řešení kubické rovnice, je profesor aritmetiky a geometrie na univerzitě v Bologni Scipione del Ferro. Nezávisle na něm přišel na metodu řešení kubické rovnice Niccolé Fontana (Tartaglia). Vzorec jako první pak publikoval Gerolamo Cardano. Ovšem historikové se domnívají, že znal výsledky jak Tartaglia, tak Scipione del Ferra.

Vzorec pro řešení algebraické rovnice čtvrtého stupně nalezl Ludovico Ferrari. Postupně se tedy dokázalo, že kořeny rovnic prvního, druhého, třetího i čtvrtého stupně lze vypočítat ze vzorců. V dalších letech se matematici zabývali řešením algebraických rovnic pátého a vyšších stupňů v radikálech. Norský matematik Niels Henrik Abel přišel na to, že u rovnic pátého stupně existují rovnice neřešitelné v radikálech, stejně jako i u rovnic vyššího stupně. Kořeny takovýchto rovnic je však možné nalézt metodami numerické matematiky.

V dnešní době je možné pro rozklad polynomů (faktorizaci) využít různé počítačové programy, například program Mathematica, Maple nebo Derive.

2. ALGEBRAICKÉ ROVNICE

Nechť f je nějaká komplexní funkce, která je definovaná na množině komplexních čísel M. Ptáme se, zda existuje takové komplexní číslo ξ (z množiny M), pro které se $f(\xi)$ rovná číslu 0. Postup hledání takovýchto čísel a zkoumání, zda takové číslo vůbec existuje, nazýváme řešením rovnic. Číslo ξ nazýváme kořenem funkce f nebo též nulovým bodem funkce f. Více se však používá vyjádření, že číslo ξ je „kořenem rovnice $f(x) = 0$". V případě, že máme řešit rovnici $f(x) = 0$, myslí se tím:

1. Odpovědět na otázku, zda existuje takové komplexní číslo ξ, že $f(\xi)$ se rovná číslu 0.
2. V případě, že jedno takové číslo ξ existuje, najít množinu všech takových čísel. V případě, že číslo ξ neexistuje, se nazývá rovnice neřešitelnou.

Jestliže f je polynom n-tého stupně a je ve tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0,$$

hovoříme o algebraické rovnici n-tého stupně a jedné neznámé. Cílem této práce je, objasnit některé metody řešení takovýchto rovnic. Jde-li o rovnice lineární a kvadratické, je řešení jednoduché. Také rovnice 3. a 4. stupně jsou řešitelné pomocí vzorců, které umožňují z jejich koeficientů pomocí sčítání, násobení, umocňování a odmocňování určit všechny jejich kořeny. Pro rovnice vyšších stupňů podobné obecné vzorce neexistují, k určení jejich reálných kořenů se musí použít přibližné metody.

Při řešení rovnic využijeme ekvivalence dvou rovnic.

Definice: *Nechť f a g jsou dvě funkce definované na množině komplexních čísel. Potom rovnice $f(x) = 0$ a $g(x) = 0$ nazveme ekvivalentními, jestliže mají ty samé kořeny.*

Například rovnice $\frac{3}{2}x^2 - 3x + 4 = 0$ a rovnice $3x^2 - 6x + 8 = 0$ jsou ekvivalentní.

Rovnice $\frac{x-1}{x+1} = 0$ a $\frac{(x-1)^2}{x^2-1} = 0$ ekvivalentní nejsou. Kořenem první rovnice je číslo 1. Funkce $\frac{(x-1)^2}{x^2-1} = 0$ však není v bodě 1 vůbec definovaná, nemá v něm tedy žádnou hodnotu a otázka, zda tam má nebo nemá kořen, nemá smysl.

Při řešení postupujeme tak, že se snažíme převést danou rovnici na rovnici s ní ekvivalentní, která je pro nás jednodušší, myslíme tím rovnici, jejíž řešení už ovládáme.

Dále budeme při řešení rovnic používat substituci. Rovnici $f(x) = 0$ transformujeme pomocí substituce $x = u + \alpha$ na rovnici $g(u) = 0$. Abychom zjistili všechny kořeny, musíme k tomu využít správnou substituci. Jeden takový typ substituce je popsán v následující větě.

Věta 2.1. *Nechť je funkce $f(x)$ definovaná na množině M_1 a funkce $\varphi(u)$ je definována na množině M_2. Nechť hodnoty funkce φ spadají do množiny M_1. Nechť pro každé x_0 z množiny M_1 existuje alespoň jedno takové číslo u_0 z množiny M_2, že $x_0 = \varphi(u_0)$.*
Potom:

1. *Ke každému kořenu x_0 rovnice $f(x) = 0$ existuje takový kořen u_0 rovnice $f\big(\varphi(u)\big) = 0$, že existuje $x_0 = \varphi(u_0)$.*
2. *Jestliže u_0 je kořenem rovnice $f\big(\varphi(u)\big) = 0$, potom číslo $\varphi(u_0)$ je kořenem rovnice $f(x) = 0$.*

O řešitelnosti algebraických rovnic vypovídá následující věta, tzv. základní věta algebry.

Věta 2.2. *Každá algebraická rovnice n-tého stupně, $n > 0$, s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen.*

Přestože je fundamentální věta algebry algebraickým tvrzením, není dosud znám čistě algebraický důkaz. První pokusy o její dokázání pochází z roku 1746 a jejím autorem je D´Alembert. První skutečný důkaz je z roku 1799 od Gausse. Ten za svého života našel čtyři rozdílné důkazy.

Tato věta měla pro algebru velký význam, jakmile se jednalo pouze o rovnice s číselnými koeficienty. Tato věta zaručovala existenci kořenů jakékoliv tehdy vyšetřované algebraické rovnice, proto získala název základní věta algebry. Věta se však nezmiňuje například o rovnicích, jejichž koeficienty jsou racionální funkce.

2.1. NÁSOBNOST KOŘENE

Funkci ve tvaru

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \qquad a_0, a_1, \dots, a_n \epsilon\, R, \qquad a_0 \neq 0$$

nazýváme polynomem stupně n.

Kořenem polynomu je takové číslo α, které splňuje vztah $P_n(\alpha) = 0$.

Pokud je α kořenem polynomu $P_n(x)$, potom lineární polynom $(x-\alpha)$ nazveme kořenovým činitelem.

Věta 2.1.1. *Číslo α nazveme kořenem polynomu, jestliže existuje polynom $Q_{n-1}(x)$ stupně $(n-1)$ takový, že $P_n(x) = (x-\alpha) \cdot Q_{n-1}(x)$.*

Můžeme tedy říci, že číslo α je kořenem polynomu v případě, že tento polynom můžeme vydělit beze zbytku kořenovým činitelem $(x-\alpha)$.

Definice. *Kořen α polynomu $P_n(x)$ se nazývá r-násobný, jestliže existuje polynom Q_{n-r} takový, že*

$$P_n(x) = (x-\alpha)^r \cdot Q_{n-r}(x) \ \ a \ \ Q_{n-r}(\alpha) \neq 0.$$

3. ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

3.1. BINOMICKÉ ROVNICE

Definice: *Rovnice ve tvaru* $x^n - a = 0, kde\ a \epsilon K,\ K - těleso\ komplexních$ *čísel*, $a \neq 0$, $n \geq 1, n\epsilon N$, *se nazývá binomická rovnice. Každé řešení takové rovnice nazveme n-tou odmocninou z čísla* a. *Pokud je* $a = 1$, *hovoříme o n-tých odmocninách z jedné.*

Věta 3.1. *Binomická rovnice* $x^n - a = 0$ *má v tělese komplexních čísel K právě n různých kořenů, to znamená, že má pouze jednoduché kořeny.*

Důkaz: Polynom $f(x) = x^n - a$ má derivaci $f'(x) = nx^{n-1}$ a číslo 0, které je kořenem rovnice $nx^{n-1} = 0$, není kořenem binomické rovnice $x^n - a = 0$. Tato rovnice má tedy jen jednoduché kořeny.

Pokud je $a = 1$, plyne z předchozí věty, že existuje právě *n* různých *n*-tých odmocnin z jedné a jednou z nich je číslo 1.

Definice: *Je-li pro n-tou odmocninu z jedné ε přirozené číslo n nejmenším exponentem, pro který platí* $\varepsilon^n = 1$, *nazývá se ε primitivní n-tá odmocnina z jedné.*

Věta 3.2. *Pro každé přirozené číslo n existuje v tělese komplexních čísel K právě* $\varphi(n)$ *primitivních n-tých odmocnin z jedné (φ je Eulerova funkce).*

Věta 3.3. *Je-li τ libovolná n-tá odmocnina z čísla aϵK a α libovolná primitivní n-tá odmocnina z jedné, pak jsou čísla* $\tau, \alpha \cdot \tau, \alpha^2 \cdot \tau, \dots, \alpha^{n-1} \cdot \tau$ *právě všechny kořeny rovnice* $x^n - a = 0$.

Důkaz: Pro každé $i = 0, 1, \dots, n - l$ je $\left(\alpha^i \tau\right)^n = (\alpha^n)^i \tau^n = l \cdot \tau^n = a$. Uvedené prvky jsou řešením rovnice $x^n - a = 0$ a zbývá dokázat, že jsou navzájem různé. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že pro nějaká jistá r, s, kde $l \leq s < r \leq n$, platí $\alpha^s \cdot \tau = \alpha^r \cdot \tau$. Pak je $\alpha^s = \alpha^r, \alpha^{r-s} = l$, což je ve sporu s tím, že α je primitivní *n*-tá odmocnina z jedné.

Goniometrické řešení binomické rovnice

Nechť $x^n - a = 0$ je daná binomická rovnice, kde $a = u + iv$. Číslo $a = u + iv$ převedeme na goniometrický tvar:

$$|a| = \sqrt{u^2 + v^2},\ cos\alpha = \frac{u}{|a|}, sin\alpha = \frac{v}{|a|}$$

a tedy $a = |a| \cdot (cos\alpha + isin\alpha)$.

Nechť číslo $z = |z| \cdot (cos\gamma + isin\gamma)$ je kořenem rovnice $x^n - a = 0$. Máme tedy $(|z| \cdot (cos\gamma + isin\gamma))^n = |a| \cdot (cos\alpha + isin\alpha)$. Užitím Moivreovy věty a porovnáním norem dostaneme $|z|^n = |a|, tj. |z| = \sqrt[n]{|a|}$. Dále $n \cdot \gamma = \alpha + 2k\pi, k \epsilon C$ a tedy

$$\gamma = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, \qquad k \epsilon C.$$

Z věty 3.3. víme, že rovnice $x^n - a = 0$ má v tělese komplexních čísel K právě n navzájem různých kořenů. Z předchozích úvah plyne, že je lze zapsat ve tvaru

$$x_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + isin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, \dots, n - l.$$

Příklad: Vyřešte rovnici $x^6 - 1 = 0$ a nalezněte všechny primitivní šesté odmocniny z jedné.

a) Algebraické řešení rovnice.

Pišme $x^6 - 1 = (x^3 - 1) \cdot (x^3 + 1) = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) = 0$

Tedy:

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_4 = -1$$

$$x_5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Kořeny rovnice $x^3 - 1 = 0$ nemohou být primitivními šestými odmocninami z jedné. $x_4 = -1$ je též primitivní druhou odmocninou z jedné, proto jsou pouze prvky $x_5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ primitivními šestými odmocninami z jedné.

b) Vzorce pro goniometrické řešení

$$x_1 = 1 \cdot (cos0 + isin0) = 1$$

$$x_2 = 1 \cdot \left(cos\frac{2\pi}{6} + isin\frac{2\pi}{6}\right) = cos60° + isin60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_3 = 1 \cdot \left(cos\frac{4\pi}{6} + isin\frac{4\pi}{6}\right) = cos120° + isin120° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_4 = 1 \cdot (cos\pi + isin\pi) = -1$$

$$x_5 = 1 \cdot \left(cos\frac{8\pi}{6} + isin\frac{8\pi}{6}\right) = cos240° + isin240° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_6 = 1 \cdot \left(cos\frac{10\pi}{6} + isin\frac{10\pi}{6}\right) = cos300° + isin300° = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Odmocninou z komplexního čísla $\alpha = a + bi$ rozumíme každé komplexní číslo $z = u + vi$, pro které $z^2 = a + bi$. Po dosazení za z a úpravě dostaneme pro u, v soustavu

$$u^2 - v^2 = a$$

$$2uv = b$$

Odtud $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2} = u^2 + v^2$. Poté se snadno vypočte

$$2u^2 = a + |\alpha|,$$

$$2v^2 = |\alpha| - a,$$

$$u = \pm\sqrt{\frac{a + |\alpha|}{2}},$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{|\alpha| - a}{2}}.$$

Zvolíme-li u čísel u, v jakákoliv znaménka, bude rovnice $u^2 - v^2 = a$ vždy splněna a bude platit $2uv = b$. Je zřejmé, že ke každému $\alpha \epsilon K$ existují právě dvě komplexní čísla z_1, z_2, pro která platí $z_1 = -z_2$ a $z_1^2 = z_2^2 = \alpha$, to znamená, že obě čísla jsou odmocninou z čísla α.

3.2. KVADRATICKÉ ROVNICE

Jedná se o rovnici, která obsahuje jednu neznámou umocněnou na druhou. Základní tvar rovnice zapisujeme takto $ax^2 + bx + c = 0$.

Při řešení kvadratické rovnice můžeme postupovat tak, že levou stranu rovnice doplníme na úplný čtverec. Dostaneme tedy:

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Co nás bude vždy zajímat, je situace, kdy má taková rovnice vícenásobný kořen. Z výrazu pro $x_{1,2}$ vyplývá, že taková situace nastane v případě, když výraz $D = b^2 - 4ac$, neboli diskriminant rovnice bude roven nule.

3.3. KUBICKÉ ROVNICE

Kubickou rovnici zapisujeme ve tvaru

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Po zavedení substituce $x = y - \frac{a}{3}$ můžeme eliminovat kvadratický člen. Budeme hledat kořeny kubické rovnice $x^3 + px + q = 0$, která je v tzv. redukovaném tvaru.

Předpokládejme, že α je kořen dané rovnice. Zapišme ho ve tvaru $\alpha = u + v$ a dosaďme do rovnice v redukovaném tvaru. Po úpravě dostaneme

$$u^3 + v^3 + (u + v)(p + 3uv) + q = 0.$$

Pro čísla u, v stanovme podmínku tak, aby se anulovala druhá závorka. $p + 3uv = 0$, čili $uv = -\frac{p}{3}$.

Rovnice se pak zredukuje na tvar

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Umocněním podmínky $uv = -\frac{p}{3}$ na třetí pak dostaneme

$$u^3 \cdot v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3.$$

V případě, že budeme na prvky u^3, v^3 nahlížet jako na kořeny kvadratické rovnice, budou vztahy $u^3 + v^3 = -q, u^3 \cdot v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3$ představovat zápis Viètových vzorců pro kořeny u^3, v^3 kvadratické rovnice $z^2 + qz - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$. Tato rovnice se nazývá kvadratickou rezolventou rovnice $x^3 + px + q = 0$. Nyní je možné vypočítat kořeny u^3, v^3 kvadratické rezolventy:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Tyto vztahy představují dvě binomické rovnice třetího stupně pro neznámé u, v. Každá z těchto neznámých může v tělese komplexních čísel K nabývat tří hodnot. Teoreticky bychom tedy dostali 9 hodnot pro kořen $\alpha = u + v$ rovnice $x^3 + px + q = 0$. Jestliže přihlédneme k tomu, že čísla u, v splňují podmínku $uv = -\frac{p}{3}$, odpovídá každé ze tří hodnot u vždy jen jediná hodnota v, a to $v = -\frac{p}{3u}$. Pro součet $u + v$ získáme jen tři hodnoty.

Označme u_1 jednu hodnotu třetí odmocniny $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. Označíme-li $\beta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ jednu primitivní třetí odmocninu z jedné, jsou ostatní hodnoty $\beta \cdot u_1, \beta^2 \cdot u_1$.

Pro u_1 vypočteme $v_1^3 = \left(-\frac{p}{3u_1}\right) = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$, v_1 je kořenem rovnice $v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$.

Pro kořeny rovnice $x^3 + px + q = 0$ platí

$$\alpha_1 = u_1 + v_1$$
$$\alpha_2 = \beta \cdot u_1 + \beta^2 \cdot v_1$$
$$\alpha_3 = \beta^2 \cdot u_1 + \beta \cdot v_1.$$

Věta 3.3.1. *Nechť je dána rovnice* $x^3 + px + q = 0, p, q \epsilon K$. *Označíme-li* u_1*kteroukoliv hodnotu symbolu* $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$ *a písmenem* v_1 *hodnotu symbolu* $\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$, *pro kterou platí* $3u_1v_1 = -p$ *a značí-li navíc* $\beta = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ *jednu primitivní třetí* *odmocninu z jedné, pak jsou kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ kubické rovnice $x^3 + px + q = 0$ dány vzorci*

$$\alpha_1 = u_1 + v_1$$
$$\alpha_2 = \beta \cdot u_1 + \beta^2 \cdot v_1$$
$$\alpha_3 = \beta^2 \cdot u_1 + \beta \cdot v_1.$$

Tyto vzorce pro kořeny kubické rovnice se nazývají Cardonovy.

Příklad: Řešte rovnici $x^3 - 9x + 28 = 0$.

$p = 9, q = 52$

Potom

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{28}{2} + \sqrt{\left(\frac{28}{2}\right)^2 + \left(\frac{-9}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{28}{2} + \frac{26}{2}} = -1$$

$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{28}{2} - \sqrt{\left(\frac{28}{2}\right)^2 + \left(\frac{-9}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{28}{2} - \frac{36}{2}} = -3$$

$$\alpha_1 = u_1 + v_1 = -4$$

$$\alpha_2 = \beta \cdot u_1 + \beta^2 \cdot v_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \cdot (-1) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 \cdot (-3) = 2 + i\sqrt{3}$$

$$\alpha_3 = \beta^2 \cdot u_1 + \beta \cdot v_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 \cdot (-1) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \cdot (-3) = 2 - i\sqrt{3}.$$

Příklad[1:] Řešte rovnici $x^3 - 8x + 1 = 0$.

Jde o kubickou rovnici v redukovaném tvaru.

$p = -8, q = 1$

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{-2021}{108}\right)}} == \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-8}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{6063}}{18}}$$

[1] DRÁBEK, Jaroslav; HORA, Jaroslav. Algebra Polynomy a rovnice. 1. vydání. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2001. 125 s., ISBN 80-7082-787-4

$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-8}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{6063}}{18}}$$

$$\alpha_1 = u_1 + v_1 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{6063}}{18}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{6063}}{18}}$$

$$\alpha_2 = \beta \cdot u_1 + \beta^2 \cdot v_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{6063}}{18}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{6063}}{18}}$$

$$\alpha_3 = \beta^2 \cdot u_1 + \beta \cdot v_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{6063}}{18}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \cdot \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{6063}}{18}}.$$

Kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou vyjádřeny pomocí komplikovaných výrazů, které obsahují imaginární čísla. Přestože se dá snadno zjistit, že všechny kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jsou reálné. Můžeme vypočítat diskriminant D_3. Rovnice lichého stupně s reálnými koeficienty musí mít alespoň jeden reálný kořen. Polynom $f(x) = x^3 - 8x + 1$ nabývá těchto hodnot: $f(-2) = 9$, $f(1) = -6, f(3) = 4$; odtud je patrné, že rovnice $f(x) = 0$ má tři reálné kořeny. Numerické vyčíslení je:

$$\alpha_1 \cong 2{,}763724$$
$$\alpha_2 \cong -2{,}888969$$
$$\alpha_3 \cong 0{,}125246.$$

Případ, kdy jsou reálné kořeny kubické rovnice vyjádřeny pomocí imaginárních čísel, se nazývá casus irreducibilis.

4. NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ROVNIC

Řešení algebraických rovnic pomocí radikálů je docela problematické. Kořeny jsou často vyjádřeny složitě a nelze je zjednodušit. Někdy tuto nepříjemnou vlastnost můžeme obejít použitím různých metod, jednou z nich je numerická metoda řešení algebraických rovnic. Tato metoda umožňuje přibližný výpočet řešení dané rovnice. Budeme řešit rovnice s reálnými koeficienty a hledat jejich reálné kořeny.

Numerické metody probíhají většinou v těchto krocích:

a) Odstraníme vícenásobná řešení a nalezneme racionální řešení, provedeme tzv. separaci zbývajících reálných kořenů, tzn., že určíme intervaly, ve kterých se nachází právě jedno řešení dané rovnice.
b) Provedeme aproximaci reálného kořenu, budeme postupně zužovat interval, v němž leží separovaný kořen, dokud neurčíme jeho přibližnou metodu.

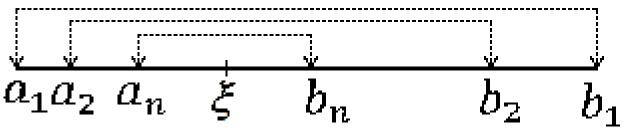
4.1. PŘÍPRAVNÉ ÚVAHY

Reálná čísla umíme sčítat, odčítat, násobit, dělit a odmocňovat. Dále si zavedeme pojem limita posloupnosti. Jestliže ke každému přirozenému číslu *n* přiřadíme nějaké číslo a_n, řekneme, že $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n.}$ ... tvoří posloupnost čísel. Jakmile se členy posloupnosti s rostoucím indexem *n* blíží nějakému číslu *a*, říkáme, že posloupnost konverguje a má limitu *a*. Přesněji: *Řekneme, že posloupnost konverguje a má limitu a, jestliže platí:*
$\forall \varepsilon > 0\ existuje\ takový\ index\ n_0,\ že\ pro\ všechny\ n > n_0\ platí\ |a_n - a| < \varepsilon.$ Zapisujeme $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = a$.

Dále zavedeme pojem intervalu. Interval $\langle a, b\rangle, a < b$, nazveme množinou čísel, které splňují nerovnost $a \le x \le b$. Takovýto interval nazveme uzavřeným intervalem. Množinu čísel, které splňují vztah $a < x < b$, budeme označovat znakem (a, b) a nazveme ho otevřeným intervalem. Čísla *a*, *b* jsou koncovými body intervalu $\langle a, b\rangle, resp. (a, b)$.

Číslo *b-a* nazýváme délkou intervalu $\langle a, b\rangle, resp. (a, b)$.

Jestliže ke každému přirozenému číslu *n* přiřadíme nějaký interval $\langle a_n, b_n\rangle$, řekneme, že $\langle a_1,\ b_1\rangle,\ \langle a_2,\ b_2\rangle, \dots, \langle a_n, b_n\rangle, \dots$ tvoří posloupnost intervalů. Tuto posloupnost nazveme posloupností do sebe vložených intervalů, jestliže pro každé $n\ =\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots$ platí $a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n$. *Nechť* $\langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \dots, \langle a_n, b_n\rangle, \dots$ *je posloupnost do sebe vložených a* *uzavřených intervalů. Nechť délky intervalů $\langle a_n, b_n \rangle$ konvergují k číslu 0. Potom existuje právě jedno reálné číslo ξ, které leží ve všech intervalech $\langle a_n, b_n \rangle$.(viz obr.1)*



Obr. 1 Systém do sebe vložených intervalů

Nechť $\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \dots, \langle a_n, b_n \rangle, \dots$ je posloupnost do sebe vložených intervalů, jejichž délky konvergují k nule. Nechť ξ je jediný bod ležící ve všech intervalech $\langle a_n, b_n \rangle$. Potom jsou obě posloupnosti

$$a_1, a_2, a_3, \dots$$

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

konvergentní a platí: $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = \xi, \lim\limits_{x \to \infty} b_n = \xi$.

V další části si nejprve zformulujeme a odvodíme následující lemmata.

Setkáme se s polynomy ve tvaru

$$F(h) = c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \dots + c_n h^n,$$

kde $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou daná reálná čísla.

Lemma 1. *Nechť* $c_0 = 0$. *K libovolně zvolenému číslu* $\varepsilon > 0$ *existuje také číslo* $h > 0$, *že pro všechna* $|h| < k$ *je* $|F(h)| < \varepsilon$.

Důkaz: Označíme $A = \max(|c_1|, \dots, |c_n|$ a zvolíme $|h|$ tak malé, že $|h| < \frac{1}{2}$. Potom je

$$|F(h)| \leq A(|h| + \dots + |h|^n) = A \cdot |h| \cdot \frac{1 - |h|^n}{1 - |h|} < \frac{A \cdot |h|}{1 - \frac{1}{2}} = 2A|h|.$$

Zvolíme navíc $|h|$ tak malé, aby $|h| < \frac{\varepsilon}{2A}$. Potom je $|F(h)| < 2A \cdot \frac{\varepsilon}{2A} = \varepsilon$.

Dokázali jsme:

Jestliže zvolíme za k menší z čísel $\frac{1}{2}$ a $\frac{\varepsilon}{2A}$, potom je pro každé h, které splňuje nerovnost $|h| < k$, splněný vztah $|F(h)| < \varepsilon$. Tím je lemma 1 dokázáno.

Lemma 2. *Nechť* $c_0 \neq 0$. *Potom existuje také číslo* $k > 0$, *že pro všechna čísla h z intervalu*

$(-k,k)$ *je* $F(h)$ *různé od nuly a má také stejné znaménko jako* c_0.

Důkaz: Podle lemmatu 1 existuje také $k>0$ takové, že pro všechny $|h|<k$ je číslo $|c_1h+\cdots+c_nh^n|$ menší než například číslo $\frac{|c_0|}{2}$. Pro všechny h z intervalu $(-k,k)$ kolísá $F(h)$ mezi čísly $C_0-\frac{c_0}{2}, c_0+\frac{c_0}{2}$, tj. mezi $\frac{1}{2}c_0$ a $\frac{3}{2}c_0$; určitě má stejné znaménko jako c_0 a je různé od nuly.

Lemma 3. *Nechť je* $f(x)$ *polynom a nechť v nějakém bodě* x_0 *je* $f(x_0)\neq 0$. *Potom existuje také číslo* $k>0$ *takové, že pro každé číslo x z intervalu* (x_0-k, x_0+k) *je* $f(x)$ *různé od nuly a má také stejné znaménko jako* $f(x_0)$.

Důkaz: Podle Taylorovy věty platí pro každé číslo *h*:

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)\cdot h+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n.$$

Položíme $c_0=f(x_0), c_i=\frac{1}{i!}f^{(i)}(x_0)\ i=1,\dots,n)$. Podle lemmatu 2 existuje také číslo $k>0$ takové, že pro všechny h z intervalu $(-k,\ k)$ je $f(x_0+h)$ různé od nuly a má také stejné znaménko jako $f(x_0)$. Poslední výrok je zřejmě ekvivalentní s výrokem, že pro všechna *x* z intervalu (x_0-k, x_0+k) *je* $f(x)$ různé od nuly a má také stejné znaménko jako $f(x_0)$. Tím je lemma 3 dokázáno.

Lemma 4. *Nechť je* $f(x)$ *polynom. Nechť posloupnost* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\dots$ *konverguje a má za limitu číslo α. Potom i posloupnost čísel* $f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3),\dots$ *konverguje a má za limitu číslo* $f(\alpha)$.

Důkaz: Přepíšeme polynom f (stupně s) na tvar

$$f(x)=f(\alpha)+\frac{f'(\alpha)}{1!}(x-\alpha)+\cdots+\frac{f^{(s)}(\alpha)}{s!}(x-\alpha)^s.$$

Pro $j=1,2,3,\dots$ platí

$$f(\alpha_j)-f(\alpha)=\frac{f'(\alpha)}{1!}(\alpha_j-\alpha)+\cdots+\frac{f^{(s)}(\alpha)}{s!}(\alpha_j-\alpha)^s.$$

Podle lemmatu 1 existuje k libovolnému číslu $\varepsilon>0$ také číslo $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, že pro všechna čísla α_j, které splňují $|\alpha_j-\alpha|<\delta$, je $|f(\alpha_j)-f(\alpha)|<\varepsilon$. Protože posloupnost $\alpha_1,\alpha_2,\dots$ konverguje k číslu α, existuje číslo $n=n_0(\delta)$ takové, že pro všechna $j>n_0$ je $|\alpha_j-\alpha|<\delta$.

Je tedy pro všechny $j > n_0$ splněná nerovnost $\left|f(\alpha_j) - f(\alpha)\right| < \varepsilon$. To znamená, že posloupnost $f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3), \ldots$ konverguje k číslu $f(a)$. Tím je lemma 4 dokázáno.

Věta 4.1.1. *Jestliže v koncových bodech intervalu $\langle a, b\rangle$ nabývá polynom $f(x)$ hodnoty opačných znamének, tj. $f(a) \cdot f(b) < 0$, existuje v intervalu (a, b) alespoň jeden bod ξ, v kterém je $f(\xi) = 0$.*

Důkaz: Předpokládáme, že platí $f(a) < 0, f(b) > 0$ (případ $f(a) > 0, f(b) < 0$ se dokáže analogicky).

Důkaz provedeme nepřímo. Předpokládáme, že pro každé číslo c z intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(c) \neq 0$. Tento předpoklad vede ke sporu.

Rozpůlíme interval $\langle a, b\rangle$. V bodě $c = \frac{a+b}{2}$ je podle předpokladu $f(c) \neq 0$. Je tedy buď $f(c) > 0$, nebo je $f(c) < O$. Jestli je $f(c) < 0$, uvažujeme dále o intervalu $\langle a, c\rangle$ a označíme ho znakem $\langle a_1, b_1\rangle$. Jestli je $f(c) > 0$, uvažujeme dále o intervalu $\langle a, c\rangle$ a označíme ho znakem $\langle a_1, b_1\rangle$. V obou případech je $f(a_1) < 0, f(b_1) > 0$. Použijme ten samý postup pro interval $\langle a_1, b_1\rangle$ a proces opakujme. Takto dostaneme posloupnost do sebe vložených intervalů, jejichž délky konvergují k nule:

$$\langle a, b\rangle, \langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_n, b_n\rangle, \ldots,$$

Pro každé $n = 1,2,3, \ldots$ je $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$.

Jak již bylo zmíněno v předchozím textu, existuje jediný bod ξ, který patří do všech intervalů $\langle a_n, b_n\rangle$ a podle předpokladu platí $f(\xi) \neq 0$. Podle lemmatu 3 existuje číslo $k > 0$, že pro všechna x z intervalu $(\xi - k, \xi + k)$ je $f(x)$ různé od nuly a má stejné znaménko jako $f(\xi)$. Jestliže délky intervalu $\langle a_n, b_n\rangle$ konvergují k nule, leží pro dost velké n celý interval $\langle a_n, b_n\rangle$ uvnitř intervalu $(\xi - k, \xi + k)$, tj. platí $\xi - k < a_n \leq \xi \leq b_n < \xi + k$. Jestliže $f(a_n) > 0, f(b_n) < 0$, nemůže být pravda, že v intervalu $(\xi - k, \xi + k)$ má $f(x)$ stále stejné znaménko. Máme hledaný rozpor. Předpoklad, že na celém intervalu $\langle a, b\rangle$ je $f(x)$ různé od nuly, není správný. Věta je dokázána.

Věta 4.1.2. *Jestliže $f(a) \cdot f(b) < 0$ má rovnice $f(x) = 0$ na intervalu (a, b) lichý počet kořenů. Jestliže $f(a) \cdot f(b) > 0$, leží v intervalu (a, b) žádný, nebo sudý počet kořenů. Přitom je nutné počítat každý kořen s příslušnou násobností.*

Důkaz: Nechť všechny kořeny $f(x) = 0$ na intervalu (a, b) jsou $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ (vícenásobné napsané v příslušném počtu). Píšeme $f(x) = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_s)g(x)$. Potom platí:

$$f(a) = (a - \alpha_1)(a - \alpha_2) \dots (a - \alpha_s)g(a)$$

$$f(b) = (b - \alpha_1)(b - \alpha_2) \dots (b - \alpha_s)g(b).$$

Čísla $g(a)$ a $g(b)$ mají stejná znaménka, jinak by na intervalu (a, b) ležel kořen rovnice $g(x) = 0$ a tedy další kořen rovnice $f(x) = 0$. Jestliže tedy $f(a) \cdot f(b) < 0$, musí mít výrazy

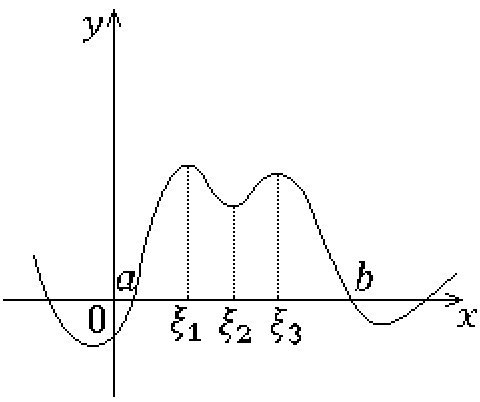
$$(a - \alpha_1)(a - \alpha_2) \dots (a - \alpha_s)$$

$$(b - \alpha_1)(b - \alpha_2) \dots (b - \alpha_s)$$

opačná znaménka. Druhý výraz je kladný. Každý faktor v prvním výrazu je záporný. Musí tedy existovat lichý počet takovýchto faktorů, tj. s je liché. Jestliže $f(a) \cdot f(b) > 0$, musí být s sudé (jestli je $s > 0$). Tím je věta dokázána.

4.2. ROLLEOVA VĚTA

Nechť a a b, $a < b$ jsou dva různé bezprostředně za sebou jdoucí kořeny rovnice $f(x) = 0$. Z geometrického hlediska je jasné, že na intervalu (a, b) existuje alespoň jeden bod $x = \xi$, pro který platí $f'(\xi) = 0, tj. f'(x) = 0$ má alespoň jeden kořen na intervalu (a, b).



Obr. 2 Rolleova věta

Věta 4.2.1. *Mezi dvěma různými bezprostředně za sebou jdoucími kořeny rovnice* $f(x) = 0$ *leží lichý počet reálných kořenů rovnice* $f'(x) = 0$. *Přitom každý kořen rovnice* $f'(x) = 0$ *je nutné počítat s příslušnou násobností.*

Důkaz: Nechť je $a < b$. Nechť je a r-násobný a b s-násobný kořen rovnice $f(x) = 0$. Potom můžeme psát

$$f(x) = (x-a)^r \cdot (x-b)^s g(x),$$

kde $g(a) \neq 0, g(b) \neq 0$. Čísla $g(a)$ a $g(b)$ mají stejná znaménka, jinak by v intervalu (a, b) ležel další kořen rovnice $f(x) = 0$ a oba kořeny by nenásledovaly bezprostředně za sebou.

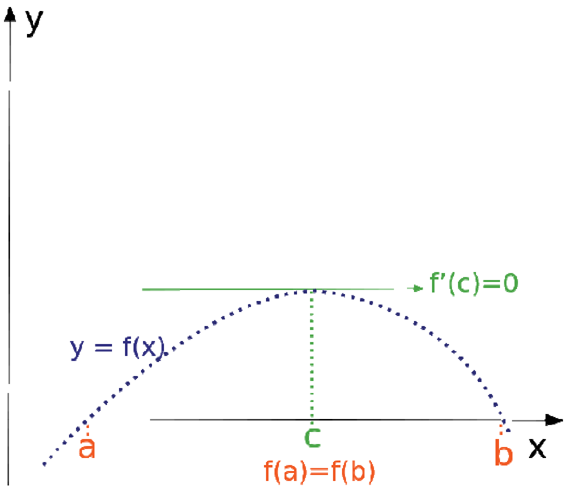
Zapišme derivaci

$$f'(x) = r(x-a)^{r-1}(x-b)^s g(x) + s(x-b)^{s-1}(x-a)^r g(x) + (x-a)^r(x-b)^s g'(x) =$$
$$= (x-a)^{r-1}(x-b)^{s-1} \cdot [r(x-b)g(x) + s(x-a)g(x) + (x-a)(x-b) \cdot g'(x)].$$

Rovnice $f'(x) = 0$ má uvnitř intervalu (a, b) kořen jen tehdy, jestliže tam má kořen rovnice

$$\varphi(x) = r(x-b)g(x) + s(x-a)g(x) + (x-a)(x-b)g'(x) = 0$$

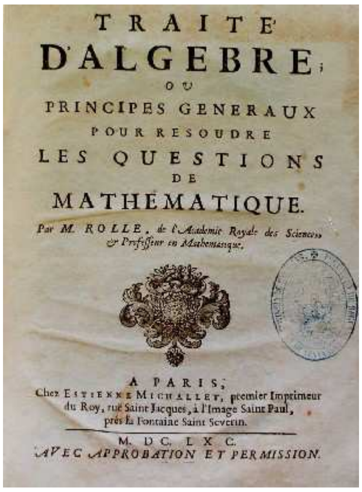
Je však $\varphi(a) = r(a-b)g(a), \varphi(b) = s(b-a)g(b)$. Tato čísla mají nejspíš opačná znaménka, tj. $\varphi(a)\varphi(b) < 0$. Podle věty 4.1.2. leží tedy v intervalu (a, b) lichý počet kořenů rovnice $\varphi(x) = 0$ a tedy i rovnice $f'(x) = 0$. Tím je věta dokázána.



Obr. 3 Význam Rolleovy věty

Michel Rolle

Michel Rolle se narodil 21.dubna 1652 v Ambert ve Francii. Měl jen malé školní vzdělání a většinou byl samouk. Pracoval jako asistent několika advokátů kolem Ambertu. V roce 1675 odešel do Paříže, kde pracoval jako písař a počtář. V roce 1685 byl zvolen za člena Académie Royal des Sciences a v roce 1699 se stal v Akademii geometrem s penzí. Rolle se zabýval *diofantickými rovnicemi, algebrou a také geometrií. Publikoval práci "Traité d'algebre" o teorii rovnic. Rolle je ale dnes znám spíše díky Rolleově větě, kterou publikoval v knize v roce 1691. Pro její důkaz použil Huddeovu metodu. Rolle také přispěl k rozvoji aritmetiky. Mimo jiné zavedl označení n-té odmocniny z čísla x a zavedl pravidlo, že pokud je a > b, pak -b > -a. Michel Rolle zemřel 8.listopadu 1719 v Paříži.*



Věta 4.2.2. *Jestliže rovnice $f(x) = 0$ n-tého stupně má n různých reálných kořenů, potom rovnice$f'(x) = 0$ má přesně n-1 reálných kořenů a kořeny rovnice $f(x) = 0$ oddělují kořeny rovnice $f'(x) = 0$.*

Věta 4.2.3. *Mezi dvěma za sebou jdoucími různými kořeny rovnice $f'(x) = 0$ leží nanejvýš jeden kořen rovnice $f(x) = 0$. Tento kořen je potom nevyhnutelně jednoduchý.*

Důkaz: Nechť dva za sebou jdoucí kořeny rovnice $f'(x) = 0$ jsou $\xi_1 < \xi_2$. Kdyby mezi čísly ξ_1, ξ_2 ležely dva různé kořeny rovnice $f(x) = 0$, řekněme γ_1, γ_2, musel by podle věty 4.2.1. ležet v intervalu (γ_1, γ_2) další kořen rovnice $f'(x) = 0$ a kořeny ξ_1, ξ_2 by nenásledovaly bezprostředně za sebou.

Kdyby kořen γ, ležící mezi ξ_1, ξ_2 byl vícenásobný, platilo by $f'(\gamma) = 0$. A kořen ξ_2 rovnice $f'(x) = 0$ by opět nenásledoval bezprostředně za kořenem ξ_1. Tím je věta dokázána.

Věta 4.2.4. *Nechť počet reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$ je r. Potom má rovnice $f'(x) = 0$ alespoň r-1 reálných kořenů. Přitom kořeny obou rovnic počítáme s příslušnou násobností.*

Důkaz: Nechť rovnice $f(x) = 0$ má přesně k různých reálných kořenů $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ násobností $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Tedy $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = r$. Rovnice $f'(x) = 0$ má číslo α_1 $(\lambda_1 - 1)$-násobný kořen, α_2 má $(\lambda_2 - 1)$-násobný kořen, …,α_k má $(\lambda_k - 1)$- násobný kořen. V bodech $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ má tedy $f'(x) = 0$ přesně $(\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + \cdots + (\lambda_k - 1) = r - k$ kořenů. Uvnitř každého intervalu $(\alpha_1, \alpha_2), (\alpha_2, \alpha_3), \dots, (\alpha_{k-1,}\alpha_k)$ leží podle věty 4.2.1. alespoň jeden kořen rovnice $f'(x) = 0$. Takto získáme alespoň $k - 1$ dalších kořenů rovnice $f'(x) = 0$. Máme tedy alespoň $(r - k) + (k - 1) = r - 1$ reálných kořenů rovnice $f'(x) = 0$.

Věta 4.2.5. *Nechť má rovnice $f'(x) = 0$ právě s reálných kořenů. Potom rovnice $f(x) = 0$ má nejvíc $s + 1$ reálných kořenů. Přitom kořeny obou rovnic počítáme s příslušnými násobnostmi.*

Důkaz: Kdyby rovnice $f(x) = 0$ měla $s + 2$ nebo více reálných kořenů, vyplývalo by z věty 4.2.4., že rovnice $f'(x) = 0$ má alespoň $s + 1$ reálných kořenů, to je v rozporu s předpokladem.

Věta 4.2.6. *Nechť počet kladných kořenů rovnice $f(x) = 0$ (počítáno s příslušnými násobnostmi) je r. Potom má rovnice $f'(x) = 0$ alespoň $r - 1$ kladných kořenů (počítáno s příslušnou násobností).*

Důkaz této věty je opakováním důkazu věty 4.2.4., přičemž $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ nyní značí všechny různé kladné kořeny rovnice $f(x) = 0$.

4.3. VYŠETŘENÍ PRŮBĚHU POLYNOMŮ

Při hledání reálných kořenů algebraické rovnice $f(x) = 0$ je velmi důležité sestrojit pokud možno spolehlivý graf funkce $y = f(x)$. Jak takový graf sestrojit, je nám známé. Rýsování křivky grafu krok za krokem je však zdlouhavé a snadno se může stát, že graf sestrojíme chybně.

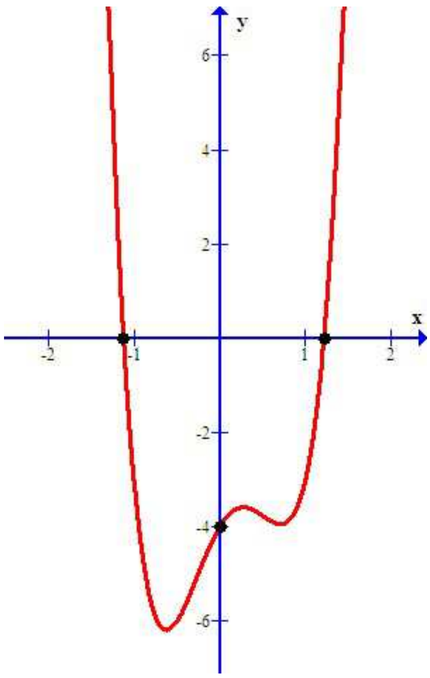
Vysvětlíme to na příkladu. Sestrojme graf funkce

$$y = f(x) = 6x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x - 4$$

Sestrojme tabulku hodnot:

x	…	-2	-1	0	1	2	…
y	…	90	-3	-4	-3	54	…

V případě, že tyto hodnoty naneseme do grafu, dostaneme rozložení bodů, které odpovídají grafu paraboly. Ve skutečnosti tomu tak ale není, lepší a přesnější analýza ukáže, že křivka má jiný tvar.



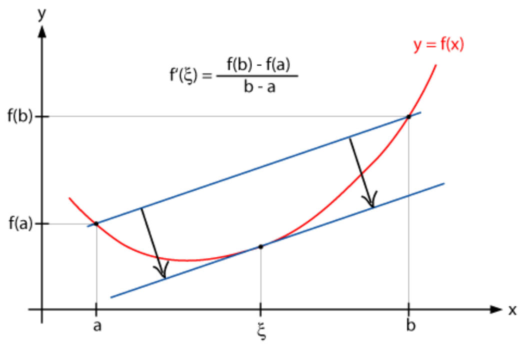
O tom, jak graf vypadá, vypovídají ty body, ve kterých se graf „ohýbá“. V těchto bodech je tečna pravděpodobně rovnoběžná s osou x. S jistotou můžeme říct, že tyto body jsou pro tvorbu grafu mnohem důležitější, než ty zaznamenané v tabulce.

Z obrázku je též patrné, že úsečky patřící k těmto bodům dělí osu x na intervaly, ve kterých křivka stále stoupá, nebo stále klesá. Pokusme se tedy nejdříve najít metodu na hledání těchto intervalů.

Nejprve si odvodíme čtyři pomocné věty, abychom mohli úlohu vyřešit.

Lemma 1. *(Tzv. věta o střední hodnotě) Nechť $f(x)$ je libovolný polynom a $\langle a, b \rangle$ libovolný interval. Potom uvnitř intervalu (a, b) leží alespoň jeden bod ξ, pro který platí*

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi), \quad tj.\, f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Obr. 4 Věta o střední hodnotě

Důkaz: Důkaz provedeme za pomoci Rolleovy věty, kterou potřebujeme v této podobě: Jestliže se polynom $F(x)$ rovná nule ve dvou bodech $a, b, tj. F(a) = F(b) = 0$, existuje uvnitř intervalu (a, b) alespoň jeden bod ξ, v kterém je $F'(\xi) = 0$.

Sestrojme tedy polynom

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}[f(b) - f(a)].$$

Pro tento polynom zřejmě platí $F(a) = F(b) = 0$. Jeho derivace je

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Podle Rolleovy věty existuje takový bod $\xi, a < \xi < b$, že $F'(\xi) = 0$. Tedy

$$0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Tím je lemma dokázáno.

Lemma 2. *Nechť $f(x)$ je polynom alespoň prvního stupně. Nechť na intervalu (a, b) platí $f'(x) \geq 0$. Potom pro každé dva body x_1, x_2, pro které je $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, platí vztah $f(x_1) < f(x_2)$.*

Důkaz: Zvolme čísla x_1 a x_2 pevná. Z lemmatu 1 vyplývá, že existuje takový bod ξ, $x_1 < \xi < x_2$, že $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1)$. Jakmile $x_2 - x_1 > 0$, $f'(\xi) \geq 0$, dostáváme nejprve $f(x_2) - f(x_1) \geq 0, tj. f(x_1) \leq f(x_2)$. Nyní ukážeme, že znaménko rovnosti zde nemůže platit. Zvolíme libovolný bod x_0 mezi body x_1 a x_2, tedy $x_1 < x_0 < x_2$. Jakmile aplikujeme lemma 1 na interval (x_1, x_0), dostáváme analogicky $f(x_1) \leq f(x_0)$. Jestliže ho aplikujeme na interval (x_0, x_2), dostáváme $f(x_0) \leq f(x_2)$. Souhrnně tedy $f(x_1) \leq f(x_0) \leq f(x_2)$. Kdyby platilo $f(x_1) = f(x_2)$, platil by pro všechny body *x* z intervalu

(x_1, x_2) vztah $f(x_1) = f(x) = f(x_2)$. To znamená: Rovnice $f(x) - f(x_1) = 0$ by měla nekonečně mnoho kořenů. Polynom $f(x)$ je tedy rovný konstantnímu polynomu $f(x_1)$. To je v rozporu s předpokladem, že $f(x)$ je alespoň prvního stupně. Tím je lemma 2 dokázáno.

Tvrzení pomocné věty 2 můžeme stručně vyjádřit slovy „polynom $f(x)$ je (za našeho předpokladu) na intervalu$\langle a, b \rangle$ rostoucí funkcí“.

Lemma 3. *Nechť $f(x)$ je polynom alespoň prvního stupně. Nechť na intervalu (a, b) platí $f'(x) \leq 0$. Potom pro každé dva body x_1, x_2 pro které je $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, platí* $f(x_1) > f(x_2)$.

Důkaz bychom provedli obdobně jako u lemmatu 2.

Stručně bychom řekli „Jestliže na intervalu (a, b) je $f'(x) \leq 0$, potom je polynom $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ klesající funkcí“.

Lemma 4. *Nechť $g(x)$ je polynom. Nechť β_1, β_2 jsou dva za sebou bezprostředně jdoucí kořeny rovnice $g(x) = 0$. Potom má $g(x)$ na celém intervalu (β_1, β_2) stejné znaménko.*

Důkaz: Podle předpokladu je v každém bodě x intervalu $(\beta_1, \beta_2), g(x) \neq 0$. Předpokládejme, že by existovala dvě taková čísla $\gamma_1, \gamma_2, \beta_1 < \gamma_1 < \gamma_2 < \beta_2$, že $g(\gamma_1) a\, g(\gamma_2)$ mají opačná znaménka. Podle věty 3 by potom existoval takový bod$\delta, \gamma_1 < \delta < \gamma_2$, pro který by platilo $g(\delta) = 0$. To je v rozporu s předpokladem. Proto je na celém intervalu (β_1, β_2) buď $g(x) < 0$, nebo $g(x) > 0$.

Definice: *Řekneme, že polynom $f(x)$ má v bodě a lokální maximum, jestliže existuje takové číslo $k > 0$, že pro všechna $x \neq a$ z intervalu $(a - k, a + k)$ je $f(x) < f(a)$. Řekneme, že $f(x)$ má v bodě a lokální minimum, jestliže existuje takové číslo $k > 0$, že pro všechna $x \neq a$ z intervalu $(a - k, a + k)$ je $f(x) > f(a)$.*

Lokální maxima a minima nazýváme společným jménem lokální extrémy. Nutná podmínka pro to, aby měl polynom $f(x)$ v bodě $x = a$ lokální extrém, je splnění vztahu $f'(a) = 0$.

Jestliže $f'(a) = 0$, má křivka $y = f(x)$ v bodě $[a, f(a)]$ tečnu rovnoběžnou s osou x. Jednoduché příklady však ukazují, že v takovém bodě nemusí mít polynom $f(x)$ lokální extrém.

Mějme polynom $f(x)$, který je alespoň druhého stupně. Sestrojme rovnice $f'(x) = 0$. Nechť $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_s$ jsou různé reálné kořeny této rovnice. Tyto body rozdělují osu x na $s + 1$ částí tak, že v každém z otevřených intervalů

$J_0 = (-\infty, \beta_1), J_1 = (\beta_1, \beta_2), J_2 = (\beta_2, \beta_3), \dots, J_{s-1} = (\beta_{s-1}, \beta_s), J_s = (\beta_s, \infty)$

má $f'(x)$ (podle pomocné věty 4) stále stejné znaménko. Podle lemmat 2 a 3 je tedy v každém z intervalů

$$\overline{J_0} = (-\infty, \beta_1\rangle, \overline{J_1} = \langle\beta_1, \beta_2\rangle, \overline{J_2} = \langle\beta_2, \beta_3\rangle, \dots, \overline{J_s} = \langle\beta_s, \infty)$$

funkce f rostoucí nebo klesající (podle toho jestli je v uvažovaném intervalu $f'(x) \geq 0$ nebo $f'(x) \leq 0$).

Uvažujme o bodu $x = \beta_i$ a intervalech $\overline{J_{\iota-l}}$ a $\overline{J_\iota}$ $(l \leq i \leq s)$.

a) Jestliže v obou intervalech $\overline{J_{\iota-l}}$ a $\overline{J_\iota}$ je funkce $f(x)$ rostoucí nebo v obou intervalech klesající, nemá $f(x)$ v bodě $x = \beta_i$ lokální extrém.

b) Jestliže v $\overline{J_{\iota-l}}$ funkce roste a v intervalu $\overline{J_\iota}$ funkce klesá, má $f(x)$ v bodě $x = \beta_i$ lokální maximum.

c) Jestliže v intervalu $\overline{J_{\iota-l}}$ funkce klesá a v intervalu $\overline{J_\iota}$ funkce roste, má $f(x)$ v bodě $x = \beta_i$ lokální minimum.

Příklad: Vyšetřete průběh funkce $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$.

Rovnice $f'(x) = 4x^3 - 4x = 0$ má kořeny $\beta_1 = -1, \beta_2 = 0, \beta_3 = 1$.

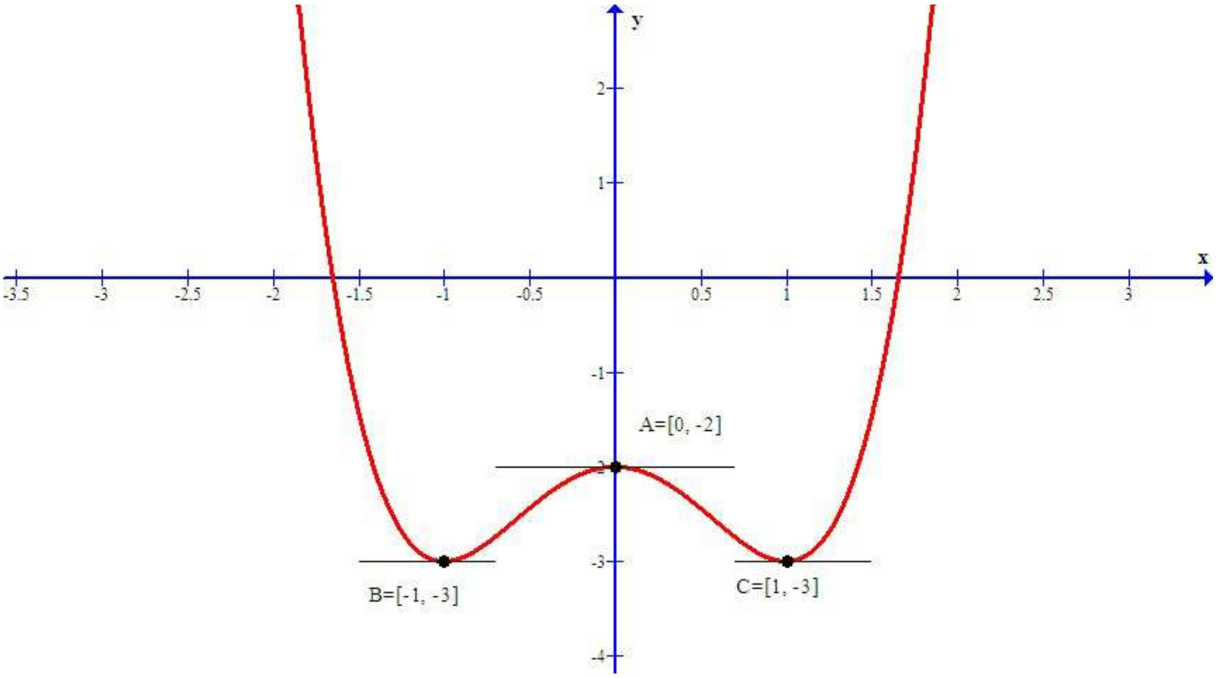
Musíme vyšetřit intervaly

$$J_0 = (-\infty, -1), J_1 = (-1,0), J_2 = (0,1), J_3 = (1, \infty).$$

$(-\infty, -1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1, \infty)$
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

Funkce má tedy v bodech $-1, 1$ lokální minimum, v čísle 0 má lokální maximum.

V bodech $A = [0, -2]$ $B = [-1, -3]$ $C = [1, -3]$ má funkce horizontální tečny.



Nyní můžeme také říci o poloze nulových bodů polynomu $f(x)$, jestliže známe kořeny rovnice $f'(x) = 0$.

a) Číslo β_i $(l \leq i \leq s)$ může být kořenem rovnice $f(x) = 0$. To nastane jen tehdy, jestliže je β_i alespoň dvojnásobným kořenem rovnice $f(x) = 0$. Zjistíme tedy, které z čísel β_i jsou kořeny rovnice $f(x) = 0$. Nejjednodušší to bude dosazením.
b) Podle věty 4.2.3. leží v každém z intervalů $J_0, J_1, \dots, J_s$ buď jeden (jednoduchý) nebo žádný kořen rovnice $f(x) = 0$. Nechť $l \leq i \leq s - 1$. Potom je zřejmé: Jestli $f(\beta_{i+1}) \cdot f(\beta_i) < 0$, leží v intervalu J_i jediný kořen; jestli $f(\beta_{i+1}) \cdot f(\beta_i) \geq 0$, neleží v J_i žádný kořen. Abychom zjistili, zda v intervalu J_0 leží nějaký kořen, stačí vyšetřit znaménko $f(A) \cdot f(\beta_1)$ $(resp. f(\beta_s) \cdot f(B))$, kde A (resp. B) je dost velké záporné (kladné) číslo.

Příklad: Kolik kořenů bude mít rovnice v závislosti na hodnotě číslaúp c?

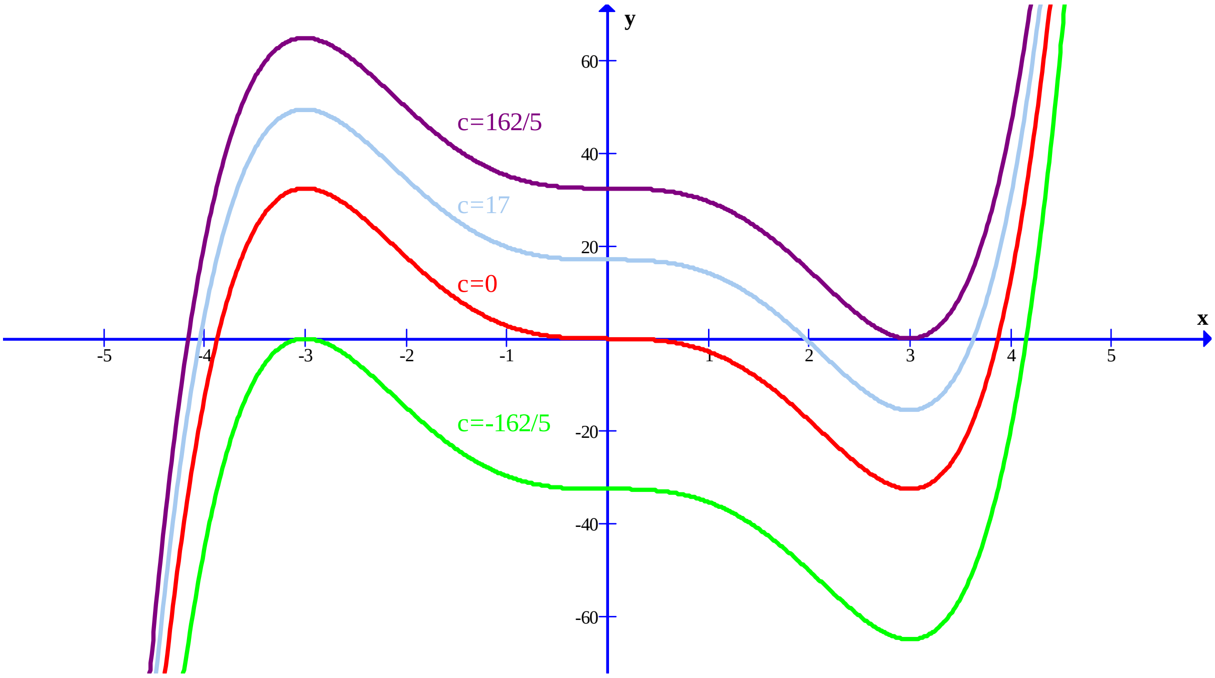
$$\frac{1}{5}x^5 - 3x^3 + c = 0$$

Derivace polynomu $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 3x^3 + c = 0$ je $f'(x) = x^4 - 9x^2 = x^2(x^2 - 9)$.

Rovnice $f'(x) = 0$ má tyto kořeny: $x_1 = -3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3$.

$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 3)$	$(3, \infty)$
↗	↘	↘	↗

$$f(-3) = \frac{162}{5} + c, \qquad f(3) = -\frac{162}{5} + c.$$



Pokud $c = 0$, potom má rovnice jeden trojnásobný kořen, kterým je číslo 0 a další dva kořeny.

Pokud $0 < c < \frac{162}{5}$, potom má rovnice tři kořeny v intervalech $(-\infty, -3), (0, 3), (3, \infty)$.

Pokud $c = \frac{162}{5}$, má rovnice jeden dvojnásobný kořen, číslo 3 a jeden další kořen v intervalu $(-\infty, -3)$.

Pokud $\frac{162}{5} < c < \infty$, má rovnice jeden reálný kořen v intervalu $(-\infty, -3)$.

Pokud $c = -\frac{162}{5}$, má rovnice jeden dvojnásobný kořen, kterým je číslo -3 a jeden další kořen v intervalu $(3, \infty)$.

Pokud $-\frac{162}{5} < c < 0$, potom má rovnice tři jednoduché kořeny, ty se nacházejí v intervalech $(-\infty, -3), (-3, 0), (3, \infty)$.

Pokud $-\infty < c < -\frac{162}{5}$, má rovnice jeden reálný kořen v intervalu $(3, \infty)$.

Nakonec si všimněme, jaký geometrický význam má okolnost, že $x = \alpha$ je vícenásobným kořenem rovnice $f(x) = 0$.

Jestli má rovnice $f(x) = 0$ kořen $x = \alpha$, znamená to, že křivka $y = f(x)$ protíná osu x v bodě $x = \alpha$. Ptáme se, jaký geometrický význam má fakt, že kořen $x = \alpha$ je r-násobným kořenem rovnice $f(x) = 0$, tj. že platí $f(\alpha) = f'(a) = \cdots = f^{(r-1)}(a) = 0$, ale $f^{r}(a) \neq 0$ $(r \geq 2)$. V tomto případě se $f(x)$ dá podle Taylorovy věty psát ve tvaru

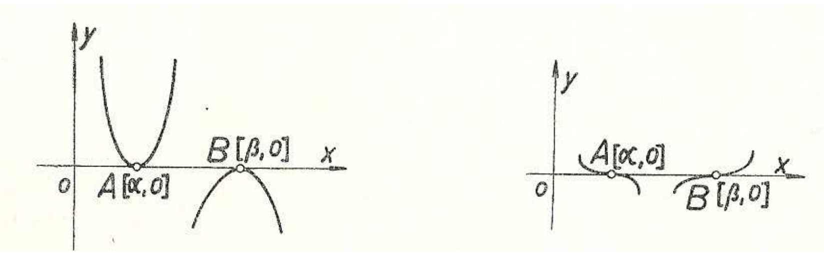
$$f(x) = (x-\alpha)^r \left[\frac{1}{r!} f^{(r)}(\alpha) + \frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(\alpha)(x-\alpha) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha) h^{n-r}\right].$$

Pro hodnotu funkce v bodě $x = \alpha + h$ dostáváme:

$$f(\alpha + h) = h^r \left[\frac{1}{r!} f^{(r)}(\alpha) + \frac{1}{(r+1)!} f^{(r+1)}(\alpha) h + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\alpha) h^{n-r}\right].$$

Jestliže $|h| \neq 0$ je dostatečně malé, má hranatá závorka to samé znaménko jako $f^{(r)}(\alpha)$.

a) Nechť r je sudé; potom je h^r vždy kladné. $f(\alpha + h)$ má to samé znaménko jako $f^{(r)}(\alpha)$. Jestliže $f^{(r)}(\alpha) > 0$, existuje $k > 0$, že pro všechna $x \neq \alpha$ z intervalu $(\alpha - k, \alpha + k)$ je $f(x) > 0 = f(\alpha)$. Funkce $f(x)$ má v bodě $x = \alpha$ lokální minimum. Jestliže $f^{(r)}(\alpha) < 0$ je pro všechna $x \neq \alpha$ z intervalu $(\alpha - k, \alpha + k)$ $f(x) < 0 = f(\alpha)$, tj (x) má v bodě $x = \alpha$ lokální maximum. Křivka $y = f(x)$ má v obou případech v bodě $[\alpha, 0]$ horizontální tečnu rovnoběžnou s osou x. Nastává jedna z možností znázorněných na obrázku.



Obr. 5

b) Nechť je r liché. Jestliže $h > 0$, má $f(\alpha + h)$ má to samé znaménko jako $f^{(r)}(\alpha)$; jestliže $h < 0$, má $f(\alpha + h)$ má opačné znaménko než $f^{(r)}(\alpha)$.

Nechť $f^{(r)}(\alpha) > 0$. Potom existuje $k > 0$, že na intervalu $(\alpha - k, \alpha)$ je $f(x) < 0 = f(\alpha)$ a na intervalu $(\alpha, \alpha + k)$ je $f(x) > 0 = f(\alpha)$. Polynom $f(x)$ nemá v bodě α lokální extrém. Jestliže $f^{(r)}(\alpha) < 0$, je situace obracená a ani v tomto případě nemá $f(x)$ v bodě $x = \alpha$ lokální extrém.

V obou těchto případech má křivka $y = f(x)$ v bodě $x = \alpha$ horizontální tečnu a nastává jedna z možností znázorněných na předchozím obrázku.

Příklad: Najděte lokální extrém křivky, narýsujte graf a udejte počet reálných kořenů.

$y = x^4 - 4x^3 - 7.$

$y = x^4 - 4x^3 - 7$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$4x^3 - 12x^2 = 0$

$4x^2(x - 3) = 0$

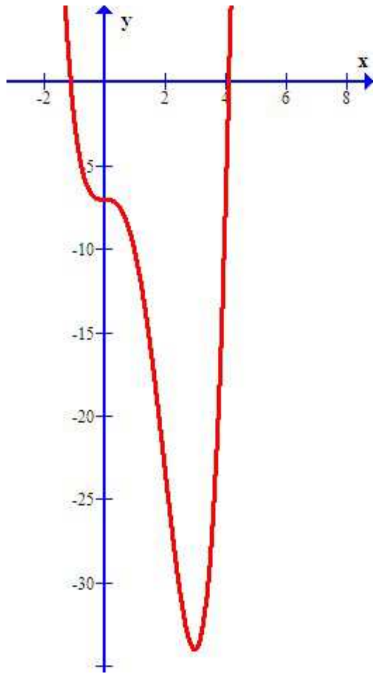
$x_1 = 0$

$x_2 = 3$

Rovnice $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$ má kořeny $x_1 = 0, x_2 = 3$. Musíme vyšetřit intervaly $(-\infty, 0), (0,3), (3, \infty)$.

$(-\infty, 0)$	$(0,3)$	$(3, \infty)$
↘	↘	↗

Funkce $y = f(x) = x^4 - 4x^3 - 7$ má v bodě 3 lokální minimum s hodnotou $f(3) = -34$ a má dva reálné kořeny.



4.4. ZEVŠEOBECNĚNÍ NA RACIONÁLNÍ FUNKCE

Pro numerické řešení rovnice $f(x) = 0$, kde f je polynom, je často výhodné převést rovnici na takový tvar, ve které se objevují podíly polynomů. Například rovnice $x^3 + 3x - 1 = 0$ je ekvivalentní s rovnicí $x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$ nebo také s rovnicí $x - \frac{1}{x^2+3} = 0$.

Budeme se podrobněji zabývat funkcemi ve tvaru $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, kde h a g jsou polynomy. Takovéto funkce nazýváme racionálními funkcemi.

Racionální funkce $\frac{g(x)}{h(x)}$ je definována ve všech bodech, ve kterých je jmenovatel různý od nuly. Například racionální funkce $\frac{x-1}{x^2+1}$ je definována pro všechna komplexní čísla s výjimkou čísel i a $-i$. Racionální funkce $\frac{x-1}{x^2-1}$ je definována pro všechna komplexní čísla s výjimkou čísel 1 a -1.

V mnoha případech nebudeme pracovat s celou množinou, na které je funkce $\frac{g(x)}{h(x)}$ definována, ale jen s jistým reálným intervalem. Jestliže řekneme, že racionální funkce $\frac{g(x)}{h(x)}$ je definována na intervalu $\langle a, b\rangle$, bude to znamenat, že na celém intervalu $\langle a, b\rangle$ je $h(x) \neq 0$. (Jestliže mají polynomy g, h reálné koeficienty, znamená to, že na celém intervalu $\langle a, b\rangle$ je $h(x)$ stále kladné nebo stále záporné.)

Definice: *Derivací racionální funkce* $\frac{g(x)}{h(x)}$ *definované na nějaké množině* M *rozumíme racionální funkci* $\frac{g'(x)h(x)-g(x)h'(x)}{h^2(x)}$ *(která je definována na té samé množině).*

Při takto zavedené definici derivace dostaneme v případě $h(x) = 1$ vztah $\left(\frac{g}{h}\right)' = g'$. Jestli platí $f_1 = \frac{g_1}{h_1}, f_2 = \frac{g_2}{h_2}$, potom $(f_1 f_2)' = f_1' f_2 + f_1 f_2'$. Důkaz tohoto tvrzení vyplývá z těchto výpočtů:

$$(f_1 f_2)' = \left(\frac{g_1 g_2}{h_1 h_2}\right)' = \frac{1}{(h_1 h_2)^2}\left[(g_1 g_2)' h_1 h_2 - g_1 g_2 (h_1 h_2)'\right] = \frac{g_1' h_1 - g_1 h_1'}{h_1^2}\frac{g_2}{h_2} + \frac{g_2' h_2 - g_2 h_2'}{h_2^2}\frac{g_1}{h_1}.$$

Přímým výpočtem se také přesvědčíme, že platí i pravidlo o derivování součtu: $(f_1 + f_2)' = f_1' + f_2'$.

Budeme předpokládat, že f je racionální funkce definovaná na $\langle a, b\rangle$, přičemž se omezíme na případ, že g a h jsou polynomy s reálnými koeficienty.

Protože nulové body $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ na $\langle a,b\rangle$ jsou totožné s nulovými body polynomu $g(x)$ (a $h(x)$ má na $\langle a,b\rangle$ stále stejné znaménko).

Nechť $\alpha_1<\alpha_2$ jsou dva za sebou jdoucí nulové body funkce $f(x)$ (tj. polynomu $g(x)$). Potom můžeme psát $f(x)=\frac{(x-\alpha_1)^r(x-\alpha_2)^s g_1(x)}{h(x)}, r\geq 1, s\geq 1$, kde $g_1(x)$ je polynom a $g_1(\alpha_1)\neq 0, g_1(\alpha_2)\neq 0$. Označíme-li $\frac{g_1(x)}{h(x)}=g_2(x)$, je $g_2(x)$ racionální funkce a čísla $g_2(\alpha_1), g_2(\alpha_2)$ mají stejná znaménka. Protože pro racionální funkce platí pravidlo o derivaci součinu, můžeme vypočítat derivaci $f(x)=(x-\alpha_1)^r(x-\alpha_2)^s$.

Platí tato věta: *Jestliže se racionální funkce f rovná nule v koncových bodech intervalu $\langle a,b\rangle$ (na kterém je definována), potom existuje na intervalu (a,b) alespoň jeden bod ξ, v kterém je $f'(\xi)=0$.*

Pro racionální funkce platí také věta o střední hodnotě: *Nechť f je racionální funkce definovaná na uzavřeném intervalu $\langle a,b\rangle$. Potom na intervalu (a,b) existuje alespoň jedno takové číslo ξ, že $f'(\xi)\cdot(b-a)=f(b)-f(a)$.*

Nechť $a_1, a_2, a_3, \ldots$

$b_1, b_2, b_3, ..$

jsou dvě konvergentní posloupnosti a nechť $\lim_{x\to\infty} a_n = a, \lim_{x\to\infty} b_n = b$. *Potom platí:*

a) *Posloupnost* $a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, \ldots$ *je konvergentní a její limita je číslo* $a+b$. *Ve vzorcích:* $\lim_{x\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{x\to\infty} a_n+\lim_{x\to\infty} b_n$.

b) *Posloupnost* $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots$ *je konvergentní a její limita je číslo* ab. *Ve vzorcích:* $\lim_{x\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim_{x\to\infty} a_n\cdot\lim_{x\to\infty} b_n$.

c) *Jestliže* $b\neq 0$, *potom od jistého indexu* n_0 *je* $b_n\neq 0$. *Posloupnost* $\frac{a_{n_0}}{b_{n_0}}, \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}}, \frac{a_{n_0+2}}{b_{n_0+2}}, \ldots$ *konverguje a její limita je číslo* $\frac{a}{b}$. *To zapíšeme* $\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{x\to\infty} a_n}{\lim_{x\to\infty} b_n}$.

Lemma 1. *Nechť* $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ *je racionální funkce definovaná na intervalu* $\langle a,b\rangle$. *Nechť všechny členy konvergentní posloupnosti* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots$ *leží na intervalu* $\langle a,b\rangle$ *a* $\lim_{x\to\infty} a_n=\alpha$. *Potom posloupnost čísel* $f(\alpha_1), f(\alpha_2), f(\alpha_3), \ldots$ *konverguje a má za limitu číslo* $f(\alpha)$.

Důkaz: Z lemmatu 4 vyplývá, že posloupnosti $g(\alpha_1), g(\alpha_2), \dots, h(\alpha_1), h(\alpha_2), \dots$ konvergují a jejich limita je číslo $g(\alpha)$, resp. $h(\alpha)$. Lehce se dokáže, že bod α spadne do intervalu $\langle a, b\rangle$. $h(\alpha) \neq 0$ (f je na $\langle a, b\rangle$ definované).

Z tvrzení c vyplývá, že posloupnost $\frac{g(\alpha_1)}{h(\alpha_1)}, \frac{g(\alpha_2)}{h(\alpha_2)}, \frac{g(\alpha_3)}{h(\alpha_3)}, \dots$ konverguje a má za limitu číslo $\frac{g(\alpha)}{h(\alpha)} = f(\alpha)$. Tím je lemma dokázáno.

4.5. SEPARACE KOŘENŮ

Důležitým pojmem při řešení rovnic je tzv. separace kořenů. Jde o hledání intervalů na číselné ose, ve kterých leží jen jeden reálný kořen dané rovnice.

Například rovnice $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$ má vždy jeden kořen v těchto intervalech: $(-3, -2), (-\sqrt{3}, -1), (1, \sqrt{3}), (2,3)$.

Separace kořenů se dá provést okamžitě, jakmile máme spolehlivý graf. Jak už bylo řečeno, to není vždy jednoduché a spolehlivý graf vyžaduje hledání kořenů rovnice $f'(x) = 0$ stupně $n - 1$. Pro $n > 5$ stojíme před problémem. U rovnic vyšších stupňů nemůžu očekávat pomoc od grafu.

Jestli $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ je daná rovnice a jestli položíme $A = \max(|a_1|, \dots, |a_n|)$, potom pro $|x| > A + 1$ je vždy $|f(x)| > 0$. Z toho vyplývá:

Věta 4.5.1. *Nechť* $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ *je rovnice s reálnými koeficienty. Položme* $A = \max(|a_1|, \dots, |a_n|)$. *Potom všechny reálné kořeny rovnice*

$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ *leží v intervalu* $\langle -A - 1, \ A + 1\rangle$.

Uvažujme o rovnici

$$f(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - 1 = 0$$

Podle věty 4.5.1. leží každý kořen $f(x) = 0$ v intervalu $\langle -2, 2\rangle$. Nechť je dané $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$. Ukážeme, že pro dost velké n má tato rovnice kořen v intervalu $(2 - \varepsilon, 2)$. Pro $x \neq 1$ je $f(x) = x^n - \frac{x^n - 1}{x-1} = \frac{x^n(x-2)+1}{x-1}$. Je tedy $f(2) = 1, f(2-\varepsilon) = \frac{1-\varepsilon(2-\varepsilon)^n}{1-\varepsilon}$. Pro dost velké n je pravděpodobně $1 - \varepsilon(2-\varepsilon)^n < 0$; proto $f(2-\varepsilon) < 0$. Existují tedy rovnice typu $f(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - 1 = 0$, které mají reálný kořen v libovolně úzkém intervalu $(2 - \varepsilon, 2)$.

U rozmanitých případů můžeme použít výhodnější větu pro odhad polohy kořenů.

Věta 4.5.2. *Nechť* $a_k, 1 \le k \le n$, *je první záporný koeficient v rovnici* $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ *(mající reálné koeficienty). Nechť B je největší z absolutních hodnot záporných koeficientů rovnice* $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$. *Potom každý reálný kořen rovnice* $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ *je menší než číslo* $1 + \sqrt[k]{B}$.

Důkaz: Pro $x > 1$ je $x^{k-1} \ge (x-1)^{k-1}$.

Pro $x > 1$ je tedy

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \ge x^n - B(x^{n-k} + x^{n-k-1} + \cdots + 1) = x^n - B\frac{x^{n-k+1}-1}{x-1} =$$

$$x^n - B\frac{x^{n-k+1}}{x-1} + \frac{B}{x-1} > x^n - B\frac{x^n}{(x-1)x^{k-1}} \ge x^n - B\frac{x^n}{(x-1)^k} = \frac{x^n}{(x-1)^k}[(x-1)^k - B].$$

Pro $x \ge 1 + \sqrt[k]{B}$ je hranatá závorka nezáporná. Je tedy $f(x) > 0$. Tím je věta dokázána.

Příklad: Mějme rovnici $x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 32x^2 + 7x + 15 = 0$

Zde je $k = 3,\ B = 32$.

Každý reálný kořen je tedy menší než $1 + \sqrt[3]{32} < 4{,}17$.

Abychom našli dolní ohraničení pro záporné kořeny naší rovnice, dosaďme $x = -y$ a hledejme horní ohraničení pro kořeny vzniklé rovnice

$$y^5 - 2y^4 + 3y^3 + 32y^2 + 7y - 15 = 0.$$

Zde je $k = 1,\ B = 15$.

Každý kladný kořen této rovnice je menší než $1 + 15 = 16$.

Všechny reálné kořeny naší rovnice leží v intervalu $(-16;\ \ 4{,}17)$.

Že věta 4.5.1. může být nevýhodná, ukazuje okolnost, že pro náš příklad udává jen to, že všechny reálné kořeny leží v intervalu $\langle -33,\ 33\rangle$.

Mnohem výhodnější při numerických výpočtech bývá následující věta:

Věta 4.5.3. *Nechť* $c > 0$ *je takové číslo, že* $f(c) > 0$ *a všechna čísla* $f'(c), f''(c), \ldots, f^{(n)}(c)$ *jsou nezáporná. Potom každý kladný kořen rovnice* $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$ *je menší než číslo* c.

Důkaz: Rovnice $f(x) = 0$ se dá zapsat i v tomto tvaru:

$$f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = 0.$$

Z našich předpokladů je pro $x \geq c$ levá strana jistě > 0. Proto neexistuje reálný kořen $\geq c$.

Příklad: Uvažujme o rovnici $x^5 + 2x^4 + 3x^3 - 32x^2 + 7x + 25 = 0$

Jednotlivé koeficienty Taylorova rozvoje počítáme pomocí Hornerova schématu. Máme:

$$\begin{array}{cccccc} 5 & 2 & 3 & -32 & 7 & 25 \\ 5 & 7 & 10 & -22 & -15 & \mathbf{10} = f(1) \\ . & . & . & . & . & \end{array}$$

Jelikož $f(1) < 0$, nebudeme dále počítat, ale zkusíme $c = 2$.

$$\begin{array}{cccccc} 5 & 2 & 3 & -32 & 7 & 25 \\ 5 & 12 & 27 & 22 & 51 & \mathbf{127} = f(2) \end{array}$$

Ze stavby tohoto schématu je vidět, že všechny derivace jsou kladné. Proto můžeme tvrdit, že všechny reálné kořeny naší rovnice jsou < 2.

Hledejme dolní ohraničení pro záporné kořeny.

Sestrojíme proto Hornerovo schéma pro polynom $y^5 - 2y^4 + 3y^3 + 32y^2 + 7y - 25 = 0$.

Zkusme $c = 1$. Máme:

1	-2	3	32	7	-25
1	-1	2	34	41	**16**
1	0	2	36	**77**	
1	1	3	**39**		
1	2	**5**			
1	**3**				
1					

Všechny koeficienty jsou nezáporné. Všechny kořeny původní rovnice jsou tedy > -1.

Souhrn: Všechny reálné kořeny naší rovnice leží v intervalu $(-1, 2)$.

4.5.1. DESCARTOVA VĚTA

Uvedené věty nám umožnily najít intervaly, ve kterých se nacházejí všechny reálné kořeny dané rovnice. Vykonat separaci nám velice ulehčí tzv. Descartovo pravilo.

Mějme polynom (nebo rovnici) s reálnými koeficienty, které uspořádáme podle klesajících mocnin x a v kterém nevypisujeme členy s koeficientem nula. Řekneme, že mezi dvěma za sebou jdoucími členy polynomu je znaménková změna, jestli koeficienty obou členů mají opačná znaménka. Např. v rovnici $x^5 - 6x^3 + 5x^2 + 4x - 7 = 0$ jsou tři znaménkové změny.

Počet znaménkových změn úzce souvisí s počtem kladných kořenů dané rovnice.

Například lineární rovnice $x + a = 0$

1. Jestli $a > 0$, nemáme žádnou znaménkovou změnu a rovnice nemá kladný kořen.
2. Jestli $a < 0$, máme jednu znaménkovou změnu a rovnice má jeden kladný kořen.

Uvažujme o kvadratické rovnici $x^2 + ax + b = 0$

1. Jestli $a > 0, b > 0$, není znaménková změna a rovnice nemá kladný kořen.
2. Jestli $a < 0, b > 0$, jsou v rovnici dvě znaménkové změny a rovnice buď nemá žádný, nebo má dva kladné kořeny.
3. Jestli $a > 0, b < 0$, má rovnice jednu znaménkovou změnu a rovnice má přesně jeden kladný kořen.
4. Jestli $a < 0, b < 0$, má rovnice jednu znaménkovou změnu a rovnice má opět přesně jeden kladný kořen.

Věta 4.5.1.1. *(Descartova věta) Počet kladných kořenů rovnice $f(x) = 0$ je buď roven počtu znaménkových změn v polynomu $f(x)$ nebo je o sudý počet menší r-násobný kořen považujeme za r stejných kořenů.*

Mějme rovnici $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, a_0 > 0$.

a) Nechť $a_n > 0$. Potom je počet znaménkových změn v $f(x)$ buď nula, nebo sudé přirozené číslo. Schéma znamének totiž začíná znaménkem + a končí znaménkem +. Ať je mezi nimi jakýkoliv počet záporných znamének, je počet znaménkových změn sudý. V tomto případě je dále $f(0) = a_n > 0$ a pro dostatečně velké $x = A > 0$ za kterým už nejsou kořeny, je $f(A) > 0$. Mezi 0 a A je tedy buď žádný kořen, nebo je tam sudý počet kořenů.

b) Nechť $a_n < 0$. Potom se pomocí analogické úvahy dokáže, že počet znaménkových změn je lichý, stejně jako počet kořenů.

Počet znaménkových změn a počet kladných kořenů jsou čísla, která jsou obě sudá nebo obě lichá (číslo nula považujeme za sudé).

Důkaz: Předpokládejme, že naše věta je správná pro všechny rovnice menšího stupně než n. Ukážeme, že je správná i pro rovnice stupně n.

Důkaz provedeme nepřímo. Uvažujme, že je věta správná pro všechny rovnice n-tého stupně. Potom existuje alespoň jedna rovnice n-tého stupně $f(x) = 0$, která má sice p znaménkových změn, ale nemá p nebo $p - 2k, k\ je\ celé\ nezáporné\ číslo$ kladných kořenů. Jestliže je počet změn a počet kladných kořenů stejné parity (buď jsou obě sudá, nebo obě lichá), musela by mít rovnice $f(x) = 0$ alespoň $p + 2$ kladných kořenů.

Sestrojme si rovnici $f'(x) = 0$, která má stupeň $n - 1$. Derivací se počet změn nemůže zvětšit. Tato rovnice by tedy měla p nebo méně změn. Z věty 4.2.6. však vyplývá, že rovnice $f'(x) = 0$ má alespoň $p + 1$ kladných kořenů. To je v rozporu s předpokladem, protože pro rovnice stupně $n - 1$ jsme předpokládali, že počet kladných kořenů (kterých je alespoň $p + 1$) se rovná počtu změn (tj. p) nebo je o sudý počet menší (tj. $p - 2k$). Tím je věta dokázána.

Příklad: Separujte kořeny rovnice

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$$

Tato rovnice má tři znaménkové změny. Pomocí Descartovy věty můžeme tedy říci, že rovnice má 3, nebo 1 kladný kořen. To je zatím vše, co víme. Tím však separace není hotová. Použijeme proto Descartovu větu vícekrát, aby bylo možné separaci vykonat a to bez grafického znázornění.

Ptejme se, kolik kořenů má rovnice v intervalu $(1, \infty)$. Za tím účelem dosadíme $x = 1 + y$ a budeme se ptát, kolik kladných kořenů má vzniklá rovnice v y. Je zřejmé, že každému kladnému y odpovídá x ležící v intervalu $(1, \infty)$. Rovnici $f(1 + y) = 0$ sestavíme pomocí Hornerova schématu. Máme:

1	0	-5	8	-8
1	1	-4	4	**-4**
1	2	-2	**2**	
1	3	**1**		
1	**4**			
1				

Je tedy

$$f(1+y) = y^4 + 4y^3 + y^2 + 2y - 4 = 0$$

Tato rovnice má jednu znaménkovou změnu. Proto bude mít rovnice $x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ jeden kořen v intervalu $(1, \infty)$. Snadno zjistíme, že $f(1) < 0, f(2) > 0$. Rovnice má tedy kořen, který leží v intervalu $(1,\ 2)$.

Ptejme se, kolik kořenů má rovnice v intervalu $(0,1)$. To zjistíme tak, že zavedeme substituci $x = \frac{1}{1+z}$. Je zřejmé, že když se z mění od 0 do ∞, x se mění od 1 do 0. To znamená, že sestavíme rovnici $f\left(\frac{1}{1+z}\right) = 0$ a vyšetříme, kolik kladných kořenů má vzniklá rovnice. Dosaďme:

$$f\left(\frac{1}{1+z}\right) = \left(\frac{1}{1+z}\right)^4 - 5\left(\frac{1}{1+z}\right)^2 + 8\left(\frac{1}{1+z}\right) - 8 = 0$$

Toto dosazení vykonáme pomocí Hornerova schématu tak, že napíšeme koeficienty v obráceném pořadí a sestrojíme Hornerovo schéma s číslem 1.

-8	8	-5	0	1
-8	0	-5	-5	**-4**
-8	-8	-13	**-18**	
-8	-16	**-29**		
-8	**-24**			
-8				

Rovnice bude:

$$-8z^4 - 24z^3 - 29z^2 - 18z - 4 = 0$$

Dnes bychom pro tyto výpočty využili spíše počítačových programů.

Tato rovnice nemá žádnou znaménkovou změnu, to znamená, že nebude mít žádný kořen v intervalu $(0,1)$.

Ptáme se, kolik má rovnice záporných kořenů. K tomu stačí zavést substituce $x = -u$ a zjistit, kolik kladných kořenů má tato vzniklá rovnice

$$f(-u) = u^4 - 5u^2 - 8u - 4 = 0.$$

Tato rovnice má jednu znaménkovou změnu a tedy jediný kladný kořen. Rovnice $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ má proto jediný záporný kořen. Můžeme zjistit, že $f(-2) < 0$, $f(-3) > 0$. Tento jediný kořen bude ležet v intervalu $(-3, -2)$.

Souhrnně máme: Rovnice $f(x) = x^4 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$ má jen dva reálné kořeny, jeden z nich leží v intervalu $(1,2)$ a druhý se nachází v intervalu $(-3, -2)$. Tím je separace úplně vykonaná.

Interval $(1, 2)$, ve kterém leží kořen naší rovnice, můžeme libovolně zmenšit. Zvolíme si libovolnou hodnotu z tohoto intervalu, například 1,2 a výpočtem zjistíme, že $f(1,2) = -3,5264 < 0$. $f(2) = 4$, kořen se tedy nachází v intervalu $(1,2; 2)$. Postupným opakováním této úvahy se dostaneme libovolně blízko ke kořenu. Tento postup je však zdlouhavý. Existují daleko efektivnější metody, jak se dostat rychle k cíli.

René Descartes

René Descartes se narodil 31. března 1596 v La Haye ve Francii, v aristokratické rodině, která byla katolicky založena. Byl francouzským filozofem, vědcem, matematikem, fyzikem, fyziologem a myslitelem. Vytvořil novověkou koncepci subjektu, byl zakladatelem novověkého racionalismu a vědeckého objektivismu. Doba, ve které Descartes žil byla poznamenaná třicetiletou válkou, v níž došlo ke střetu mezi římskokatolickou církví a protestanty. 20 let žil v liberálnějším Nizozemí a zemřel ve Švédsku. Rozhodujícím způsobem přispěl k novověkému pojetí přírody jako nekonečného, matematicky propočitatelného a předvídatelného univerza. Usiloval o vytvoření autonomní filozofie, opírající se o suverenitu lidského rozumu a vybudované z pravd, jež by měly nespornost pravd matematických. Za základní princip filozofování stanovil bezprostřední evidentnost (jasnost a zřetelnost) poznatku. Pevné východisko filozofování nalezl pomocí metodické skepse v sebejistotě myslícího Já. Ego interpretováno jako „myslící věc“ protikladná přírodě jako

„rozprostraněné věci“. Nad oběma substancemi stojí třetí, tzv. neomezená substance – Bůh. Přírodu chápal jako geometrické tvary a souřadnice, její poznání se proto uskutečňuje v rozumu abstrakcí. Byl jedním ze zakladatelů analytické geometrie, zavedl pojem funkce a proměnné veličiny a soustavu pravoúhlých (kartézských) souřadnic, zjednodušil algebru a analýzu, zavedl nový způsob zápisu značek mocnin. Na R. Descarta bezprostředně navázalo karteziánství, poté zejména B. Spinoza. Svou fyzikou R. Descartes ovlivnil zvláště francouzský materialismus 18. stol., racionalistickým budováním filozofie vytvořil její vzor pro osvícenství 18. – 19. stol. a ve 20. stol. Byl považován za otce moderního subjektivismu. Dne 11. února 1650 zemřel ve Švédsku na zápal plic.

4.5.2. STURMOVA VĚTA

Předpokládejme, že rovnice $f(x) = 0$ nemá vícenásobné reálné kořeny a že $f(a) \cdot f(b) \neq 0$. S polynomy $f(x) a\, f'(x)$ sestrojme Eukleidův algoritmus a to tak, že zbytky zapíšeme se záporným znaménkem. Dále si označíme $f(x) = f_0(x) a\, f'(x) = f_1(x)$. Dostaneme tento řetězec vztahů:

$$f_0(x) = f_1(x) \cdot g_1(x) - f_2(x)$$
$$f_1(x) = f_2(x) \cdot g_2(x) - f_3(x)$$
$$f_2(x) = f_3(x) \cdot g_3(x) - f_4(x)$$
$$\vdots$$
$$f_{m-2}(x) = f_{m-1}(x) \cdot g_{m-1}(x) - f_m(x)$$
$$f_{m-1}(x) = f_m(x) \cdot g_m(x)$$

Zbytek $f_m(x)$ je konstanta různá od nuly, jinak by rovnice $f(x) = 0$ měla vícenásobný kořen a to jsme dopředu vyloučili.

Systém polynomů

$$f(x) = f_0(x), f'(x) = f_1(x), f_2(x), \dots, f_{m-1}(x), f_m(x)$$

nazýváme Sturmův řetězec patřící k polynomu $f(x)$.

Po dosazení čísel a a b do řetězce $f(x) = f_0(x), f'(x) = f_1(x), f_2(x), \dots, f_{m-1}(x), f_m(x)$, dostaneme dvě uspořádané soustavy čísel:

$$f_0(a), f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a)$$
$$f_0(b), f_1(b), f_2(b), \dots, f_m(b)$$

Nechť je počet znaménkových změn v soustavách $V(x), V(a), resp. V(b)$. Potom platí:

Věta 4.5.2.1. *(Sturmova věta) Nechť jsou splněné předpoklady uvedené v textu. Potom se počet reálných kořenů rovnice $f(x) = 0$ na intervalu (a, b) rovná číslu $V(a) - V(b)$.*

Důkaz: Budeme zjišťovat, jak se mění číslo $V(x)$ s rostoucím x. Nejdříve si ale všimneme některých vlastností řetězce

$f(x) = f_0(x), f'(x) = f_1(x), f_2(x), \dots, f_{m-1}(x), f_m(x)$.

a) Nechť pro nějaké $x = \alpha$ a $i \geq 1$ je $f_i(\alpha) = 0$. Potom je nevyhnutelně $f_{i+1}(\alpha) \neq 0$. Kdyby totiž platilo $f_i(\alpha) = 0$ a $f_{i+1}(\alpha) = 0$, vyplývalo by ze vztahu

$$f_{i-1}(x) = f_i(x) \cdot g_i(x) - f_{i+1}(x),$$

že $f_{i-1}(\alpha) = 0$. Z předcházejícího vztahu by vyplývalo, že i $f_{i-2}(\alpha) = 0$ atd. Opakováním této úvahy bychom dostali: $f(\alpha) = 0$ a $f'(\alpha) = 0$, což je v rozporu s předpokladem, že $f(x) = 0$ nemá vícenásobné kořeny. Podobně vyplývá z předpokladu $f_i(\alpha) = 0$, že je $f_{i-1}(\alpha) \neq 0$.

b) Uvažujme opět o vztahu

$$f_{i-1}(x) = f_i(x) \cdot g_i(x) - f_{i+1}(x).$$

Nechť pro nějaké $i > 0$ je $f_i(\alpha) = 0$. Potom z tohoto vztahu vyplývá $f_{i-1}(\alpha) = -f_{i+1}(\alpha)$, tj. $f_{i-1}(x)$ a $f_{i+1}(x)$ mají v bodě $i = \alpha$ opačná znaménka. Z toho vyplývá: Jestliže zvolíme $h > 0$ dostatečně malé, mají polynomy $f_{i-1}(x)$ a $f_{i+1}(x)$ na celém intervalu $(\alpha - h, \alpha + h)$ opačná znaménka.

Označme znaménko čísla $f_{i+1}(\alpha)$ znakem ε. Potom část řetězce

$$f(x) = f_0(x), f'(x) = f_1(x), f_2(x), \dots, f_{m-1}(x), f_m(x)$$

má v bodech $x = \alpha - h, x = \alpha, x = \alpha + h$ tuto znaménkovou změnu:

x	…,	$f_{i-1}(x)$,	$f_i(x)$	$f_{i+1}(x)$,	….
$\alpha - h$		$-\varepsilon$	?	ε	
α		$-\varepsilon$	0	ε	
$\alpha + h$		$-\varepsilon$	?	ε	

O znaménku $f_i(x)$ v bodech $\alpha - h, \alpha + h$ neumíme nic říci. Avšak nezávisle na této okolnosti je zřejmé, že v prvním a třetím řádku jsou možná jen tato znaménková schémata:

$$+ + - ; + - - ; - + + ; - - +.$$

Ve druhém řádku jsou možná jen dvě schémata, a to:

$$-\,0\,+\,;\;+\,0\,-.$$

V každém případě je ve všech třech řádcích stejný počet znaménkových změn, přesně jedna.

Kořen α může být nulovým bodem i některého z dalších polynomů $f_i(x)$, kde $i+2 \leq j \leq m$ nebo $1 \leq j \leq i-2$. V tomto případě se znaménková schémata pro trojici f_{j-1}, f_j, f_{j+1} při přechodu od $x = \alpha - h$ k $x = \alpha + h$ chová analogicky jako schéma pro trojici f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, tj. souhrnný počet znaménkových změn se nezmění. Proto, když x roste a přechází nulovým bodem kteréhokoliv polynomu $f_i(x)(i \geq 1)$, nemá to žádný vliv na souhrnný počet znaménkových změn v řetězci $f(x) = f_0(x), f'(x) = f_1(x), f_2(x), \dots, f_{m-1}(x), f_m(x)$. (Má to vliv na rozložení znamének).

c) Nechť je nyní α takové číslo, že $f_0(\alpha) = 0$. Potom $f_1(\alpha) \neq 0$ a existuje takové číslo $h > 0$, že na intervalu $(\alpha - h, \alpha + h)$ má $f_1(x)$ stále stejné znaménko. Podle Taylorovy věty je

$$f(\alpha - h) = f(\alpha) - \frac{h}{1!} f'(\alpha) + \frac{1}{2} h^2 f''(\alpha) - \cdots = h\left[-f'(\alpha) + \frac{1}{2} h f''(\alpha) - \cdots\right],$$

$$f(\alpha + h) = f(\alpha) + \frac{h}{1!} f'(\alpha) + \frac{1}{2} h^2 f''(\alpha) + \cdots = h\left[f'(\alpha) + \frac{1}{2} h f''(\alpha) + \cdots\right].$$

Jestliže je $h > 0$ dostatečně malé, má výraz v hranaté závorce stejné znaménko jako první člen. Jestliže $f'(\alpha) > 0$, je $f(\alpha - h) < 0$ a $f(\alpha + h) > 0$. Máme tedy takovéto znaménkové schéma:

x	$f_0(x)$,	$f_1(x)$,	...
$\alpha - h$	-	+	
α	0	+	
$\alpha + h$	+	+	

Jestliže $f'(\alpha) < 0$, je $f(\alpha - h) > 0$ a $f(\alpha + h) < 0$ a máme takovéto znaménkové schéma:

x	$f_0(x),$	$f_1(x),$	...
$\alpha - h$	+	-	
α	0	-	
$\alpha + h$	-	-	

V obou případech je ve třetím řádku o jednu znaménkovou změnu méně než v prvním řádku. Při přechodu přes nulový bod polynomu $f_0(x)$ se jedna změna ztratila

d) Nyní dokončíme důkaz našeho tvrzení. Sledujme, jak se mění znaménková schémata v soustavě $f(x) = f_0(x), f'(x) = f_1(x), f_2(x), \dots, f_{m-1}(x), f_m(x)$ a číslo $V(x)$, když x roste. Existuje jen konečný počet čísel, ve kterých má některý z polynomů

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$$

nulový bod. Nechť jsou to čísla $c_1 < c_2 < \cdots < c_s$. Jestliže zvolíme v intervalu $(c_i, c_{i+l}), l \leq i \leq s-1$, dvě libovolná čísla $x', x'', c_i < x' < x'' < c_{i-1}$, potom máme v obou soustavách

$$f_0(x'), f_1(x'), \dots, f_m(x'),$$
$$f_0(x''), f_1(x''), \dots, f_m(x'')$$

ta samá znaménková schémata. Každý z polynomů $f_j(x)$ $(j = 0, 1, \dots, m)$ má uvnitř intervalu (c_i, c_{i+1})stále stejné znaménko. Podobná úvaha platí i pro intervaly $(-\infty, c_1)$ a (c_s, ∞).

Pro $x = a$ je v soustavě $f_0(a), f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a)$ jakési znaménkové schéma. Pokud x roste tak, že x není kořenem rovnice $f_0(x) = 0$, může se sice znaménkové schéma měnit (při přechodu nulových bodů polynomů $f_i(x), i \geq 1$), ale souhrnný počet znaménkových změn zůstává nezměněný. Jakmile však x překročí kořen α rovnice $f_0(x) = 0$, víme z úseku c), že soustava

$$f_0(\alpha - h), f_1(\alpha - h), \dots, f_m(\alpha - h)$$

má pro dost malé $h > 0$ přesně o jednu změnu víc než soustava

$$f_0(\alpha + h), f_1(\alpha + h), \dots, f_m(\alpha + h).$$

Je tedy $V(\alpha + h) = V(\alpha - h) - 1$. Když při každém překročení kořene rovnice $f_0(x) = 0$ ubude právě jedna změna, je počet kořenů na intervalu (a, b)rovný přesně číslu $V(a) - V(b)$. Tím je věta 4.5.2.1. úplně dokázána.

Jacques Charles Francois Sturm

(29. 9. 1803 Ženeva, Švýcarsko - 18. 12. 1855 Paříž, Francie)

Rodiče Jean-Henri Sturm a Jeanne-Louise-Henriette Gremayová mu umožnili dobré vzdělání. Když ve škole projevil talent pro řeckou a latinskou poezii, předpokládalo se, že bude pokračovat ve studiu humanitních věd. Po smrti otce se ovšem přeorientoval na studium matematiky.

Roku 1821 již studoval na Ženevské akademii, kde v něm Simon Lhuilier objevil matematického génia. Potom, co dokončil svá studia na Ženevské akademii, se stal v květnu 1823 osobním učitelem nejmladšího syna Madame de Staël na zámku Coppet nedaleko Ženevy. V této době napsal několik článků zabývajících se geometrií, jež byly publikovány v Gergonneho Annales de mathématiques pures et appliquées. Když po několika měsících rodina Madame de Staël odjížděla do Paříže, Charles Frangois jel s nimi. Následujících šest měsíců se v Paříži setkával s předními vědci té doby, jako byl Laplace, Poisson, Fourier, Gay-Lussac, Ampěre a další.

Roku 1829 byl vydán Sturmův článek Memoire sur la resolution des equations nurné-riques, ve kterém řeší otázku počtu reálných kořenů rovnice na daném intervalu. Tato Sturmova teorie se brzy stala klasickou.

Po revoluci v červenci 1830 se stal profesorem matematiky na College Rollin a roku 1833 získal francouzské občanství a tři roky nato byl zvolen do Akademie věd. Právě v těchto letech se začal zabývat problematikou diferenciálních rovnic. V letech 1836-1837 byly zveřejněny výsledky jeho spolupráce s Josephem Liouvillem zabývající se rozvojem funkcí do řad, dnes známým jako Sturm-Liouvilleovu teorii.

Od roku 1838 pracoval na École Polytechnique v Paříži, kde roku 1840 získal post profesora analýzy a mechaniky. Ve stejném roce nahradil Poissona jakožto vedoucího mechaniky na Pařížské Faculté des Sciences. Dalších asi deset let se věnoval především výuce diferenciálního a integrálního počtu a mechaniky, což dalo vzniknout dvoudílným textům Cours ď analyse de l'École Polytechnique a Cours de mécanique de l'École Polytechnique, které byly vydány ovšem až po smrti autora, který zemřel roku 1855 po dlouhé nemoci.

Příklad: Separujte reálné kořeny rovnice $f(x) = x^4 + 8x - 5 = 0$. $f'(x) = 4x^3 + 8$ a Eukleidův algoritmus postupného dělení je:

$$x^4 + 8x - 5 = (4x^3 + 8)\frac{1}{4}x - (-6x + 5),$$

$$4x^3 + 8 = (-6x + 5)\frac{1}{108}(-72x^2 - 60x - 50) - (-1114).$$

Je tedy:

$$f_0 = x^4 + 12x - 5,$$
$$f_1 = 4x^3 + 8,$$
$$f_2 = -6x + 5,$$
$$f_3 = -1114.$$

Pomocné výpočty:

$f_0(x) \div f_1(x)$

$(x^4 + 8x - 5) \div (4x^3 + 8) = \frac{1}{4}x$

$\underline{-x^4 - 2x}$

$\quad 6x - 5$

$x^4 + 8x - 5 = (4x^3 + 8)\frac{1}{4}x - (-6x + 5)$

$f_1(x) \div f_2(x)$

$(4x^3 + 8) \div (-6x + 5) = -\frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{18}x - \frac{50}{108}$

$\underline{-4x^3 + \frac{10}{3}x^2}$

$\quad \frac{10}{3}x^2 + 8$

$\quad \underline{-\frac{10}{3}x^2 + \frac{50}{18}x}$

$\quad\quad \frac{50}{18}x + 8$

$\quad\quad \underline{-\frac{50}{18} + \frac{250}{108}}$

$\quad\quad\quad \frac{1114}{108}$

$$4x^3 + 8 = (-6x + 5)\frac{1}{108}(-72x^2 - 60x - 50) - (-1114)$$

Z věty 4.5.1. vyplývá, že všechny reálné kořeny naší rovnice jsou na intervalu $(-9,\ 9)$, stačí se tedy omezit na tento interval a sestavit tabulku:

x	$f_0 = x^4 + 8x - 5$	$f_1 = 4x^3 + 8$	$f_2 = -6x + 5$	$f_3 = -1114$	$V(x)$
-9	+	-	+	-	3
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
-3	+	-	+	-	3
-2	-	-	+	-	2
-1	-	+	+	-	2
0	-	+	+	-	2
1	+	+	-	-	1
2	+	+	-	-	1
3	+	+	-	-	1
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
9	+	+	-	-	1

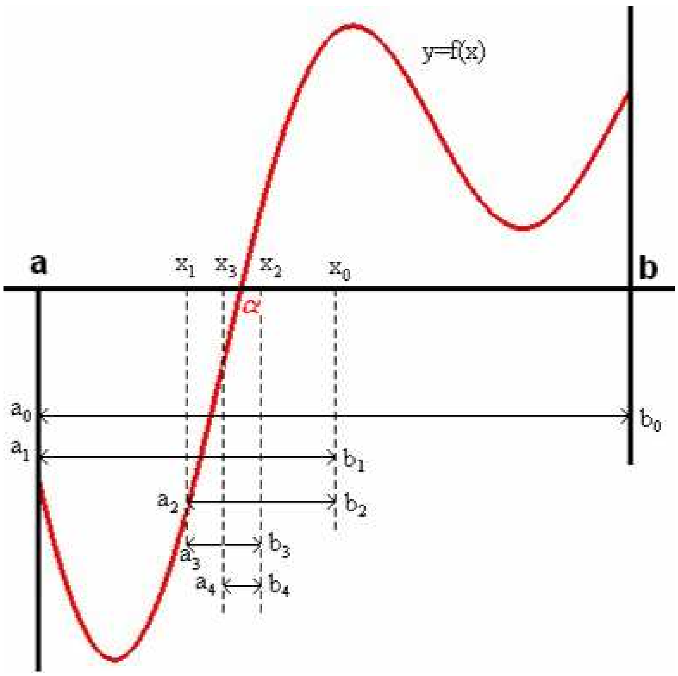
Z tohoto schématu je vidět, že naše rovnice má dva reálné kořeny, jeden v intervalu $(-3, -2)$ a druhý v intervalu $(0, 1)$.

Abychom zjistili souhrnný počet reálných kořenů, nebylo nutné počítat celou tabulku. Stačilo vypočítat $V(-9) = 3$ a $V(9) = 1$. Souhrnný počet reálných kořenů $V(-9) - V(9) = 2$.

4.6. METODA PŮLENÍ INTERVALU

Předpokládejme, že rovnice $f(x) = 0$ má právě jeden kořen v intervalu $\langle a, b\rangle$ a $f(a), f(b)$ mají opačná znaménka. Jeho polohu můžeme upřesnit rozpůlením intervalu. Poté zjistíme, ve kterém intervalu kořen leží. Po rozpůlení intervalu otestujeme funkční hodnotu uprostřed intervalu. Jestliže je její znaménko shodné se znaménkem funkční hodnoty $f(a)$, pak se bod a přesune do tohoto středu, v opačném případě se do středu posune bod b. Tento zmenšený interval, ve kterém se kořen nachází, můžeme opět rozpůlit. Postup opakujeme, dokud nedostaneme hledaný kořen s požadovanou přesností. Je-li funkční hodnota uprostřed intervalu rovna nule, další půlení neprovádíme, tento člen je kořenem rovnice.

Věta 4.6.1. *Mějme funkci $f(x)$, která je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť dále platí, že $f(a) \cdot f(b) < 0$. Sestrojme posloupnost intervalů $\langle a_r,\ b_r\rangle$ a posloupnost bodů x_r, $r = 0, 1, 2, \ldots$, tak že* $x_r = \dfrac{a_r + b_r}{2}$.



Obr. 6 Metoda půlení intervalů

Příklad: Nalezněte kladné reálné kořeny funkce $f(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$.

Počet znaménkových změn je jedna, počet kladných kořenů proto bude jeden. Dále víme, že všechny kořeny rovnice budou v intervalu $\langle -14, 14 \rangle$. Jelikož hledáme pouze kladné kořeny, omezíme se na interval $\langle 0,\ 14 \rangle$.

a	$x = \frac{a+b}{2}$	b	$f(a)$	$f(x)$	$f(b)$
0	7	14	-	144	+
0	3,5	7	-	-37,125	+
3,5	5,25	7	-	11,3281	+
3,5	4,375	5,25	-	-21,416	+
4,375	4,8125	5,25	-	-0,424	+
4,8125	5,03125	5,25	-	1,325	+
4,8125	4,921875	5,03125	-	-3,202	+
4,921875	4,9765625	5,03125	-	-0.977	+
4,9765625	5,00390625	5,03125	-	0,164	+
4,9765625	4,990234375	5,00390625	-	-0,4089	+
4,990234375	4,997071813	5,00390625	-	-0.122	+
4,997071813	5,000489032	5,00390625	-	0,0205	+
4,997071813	4,998780423	5,000489032	-	-0,0512	+
4,998780423	4,999634728	5,000489032	-	-0,15	+
4,999634728	5,00006188	5,000489032	-	0,0025	+
4,999634728	4,999848304	5,00006188	-	-0,006	+
4,999848304	4,999955092	5,00006188	-	0,00035	+
4,999955092	4,999981789	5,000008486	-	-0.00076	+
4,999981789	4,999995138	5,000008486	-	-0,000204	+
4,999995138	5,000001812	5,000008486	-	0,000076	+
4,999995138	4,999998475	5,000001812	-	-0,0000602	+
4,999998475	4,99999931	5,000000144	-	-0,000029	+
4,99999931	4,999999727	5,000000144	-	-0,000011	+
4,999999727	4,999999936	5,000000144	-	-0,0000027	+
4,999999936	5,00000004	5,000000144	-	0,00000168	+

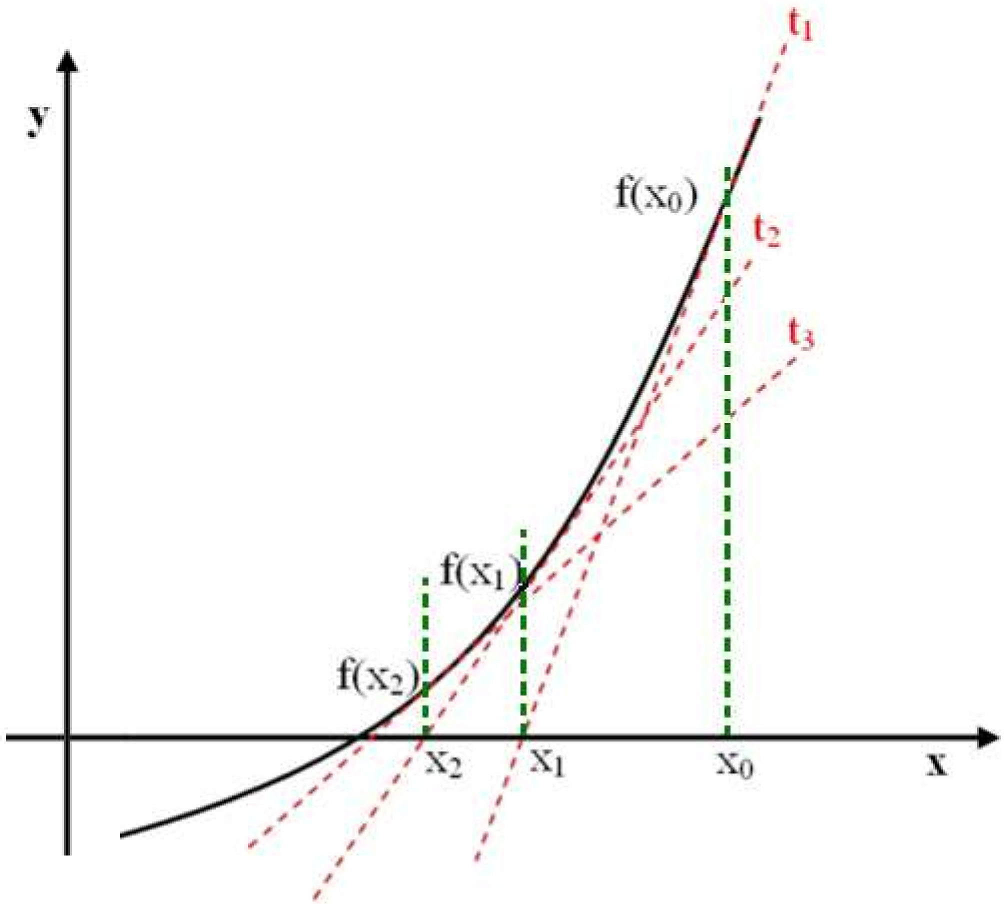
4,999999936	4,999999988	5,00000004	-	-0,0000005	+
4,999999988	5,000000014	5,00000004	-	0,00000058	+
4,999999988	5	5,00000004	-	0	+

Kořenem je tedy $x = 5$.

4.7. METODA TEČEN – NEWTONOVA METODA

Tato numerická metoda využívá k nalezení kořenů rovnici tečny. Řešení můžeme provést, pokud známe derivaci funkce a umíme vypočítat směrnici tečny v daném bodě. Zpravidla nalezneme kořen s velkou přesností a po několika málo krocích.

Princip nejlépe pochopíme za pomoci následujícího obrázku.



Obr. 7 Newtonova metoda tečen

Mějme zadanou nějakou funkci $f(x) = 0$. Graf této funkce je zobrazen na obrázku. Naším úkolem je nalézt kořen této rovnice, tedy najít takový bod na ose x, pro který je funkční hodnota rovna nule. Zvolíme si tedy nějaký bod, v našem případě bod x_0 ležící v blízkosti hledaného kořene. Tímto bodem $[x_0,\ f(x_0)]$ veďme tečnu ke grafu funkce f. Tečna protne osu x v bodě x_1. Opět veďme bodem $[x_1,\ f(x_1)]$ tečnu, která osu x protne v bodě x_2. Když budeme takto pokračovat dále, dostaneme body $x_3,\ x_4,\ x_5, \dots$, které se velmi rychle blíží k hledanému kořeni rovnice $f(x) = 0$.

Za předpokladu, že známe bod x_0 a funkce $f(x)$ je spojitá a monotónní na intervalu, ve kterém se nachází hledaný kořen, můžeme napsat vzorec pro výpočet hodnoty x_1.

Rovnice tečny:

$y = kx + q$, k je směrnice tečny, tedy $k = f'(x_0)$.

Bod dotyku:

$[x_0, f(x_0)]$.

Tyto hodnoty dosadíme a vyjádříme q:

$f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_0) + q, \qquad q = f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x_0).$

Nyní dosazením a úpravou dostaneme rovnici tečny v bodě x_0:

$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$

Pokud tečna protíná osu x v bodě x_1, je $y = 0$:

$-f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0).$

Vyjádřením x_1 získáme vzorec:

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$

Pro druhou aproximaci (v případě, že $f'(x_0) \neq 0$) bychom dostali:

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$

Obecně tedy platí vzorec:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n = 1, 2, 3, \dots$$

Příklad: Nalezněte kladné reálné kořeny funkce $f(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10 = 0$ na intervalu $\langle 4, 6 \rangle$.

Nejprve si zvolíme bod x_0. Tím bude krajní bod intervalu, $x_0 = 6$.

První derivace funkce $f(x)$ je: $f'(x) = 3x^2 - 4x - 13$.

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 6 - \frac{6^3 - 2 \cdot 6^2 - 13 \cdot 6 - 10}{3 \cdot 6^2 - 4 \cdot 6 - 13} = 6 - \frac{56}{71} = 5{,}211267.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 5{,}211267 - \frac{5{,}211267^3 - 2 \cdot 5{,}211267^2 - 13 \cdot 5{,}211267 - 10}{3 \cdot 5{,}211267^2 - 4 \cdot 5{,}211267 - 13}$$
$$= 5{,}211267 - 0{,}198688 = 5{,}012578.$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 5{,}012578 - \frac{5{,}012578^3 - 2 \cdot 5{,}012578^2 - 13 \cdot 5{,}012578 - 10}{3 \cdot 5{,}012578^2 - 4 \cdot 5{,}012578 - 13}$$
$$= 5{,}012578 - 0.012529 = 5{,}00004822.$$

Jelikož kořenem rovnice je bod $x = 5$, je tento výsledek velmi dobrý.

5. MATEMATICKÝ SOFTWARE MAPLE

Pro řešení numerických výpočtů můžeme využít řadu počítačových programů. Jedním z nich je také program Maple. Tento matematický software slouží ke zpracování různých matematických problémů. To provádí s pomocí jednoduchého matematického programovacího jazyka.

Tento program se soustředí především na rovnice a jejich řešení. Výsledek pak zobrazí v podobě vzorce, výsledné hodnoty, nebo grafu.

Program Maple využívá klasické prvky systému Microsoft Windows, například okna, urychlovací a jiná tlačítka, menu… Uživatel se proto v programu dobře zorientuje a po prvním seznámení se s ním naučí i docela rychle pracovat. Pro každý úkon existuje v programu příkaz. Aby se vykonaná práce zobrazila, musí být zadání zakončeno středníkem, nebo dvojtečkou. Také můžeme využít nápovědy. V té jsou jednotlivé operace podrobně a přehledně popsány a pro lepší pochopení jsou ilustrovány na konkrétních příkladech. Součástí nápovědy je okamžitá nápověda, stačí na příkazovou řádku napsat otazník a bez mezery za ním zadat klíčové slovo, pokud program toto slovo nezná, nabídne seznam slov podobných. Za každým příkazem umožňuje program zapsat komentář. Stačí na konec příkazové řádky zadat znak #.

5.1. ŘEŠENÍ ROVNIC

Abychom nemuseli opakovaně zadávat celý polynom, označíme ho pro zjednodušení jako:

> $pol := x^3 - 15 \cdot x^2 + 66 \cdot x - 80$

$$x^3 - 15\,x^2 + 66\,x - 80$$

Prvním z příkazů pro řešení rovnic je *isolate*. Ten vyjádří proměnnou z rovnice. Takto však dostaneme jen první kořen, což není tak výhodné. Prvním zadaným parametrem je rovnice, druhým parametrem je proměnná, kterou chceme ze zadané rovnice vypočítat.

> $isolate(pol = 0, x);$

$$x = 2$$

V případě, že má rovnice více kořenů, je tedy tento příkaz slabý. Výhodnější je příkaz *solve*, který hledá všechny kořeny, dále umožňuje řešit nerovnice a také soustavy rovnic o více neznámých. Parametry zadáváme stejné jako u příkazu *isolate*.

> $solve(pol = 0, x)$

$$5, 2, 8$$

Dalším, pro nás užitečným příkazem, který využijeme, je příkaz *realroot*. Vyjádří intervaly, ve kterých se nachází reálné kořeny polynomu. Každý interval je zobrazen jako dvě racionální čísla, výsledek v podobě $[a, a]$ představuje jediný bod a, výsledek v podobě $[a, b], a < b$, představuje otevřený interval, ve kterém se kořen nachází. Příkaz nepočítá s příslušnou násobností. Algoritmus *realroot* využívá Descartova pravidla. První parametr je polynom s celočíselnými koeficienty, druhý parametr je maximální velikost izolačního intervalu, tento parametr je volitelný.

> $realroot\left(pol, \frac{1}{1000}\right);$

$$[[8, 8], [2, 2], [5, 5]]$$

V případě jiného polynomu:

> $realroot\left(2\cdot x^3 + 8\cdot x^2 + 3\cdot x - 2, \frac{1}{1000}\right);$

$$\left[\left[\frac{345}{1024}, \frac{173}{512}\right], \left[-\frac{871}{1024}, -\frac{435}{512}\right], \left[-\frac{893}{256}, -\frac{3571}{1024}\right]\right]$$

Pro hledání kořenů můžeme využít také příkaz *roots*. Program vypočítá přesné hodnoty kořenů i s jejich příslušnou násobností. Kořeny jsou zobrazeny jako seznam dvojic, $[a, b]$, a je hodnota kořene, b udává kolika násobný je kořen. Prvním parametrem je polynom a druhým parametrem je proměnná polynomu. V případě, že v parametru není přesně zadáno, může se nám výsledek zobrazit jako prázdný seznam *( )*. Například, pokud jsou všechny koeficienty racionální, pak najde racionální kořeny. Jestliže tyto kořeny nemá, objeví se tento výsledek.

> $roots(pol, x);$

$$[[2, 1], [5, 1], [8, 1]]$$

> $roots\left(\left(x^3+x^2-16\cdot x+20\right), x\right);$

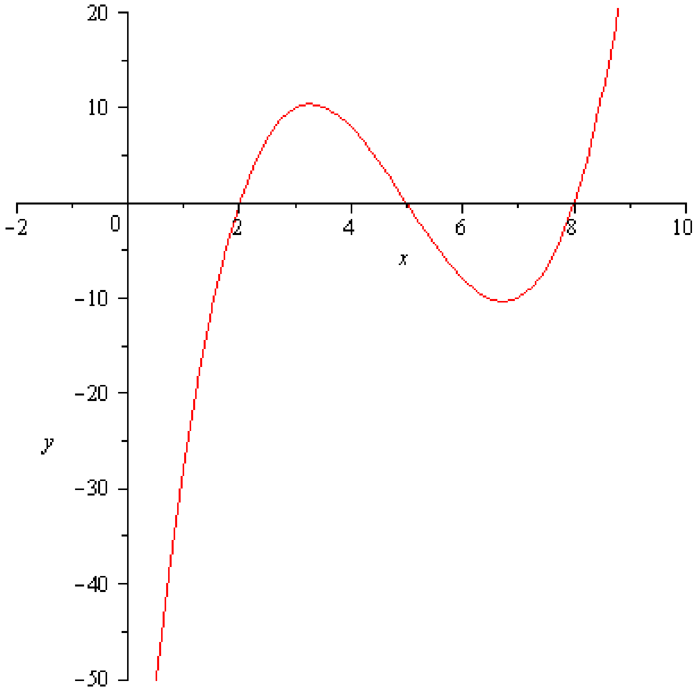
$$[[2, 2], [-5, 1]]$$

> $roots\left(\left(x^2+2\right), x\right);$

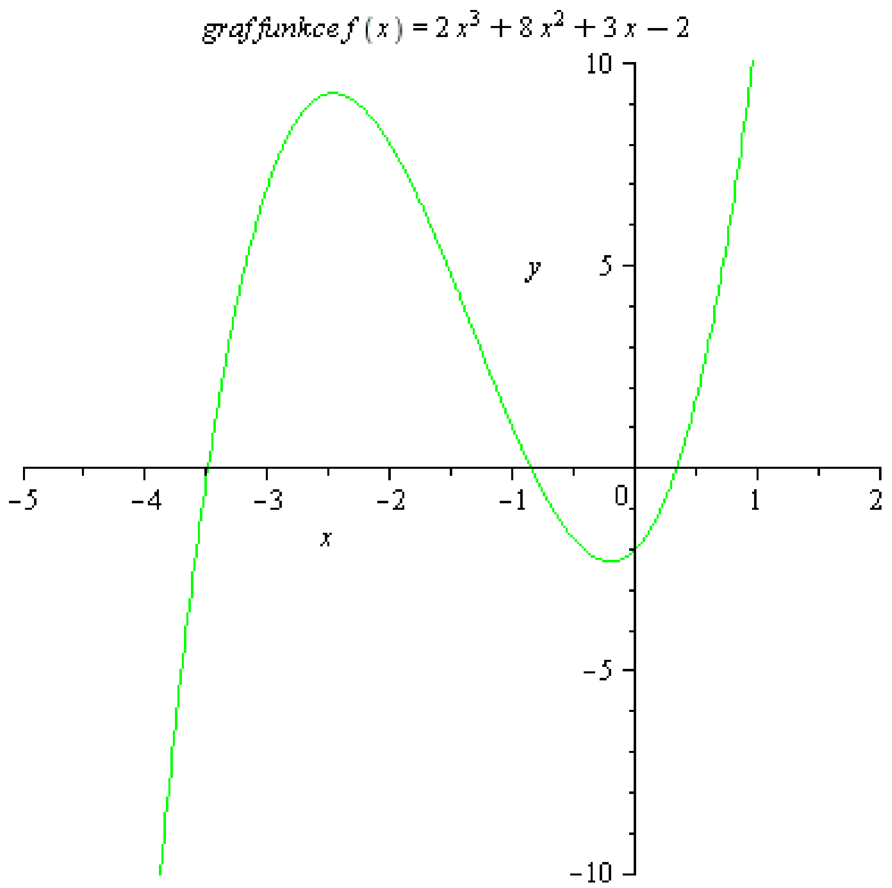
$$[\,]$$

Nedílnou součástí programu je vykreslení grafů. K tomu slouží příkaz *plot*, prvním povinným parametrem je funkční předpis, druhým též povinným údajem je rozsah osy *x*, dále můžeme zadat rozsah osy *y* a upřesnit vzhled grafu za pomoci dalších textových parametrů. To provádíme pomocí těchto příkazů: *style=s=point/line* – určuje, jak bude křivka zobrazena, zda v bodech nebo jako spojitá čára, *color=c* určuje barvu křivky, *thickness=n* – udává sílu křivky, *n* může být *0, 1, 2, 3*, *linestyle=n* – jedná se o spojitost čáry křivky, *0, 1 a od 6 výše* se zobrazí spojitá čára, *2, 3, 4, 5* zobrazí čáru čárkovaně o různých délkách, *title=´t´*- tímto příkazem zadáme název grafu, volba *numpoints* určuje, v kolika bodech se budou kreslit funkční hodnoty, slouží k tomu, aby křivka nebyla kostrbatá.

> $plot(pol, x=-2..10, y=-50..20);$



> $plot\left(2\cdot x^3+8\cdot x^2+3\cdot x-2, x=-5..2, y=-10..10, color = green, title='graf\ funkce\ f(x) = 2\cdot x^3+8\cdot x^2+3\cdot x - 2', numpoints=500\right);$



Některé další příkazy, které se mohou hodit při hledání kořenů:

- *diff* – jedná se o derivaci výrazu, prvním zadávaným parametrem je funkce, druhým je proměnná podle které se má derivovat

  > $diff\left(2\cdot x^5 + 3\cdot x^3 - 2\cdot x + 4, x\right);$

  $$10\,x^4 + 9\,x^2 - 2$$

- *evalb* – podá nám informaci, zda je výraz pravdivý

  > $evalb(5 + 2 = 6);$

  $$false$$

  > $evalb(5 + 2 = 7);$

  $$true$$

- *evalf* – vyčíslí výraz
- *is* – pomocí této funkce se dozvíme, zda se bod nachází v zadaném intervalu, prvním parametrem, který zapisujeme, je bod a druhým se interval zapsaný pomocí *RealRange*

  > $is(4, RealRange(0, 4));$

$true$

> $is(4.3, RealRange(0, 4));$

$false$

- *maximize* – nalezne hodnotu maxima funkce, prvním parametrem je rovnice, druhým je proměnná, dále můžeme určit interval, na kterém chceme maximum nalézt, přidáním parametru *location* dostaneme informaci o *x-ové* souřadnici maxima
- *minimize* – nalezne hodnotu minima funkce, parametry jsou stejné jako u příkazu *maximize*
- *RealRange* – jedná se o označení pro reálný interval
- *restart* – vymaže vnitřní paměť
- *simpfly* – zjednoduší výraz
- *sqrt* – odmocnina
- *subs* – tento příkaz využijeme při zjišťování funkčních hodnot, tato funkce vypočítá hodnotu proměnné v rovnici, nejprve zadáme hodnotu, poté výraz do kterého chceme dosadit

  > $subs\left(x=2,\ 7\cdot x^2-4\cdot x+2\right);$

  $$22$$

5.2. STURMŮV ŘETĚZEC

Abychom získali Sturmovu posloupnost polynomu, zadáme v programu příkaz $sturmseq(p,x)$ a dále $Sturm\,(s,x,a,b)$, kde p je zadaný polynom, x je proměnná polynomu, a,b jsou reálná čísla, kde $a\leq b$, jedná se o interval, ve kterém chceme zjistit počet kořenů, může být $(-\infty,\infty)$, tento interval nezahrnuje dolní koncový bod a a zahrnuje horní koncový bod $b, b\neq\infty$, s je Sturmova posloupnost pro polynom.

Příklad:

Určete Sturmův řetězec polynomu $f(x)=(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-6)$.

Ze zadání je patrné, že polynom má celkem tři kořeny a to $x_1=2, x_2=4, x_3=6$. Nyní provedeme výpočet v programu Maple.

> $s := sturmseq(expand((x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-6)), x);$

$$\left[x^3 - 12\,x^2 + 44\,x - 48,\ x^2 - 8\,x + \frac{44}{3},\ x - 4,\ 1\right]$$

> $sturm(s, x, -\infty, \infty);$

$$3$$

V intervalu $(-\infty, \infty)$ *má rovnice tři kořeny.*

> $sturm(s, x, 2, 4);$

$$1$$

V intervalu $(2, 4)$ *má rovnice jeden kořen,* $a = 2$ *je sice kořenem rovnice, ale jak bylo zmíněno, program nezahrnuje dolní koncový bod, naopak zahrnuje hodní koncový bod, kterým je* $b = 4$.

Další možnosti:

> $sturm(s, x, 5, 7)$

$$1$$

> $sturm(s, x, 2, 6)$

$$2$$

5.3. BISEKCE – PŮLENÍ INTERVALŮ

Pro zjištění intervalu s využitím metody půlení intervalu zadáme v programu příkaz $bisection\ (f, x = [a, b])$. Prvním zadaným parametrem je funkce, x je nezávislá proměnná funkce a hodnoty a, b jsou čísla v blízkosti kořene, dále můžeme volit další upřesňující parametry.

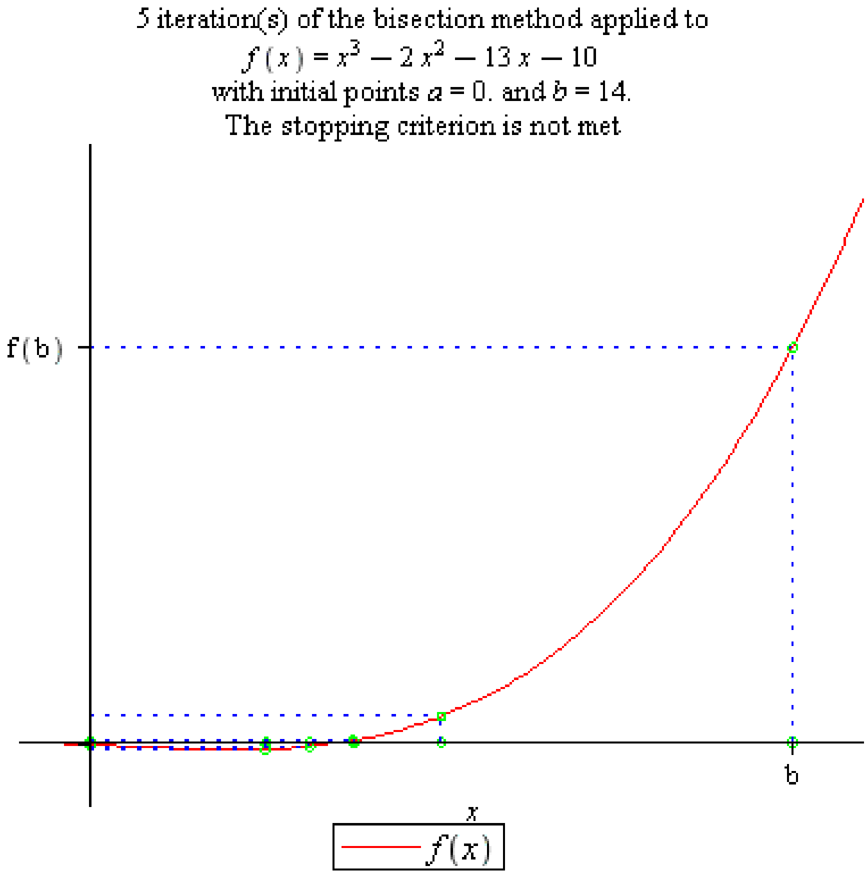
> $with(Student[NumericalAnalysis]):$
$f := x^3 - 2\cdot x^2 - 13\cdot x - 10:$
$Bisection\left(f, x = [0, 14], tolerance = 10^{-2}\right);$

$$5.003906250$$

> $Bisection\left(f, x = [0, 14], tolerance = 10^{-8}, output = sequence\right);$

[0., 14.], [0., 7.000000000], [3.500000000, 7.000000000], [3.500000000, 5.250000000], [4.375000000, 5.250000000], [4.812500000, 5.250000000], [4.812500000, 5.031250000], [4.921875000, 5.031250000], [4.976562500, 5.031250000], [4.976562500, 5.003906250], [4.990234375, 5.003906250]

> $Bisection\left(f, x = [0, 14], tolerance = 10^{-8}, output = plot\right);$



Pro případ, že zúžíme interval:

> $Bisection(f, x = [4, 6]);$

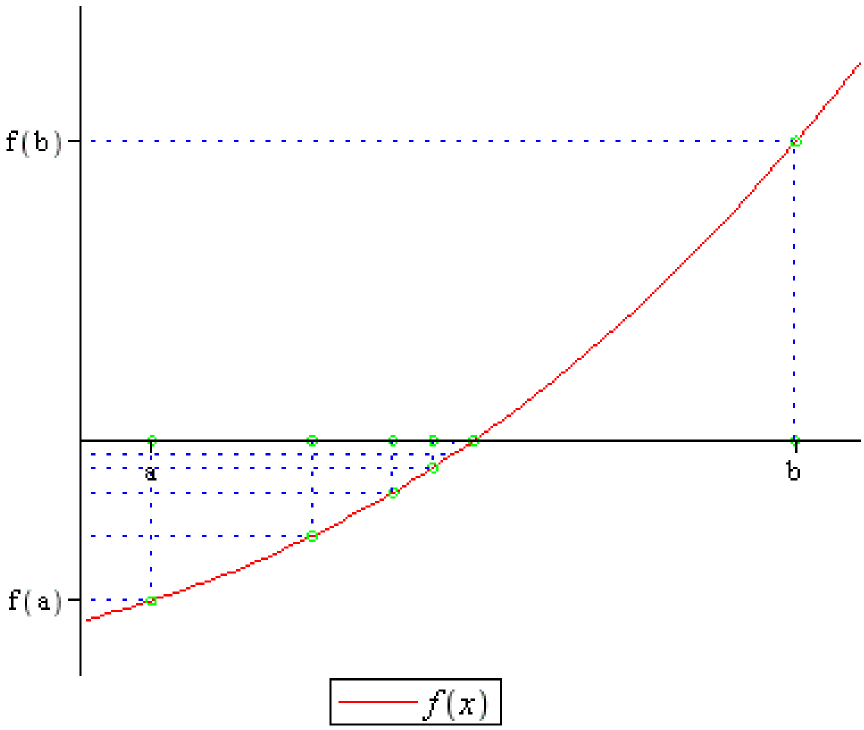
4.999511719

> $Bisection\left(f, x=[4, 6], tolerance=10^{-10}, output = sequence\right);$

$$[4., 6.], [4., 5.000000000], [4.500000000, 5.000000000], [4.750000000, 5.000000000], [4.875000000, 5.000000000], [4.937500000, 5.000000000], [4.968750000, 5.000000000], [4.984375000, 5.000000000], [4.992187500, 5.000000000], [4.996093750, 5.000000000], [4.998046875, 5.000000000]$$

> $Bisection\left(f, x=[4, 6], tolerance=10^{-6}, output=plot\right);$

5 iteration(s) of the bisection method applied to
$f(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$
with initial points $a = 4.$ and $b = 6.$
The stopping criterion is not met



5.4. NEWTONOVA METODA

Kořeny algebraické rovnice nám program číselně přiblíží za pomoci balíčku *Student[NumericalAnalysis]* po zadání příkazu *Newton(f, x, volitelné parametry).* Prvním parametrem je funkce, druhým parametrem je první přibližný kořen, další parametry jsou volitelné, s jejich pomocí získáme další informace.

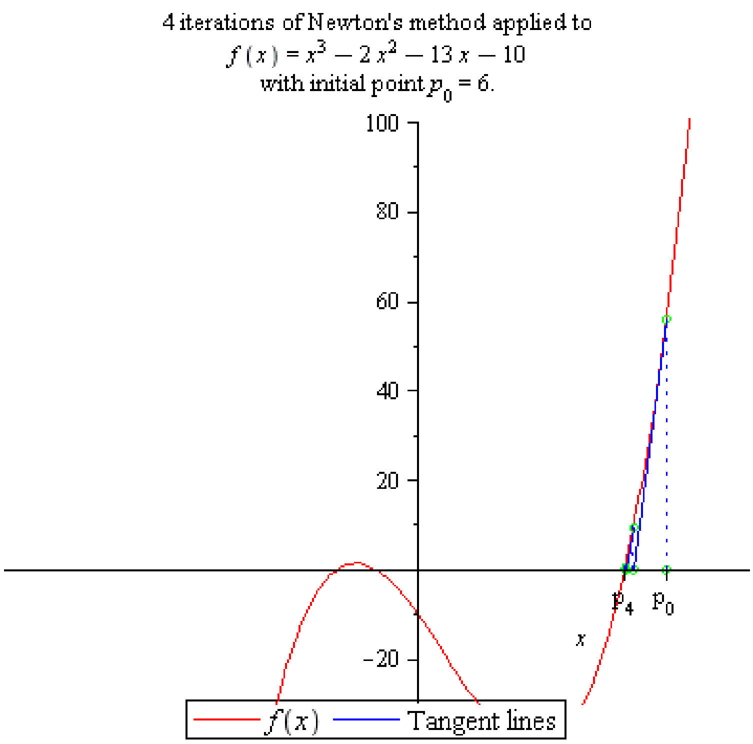
> $with\,(Student[NumericalAnalysis]) :$
$f := x^3 - 2\cdot x^2 - 13\cdot x - 10 :$
$Newton(f, x = 6);$

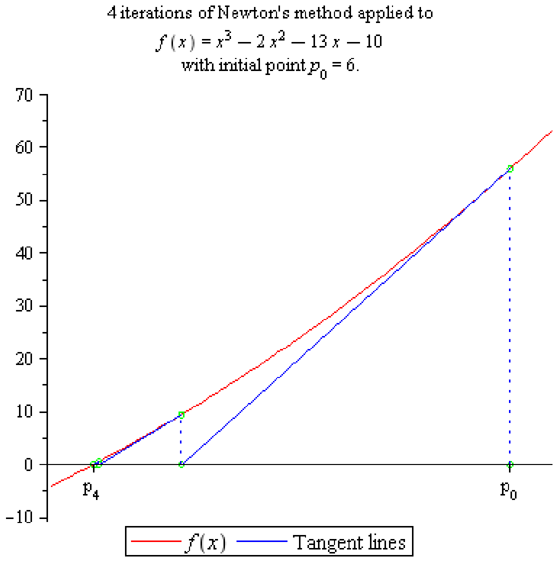
$$5.000000002$$

> $Newton(f, x = 6, output = sequence);$

$$6.,\ 5.211267606,\ 5.012579067,\ 5.000048692,\ 5.000000002$$

> $Newton(f, x = 6, view = [-10..8, -30..100], output = plot);$



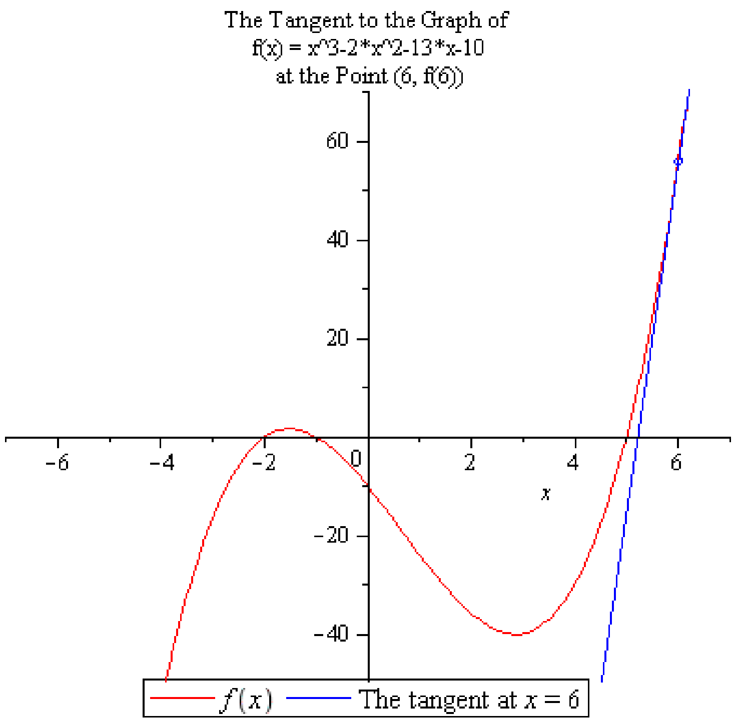


Dále můžeme využít postupného vykreslování tečen za pomoci studentského balíčku, zde však musíme počítat nové body

> $with(Student[Calculus1])$:
$f := x^3 - 2\cdot x^2 - 13\cdot x - 10$:
$tecna := Tangent(f, x = 6)$;

$$71\,x - 370$$

> $Tangent(f, 6, view = [-7..7, -50..70], output = plot)$;



> $fsolve(tecna = 0, x);$

$$5.211267606$$

ZÁVĚR

Ve své práci jsem se snažila popsat některé postupy sloužící k nalezení kořenů algebraických rovnic. Zmiňuji řešitelnost rovnic nižších stupňů pomocí vzorců, ale také ukazuji některé přibližné metody, které umožňují vypočítat kořeny rovnic vyšších stupňů s dostatečnou přesností. Těchto metod je několik, já však ve své práci zmiňuji jen některé.

Při řešení hraje důležitou roli vykreslení grafu. Potom stačí nelézt průsečíky s osou x, ty jsou totiž kořeny algebraické rovnice. Aby tyto hodnoty byly co nejpřesnější, je nutné narýsovat spolehlivý graf. Čím více sestrojíme bodů, především v oblasti intervalu, kde leží kořeny, tím bude graf funkce přesnější. To je však obtížné a zdlouhavé. Rychlým, přehledným a výhodným postupem je v tomto případě využití Hornerova schématu. Při výpočtech se dále využívá odhadu polohy reálných kořenů na číselné ose, například odhad horní hranice reálných kořenů. Existují však přesnější metody vedoucí k určení polohy kořenů. Velice přínosné je Descartovo pravidlo o znaménkových změnách, nebo řešení pomocí Sturmova řetězce polynomů. Velmi pomalým způsobem je potom metoda půlení intervalů. Naopak pomocí metody tečen dojdeme k výsledku po několika málo krocích.

Dnes je možné dostat se k výsledkům během chvilky pomocí počítačových programů. Já jsem pracovala se softwarem Maple a uvedla jsem některé možnosti řešení v tomto programu.

Řešení algebraických rovnic sahá daleko do minulosti. Jedná se o rozsáhlou kapitolu matematiky. Tímto problémem se zabývalo mnoho významných matematiků a donedávna se numerické metody vedoucí k nalezení kořenů algebraických rovnic vyučovaly na školách. Dnes se však všechny tyto postupy skryly v počítačových programech. Cílem mé práce bylo některé metody popsat, což jsem splnila. Získala jsem nové informace a jsem ráda, že jsem si díky zpracování této práce mohla rozšířit své znalosti z této oblasti.

RESUMÉ

The theme of this work is: „Numerical solution of algebraic equations“. It is a very extensit charter of mathematics and the solution of equations is one of it´s oldest problems. Several distinguished mathematicians centributed to progress in this field of study.

The main objektive was to describe some of the methods leading to finding the equation rous. One of the approximate solutions is the root separation. J. Sturm and R. Descartes, who dealt with this method in particular, used the sign transition counts for the interval determinativ. Another method is the so-called interval halving. More frequently used and much faster method than the previous one is Newton´s method, which is using the tangent equation for finding the root. Today these techniques are replaced by komputer calculations. Therefore some of the Maple program tools in this work.

Tématem této práce je: „Numerické řešení algebraických rovnic“. Jedná se o velice rozsáhlou kapitolu matematiky. Řešení rovnic je jedním z jejich nejstarších problémů. K pokroku v této oblasti přispělo i několik významných matematiků.

Hlavním cílem bylo popsat některé metody vedoucí k nalezení kořenů rovnice. Jedním z přibližných řešení je separace kořenů. Tou se zabývali především J. Sturm a R. Descartes, kteří k nalezení intervalu využívali počet znaménkových změn. Další metodou je tzv. půlení intervalu. Častěji užívanou a mnohem rychlejší ve srovnání s předchozí metodou je Newtonova metoda. K nalezení kořene využívá rovnici tečny. V dnešní době jsou tyto postupy nahrazeny počítačovými výpočty. V práci jsou proto zmíněny některé nástroje programu Maple.

POUŽITÁ LITERATURA A PRAMENY

(1) DRÁBEK, Jaroslav; HORA, Jaroslav. Algebra Polynomy a rovnice. 1. vydání. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2001. 125 s. 3. obr. ISBN 80-7082-787-4

(2) ŠISLER, Miroslav; ANDRYS, Josef. O řešení algebraických rovnic. 1. vydání. MF, Praha, 1966. 128 s.

(3) SCHWARZ, Štefan. Základy náuky o riešení rovníc. 2. vydání. SAV, Bratislava, 1968. 456 s. 61. obr.

(4) KOŘÍNEK, Vladimír. Základy algebry. 1. vydání. Nakladatelství Československé akademie věd, Praha, 1953. 494 s. 10. obr.

(5) MICHALÍK, Petr; ROUB, Zdeněk; VRBÍK, Václav. Zpracování diplomové a bakalářské práce na počítači. 2. vydání. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2007. 68 s. ISBN 80-7043-458-9

(6) www.theses.cz/id/1waeou/downloadPraceContent_adipIdno_1394

(7) www.cs.wikipedia.org/wiki/

(8) www.user.mendelu.cz/marik/mat-web/mat-webse22.html

(9) HOROVÁ, Ivana. Numerické metody. 1. vydání. Brno: Masarykova univerzita, 1999. 232 s. ISBN 80-210-2202-7

(10) VITÁSEK, Emil. Numerické metody. 1. vydání. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1987. 512 s.

SEZNAM OBRÁZKŮ

SEZNAM PŘÍLOH

- CD s textem bakalářské práce