ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta elektrotechnická
Katedra aplikované elektroniky a telekomunikací

Bakalářská práce

Porovnání analytického a numerického řešení telegrafních rovnic

Autor práce: Stanislav Bečka
Vedoucí práce: Ing. Václav Kotlan, Ph.D.

Plzeň 2013

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta elektrotechnická
Akademický rok: **2012/2013**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Stanislav BEČKA**
Osobní číslo:	**E10B0282P**
Studijní program:	**B2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor:	**Elektronika a telekomunikace**
Název tématu:	**Porovnání analytického a numerického řešení telegrafních rovnic**
Zadávající katedra:	**Katedra aplikované elektroniky a telekomunikací**

Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

1. Proveďte analytický výpočet při harmonickém ustáleném stavu.
2. Zvolte vhodnou numerickou metodu pro řešení telegrafních rovnic a stanovte rozložení napětí a proudu.
3. Pro vybrané praktické úlohy proveďte výpočet pomocí analytického a numerického řešení.
4. Porovnejte dosažené výsledky.

Rozsah grafických prací: **podle doporučení vedoucího**

Rozsah pracovní zprávy: **20 - 30 stran**

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

Student si vhodnou literaturu vyhledá v dostupných pramenech podle doporučení vedoucího práce.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Václav Kotlan, Ph.D.**
Katedra teoretické elektrotechniky

Konzultant bakalářské práce: **Ing. Václav Kotlan, Ph.D.**
Katedra teoretické elektrotechniky

Datum zadání bakalářské práce: **15. října 2012**

Termín odevzdání bakalářské práce: **7. června 2013**

L.S.

Doc. Ing. Jiří Hammerbauer, Ph.D.
děkan

Doc. Dr. Ing. Vjačeslav Georgiev
vedoucí katedry

V Plzni dne 15. října 2012

Abstrakt

Tato bakalářská práce pojednává o porovnání analytického a numerického řešení telegrafních rovnic a možnostech modelování některých nestandardních jevů na vedení. Pro numerické řešení byla zvolena metoda konečných diferencí založená na Wendroffově diferenční aproximaci. Jako příklady byla vybrána trakční vedení a trojfázové vedení s zemním lanem na stožárech Soudek a Donau. V případě trakčního vedení jsou řešeny dva příklady. Oba tyto případy jsou řešeny analyticky a numericky a následně jsou tyto výsledky porovnávány. Dále jsou zde uvedeny příklady trakčního vedení napájeného zdrojem napětí o vyšší frekvenci pro simulaci odrazů. Poslední část se týká příkladů trojfázového vedení včetně simulace úderu blesku do zemního lana.

Klíčová slova

přenosové vedení, telegrafní rovnice, harmonický ustálený stav, rozprostřené parametry, Wendroffova diferenční aproximace, metoda konečných diferencí

Abstract

Bečka, Stanislav. *Analytical and Numerical Comparison of the Telegraph Equation Solution* [*Porovnání analytického a numerického řešení telegrafních rovnic*]. Pilsen, 2013. Bachelor thesis (in Czech). University of West Bohemia. Faculty of Electrical Engineering. Department of Applied Electronics and Telecommunications. Supervisor: Václav Kotlan

This bachelor thesis deals with analytical and numerical comparison of the telegraph equation solution and with some non-standard phenomena on transmission line modeling. For numerical solution, the finite difference method based on Wendroff's diffrerential aproximation was chosen. Traction line and three-phase transmission line with earth wire on tower Soudek and Donau were chosen as examples. In case of traction line two examples are solved. Both examples are solved analytically and numerically and then the results are compared. Next, there are provided the examples of traction line supplied by the voltage source with higher frequency for reflections simulation are given. Last section is concerned with three-phase transmission line examples including the lightning strike.

Keywords

transmission line, telegraph equation, harmonic steady state, spread parameters, Wendroff difference approximation, finite difference method

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě elektrotechnické Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem svou závěrečnou práci vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce. Jako autor uvedené bakalářské práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této závěrečné práce jsem neporušil autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhl nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a jsem si plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení § 270 trestního zákona č. 40/2009 Sb.

Také prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této bakalářské práce, je legální.

V Plzni dne 7. června 2013

Stanislav Bečka

....

Podpis

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Seznam symbolů a zkratek

λ .... Vlnová délka $[m]$.
v .... Rychlost šíření $[m/s]$.
R .... Měrný odpor vedení $[\Omega/m]$.
L .... Měrná indukčnost vedení $[H/m]$.
C .... Měrná kapacita vedení $[F/m]$.
G .... Měrný svod vedení $[S/m]$.
$\boldsymbol{Z}_0$ .... Vlnová impedance$[\Omega]$.
$\boldsymbol{\gamma}$ .... Konstanta šíření.
α .... Měrný útlum $[Np/m]$.
β .... Měrný fázový posuv $[rad/m]$.
$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ .... Integrační konstanty.
$\boldsymbol{Z}_\mathrm{k}$ .... Impedance zátěže připojené na výstup vedení $[\Omega]$.
$\boldsymbol{Z}_\mathrm{p}$ .... Impedance zátěže připojené na vstup vedení $[\Omega]$.
$\boldsymbol{U}_0$ .... Napětí zdroje - fázor efektivní hodnoty $[V]$.
$\boldsymbol{U}_\mathrm{p}$ .... Napětí na začátku vedení- fázor efektivní hodnoty $[V]$.
$\boldsymbol{U}_\mathrm{k}$ .... Napětí na konci vedení- fázor efektivní hodnoty $[V]$.
$\boldsymbol{I}_\mathrm{p}$ .... Proud na začátku vedení- fázor efektivní hodnoty $[A]$.
$\boldsymbol{I}_\mathrm{k}$ .... Proud na konci vedení- fázor efektivní hodnoty $[A]$.
FDTD .... Finite-Diference Time-Domain.
FDFD .... Finite-Diference Frequency-Domain.
Δx .... Prostorový krok $[m]$.
Δt .... Časový krok $[s]$.
l .... Délka vedení $[m]$.
R .... Poloměr vodiče $[m]$.
h .... Výška vodiče nad zemí $[m]$.
S .... Průřez vodiče $\left[m^2\right]$.
γ .... Konduktivita $[S/m]$.
μ_0 .... Permeabilita vakua $\left(4.\pi.10^{-7}\left[\frac{H}{m}\right]\right)$.
ε_0 .... Permitivita vakua $\left(8,85.10^{-12}\left[\frac{F}{m}\right]\right)$.
Δ .... Absolutní chyba metody výpočtu.

δ .... Relativní chyba metody výpočtu.

1

Úvod

Problematika teorie vedení se v elektrotechnice dotýká mnoha oblastí. Nejedná se jen o problematiku rozvodu elektrické energie v elektroenergetice či vedení ve sdělovací technice, ale poznatky užívané při návrhu elektrické rozvodné sítě lze velmi často uplatnit i při návrhu vysokofrekvenčních spojů na desce plošného spoje. Tato disciplína nepochybně patří mezi náročnější oblasti elektrotechniky a její problematikou se zaobírá teorie elektromagnetického pole.

Každé vedení je charakterizováno svými primárními a sekundárními parametry. Mezi primární parametry vedení patří měrný odpor R, měrná indukčnost L, měrná kapacita C a měrný svod G. Tyto parametry jsou vztaženy na jednotku délky, například v energetice se vztahují na jeden kilometr. Sekundární parametry jsou vlnová impedance vedení a konstanta šíření vedením. Tyto hodnoty jsou obecně komplexní čísla a závisí na frekvenci přenášených signálů.

Vztahy mezi napětím na vedení a proudem vedením popisují telegrafní rovnice. Tyto rovnice musí být při výpočtech či simulacích doplněny o počáteční a okrajové podmínky. V harmonickém ustáleném stavu je řešení těchto rovnic snadné. Napětí a proudy podél vedení se mění s časem podle harmonické funkce a k řešení těchto rovnic lze využít symbolicko-komplexní metodu, tedy vyjádření těchto veličin pomocí fázorů. V obecném případě se jedná o soustavu parciálních diferenciálních rovnic, jejichž analytické řešení je velmi komplikované a složité. Přechodné děje a jiné nestandardní jevy na vedení je tedy nutné řešit numericky.

Numerické řešení ovšem s sebou přináší problémy s konvergencí k řešení skutečnému. Dnes existuje řada numerických metod, které v tomto ohledu dosahují velmi dobrých výsledků. Mezi nejpoužívanější metody patří metoda konečných diferencí a metoda konečných prvků. Výhodou metody konečných diferencí je její jednoduchost a snadná programovatelnost. Metoda konečných prvků je mnohem složitější a více náročná na naprogramování.

Metodu konečných diferencí lze použít v časové (FDTD – Finite-Diference Time-Domain) a ve frekvenční oblasti (FDFD – Finite-Diference Frequency-Domain). Výstupem metody konečných diferencí v časové oblasti je 3D graf, který zobrazuje průběhy napětí a proudu v závislosti na čase a geometrické souřadnici. Simulace za použití této metody umožňuje predikovat různé nestandardní jevy na vedení a přesně určit, v jakém místě a v jakém čase k těmto jevům dojde.

2

Elektrické obvody s rozprostřenými parametry

2.1 Obvody s rozprostřenými parametry

Obvody s rozprostřenými parametry jsou obvody, jimiž lze modelovat elektrické soustavy, u kterých nelze s dostatečnou přesností oddělit elektrickou a magnetickou energii a soustředit je do prostorově malých částí obvodu. U těchto soustav se projevuje konečná rychlost šíření elektromagnetického pole. Napětí a proudy v jednotlivých částech jsou funkcí času a geometrických souřadnic. O tom, zda lze určitou soustavu modelovat obvodem se soustřednými či rozprostřenými parametry, rozhodují geometrické rozměry, rychlost změn elektromagnetického pole (jestliže se mění harmonicky, tak jeho kmitočet) a rychlost šíření vln obvodem. Vlnová délka λ je při harmonicky proměnném elektromagnetickém poli definována jako:

$$\lambda = \frac{v}{f} \tag{2.1}$$

Jsou- li geometrické rozměry soustavy zanedbatelné v porovnání s délkou vlny, lze soustavu modelovat obvodem se soustřednými parametry. V opačném případě je nutné soustavu modelovat obvodem s rozprostřenými parametry [2].

Pro síťovou frekvenci $f = 50$ Hz vychází vlnová délka $\lambda = 6000$ km. V této práci je jedním z ilustrativních příkladů v kapitole 5.1 trakční vedení délky 2 km, které by sice nemuselo nutně být modelováno obvodem s rozprostřenými parametry, ale pro možnost modelovat poruchy, nehomogenity a nelineární parametry je tak učiněno.

2.2 Telegrafní rovnice

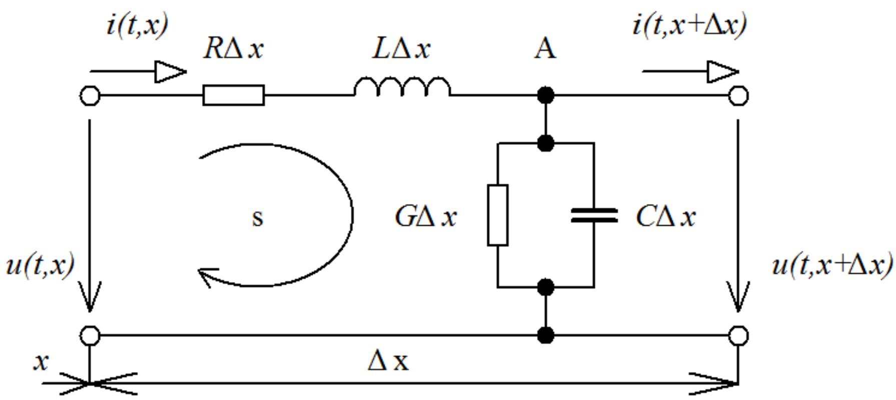
2.2.1 Odvození pro jednofázové vedení

Jednofázové vedení, tvořené dvojicí vodičů, je charakterizováno čtyřmi parametry: odporem R, indukčností L, kapacitou C a svodem G mezi oběma vodiči. Tyto parametry se nazývají primární parametry vedení a jsou vztaženy na jednotku délky, obvykle na 1 km. Jsou-li tyto parametry konstantní pro celé vedení, nazývá se vedení homogenní.

Pro odvození telegrafních rovnic je vedení nahrazeno kaskádou elementárních dvojbranů, tvořených primárními parametry: odporem R, indukčností L v podélné větvi a kapacitou C, svodem G v příčné větvi. Pro stejné nezávislé proměnné vstupních a výstupních veličin (čas t a vzdálenost x) daného elementárního dvojbranu je nutné výstupní veličiny rozvinout v Taylorovu řadu. Po zanedbání členů obsahujících 2. a vyšší derivace jsou výstupní veličiny charakterizovány následujícími vztahy:

$$u(t, x + \Delta x) \doteq u(t, x) + \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \cdot \Delta x \tag{2.2}$$

$$i(t, x + \Delta x) \doteq i(t, x) + \frac{\partial i(t, x)}{\partial x} \cdot \Delta x \tag{2.3}$$



Obr. 2.1: Elementární dvojbran

Aplikací Kirchhoffových zákonů pro smyčku s a uzel A lze odvodit následující rovnice:

$$-u(t, x) + R \cdot \Delta x \cdot i(t, x) + L \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial i(t, x)}{\partial t} + u(t, x) + \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \cdot \Delta x = 0 \tag{2.4}$$

$$-i(t, x) + G \cdot \Delta x \cdot u(t, x) + C \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + i(t, x) + \frac{\partial i(t, x)}{\partial x} \cdot \Delta x = 0 \tag{2.5}$$

Po jednoduché úpravě lze tyto rovnice upravit do tvaru telegrafních rovnic:

$$-\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = R \cdot i(t, x) + L \cdot \frac{\partial i(t, x)}{\partial t} \tag{2.6}$$

$$-\frac{\partial i(t, x)}{\partial x} = G \cdot u(t, x) + C \cdot \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \tag{2.7}$$

Eliminací proudu, resp. napětí se odvodí následující vlnové rovnice:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R \cdot G \cdot u \; + (L \cdot G + R \cdot C) \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{2.8}$$

$$-\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} + R \cdot G \cdot i + (L \cdot G + R \cdot C) \cdot \frac{\partial i}{\partial t} + L \cdot C \cdot \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0 \tag{2.9}$$

Z matematického hlediska se jedná o lineární homogenní parciální diferenciální rovnice 2.řádu, hyperbolického typu.

2.2.2 Analytické řešení v harmonickém ustáleném stavu

V harmonickém ustáleném stavu se napětí a proud v kterémkoliv místě vedení mění s časem podle harmonické funkce. Napětí a proud lze vyjádřit pomocí fázorů a telegrafní rovnice (2.6) a (2.7) lze přepsat do tvaru [4]:

$$-\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{U}(x)}{\mathrm{d}\,x} = (R + \mathrm{j}\,\omega L) \cdot \boldsymbol{I}(x) \tag{2.10}$$

$$-\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{I}(x)}{\mathrm{d}\,x} = (G + \mathrm{j}\,\omega C) \cdot \boldsymbol{U}(x) \tag{2.11}$$

Stejným způsobem lze přepsat i vlnové rovnice (2.8) a (2.9) do tvaru:

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\boldsymbol{U}(x)}{\mathrm{d}\,x^2} - (R + \mathrm{j}\,\omega L) \cdot (G + \mathrm{j}\,\omega C) \cdot \boldsymbol{U}(x) = 0 \tag{2.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\boldsymbol{I}(x)}{\mathrm{d}\,x^2} - (R + \mathrm{j}\,\omega L) \cdot (G + \mathrm{j}\,\omega C) \cdot \boldsymbol{I}(x) = 0 \tag{2.13}$$

Řešení rovnice (2.12) je

$$\boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{A} \;\; \cdot e^{\boldsymbol{\gamma} x} + \boldsymbol{B} \cdot e^{-\boldsymbol{\gamma} x}\,, \tag{2.14}$$

kde $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ jsou integrační konstanty a komplexní konstanta $\boldsymbol{\gamma}$ se nazývá konstanta šíření.

$$\boldsymbol{\gamma} = \sqrt{(R + \mathrm{j}\,\omega L) \cdot (G + \mathrm{j}\,\omega C)} \tag{2.15}$$

Konstantu šíření lze také vyjádřit v následujícím tvaru, kde α je měrný útlum a β je měrný fázový posuv.

$$\boldsymbol{\gamma} = \alpha + \mathrm{j}\,\beta\,, \tag{2.16}$$

Řešení rovnice (2.12), získané vyjádřením proudu z rovnice (2.11) a dosazením napětí z rovnice (2.14), je

$$\boldsymbol{I}(x) = -\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{Z}_0} \cdot e^{\boldsymbol{\gamma} x} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{Z}_0} \cdot e^{-\boldsymbol{\gamma} x}\,, \tag{2.17}$$

kde komplexní konstanta $\boldsymbol{Z}_0$ se nazývá vlnová impedance.

$$\boldsymbol{Z}_0 = \sqrt{\frac{(R + \mathrm{j}\,\omega L)}{(G + \mathrm{j}\,\omega C)}} \tag{2.18}$$

Vlnová impedance $\boldsymbol{Z}_0$ a konstanta šíření charakterizují vlastnosti vedení a nazývají se provozní parametry vedení. Integrační konstanty $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ se určují z okrajových podmínek. Mezi tyto podmínky patří hodnoty napětí a proudu na začátku vedení nebo na konci vedení a hodnota impedance zátěže připojené na konec vedení. Určit integrační konstanty lze např. ze znalosti těchto hodnot:

- napětí na začátku vedení $\boldsymbol{U}_\mathrm{p}$ a proudu na začátku vedení $\boldsymbol{I}_\mathrm{p}$:

$$\boldsymbol{U}_\mathrm{p} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{Z}_0 \cdot \boldsymbol{I}_\mathrm{p} = -\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{U}_\mathrm{p} - \boldsymbol{Z}_0 \cdot \boldsymbol{I}_\mathrm{p}), \quad \boldsymbol{B} = \frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{U}_\mathrm{p} + \boldsymbol{Z}_0 \cdot \boldsymbol{I}_\mathrm{p}) \tag{2.20}$$

- napětí na konci vedení $\boldsymbol{U}_\mathrm{k}$ a proudu na konci vedení $\boldsymbol{I}_\mathrm{k}$:

$$\boldsymbol{U}_\mathrm{k} = \boldsymbol{A} \cdot e^{\gamma l} + \boldsymbol{B} \cdot e^{-\gamma l}, \quad \boldsymbol{Z}_0 \cdot \boldsymbol{I}_\mathrm{k} = -\boldsymbol{A} \cdot e^{\gamma l} + \boldsymbol{B} \cdot e^{-\gamma l} \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{U}_\mathrm{k} - \boldsymbol{Z}_0 \cdot \boldsymbol{I}_\mathrm{k}) \cdot e^{-\gamma l}, \quad \boldsymbol{B} = \frac{1}{2} \cdot (\boldsymbol{U}_\mathrm{k} + \boldsymbol{Z}_0 \cdot \boldsymbol{I}_\mathrm{k}) \cdot e^{\gamma l} \tag{2.22}$$

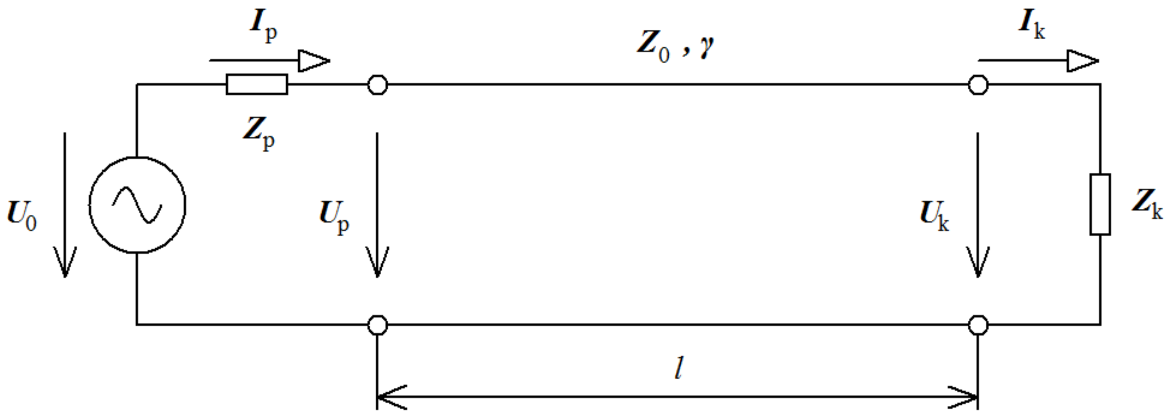
- napětí na začátku vedení $\boldsymbol{U}_\mathrm{p}$ a impedance zátěže na konci vedení $\boldsymbol{Z}_\mathrm{k}$:

$$\boldsymbol{U}_\mathrm{p} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{Z}_\mathrm{k} = \frac{\boldsymbol{U}_\mathrm{k}}{\boldsymbol{I}_\mathrm{k}} = \frac{\boldsymbol{A} \cdot e^{\gamma l} + \mathbf{B} \cdot e^{-\gamma l}}{-\frac{\mathbf{A}}{\boldsymbol{Z}_0} \cdot e^{\gamma l} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{Z}_0} \cdot e^{-\gamma l}} \tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_\mathrm{p} \cdot \frac{\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} - \boldsymbol{Z}_0}{\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} - \boldsymbol{Z}_0 + (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} + \boldsymbol{Z}_0) \cdot e^{2\gamma l}}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}_\mathrm{p} - \boldsymbol{A} \tag{2.24}$$

- napětí zdroje $\boldsymbol{U}_0$, impedance zátěže na konci vedení $\boldsymbol{Z}_\mathrm{k}$ a impedance připojené na vstup vedení $\boldsymbol{Z}_\mathrm{p}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}_\mathrm{p} \cdot \boldsymbol{I}_\mathrm{p} + \boldsymbol{U}_\mathrm{p} - \boldsymbol{U}_0 &= 0 \\
\boldsymbol{Z}_\mathrm{p} \cdot \left(-\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{Z}_0} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{Z}_0}\right) + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} - \boldsymbol{U_0} &= 0 \\
\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} &= \frac{\boldsymbol{U}_\mathrm{k}}{\boldsymbol{I}_\mathrm{k}} = \frac{\boldsymbol{A} \cdot e^{\gamma l} + \boldsymbol{B} \cdot e^{-\gamma l}}{-\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{Z}_0} \cdot e^{\gamma l} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{Z}_0} \cdot e^{-\gamma l}}
\end{aligned} \tag{2.25}$$



Obr. 2.2: Vedení napájené zdrojem napětí $\boldsymbol{U}_0$ s připojenou zátěží $\boldsymbol{Z}_\mathrm{k}$ na výstupu a $\boldsymbol{Z}_\mathrm{p}$ na vstupu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \frac{\boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{Z}_0 \cdot (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} - \boldsymbol{Z}_0)}{(\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{Z}_\mathrm{p}) \cdot (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} - \boldsymbol{Z}_0) + (\boldsymbol{Z}_0 + \boldsymbol{Z}_\mathrm{p}) \cdot (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} + \boldsymbol{Z}_0) \cdot e^{2\gamma l}} \\ \boldsymbol{B} &= \frac{\boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{Z}_0 \cdot (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} + \boldsymbol{Z}_0) \cdot e^{2\gamma l}}{(\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{Z}_\mathrm{p}) \cdot (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} - \boldsymbol{Z}_0) + (\boldsymbol{Z}_0 + \boldsymbol{Z}_\mathrm{p}) \cdot (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} + \boldsymbol{Z}_0) \cdot e^{2\gamma l}} \end{aligned} \tag{2.26}$$

Po vypočtení integračních konstant a jejich dosazením do rovnic pro fázory napětí a proudu lze tyto fázory vyjádřit v exponenciálním tvaru a přiřadit těmto fázorům komplexory.

$$\boldsymbol{U}(x) \cdot e^{\mathrm{j}\,\omega t} = U(x) \cdot e^{\mathrm{j}\,\varphi(x)} \cdot e^{\mathrm{j}\,\omega t} \tag{2.27}$$

$$\boldsymbol{I}(x) \cdot e^{\mathrm{j}\,\omega t} = I(x) \cdot e^{\mathrm{j}\,\varphi(x)} \cdot e^{\mathrm{j}\,\omega t} \tag{2.28}$$

Pro okamžité časové průběhy napětí $u(t, x)$ a proudu $i(t, x)$ platí následující vztahy:

$$u(t, x) = \sqrt{2} \cdot U(x) \cdot sin(\omega t + \varphi(x)) \tag{2.29}$$

$$i(t, x) = \sqrt{2} \cdot I(x) \cdot sin(\omega t + \varphi(x)) \tag{2.30}$$

3

Numerické metody řešení parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu

Metod pro řešení parciálních diferenciálních rovnic hyperbolického typu a soustav těchto rovnic existuje celá řada. Jednou ze snadno pochopitelných a snadno programovatelných metod je metoda sítí neboli metoda konečných diferencí. Tato metoda je použitelná jak ve frekvenční oblasti (FDFD – Finite-Diference Frequency-Domain), tak v časové oblasti (FDTD – Finite-Diference Time-Domain). Mezi další používané metody patří metoda konečných prvků, která je ovšem mnohem náročnější na pochopení a programování. Ve své práci jsem použil metodu konečných diferencí v časové oblasti.

3.1 Numerický výpočet derivace

3.1.1 Základní vzorce

Vzorce používané pro výpočet hodnoty numerické derivace v bodě $f(x)$ lze odvodit pomocí Taylorova rozvoje funkce v okolních bodech vzdálených o ekvidistantní krok Δx: $f(x + \Delta x)$, popřípadě $f(x - \Delta x)$. Zanedbáním členů obsahujících vyšší derivace (dopuštěním se chyby, kterou lze při dostatečně malém kroku zanedbat) než derivaci, která je odvozována, vzniknou následující vzorce pro numerický výpočet první derivace:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{3.1}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \tag{3.2}$$

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x} \tag{3.3}$$

Stejným způsobem lze nalézt vzorec pro výpočet druhé derivace:

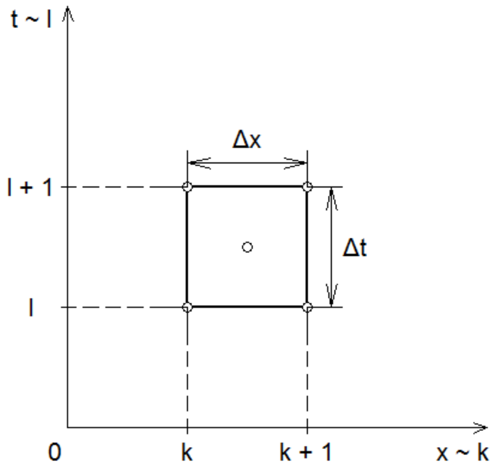
$$f''(x) = \frac{f(x + \Delta x) - 2 \cdot f(x) + f(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \tag{3.4}$$

3.1.2 Wendroffova diferenční aproximace

Wendroffova diferenční aproximace se používá při numerickému výpočtu hodnot parciálních derivací funkcí v uzlech při použití metody sítí.

Princip metody sítí spočívá ve vytvoření konečné množiny bodů označovaných jako uzly sítě v oblasti hledaného řešení. Derivace hledaných funkcí, které se vyskytují v daných diferenciálních rovnicích, se nahradí diferenčními podíly (tj. lineárními kombinacemi funkčních hodnot hledaných funkcí v okolních bodech, které je aproximují). Při zanedbání chyb, které vznikly těmito diferenčními aproximacemi, se řešení původního problému převede na řešení soustavy konečně mnoha rovnic. Řešením této soustavy rovnic jsou hodnoty hledaných funkcí v uzlech sítě.

Při použití Wendroffovy diferenční aproximace se hledané funkce a derivace těchto funkcí nahradí aproximacemi ze čtyř okolních uzlů rovnoměrné sítě. Použití více uzlů má za následek mnohem přesnější výsledek.



Obr. 3.1: Wendroffovo diferenční schéma

Síť je tvořena uzly, které vznikly diskretizací spojité definiční oblasti daných rovnic v čase a v prostoru. Prostorová souřadnice x je tvořena N elementy ohraničenými $N + 1$ uzly. Uzly jsou od sebe vzdáleny o ekvivalentní prostorový krok $\Delta x = x_{k+1} - x_k$, kde k označuje, o který uzel se jedná $k = 1, 2, ..., N$. Časová souřadnice t je nahrazena soustavou diskrétních časových hladin t_l od sebe vzdálených o ekvidistantní časový krok $\Delta t = t_{l+1} - t_l$, kde l označuje, o jakou časovou hladinu se jedná $l = 1, 2, \ldots$.

Hodnota parciální derivace funkce podle prostorové souřadnice x v uzlu o souřadnicích $[k, l]$ se vypočítá dle následující diferenční aproximace:

$$\left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right|_{k}^{l} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v_{k+1}^{l+1}-v_{k}^{l+1}}{\Delta x}+\frac{v_{k+1}^{l}-v_{k}^{l}}{\Delta x}\right) \tag{3.5}$$

Hodnota parciální derivace funkce podle časové souřadnice t v uzlu o souřadnicích $[k,l]$ se vypočítá dle následující diferenční aproximace:

$$\left.\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\right|_{k}^{l} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v_{k}^{l+1}-v_{k}^{l}}{\Delta t}+\frac{v_{k+1}^{l+1}-v_{k+1}^{l}}{\Delta x}\right) \tag{3.6}$$

Funkční hodnota v uzlu o souřadnicích $[k,l]$ je vypočítána jako průměrná hodnota ze 4 okolních uzlů:

$$\left.v(x,t)\right|_{k}^{l} = \frac{1}{4}\cdot\left(v_{k}^{l+1}+v_{k+1}^{l+1}+v_{k}^{l}+v_{k+1}^{l}\right) \tag{3.7}$$

4

Numerické řešení telegrafních rovnic

4.1 Jednofázové homogenní vedení

4.1.1 Spojitý matematický model

$$-\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} = R \cdot i(t,x) + L \cdot \frac{\partial i(t,x)}{\partial t} \tag{4.1}$$

$$-\frac{\partial i(t,x)}{\partial x} = G \cdot u(t,x) + C \cdot \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} \tag{4.2}$$

Na definiční oblasti Ω platí pro napětí u a proud vedením i o délce l výše telegrafní rovnice pro $t > 0$ a $0 < x < l$. Tyto rovnice je nutné doplnit o okrajové a počáteční podmínky.

- Okrajové podmínky: Napětí na vstupu vedení je $u(0,t) = u_0(t)$. Na konci vedení $(x = l)$ platí vztah mezi napětím u a proudem $i : F(u,i,t) = 0$. Pokud je vedení zakončeno odporovou zátěží, jedná se o algebraickou rovnici. V obecném případě se jedná o soustavu obyčejných diferenciálních rovnic [2].

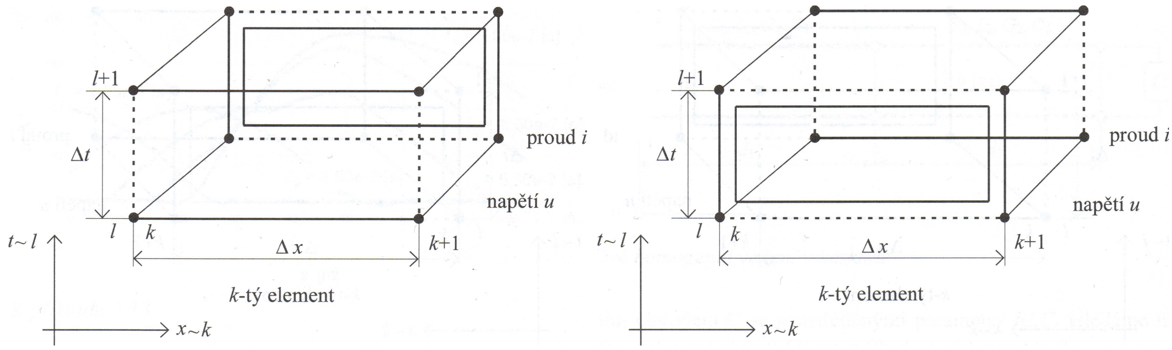
- Počáteční podmínky byly uvažovány nulové: $u(x,0) = 0$, $i(x,0) = 0$.

4.1.2 Diskrétní matematický model

K získání diskrétního matematického modelu jsem použil implicitní Wendroffovu diferenční aproximaci popsanou v kapitole 3.1.2. Postup byl následující:

- Spojitá definiční oblast Ω telegrafních rovnic (4.1), (4.2) se proloží rovnoměrnou časoprostorovou sítí o krocích Δx a Δt. Vedení o délce l se diskretizuje s ekvivalentním krokem Δx. Prostorová souřadnice se tedy nahradí jednorozměrnou geometrickou sítí složenou z N elementů a $N+1$ uzlů, kde $N = \frac{l}{\Delta x}$. Časová osa t se diskretizuje s ekvidistantním krokem Δt. Časová souřadnice se tedy nahradí systémem diskrétních časových hladin $t_l = l \cdot \Delta t$, kde $l = 0, 1, 2 \ldots$

- Pro libovolný k-tý element diferenční sítě lze zapsat Wendroffovu diferenční aproximaci rovnic (4.1),(4.2) dle diferenčních schémat uvedených na obr. 4.1:



(a) Rovnice (4.1) (b) Rovnice (4.2)

Obr. 4.1: Wendroffova diferenční aproximace, převzato s úpravami z [2]

$$-\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{u_{k+1}^{l+1}-u_{k}^{l+1}}{\Delta x}+\frac{u_{k+1}^{l}-u_{k}^{l}}{\Delta x}\right)\right]=\frac{R}{4}\cdot\left(i_{k}^{l+1}+i_{k+1}^{l+1}+i_{k}^{l}+i_{k+1}^{l}\right)+ \\ +\frac{L}{2}\cdot\left(\frac{i_{k}^{l+1}-i_{k}^{l}}{\Delta t}+\frac{i_{k+1}^{l+1}-i_{k+1}^{l}}{\Delta t}\right) \tag{4.3}$$

$$-\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{i_{k+1}^{l+1}-i_{k}^{l+1}}{\Delta x}+\frac{i_{k+1}^{l}-i_{k}^{l}}{\Delta x}\right)\right]=\frac{G}{4}\cdot\left(u_{k}^{l+1}+u_{k+1}^{l+1}+u_{k}^{l}+u_{k+1}^{l}\right)+ \\ +\frac{C}{2}\cdot\left(\frac{u_{k}^{l+1}-u_{k}^{l}}{\Delta t}+\frac{u_{k+1}^{l+1}-u_{k+1}^{l}}{\Delta t}\right) \tag{4.4}$$

- Po úpravě vzniknou následující rovnice,

$$u_{k}^{l+1}\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+u_{k+1}^{l+1}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+i_{k}^{l+1}\cdot\left(\frac{R}{4}+\frac{L}{2\cdot\Delta t}\right)+i_{k+1}^{l+1}\cdot\left(\frac{R}{4}+\frac{L}{2\cdot\Delta t}\right)= \\ u_{k}^{l}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+u_{k+1}^{l}\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+i_{k}^{l}\cdot\left(-\frac{R}{4}+\frac{L}{2\cdot\Delta t}\right)+i_{k+1}^{l}\cdot\left(-\frac{R}{4}+\frac{L}{2\cdot\Delta t}\right) \tag{4.5}$$

$$u_{k}^{l+1}\cdot\left(\frac{G}{4}+\frac{C}{2\cdot\Delta t}\right)+u_{k+1}^{l+1}\cdot\left(\frac{G}{4}+\frac{C}{2\cdot\Delta t}\right)+i_{k}^{l+1}\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+i_{k+1}^{l+1}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)= \\ u_{k}^{l}\cdot\left(-\frac{G}{4}+\frac{C}{2\cdot\Delta t}\right)+u_{k+1}^{l}\cdot\left(-\frac{G}{4}+\frac{C}{2\cdot\Delta t}\right)+i_{k}^{l}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+i_{k+1}^{l}\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right) \tag{4.6}$$

které je potřeba zapsat pro všech k elementů diferenční sítě. Vznikne soustava $2 \cdot N$ rovnic, kterou je nutné doplnit o okrajové podmínky na začátku a na konci vedení. Výsledkem je soustava $2 \cdot (N + 1)$ lineárních algebraických rovnic ve tvaru:

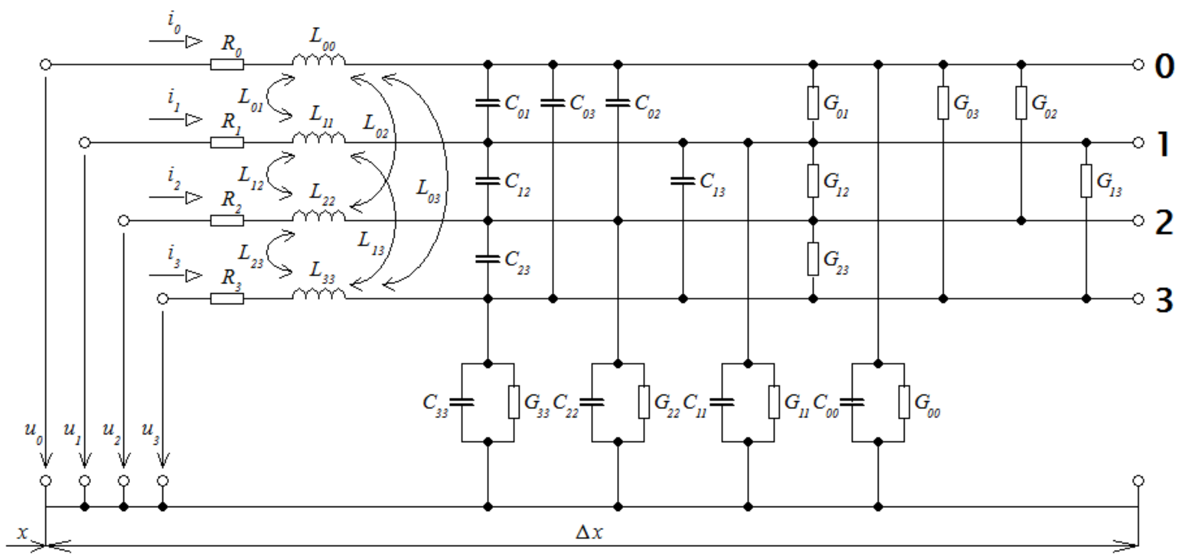
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{l+1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}^{l} + \mathbf{D}\,, \tag{4.7}$$

kde vektor $\mathbf{x}^{l+1}$ obsahuje prvky u_k^{l+1}, i_k^{l+1} a vektor $\mathbf{x}^l$ obsahuje prvky u_k^l, i_k^l pro $k = N + 1$.

- Řešením rovnice jsou hledané hodnoty u_k^{l+1}, i_k^{l+1} v časové hladině $l + 1$, vypočtené ze znalosti hodnot u_k^l, i_k^l z předcházející časové hladiny l.

4.2 Trojfázové homogenní vedení

Stejný postup jako pro jednofázové dvouvodičové vedení lze aplikovat na trojfázové vedení se třemi fázovými vodiči a zemním lanem.



Obr. 4.2: Element trojvodičového trojfázového vedení se zemním lanem

4.2.1 Spojitý matematický model

Na definiční oblasti Ω platí pro napětí u_0, u_1, u_2, u_3 a proudy vedením i_0, i_1, i_2, i_3 o délce l následující telegrafní rovnice pro $t > 0$ a $0 < x < l$. Tyto rovnice je nutné doplnit o okrajové a počáteční podmínky [2].

$$-\frac{\partial u_0(t,x)}{\partial x} = R_0 \cdot i_0(t,x) + L_{00} \cdot \frac{\partial i_0(t,x)}{\partial t} + L_{01} \cdot \frac{\partial i_1(t,x)}{\partial t} + L_{02} \cdot \frac{\partial i_2(t,x)}{\partial t} + L_{03} \cdot \frac{\partial i_3(t,x)}{\partial t} \tag{4.8}$$

$$-\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial x} = R_1 \cdot i_1(t,x) + L_{01} \cdot \frac{\partial i_0(t,x)}{\partial t} + L_{11} \cdot \frac{\partial i_1(t,x)}{\partial t} + L_{12} \cdot \frac{\partial i_2(t,x)}{\partial t} + L_{13} \cdot \frac{\partial i_3(t,x)}{\partial t} \tag{4.9}$$

$$-\frac{\partial u_2(t,x)}{\partial x} = R_2 \cdot i_2(t,x) + L_{02} \cdot \frac{\partial i_0(t,x)}{\partial t} + L_{12} \cdot \frac{\partial i_1(t,x)}{\partial t} + L_{22} \cdot \frac{\partial i_2(t,x)}{\partial t} + L_{23} \cdot \frac{\partial i_3(t,x)}{\partial t} \tag{4.10}$$

$$-\frac{\partial u_3(t,x)}{\partial x} = R_3 \cdot i_3(t,x) + L_{03} \cdot \frac{\partial i_0(t,x)}{\partial t} + L_{13} \cdot \frac{\partial i_1(t,x)}{\partial t} + L_{23} \cdot \frac{\partial i_2(t,x)}{\partial t} + L_{33} \cdot \frac{\partial i_3(t,x)}{\partial t} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i_0(t,x)}{\partial x} &= (G_{00} + G_{01} + G_{02} + G_{03}) \cdot u_0(t,x) \\ &+ (C_{00} + C_{01} + C_{02} + C_{03}) \cdot \frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t} - G_{01} \cdot u_1(t,x) - C_{01} \cdot \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} \\ &- G_{02} \cdot u_2(t,x) - C_{02} \cdot \frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} - G_{03} \cdot u_3(t,x) - C_{03} \cdot \frac{\partial u_3(t,x)}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i_1(t,x)}{\partial x} &= -G_{01} \cdot u_0(t,x) - C_{01} \cdot \frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t} \\ &+ (G_{01} + G_{11} + G_{12} + G_{13}) \cdot u_1(t,x) + (C_{01} + C_{11} + C_{12} + C_{13}) \cdot \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} \\ &- G_{12} \cdot u_2(t,x) - C_{12} \cdot \frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} - G_{13} \cdot u_3(t,x) - C_{13} \cdot \frac{\partial u_3(t,x)}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i_2(t,x)}{\partial x} &= -G_{02} \cdot u_0(t,x) - C_{02} \cdot \frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t} - G_{12} \cdot u_1(t,x) \\ &- C_{12} \cdot \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + (G_{02} + G_{12} + G_{22} + G_{23}) \cdot u_2(t,x) \\ &+ (C_{02} + C_{12} + C_{22} + C_{23}) \cdot \frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} - G_{23} \cdot u_3(t,x) - C_{23} \cdot \frac{\partial u_3(t,x)}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial i_3(t,x)}{\partial x} &= -G_{03} \cdot u_0(t,x) - C_{03} \cdot \frac{\partial u_0(t,x)}{\partial t} - G_{13} \cdot u_1(t,x) \\ &- C_{13} \cdot \frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} - G_{23} \cdot u_2(t,x) - C_{23} \cdot \frac{\partial u_2(t,x)}{\partial t} \\ &+ (G_{03} + G_{13} + G_{23} + G_{33}) \cdot u_3(t,x) + (C_{03} + C_{13} + C_{23} + C_{33}) \cdot \frac{\partial u_3(t,x)}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.15}$$

- Okrajové podmínky: Napětí na vstupu vedení jsou $u_0(0,t) = u_{00}(t)$, $u_1(0,t) = u_{01}(t)$, $u_2(0,t) = u_{02}(t)$, $u_3(0,t) = u_{03}(t)$. Na konci vedení ($x = l$) platí vztahy mezi napětími jednotlivých vodičů a proudy jednotlivými vodiči $F(u_0, i_0, t) = 0$, $F(u_1, i_1, t) = 0$, $F(u_2, i_2, t) = 0$, $F(u_3, i_3, t) = 0$. V případě zakončení vedení pouze odporovou zátěží se jedná o algebraické rovnice.

- Počáteční podmínky byly uvažovány nulové: $u_0(x,0) = 0$, $u_1(x,0) = 0$, $u_2(x,0) = 0$, $u_3(x,0) = 0$, $i_0(x,0) = 0$, $i_1(x,0) = 0$, $i_2(x,0) = 0$, $i_3(x,0) = 0$.

4.2.2 Diskrétní matematický model

K získání diskrétního matematického modelu jsem použil implicitní Wendroffovu diferenční aproximaci. Postupoval jsem stejně jako u jednofázového vedení. Jako příklad zde uvádím diferenční aproximaci rovnic (4.9) a (4.13), zbylé rovnice se aproximují stejným způsobem.

- Diferenční aproximace rovnice (4.9) a její následná úprava do vhodného tvaru:

$$
\begin{aligned}
-\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{{u_1}_{k+1}^{l+1}-{u_1}_k^{l+1}}{\Delta x}+\frac{{u_1}_{k+1}^{l}-{u_1}_k^{l}}{\Delta x}\right)\right] &= \frac{R_1}{4}\cdot\left({i_1}_k^{l+1}+{i_1}_{k+1}^{l+1}+{i_1}_k^{l}+{i_1}_{k+1}^{l}\right)\\
&+\frac{L_{01}}{2}\cdot\left(\frac{{i_0}_k^{l+1}-{i_0}_k^{l}}{\Delta t}+\frac{{i_0}_{k+1}^{l+1}-{i_0}_{k+1}^{l}}{\Delta t}\right)+\frac{L_{11}}{2}\cdot\left(\frac{{i_1}_k^{l+1}-{i_1}_k^{l}}{\Delta t}+\frac{{i_1}_{k+1}^{l+1}-{i_1}_{k+1}^{l}}{\Delta t}\right)\\
&+\frac{L_{12}}{2}\cdot\left(\frac{{i_2}_k^{l+1}-{i_2}_k^{l}}{\Delta t}+\frac{{i_2}_{k+1}^{l+1}-{i_2}_{k+1}^{l}}{\Delta t}\right)+\frac{L_{13}}{2}\cdot\left(\frac{{i_3}_k^{l+1}-{i_3}_k^{l}}{\Delta t}+\frac{{i_3}_{k+1}^{l+1}-{i_3}_{k+1}^{l}}{\Delta t}\right)
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&{u_1}_k^{l+1}\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+{u_1}_{k+1}^{l+1}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+{i_0}_k^{l+1}\cdot\left(\frac{L_{01}}{2\cdot\Delta t}\right)+{i_0}_{k+1}^{l+1}\cdot\left(\frac{L_{01}}{2\cdot\Delta t}\right)\\
&+{i_1}_k^{l+1}\cdot\left(\frac{R_1}{4}+\frac{L_{11}}{2\cdot\Delta t}\right)+{i_1}_{k+1}^{l+1}\cdot\left(\frac{R_1}{4}+\frac{L_{11}}{2\cdot\Delta t}\right)+{i_2}_k^{l+1}\cdot\left(\frac{L_{12}}{2\cdot\Delta t}\right)+{i_2}_{k+1}^{l+1}\cdot\left(\frac{L_{12}}{2\cdot\Delta t}\right)\\
&+{i_3}_k^{l+1}\cdot\left(\frac{L_{13}}{2\cdot\Delta t}\right)+{i_3}_{k+1}^{l+1}\cdot\left(\frac{L_{13}}{2\cdot\Delta t}\right)={u_1}_k^{l}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+{u_1}_{k+1}^{l}\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)\\
&+{i_0}_k^{l}\cdot\left(\frac{L_{01}}{2\cdot\Delta t}\right)+{i_0}_{k+1}^{l}\cdot\left(\frac{L_{01}}{2\cdot\Delta t}\right)+{i_1}_k^{l}\cdot\left(-\frac{R_1}{4}+\frac{L_{11}}{2\cdot\Delta t}\right)+{i_1}_{k+1}^{l}\cdot\left(-\frac{R_1}{4}+\frac{L_{11}}{2\cdot\Delta t}\right)\\
&+{i_2}_k^{l}\cdot\left(\frac{L_{12}}{2\cdot\Delta t}\right)+{i_2}_{k+1}^{l}\cdot\left(\frac{L_{12}}{2\cdot\Delta t}\right)+{i_3}_k^{l}\cdot\left(\frac{L_{13}}{2\cdot\Delta t}\right)+{i_3}_{k+1}^{l}\cdot\left(\frac{L_{13}}{2\cdot\Delta t}\right)
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

- Diferenční aproximace rovnice (4.13) a její následná úprava do vhodného tvaru:

$$
\begin{aligned}
&-\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{i_{1k+1}^{\,l+1}-i_{1k}^{\,l+1}}{\Delta x}+\frac{i_{1k+1}^{\,l}-i_{1k}^{\,l}}{\Delta x}\right)\right] = \\
&-\frac{G_{01}}{4}\cdot\left(u_{0k}^{\,l+1}+u_{0k+1}^{\,l+1}+u_{0k}^{\,l}+u_{0k+1}^{\,l}\right)-\frac{C_{01}}{2}\cdot\left(\frac{u_{0k}^{\,l+1}-u_{0k}^{\,l}}{\Delta t}+\frac{u_{0k+1}^{\,l+1}-u_{0k+1}^{\,l}}{\Delta t}\right)\\
&+\frac{G_{01}+G_{11}+G_{12}+G_{13}}{4}\cdot\left(u_{1k}^{\,l+1}+u_{1k+1}^{\,l+1}+u_{1k}^{\,l}+u_{1k+1}^{\,l}\right)\\
&+\frac{C_{01}+C_{11}+C_{12}+C_{13}}{2}\cdot\left(\frac{u_{1k}^{\,l+1}-u_{1k}^{\,l}}{\Delta t}+\frac{u_{1k+1}^{\,l+1}-u_{1k+1}^{\,l}}{\Delta t}\right)\\
&-\frac{G_{12}}{4}\cdot\left(u_{2k}^{\,l+1}+u_{2k+1}^{\,l+1}+u_{2k}^{\,l}+u_{2k+1}^{\,l}\right)-\frac{C_{12}}{2}\cdot\left(\frac{u_{2k}^{\,l+1}-u_{2k}^{\,l}}{\Delta t}+\frac{u_{2k+1}^{\,l+1}-u_{2k+1}^{\,l}}{\Delta t}\right)\\
&-\frac{G_{13}}{4}\cdot\left(u_{3k}^{\,l+1}+u_{3k+1}^{\,l+1}+u_{3k}^{\,l}+u_{3k+1}^{\,l}\right)-\frac{C_{13}}{2}\cdot\left(\frac{u_{3k}^{\,l+1}-u_{3k}^{\,l}}{\Delta t}+\frac{u_{3k+1}^{\,l+1}-u_{3k+1}^{\,l}}{\Delta t}\right)
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

$$
\begin{aligned}
&i_{1k}^{\,l+1}\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+i_{1k+1}^{\,l+1}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+u_{0k}^{\,l+1}\cdot\left(-\frac{G_{01}}{4}-\frac{C_{01}}{2\cdot\Delta t}\right)\\
&+u_{0k+1}^{\,l+1}\cdot\left(-\frac{G_{01}}{4}-\frac{C_{01}}{2\cdot\Delta t}\right)+u_{1k}^{\,l+1}\cdot\left(\frac{G_{01}+G_{11}+G_{12}+G_{13}}{4}+\frac{C_{01}+C_{11}+C_{12}+C_{13}}{2\cdot\Delta t}\right)\\
&+u_{1k+1}^{\,l+1}\cdot\left(\frac{G_{01}+G_{11}+G_{12}+G_{13}}{4}+\frac{C_{01}+C_{11}+C_{12}+C_{13}}{2\cdot\Delta t}\right)+u_{2k}^{\,l+1}\cdot\left(-\frac{G_{12}}{4}-\frac{C_{12}}{2\cdot\Delta t}\right)\\
&+u_{2k+1}^{\,l+1}\cdot\left(-\frac{G_{12}}{4}-\frac{C_{12}}{2\cdot\Delta t}\right)+u_{3k}^{\,l+1}\cdot\left(-\frac{G_{13}}{4}-\frac{C_{13}}{2\cdot\Delta t}\right)+u_{3k+1}^{\,l+1}\cdot\left(-\frac{G_{13}}{4}-\frac{C_{13}}{2\cdot\Delta t}\right) =\\
&i_{1k}^{\,l}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+i_{1k+1}^{\,l}\cdot\left(-\frac{1}{2\cdot\Delta x}\right)+u_{0k}^{\,l}\cdot\left(\frac{G_{01}}{4}-\frac{C_{01}}{2\cdot\Delta t}\right)+u_{0k+1}^{\,l}\cdot\left(\frac{G_{01}}{4}-\frac{C_{01}}{2\cdot\Delta t}\right)\\
&+u_{1k}^{\,l}\cdot\left(-\frac{G_{01}+G_{11}+G_{12}+G_{13}}{4}+\frac{C_{01}+C_{11}+C_{12}+C_{13}}{2\cdot\Delta t}\right)\\
&+u_{1k+1}^{\,l}\cdot\left(-\frac{G_{01}+G_{11}+G_{12}+G_{13}}{4}+\frac{C_{01}+C_{11}+C_{12}+C_{13}}{2\cdot\Delta t}\right)+u_{2k}^{\,l}\cdot\left(\frac{G_{12}}{4}-\frac{C_{12}}{2\cdot\Delta t}\right)\\
&+u_{2k+1}^{\,l}\cdot\left(\frac{G_{12}}{4}-\frac{C_{12}}{2\cdot\Delta t}\right)+u_{3k}^{\,l}\cdot\left(\frac{G_{13}}{4}-\frac{C_{13}}{2\cdot\Delta t}\right)+u_{3k+1}^{\,l}\cdot\left(\frac{G_{13}}{4}-\frac{C_{13}}{2\cdot\Delta t}\right)
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Aproximované rovnice je potřeba zapsat pro všech k elementů diferenční sítě. Vznikne soustava $8\cdot N$ rovnic, kterou je nutné doplnit o okrajové podmínky na začátku a na konci vedení. Výsledkem je soustava $8\cdot(N+1)$ lineárních algebraických rovnic ve tvaru:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{l+1} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}^{l} + \mathbf{D}\,. \tag{4.20}$$

Řešením rovnice jsou hledané hodnoty ${u_0}_k^{l+1}$, ${u_1}_k^{l+1}$, ${u_2}_k^{l+1}$, ${u_3}_k^{l+1}$, ${i_0}_k^{l+1}$, ${i_1}_k^{l+1}$, ${i_2}_k^{l+1}$, ${i_3}_k^{l+1}$ v časové hladině $l+1$, vypočtené ze znalosti hodnot ${u_0}_k^{l}$, ${u_1}_k^{l}$, ${u_2}_k^{l}$, ${u_3}_k^{l}$, ${i_0}_k^{l}$, ${i_1}_k^{l}$, ${i_2}_k^{l}$, ${i_3}_k^{l}$ z předcházející časové hladiny l.

5

Ilustrativní příklady

V této kapitole jsou řešeny následující modely vedení: trakční vedení a trojfázové vedení vn na stožárech Soudek a Donau. U trakčního vedení jsou zde simulovány situace vedení zakončeného odporovou zátěží $Z_{\mathrm{k}} = 449,881\ \Omega$ pouze na konci vedení a taktéž situace, kde je odporová zátěž připojena na konec $Z_{\mathrm{k}} = 449,881\ \Omega$ i na začátek vedení $Z_{\mathrm{p}} = 449,881\ \Omega$. Rozložení napětí a proudu podél tohoto vedení je řešeno analyticky v harmonickém ustáleném stavu a následně i numericky. Obě tato řešení jsou porovnávána.

5.1 Trakční vedení

Model trakčního vedení tvoří jeden měděný vodič o poloměru $R = 6$ mm umístěný ve výšce $h = 5,5$ m o délce $l = 2$ km. Vedení je napájeno ze zdroje o efektivní hodnotě napětí $U_0 = 26500$ V.

5.1.1 Výpočet primárních a sekundárních parametrů

- Výpočet primárních parametrů vedení

$$R = \frac{l}{\gamma \cdot S} = \frac{1}{5,7 \cdot 10^7 \cdot \pi \cdot 0,006^2} = 1,551 \cdot 10^{-4} \qquad [\Omega/m] \tag{5.1}$$

$$L = \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot (\frac{1}{4} + ln\frac{R_0}{R}) = \frac{4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}}{2 \cdot \pi} \cdot (\frac{1}{4} + ln\frac{5,5}{0,006}) = 1,414 \cdot 10^{-6} \qquad [H/m] \tag{5.2}$$

$$G = 0 \qquad [S/m] \tag{5.3}$$

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot l}{ln\frac{2 \cdot h}{R}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{ln\frac{2 \cdot 5,5}{0,006}} = 7,400 \cdot 10^{-12} \qquad [F/m] \tag{5.4}$$

- Výpočet provozních parametrů vedení

$$\boldsymbol{Z}_0 = \sqrt{\frac{(R+\mathrm{j}\,\omega L)}{(G+\mathrm{j}\,\omega C)}} = \sqrt{\frac{(1,551\cdot 10^{-4}+\mathrm{j}\,2\cdot\pi\cdot 50\cdot 1,414\cdot 10^{-6})}{(0+\mathrm{j}\,2\cdot\pi\cdot 50\cdot 7,400\cdot 10^{-12})}} = 449,881\cdot e^{\mathrm{j}\,-9,623^o} \quad [\Omega] \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= \sqrt{(R+\mathrm{j}\,\omega L)\cdot(G+\mathrm{j}\,\omega C)}\\ &= \sqrt{(1,551\cdot 10^{-4}+\mathrm{j}\,2\cdot\pi\cdot 50\cdot 1,414\cdot 10^{-6})\cdot(0+\mathrm{j}\,2\cdot\pi\cdot 50\cdot 7,400\cdot 10^{-12})}\\ &= 1,748\cdot 10^{-7}+\mathrm{j}\,1,031\cdot 10^{-6}\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\alpha = 1,748\cdot 10^{-7} \qquad [Np/m] \tag{5.7}$$

$$\beta = 1,031\cdot 10^{-6} \qquad [rad/m] \tag{5.8}$$

5.1.2 Vedení zakončené odporovou zátěží Z_{k}

5.1.2.1 Analytické řešení v harmonickém ustáleném stavu

- Výpočet integračních konstant $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ dle vztahů (2.24):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \boldsymbol{U}_{\mathrm{p}}\cdot\frac{\boldsymbol{Z}_{\mathrm{k}}-\boldsymbol{Z}_0}{\boldsymbol{Z}_{\mathrm{k}}-\boldsymbol{Z}_0+(\boldsymbol{Z}_{\mathrm{k}}+\boldsymbol{Z}_0)\cdot e^{2\gamma l}}\\ &= \frac{26500\cdot(449,881-449,881\cdot e^{\mathrm{j}\,-9,623^o})}{449,881-449,881\cdot e^{\mathrm{j}\,-9,623^o}+(449,881+449,881\cdot e^{\mathrm{j}\,-9,623^o})\cdot e^{2\cdot(1,748\cdot 10^{-7}+\mathrm{j}\,1,031\cdot 10^{-6})\cdot 2000}}\\ &= 2220,63e^{\mathrm{j}\,84,97^o}\end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}_{\mathrm{p}}-\boldsymbol{A} = 26500-2220,63\cdot e^{\mathrm{j}\,84,97^o} = 26398\cdot e^{\mathrm{j}\,-4,81^o} \tag{5.10}$$

- Dosazení integračních konstant do rovnic (2.14) a (2.17) pro výpočet $\boldsymbol{U}(x)$ a $\boldsymbol{I}(x)$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}(x) &= \boldsymbol{A}\cdot e^{\gamma x}+\boldsymbol{B}\cdot e^{-\gamma x} =\\ &2220,63\cdot e^{\mathrm{j}\,84,97^o}\cdot e^{(1,748\cdot 10^{-7}+\mathrm{j}\,1,031\cdot 10^{-6})\cdot x}+26398\cdot e^{\mathrm{j}\,-4,81^o}\cdot e^{-(1,748\cdot 10^{-7}+\mathrm{j}\,1,031\cdot 10^{-6})\cdot x}\end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}(x) &= -\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{Z}_0}\cdot e^{\gamma x}+\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{Z}_0}\cdot e^{-\gamma x} =\\ &-\frac{2220,63\cdot e^{\mathrm{j}\,84,97^o}}{449,881\cdot e^{\mathrm{j}\,-9,623^o}}\cdot e^{(1,748\cdot 10^{-7}+\mathrm{j}\,1,031\cdot 10^{-6})\cdot x}+\frac{26398\cdot e^{\mathrm{j}\,-4,81^o}}{449,881\cdot e^{\mathrm{j}\,-9,623^o}}\cdot e^{-(1,748\cdot 10^{-7}+\mathrm{j}\,1,031\cdot 10^{-6})\cdot x}\end{aligned} \tag{5.12}$$

- Výpočet fázorů napětí a proudu v půlce vedení, tj. pro $x = 1000$ m:

$$\boldsymbol{U}(1000) \;= 2221,02 \cdot e^{\mathrm{j}\,85,02^o} + 26393,3 \cdot e^{\mathrm{j}\,-4,87^o} = 26491 - \mathrm{j}\,26,15 = 26491 \cdot e^{\mathrm{j}\,-0,06^o}\ [V] \tag{5.13}$$

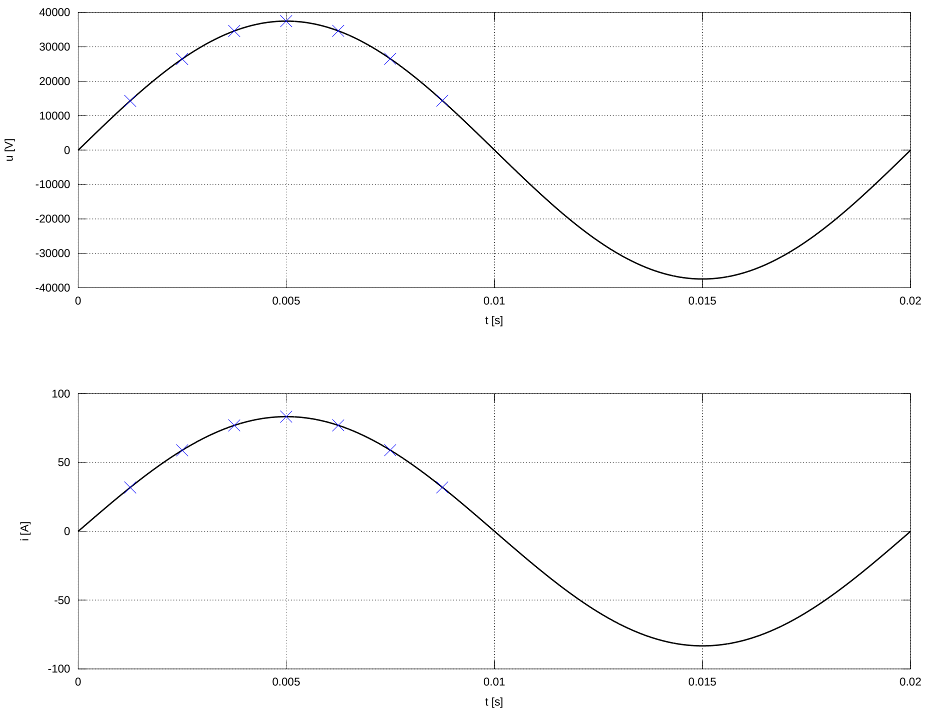
$$\boldsymbol{I}(1000) \;= 4,94 \cdot e^{\mathrm{j}\,-85,35^o} + 58,67 \cdot e^{\mathrm{j}\,4,76^o} = 58,86 - \mathrm{j}\,-0,05 = 58,86 \cdot e^{\mathrm{j}\,-0,05^o}\ [A] \tag{5.14}$$

- Časové průběhy napětí a proudu v půlce vedení:

$$u(t) = 37463,7 \cdot \sin(314,16 \cdot t - 0,06^o) \qquad [V] \tag{5.15}$$

$$i(t) = 83,25 \cdot \sin(314,16 \cdot t - 0,05^o) \qquad [A] \tag{5.16}$$

Na následujících grafech jsou uvedeny časové průběhy napětí $u(t)$ a proudu $i(t)$v půlce vedení s vyznačenými body v časech $t = \frac{T}{16}, \frac{T}{8}, \frac{3T}{16}, \frac{T}{4}, \frac{5T}{16}, \frac{3T}{8}$ *a* $\frac{7T}{16}$, které jsou použity dále.



Obr. 5.1: Časový průběh napětí a proudu v půlce vedení zakončeného odporovou zátěží $Z_\mathrm{k} = 499,881\ \Omega$

V následujících tabulkách (5.1), (5.2) jsou okamžité hodnoty napětí a proudu podél vedení pro x v rozsahu od $x = 0$ m do $x = 2000$ m po 200 m a v časech $t = \frac{T}{16}, \frac{T}{8}, \frac{3T}{16}, \frac{T}{4}, \frac{5T}{16}, \frac{3T}{8}$ *a* $\frac{7T}{16}$. Perioda T pro síťovou frekvenci $f = 50$ Hz je 20 ms.

$u(x,t)$ [V] - analytické řešení							
x [m] / t [ms]	1,25	2,5	3,75	5	6,25	7,5	8,75
0	14341,7	26500,0	34623,9	37476,7	34623,9	26500,0	14341,7
200	14333,9	26492,9	34618,7	37474,1	34624,4	26503,4	14347,5
400	14326,1	26485,9	34613,5	37471,5	34624,8	26506,8	14353,4
600	14318,2	26478,8	34608,3	37468,9	34625,2	26510,2	14359,2
800	14310,4	26471,8	34603,0	37466,3	34625,7	26513,6	14365,1
1000	14302,6	26464,7	34597,8	37463,7	34626,1	26517,0	14370,9
1200	14294,8	26457,7	34592,6	37461,1	34626,6	26520,4	14376,8
1400	14286,9	26450,6	34587,4	37458,5	34627,0	26523,8	14382,6
1600	14279,1	26443,5	34582,2	37456,0	34627,4	26527,2	14388,4
1800	14271,3	26436,5	34576,9	37453,4	34627,9	26530,6	14394,3
2000	14263,5	26429,4	34571,7	37450,8	34628,3	26534,0	14400,1

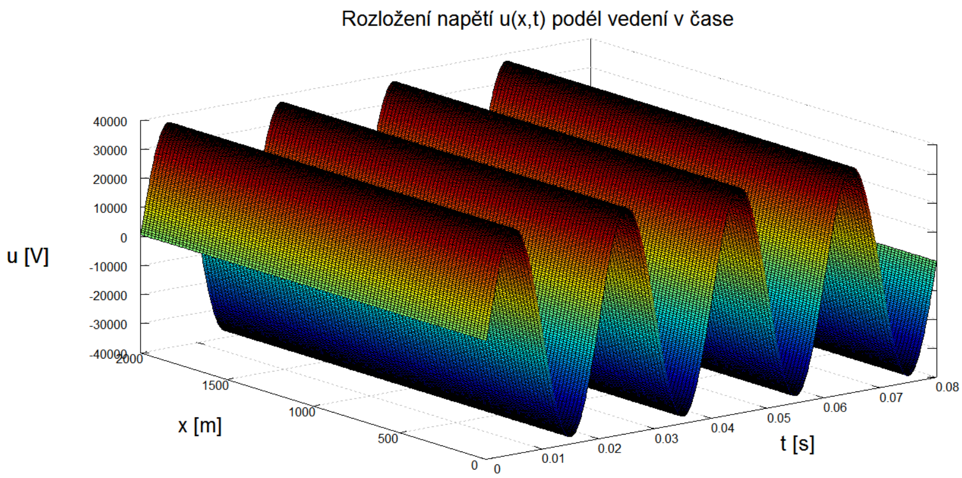
Tab. 5.1: Okamžité hodnoty napětí na vedení zakončeném odporovou zátěží $Z_\mathrm{k} = 499,881\ \Omega$ - analytické řešení

$i(x,t)$ [A] - analytické řešení							
x [m] / t [ms]	1,25	2,5	3,75	5	6,25	7,5	8,75
0	31,8660	58,8708	76,9131	83,2461	76,9056	58,8569	31,8478
200	31,8499	58,8585	76,9065	83,2461	76,9123	58,8692	31,8639
400	31,8338	58,8462	76,8998	83,2461	76,9189	58,8816	31,8800
600	31,8177	58,8339	76,8931	83,2461	76,9256	58,8939	31,8961
800	31,8016	58,8215	76,8864	83,2461	76,9323	58,9062	31,9122
1000	31,7855	58,8092	76,8798	83,2461	76,9389	58,9185	31,9283
1200	31,7694	58,7969	76,8731	83,2460	76,9456	58,9308	31,9444
1400	31,7533	58,7846	76,8664	83,2460	76,9522	58,9431	31,9605
1600	31,7372	58,7722	76,8597	83,2460	76,9588	58,9554	31,9765
1800	31,7211	58,7599	76,8530	83,2460	76,9655	58,9677	31,9926
2000	31,7050	58,7475	76,8463	83,2459	76,9721	58,9800	32,0087

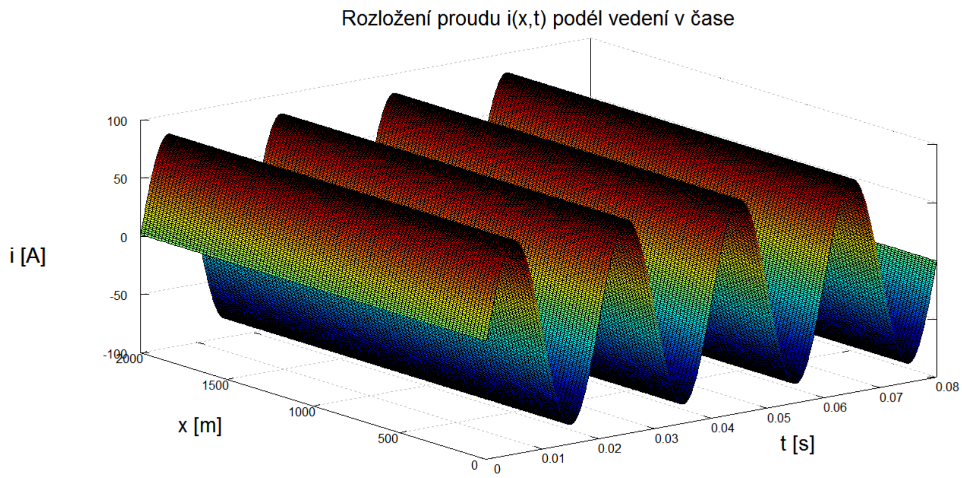
Tab. 5.2: Okamžité hodnoty proudu vedením zakončeném odporovou zátěží $Z_\mathrm{k} = 499,881\ \Omega$ - analytické řešení

5.1.2.2 Numerické řešení

Pro numerické řešení byla použita Wendroffova diferenční aproximace popsaná v kapitole (4.1.2) na sítí o prostorovém kroku $\Delta x = 20$ m a časovém kroku $\Delta t = 6,25 \cdot 10^{-5}$ s. Parametry použité sítě byly zvoleny záměrně kvůli konvergenci numerického řešení k očekávanému řešení. Při použití těchto parametrů sítě numerické řešení konvergovalo velmi přesně, proto nebylo potřeba zjemnit síť a více zatěžovat výpočetní systém. Soustava rovnic (4.7) byla vyřešena v programu napsaném v jazyce Octave uvedeném v příloze (A.1.1). Výstupem tohoto programu jsou 3D grafy rozložení napětí (obr. 5.2) a proudu (obr. 5.3) podél vedení v čase. Z matic NAPETI a PROUD byly vybrány okamžité hodnoty napětí a proudu podél vedení pro x v rozsahu od $x = 0$ m do $x = 2000$m po 200 m a v časech $t = \frac{T}{16}, \frac{T}{8}, \frac{3T}{16}, \frac{T}{4}, \frac{5T}{16}, \frac{3T}{8}$ *a* $\frac{7T}{16}$ ve čtvrté periodě T. Tyto hodnoty jsou uvedeny v tabulkách tab. 5.3 a tab. 5.4.



Obr. 5.2: Graf rozložení napětí podél vedení zakončeném odporovou zátěží $Z_k = 499,881\ \Omega$



Obr. 5.3: Graf rozložení proudu podél vedení zakončeném odporovou zátěží $Z_k = 499,881\ \Omega$

$u(x,t)$ [V] - numerické řešení							
x [m] / t [ms]	61,25	62,5	63,75	65	66,25	67,5	68,75
0	14341,7	26500,0	34623,9	37476,7	34623,9	26500,0	14341,7
200	14333,7	26492,8	34618,5	37474,0	34624,3	26503,4	14347,5
400	14325,7	26485,6	34613,2	37471,2	34624,5	26506,6	14353,2
600	14318,5	26479,0	34608,4	37469,0	34625,2	26510,1	14359,1
800	14310,2	26471,7	34603,0	37466,4	34625,9	26513,8	14365,4
1000	14302,8	26464,8	34597,8	37463,6	34626,0	26516,8	14370,6
1200	14294,4	26457,4	34592,4	37461,1	34626,6	26520,6	14377,0
1400	14287,4	26451,0	34587,8	37458,8	34627,2	26523,8	14382,5
1600	14278,9	26443,2	34581,7	37455,5	34627,1	26526,9	14388,3
1800	14271,1	26436,5	34577,1	37453,7	34628,3	26531,0	14394,7
2000	14263,9	26429,8	34571,9	37450,8	34628,2	26533,7	14399,7

Tab. 5.3: Okamžité hodnoty napětí na vedení zakončeném odporovou zátěží $Z_\mathrm{k} = 499,881\ \Omega$ - numerické řešení

$i(x,t)$ [A] - numerické řešení							
x [m] / t [ms]	61,25	62,5	63,75	65	66,25	67,5	68,75
0	31,8660	58,8708	76,9131	83,2461	76,9056	58,8569	31,8478
200	31,8494	58,8581	76,9061	83,2458	76,9121	58,8691	31,8639
400	31,8331	58,8455	76,8991	83,2455	76,9184	58,8811	31,8796
600	31,8183	58,8343	76,8934	83,2462	76,9256	58,8937	31,8958
800	31,8012	58,8213	76,8864	83,2462	76,9326	58,9067	31,9128
1000	31,7861	58,8095	76,8798	83,2459	76,9385	58,9179	31,9276
1200	31,7685	58,7962	76,8727	83,2459	76,9457	58,9312	31,9450
1400	31,7543	58,7855	76,8672	83,2466	76,9526	58,9432	31,9602
1600	31,7366	58,7714	76,8587	83,2450	76,9580	58,9547	31,9761
1800	31,7208	58,7600	76,8535	83,2467	76,9664	58,9687	31,9935
2000	31,7060	58,7484	76,8469	83,2461	76,9719	58,9794	32,0079

Tab. 5.4: Okamžité hodnoty proudu vedením zakončeném odporovou zátěží $Z_\mathrm{k} = 499,881\ \Omega$ - numerické řešení

5.1.2.3 Porovnání analytického a numerického řešení

Z porovnání okamžitých hodnot napětí $u(x,t)$ podél vedení zakončené odporovou zátěží $Z_K = 499,881\ \Omega$ shrnutých v tabulkách 5.1 a 5.3 a okamžitých hodnot proudu $i(x,t)$ uvedených v tabulkách 5.2 a 5.4 je patrné, že se tyto hodnoty velmi shodují. Největší absolutní chyba metody výpočtu napětí Δu dosahovala 0,5 V a největší absolutní chyba metody výpočtu proudu Δi dosahovala 1 mA. Tyto chyby a souřadnice v jakém místě na vedení a v jakém čase se vyskytly shrnuje tabulka 5.5.

(a)

x [m]	t [ms]	Δu [V]	δu [%]
1400	61,25	0,5	0,0035
1600	63,25	0,5	0,0014
1600	65	0,5	0,0013

(b)

x [m]	t [ms]	Δi [mA]	δi [%]
1400	61,25	1	0,0032
1600	63,25	1	0,0013
1600	65	1	0,0012

Tab. 5.5: Tabulka maximálních absolutních chyb metody výpočtu napětí (a) a proudu (b) a jejich odpovídající relativní chyby - vedení zakončené odporovou zátěží $Z_\mathrm{k} = 499,881\ \Omega$

- Příklad výpočtu absolutní chyby metody Δu a relativní chyby metody δu pro $x = 1400$ m a $t = 61,25$ ms:

$$\Delta u \quad = \mid u_\mathrm{N} - u_\mathrm{A} \mid = \mid 14287,4 - 14286,9 \mid = 0,5\ V \tag{5.17}$$

$$\delta u \quad = \frac{\Delta u}{u_\mathrm{A}} \cdot 100 = \frac{0,5}{14286,9} \cdot 100 = 0,0035\ \% \tag{5.18}$$

Hodnota označená jako u_N je získána numerickým výpočtem a hodnota označená jako u_A je získána analytickým výpočtem.

Z relativních chyb metody výpočtu napětí δu a proudu δi vyplývá, že se hodnoty získané numerickým řešením lišily od hodnot získaných analytickým řešením maximálně o 0,0035 % v případě napětí a o 0,0032 % v případě proudu.

5.1.3 Vedení s odporovou zátěží Z_k připojenou na konci vedení a na začátku vedení Z_p

5.1.3.1 Analytické řešení v harmonickém ustáleném stavu

- Výpočet integračních konstant $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ dle vztahů (2.26):

$$\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} - \boldsymbol{Z}_0 = 449,881 - 449,881 \cdot e^{\mathrm{j}\,-9{,}623^o} = 6,32 + \mathrm{j}\,75,21 = 75,48 \cdot e^{\mathrm{j}\,85{,}20^o} \quad [\Omega] \tag{5.19}$$

$$\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{Z}_\mathrm{p} = 449,881 \cdot e^{\mathrm{j}\,-9{,}623^o} - 449,881 = -6,32 - \mathrm{j}\,75,21 = 75,48 \cdot e^{\mathrm{j}\,-94{,}80^o} \quad [\Omega] \tag{5.20}$$

$$\boldsymbol{Z}_0 + \boldsymbol{Z}_\mathrm{p} = \boldsymbol{Z}_\mathrm{k} + \boldsymbol{Z}_0 = 449,881 \cdot e^{\mathrm{j}\,-9{,}623^o} + 449,881 = 893,44 - \mathrm{j}\,75,21 = 896,60 \cdot e^{\mathrm{j}\,-4{,}81^o} \quad [\Omega] \tag{5.21}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{Z}_0 \cdot (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} - \boldsymbol{Z}_0)}{(\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{Z}_\mathrm{p}) \cdot (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} - \boldsymbol{Z}_0) + (\boldsymbol{Z}_0 + \boldsymbol{Z}_\mathrm{p}) \cdot (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} + \boldsymbol{Z}_0) \cdot e^{2\gamma l}} \tag{5.22}$$

$$= \frac{26500 \cdot 449,881 \cdot e^{\mathrm{j}\,-9{,}623^o} \cdot 75,48 \cdot e^{\mathrm{j}\,85{,}20^o}}{75,48 \cdot e^{\mathrm{j}\,-94{,}80^o} \cdot 75,48 \cdot e^{\mathrm{j}\,85{,}20^o} + (896,60 \cdot e^{\mathrm{j}\,-4{,}81^o} \cdot 896,60 \cdot e^{\mathrm{j}\,-4{,}81^o}) \cdot e^{2\cdot(1{,}748\cdot 10^{-7} + \mathrm{j}\,1{,}031\cdot 10^{-6})\cdot 2000}}$$

$$= 1110,7 \cdot e^{\mathrm{j}\,84{,}96^o}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{U}_0 \cdot \boldsymbol{Z}_0 \cdot (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} + \boldsymbol{Z}_0) \cdot e^{2\gamma l}}{(\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{Z}_\mathrm{p}) \cdot (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} - \boldsymbol{Z}_0) + (\boldsymbol{Z}_0 + \boldsymbol{Z}_\mathrm{p}) \cdot (\boldsymbol{Z}_\mathrm{k} + \boldsymbol{Z}_0) \cdot e^{2\gamma l}} \tag{5.23}$$

$$= \frac{26500 \cdot 449,881 \cdot e^{\mathrm{j}\,-9{,}623^o} \cdot 896,60 \cdot e^{\mathrm{j}\,-4{,}81^o} \cdot e^{2\cdot(1{,}748\cdot 10^{-7} + \mathrm{j}\,1{,}031\cdot 10^{-6})\cdot 2000}}{75,48 \cdot e^{\mathrm{j}\,-94{,}80^o} \cdot 75,48 \cdot e^{\mathrm{j}\,85{,}20^o} + (896,60 \cdot e^{\mathrm{j}\,-4{,}81^o} \cdot 896,60 \cdot e^{\mathrm{j}\,-4{,}81^o}) \cdot e^{2\cdot(1{,}748\cdot 10^{-7} + \mathrm{j}\,1{,}031\cdot 10^{-6})\cdot 2000}}$$

$$= 13203,5 \cdot e^{\mathrm{j}\,-4{,}81^o}$$

- Dosazení integračních konstant do rovnic (2.14) a (2.17) pro výpočet $\boldsymbol{U}(x)$ a $\boldsymbol{I}(x)$:

$$\boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{A} \cdot e^{\gamma x} + \boldsymbol{B} \cdot e^{-\gamma x} = 1110,7 \cdot e^{\mathrm{j}\,84{,}96^o} \cdot e^{(1{,}748\cdot 10^{-7} + \mathrm{j}\,1{,}031\cdot 10^{-6})\cdot x} + 13203,5 \cdot e^{\mathrm{j}\,-4{,}81^o} \cdot e^{-(1{,}748\cdot 10^{-7} + \mathrm{j}\,1{,}031\cdot 10^{-6})\cdot x} \tag{5.24}$$

$$\boldsymbol{I}(x) = -\frac{\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{Z}_0} \cdot e^{\gamma x} + \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{Z}_0} \cdot e^{-\gamma x} = -\frac{1110,7 \cdot e^{\mathrm{j}\,84{,}96^o}}{449,881 \cdot e^{\mathrm{j}\,-9{,}623^o}} \cdot e^{(1{,}748\cdot 10^{-7} + \mathrm{j}\,1{,}031\cdot 10^{-6})\cdot x} + \frac{13203,5 \cdot e^{\mathrm{j}\,-4{,}81^o}}{449,881 \cdot e^{\mathrm{j}\,-9{,}623^o}} \cdot e^{-(1{,}748\cdot 10^{-7} + \mathrm{j}\,1{,}031\cdot 10^{-6})\cdot x} \tag{5.25}$$

- Výpočet fázorů napětí a proudu v půlce vedení, tj. pro $x = 1000$ m:

$$\boldsymbol{U}(1000) = 1110,89 \cdot e^{\mathrm{j}\,85,02^o} + 13201,2 \cdot e^{\mathrm{j}\,-4,87^o} = 13250 - \mathrm{j}\,13,86 = 13250 \cdot e^{\mathrm{j}\,-0,06^o}\ [V] \tag{5.26}$$

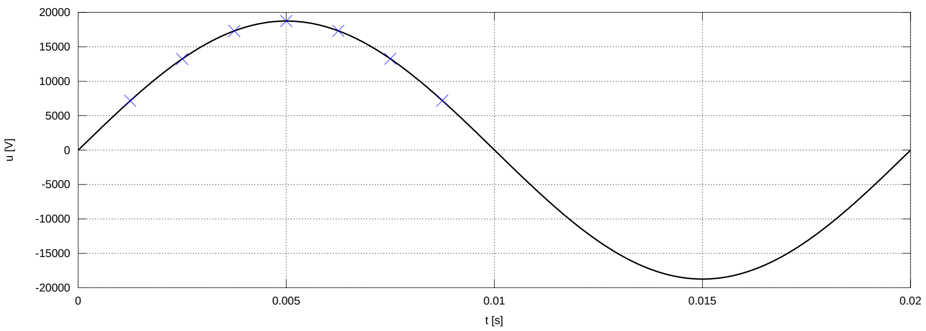
$$\boldsymbol{I}(1000) = 2,47 \cdot e^{\mathrm{j}\,-85,36^o} + 29,34 \cdot e^{\mathrm{j}\,4,75^o} = 29,44 - \mathrm{j}\,0,03 = 29,44 \cdot e^{\mathrm{j}\,-0,06^o}\ [A] \tag{5.27}$$

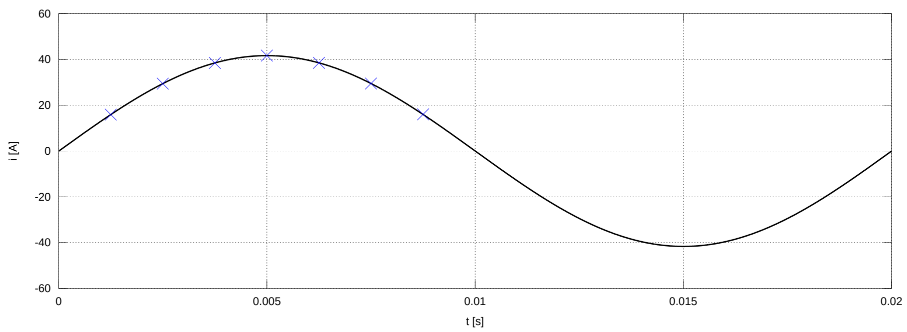
- Časové průběhy napětí a proudu v půlce vedení:

$$u(t) = 18738,3 \cdot \sin(314,16 \cdot t - 0,06^o) \qquad [V] \tag{5.28}$$

$$i(t) = 41,64 \cdot \sin(314,16 \cdot t - 0,06^o) \qquad [A] \tag{5.29}$$

Na následujících grafech jsou uvedeny časové průběhy napětí $u(t)$ a proudu $i(t)$v půlce vedení s vyznačenými body v časech $t = \frac{T}{16}, \frac{T}{8}, \frac{3T}{16}, \frac{T}{4}, \frac{5T}{16}, \frac{3T}{8}\ a\ \frac{7T}{16}$, které jsou použity dále.





Obr. 5.4: Časový průběh napětí a proudu v půlce vedení s odporovou zátěží $Z_\mathrm{k} = 449,881\ \Omega$ připojenou na konci vedení a na začátku vedení $Z_\mathrm{p} = 449,881\ \Omega$

V následujících tabulkách (5.6), (5.7) jsou okamžité hodnoty napětí a proudu podél vedení pro x v rozsahu od $x = 0$ m do $x = 2000$ m po 200 m a v časech $t = \frac{T}{16}, \frac{T}{8}, \frac{3T}{16}, \frac{T}{4}, \frac{5T}{16}, \frac{3T}{8}\ a\ \frac{7T}{16}$. Perioda T pro síťovou frekvenci $f = 50$ Hz je 20 ms.

$u(x,t)$ [V] - analytické řešení							
x [m] / t [ms]	1,25	2,5	3,75	5	6,25	7,5	8,75
0	7172,30	13253,80	17317,50	18744,80	17318,30	13255,30	7174,34
200	7168,38	13250,30	17314,90	18743,50	17318,60	13257,10	7177,27
400	7164,47	13246,70	17312,30	18742,20	17318,80	13258,80	7180,19
600	7160,56	13243,20	17309,70	18740,90	17319,00	13260,50	7183,11
800	7156,65	13239,70	17307,10	18739,60	17319,20	13262,20	7186,03
1000	7152,73	13236,10	17304,40	18738,30	17319,50	13263,90	7188,95
1200	7148,82	13232,60	17301,80	18737,00	17319,70	13265,60	7191,88
1400	7144,91	13229,10	17299,20	18735,70	17319,90	13267,30	7194,80
1600	7141,00	13225,50	17296,60	18734,40	17320,10	13268,90	7197,72
1800	7137,08	13222,00	17294,00	18733,10	17320,30	13270,60	7200,63
2000	7133,17	13218,50	17291,40	18731,80	17320,50	13272,30	7203,55

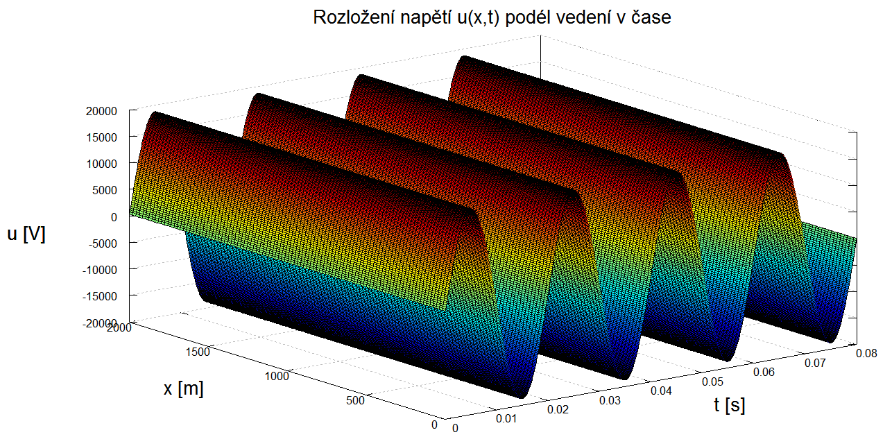
Tab. 5.6: Okamžité hodnoty napětí na vedení s odporovou zátěží $Z_{\mathrm{k}} = 449,881\ \Omega$ připojenou na konci vedení a na začátku vedení $Z_{\mathrm{p}} = 449,881\ \Omega$ - analytické řešení

$i(x,t)$ [A] - analytické řešení							
x [m] / t [ms]	1,25	2,5	3,75	5	6,25	7,5	8,75
0	15,9362	29,4438	38,4689	41,6374	38,4670	29,4403	15,9317
200	15,9282	29,4377	38,4655	41,6374	38,4703	29,4465	15,9397
400	15,9201	29,4315	38,4622	41,6374	38,4737	29,4527	15,9478
600	15,9121	29,4253	38,4589	41,6374	38,4770	29,4588	15,9558
800	15,9040	29,4192	38,4555	41,6374	38,4803	29,4650	15,9639
1000	15,8960	29,4130	38,4522	41,6374	38,4836	29,4711	15,9719
1200	15,8879	29,4068	38,4488	41,6374	38,4870	29,4773	15,9800
1400	15,8798	29,4007	38,4455	41,6373	38,4903	29,4834	15,9880
1600	15,8718	29,3945	38,4421	41,6373	38,4936	29,4896	15,9960
1800	15,8637	29,3883	38,4388	41,6373	38,4969	29,4957	16,0041
2000	15,8557	29,3822	38,4355	41,6373	38,5003	29,5019	16,0121

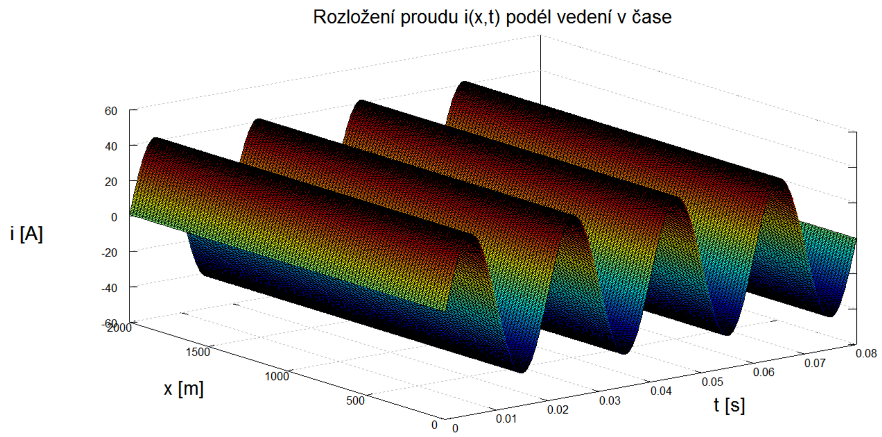
Tab. 5.7: Okamžité hodnoty proudu vedením s odporovou zátěží $Z_{\mathrm{k}} = 449,881\ \Omega$ připojenou na konci vedení a na začátku vedení $Z_{\mathrm{p}} = 449,881\ \Omega$ - analytické řešení

5.1.3.2 Numerické řešení

Pro numerické řešení byla použita Wendroffova diferenční aproximace popsaná v kapitole (4.1.2) na sítí o prostorovém kroku $\Delta x = 20$ m a časovém kroku $\Delta t = 6,25 \cdot 10^{-5}$ s. Parametry použité sítě byly zvoleny záměrně kvůli konvergenci numerického řešení k očekávanému řešení. Při použití těchto parametrů sítě numerické řešení konvergovalo velmi přesně, proto nebylo potřeba zjemnit síť a více zatěžovat výpočetní systém. Soustava rovnic (4.7) byla vyřešena v programu napsaném v jazyce Octave uvedeném v příloze (A.1.1). Výstupem tohoto programu jsou 3D grafy rozložení napětí (obr. 5.5) a proudu (obr. 5.6) podél vedení v čase. Z matic NAPETI a PROUD byly vybrány okamžité hodnoty napětí a proudu podél vedení pro x v rozsahu od $x = 0$ m do $x = 2000$ m po 200 m a v časech $t = \frac{T}{16}, \frac{T}{8}, \frac{3T}{16}, \frac{T}{4}, \frac{5T}{16}, \frac{3T}{8}$ a $\frac{7T}{16}$ ve čtvrté periodě T. Tyto hodnoty jsou uvedeny v tabulkách tab. 5.8 a tab. 5.9.



Obr. 5.5: Graf rozložení napětí podél vedení s odporovou zátěží $Z_\mathrm{k} = 449,881\ \Omega$ připojenou na konci vedení a na začátku vedení $Z_\mathrm{p} = 449,881\ \Omega$



Obr. 5.6: Graf rozložení proudu podél vedení s odporovou zátěží $Z_\mathrm{k} = 449,881\ \Omega$ připojenou na konci vedení a na začátku vedení $Z_\mathrm{p} = 449,881\ \Omega$

$u(x,t)$ [V] - numerické řešení							
x [m] / t [ms]	61,25	62,5	63,75	65	66,25	67,5	68,75
0	7172,29	13253,80	17317,50	18744,80	17318,40	13255,40	7174,34
200	7168,28	13250,20	17314,80	18743,40	17318,50	13257,00	7177,26
400	7164,32	13246,60	17312,10	18742,10	17318,70	13258,60	7180,09
600	7160,69	13243,30	17309,70	18740,90	17319,00	13260,40	7183,04
800	7156,55	13239,60	17307,10	18739,70	17319,30	13262,30	7186,18
1000	7152,85	13236,20	17304,50	18738,30	17319,40	13263,70	7188,80
1200	7148,64	13232,50	17301,70	18737,00	17319,70	13265,60	7192,01
1400	7145,12	13229,30	17299,40	18735,90	17320,00	13267,30	7194,74
1600	7140,86	13225,40	17296,40	18734,20	17319,90	13268,80	7197,64
1800	7137,01	13222,00	17294,10	18733,30	17320,50	13270,90	7200,83
2000	7133,40	13218,70	17291,50	18731,90	17320,50	13272,20	7203,37

Tab. 5.8: Okamžité hodnoty napětí na vedení s odporovou zátěží $Z_k = 449,881\ \Omega$ připojenou na konci vedení a na začátku vedení $Z_p = 449,881\ \Omega$ - numerické řešení

$i(x,t)$ [A] - numerické řešení							
x [m] / t [ms]	61,25	62,5	63,75	65	66,25	67,5	68,75
0	15,9362	29,4438	38,4689	41,6374	38,4670	29,4403	15,9317
200	15,9279	29,4375	38,4654	41,6373	38,4702	29,4464	15,9397
400	15,9198	29,4311	38,4619	41,6371	38,4734	29,4524	15,9476
600	15,9123	29,4255	38,4590	41,6374	38,4770	29,4587	15,9557
800	15,9038	29,4190	38,4555	41,6375	38,4805	29,4652	15,9642
1000	15,8962	29,4132	38,4522	41,6373	38,4835	29,4708	15,9716
1200	15,8875	29,4065	38,4486	41,6373	38,4871	29,4775	15,9803
1400	15,8803	29,4011	38,4459	41,6376	38,4905	29,4835	15,9879
1600	15,8715	29,3941	38,4417	41,6368	38,4932	29,4893	15,9959
1800	15,8636	29,3884	38,4390	41,6377	38,4974	29,4962	16,0045
2000	15,8562	29,3826	38,4357	41,6374	38,5002	29,5016	16,0117

Tab. 5.9: Okamžité hodnoty proudu vedením s odporovou zátěží $Z_k = 449,881\ \Omega$ připojenou na konci vedení a na začátku vedení $Z_p = 449,881\ \Omega$ - numerické řešení

5.1.3.3 Porovnání analytického a numerického řešení

Z porovnání okamžitých hodnot napětí $u(x,t)$ podél vedení s odporovou zátěží $Z_\mathrm{k} = 449,881\ \Omega$ připojenou na konci vedení a na začátku vedení $Z_\mathrm{p} = 449,881\ \Omega$ shrnutých v tabulkách 5.6 a 5.8 a okamžitých hodnot proudu $i(x,t)$ uvedených v tabulkách 5.7 a 5.9 je zřejmé, že se tyto hodnoty velmi shodují. Největší absolutní chyba metody výpočtu napětí Δu dosahovala 0,3 V a největší absolutní chyba metody výpočtu proudu Δi dosahovala 0,5 mA. Tyto chyby a souřadnice v jakém místě na vedení a v jakém čase se vyskytly shrnuje tabulka 5.10.

(a)

$\boldsymbol{x}$ [m]	$\boldsymbol{t}$ [ms]	$\boldsymbol{\Delta u}$ [V]	$\boldsymbol{\delta u}$ [%]
1800	67,5	0,3	0,0023

(b)

$\boldsymbol{x}$ [m]	$\boldsymbol{t}$ [ms]	$\boldsymbol{\Delta i}$ [mA]	$\boldsymbol{\delta i}$ [%]
1400	61,25	0,5	0,0032
2000	61,25	0,5	0,0032
1600	65	0,5	0,0012
1800	66,25	0,5	0,0013
1800	67,55	0,5	0,0017

Tab. 5.10: Tabulka maximálních absolutních chyb metody výpočtu napětí (a) a proudu (b) a jejich odpovídající relativní chyby - vedení s odporovou zátěží $Z_\mathrm{k} = 449,881\ \Omega$ připojenou na konci vedení a na začátku vedení $Z_\mathrm{p} = 449,881\ \Omega$

- Příklad výpočtu absolutní chyby metody Δi a relativní chyby metody δi pro $x = 1400$ m a $t = 61,25$ ms:

$$\Delta i = \mid i_\mathrm{N} - i_\mathrm{A} \mid = \mid 15,8803 - 15,8798 \mid = 0,5\ \mathrm{mA} \tag{5.30}$$

$$\delta i = \frac{\Delta i}{i_\mathrm{A}} \cdot 100 = \frac{0,5}{15,8798} \cdot 100 = 0,0032\ \% \tag{5.31}$$

Hodnota označená jako i_N je získána numerickým výpočtem a hodnota označená jako i_A je získána analytickým výpočtem.

Z relativních chyb metody výpočtu napětí δu a proudu δi plyne, že se hodnoty získané numerickým řešením lišily od hodnot získaných analytickým řešením maximálně o 0,0023 % v případě napětí a o 0,0032 % v případě proudu.

5.1.4 Trakční vedení napájené zdrojem napětí o frekvenci 125 kHz

Pro ilustraci odrazů na vedení, které se při délce vedení $l = 2$ km a frekvenci zdroje 50 Hz neprojevily, je model trakčního vedení napájen zdrojem napětí o frekvenci 125 kHz. V tomto případě vychází vlnová délka $\lambda = 2\,400$ m, proto je tedy nutné modelovat vedení dlouhé 2 km obvodem s rozprostřenými parametry.

Jsou zde modelovány 3 situace: vedení naprázdno, nakrátko a zatížené vlnovou impedancí na výstupu. Na vstup vedení je přiveden signál ve tvaru půlvlny sinusového signálu o frekvenci 125 kHz a amplitudě 37 477 V. Pro všechny tyto situace je vstup vedení zatížen vlnovou impedancí, tedy je impedančně přizpůsoben.

5.1.4.1 Vedení naprázdno

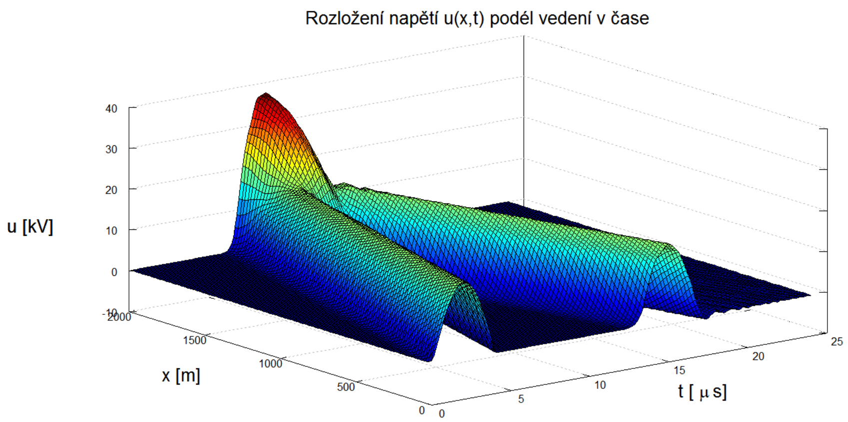
V případě zakončení vedení naprázdno dochází na konci vedení k odrazu napěťové vlny se stejnou amplitudou i fází a k odrazu proudové vlny se stejnou amplitudou, ale s opačnou fází. Výsledkem odrazu napěťové vlny je vznik napětí na konci vedení o dvojnásobné velikosti v porovnání s velikostí napětí postupné vlny. Proud je vlivem vzájemného fázového posuvu mezi postupnou a odraženou proudovou vlnou nulový. Na vstupu vedení už k odrazům nedochází, protože vstup je impedančně přizpůsobený. Tyto situace ilustrují obr. 5.7 a obr. 5.8.

5.1.4.2 Vedení nakrátko

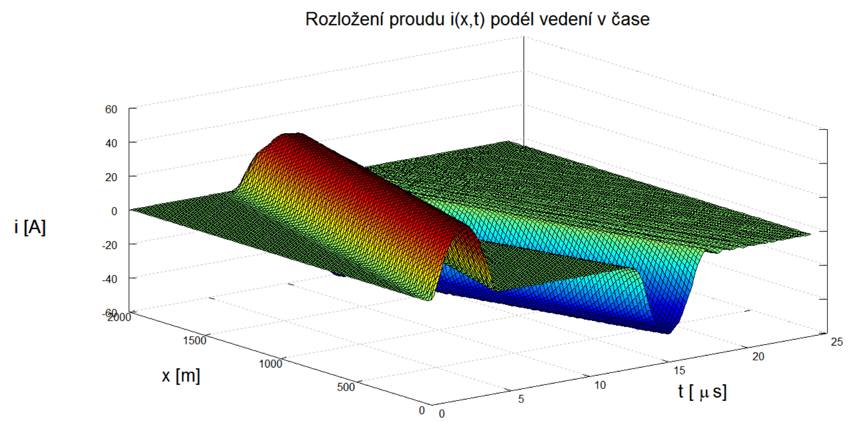
Je-li vedení zakončeno nakrátko, dochází na jeho konci k odrazu proudové vlny se stejnou amplitudou i fází a k odrazu napěťové vlny se stejnou amplitudou, ale s opačnou fází. Velikost proudu na konci vedení je vlivem odrazu proudové vlny zvýšena na dvojnásobek velikosti proudu postupné vlny. Napětí na konci vedení je vlivem vzájemného fázového posuvu postupné a odražené napěťové vlny nulové. Na vstupu vedení už k odrazům nedochází, protože vstup je impedančně přizpůsobený. Tyto situace ilustrují obr. 5.9 a obr. 5.10.

5.1.4.3 Vedení zakončené vlnovou impedancí

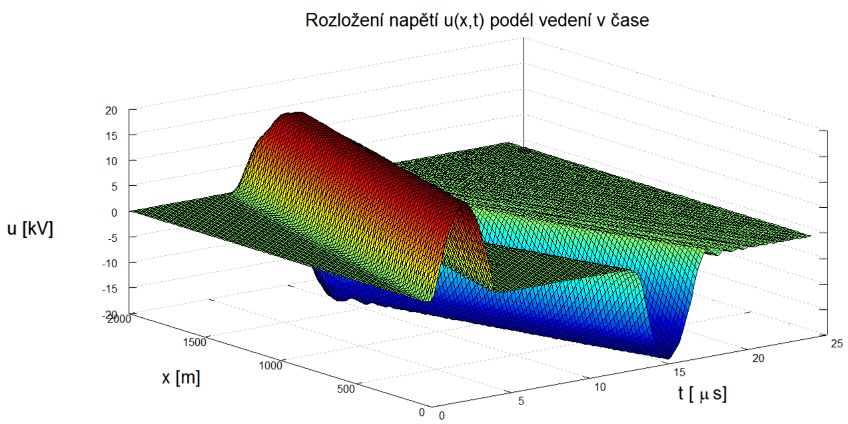
V případě zakončení vedení vlnovou impedancí nevznikají na jeho konci odrazy. Je-li na vstup vedení rovněž připojena vlnová impedance, lze toto vedení nazvat impedančně přizpůsobeným. Tyto situace ilustrují obr. 5.11 a obr. 5.12.



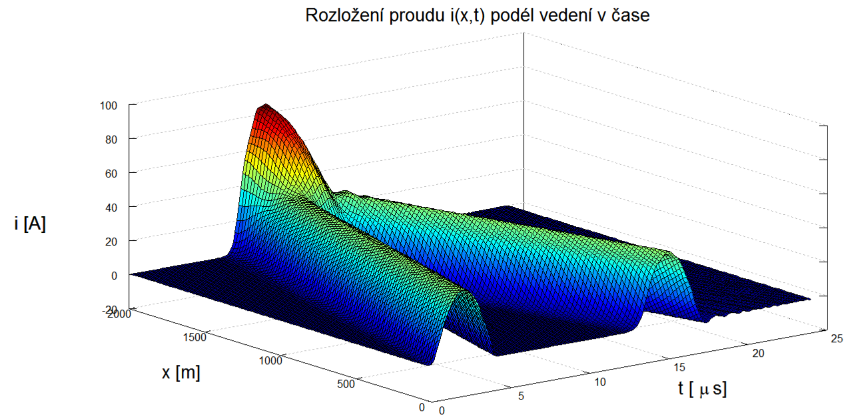
Obr. 5.7: Šíření napěťové půlvlny vedením zakončeném naprázdno



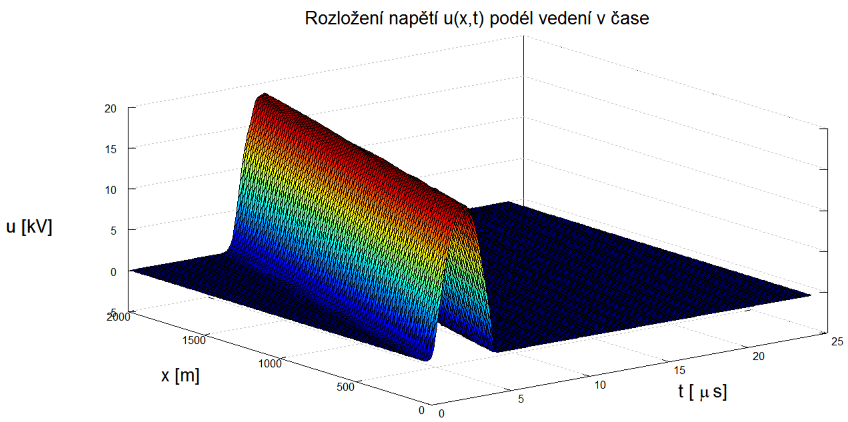
Obr. 5.8: Šíření proudové půlvlny vedením zakončeném naprázdno



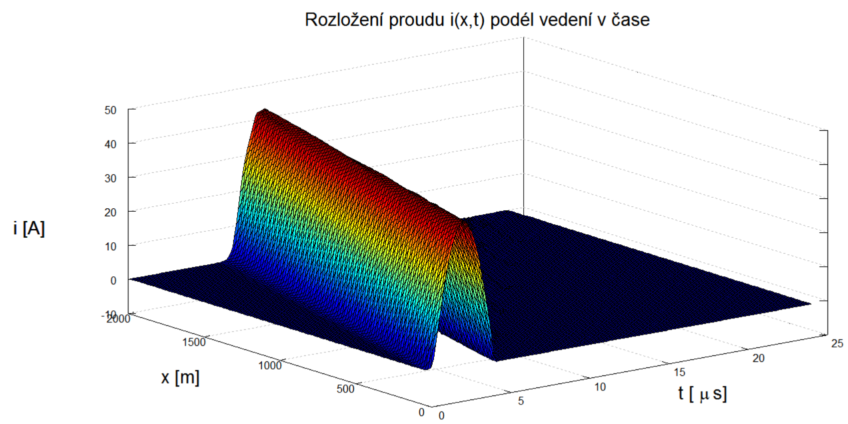
Obr. 5.9: Šíření napěťové půlvlny vedením zakončeném nakrátko



Obr. 5.10: Šíření proudové půlvlny vedením zakončeném nakrátko



Obr. 5.11: Šíření napěťové půlvlny vedením zakončeném vlnovou impedancí



Obr. 5.12: Šíření proudové půlvlny vedením zakončeném vlnovou impedancí

5.1.5 Trojfázové vedení vn se zemním lanem

5.1.5.1 Stožár Soudek

U tohoto typu stožáru byly při výpočtu uvažovány jako fázové vodiče AlFe lana o průřezu 450 mm^2. V případě zemního lana byl uvažován průřez 125 mm^2. Při určování primárních parametrů vedení s tímto typem stožárů byla použita funkce A.2.1, v níž jsou s využitím vhodného souřadného systému namodelovány vzájemné polohy vodičů. Program je uveden v příloze A.2.1. Schématické znázornění uspořádání vodičů u tohoto typu stožáru je na obr. 5.13. V následujících tabulkách jsou uvedeny vypočítané primární parametry vedení se stožáry Soudek. K jejich výpočtu slouží funkce PocitejOdpory.m (příloha A.2.3), PocitejKapacity.m (příloha A.2.4) a PocitejIndukcnosti.m (příloha A.2.5). Pro výpočet byly využity vztahy z [2].

vodič	0	1	2	3
0	1,853	0,495	0,392	0,324
1	0,495	1,764	0,561	0,423
2	0,392	0,561	1,764	0,561
3	0,324	0,423	0,561	1,764

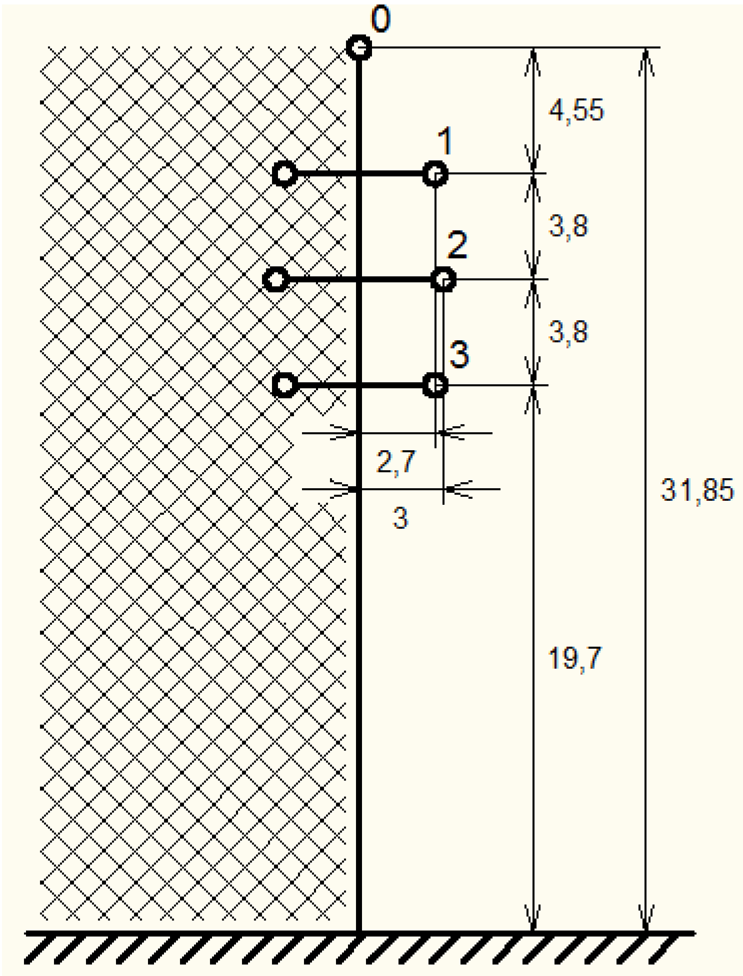
Tab. 5.11: Matice indukčností vedení stožáru Soudek v jednotkách μH/m

vodič	0	1	2	3
0	3,832	1,574	0,850	0,594
1	1,574	3,482	1,822	0,935
2	0,850	1,822	3,502	1,845
3	0,594	0,935	1,845	4,360

Tab. 5.12: Matice kapacit vedení stožáru Soudek v jednotkách pF/m

vodič	R
0	0,159
1	0,065
2	0,065
3	0,065

Tab. 5.13: Vektor odporů vedení stožáru Soudek v jednotkách Ω/m



Obr. 5.13: Uspořádání vodičů na stožáru Soudek

5.1.5.2 Stožár Donau

Při výpočtu primární parametrů vedení se stožáry Donau byly uvažovány měděné fázové vodiče o průřezu 450 mm^2. V případě zemního lana byl uvažován průřez 125 mm^2. Vzájemné polohy vodičů u tohoto typu stožáru byly dle obr. 5.14 namodelovány s využitím vhodného souřadného systému ve funkci A.2.2. Schématické znázornění uspořádání vodičů u tohoto typu stožáru je na obr. 5.14. Primární parametry vedení se stožáry Donau jsou uvedeny v tabulkách níže. K jejich výpočtu byly použity stejné funkce jako v případě 5.1.5.1, avšak pracující s parametry tohoto stožáru.

vodič	0	1	2	3
0	1,903	0,386	0,260	0,252
1	0,386	1,814	0,395	0,395
2	0,260	0,395	1,814	0,463
3	0,252	0,395	0,463	1,814

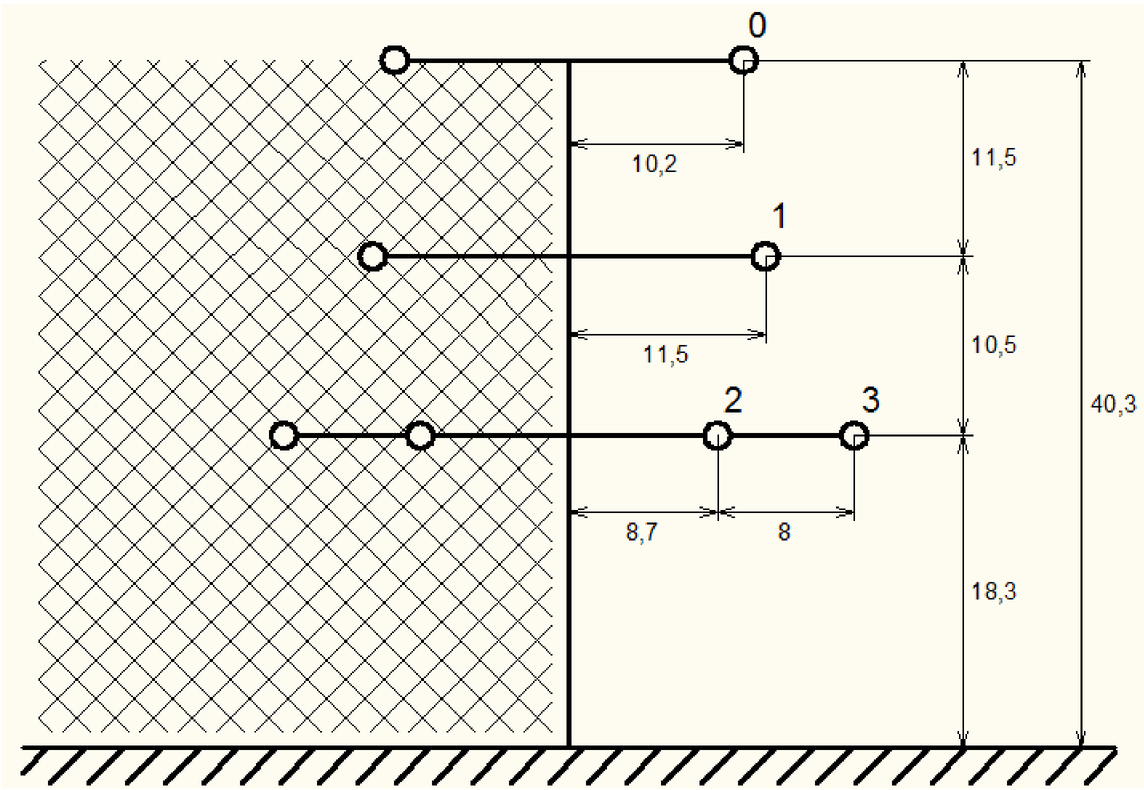
Tab. 5.14: Matice indukčností vedení stožáru Donau v jednotkách μH/m

vodič	0	1	2	3
0	4,236	1,165	0,477	0,444
1	1,165	4,054	0,950	0,956
2	0,477	0,950	4,766	1,195
3	0,444	0,956	1,195	4,788

Tab. 5.15: Matice kapacit vedení stožáru Donau v jednotkách pF/m

vodič	R
0	0,095
1	0,039
2	0,039
3	0,039

Tab. 5.16: Vektor odporů vedení stožáru Donau v jednotkách Ω/m



Obr. 5.14: Uspořádání vodičů na stožáru Donau

5.1.5.3 Porovnání primárních parametrů vedení v případě použití stožárů typu Soudek a Donau

Vlivem rozdílné geometrie obou typů stožárů se liší i primární parametry vedení s těmito stožáry.

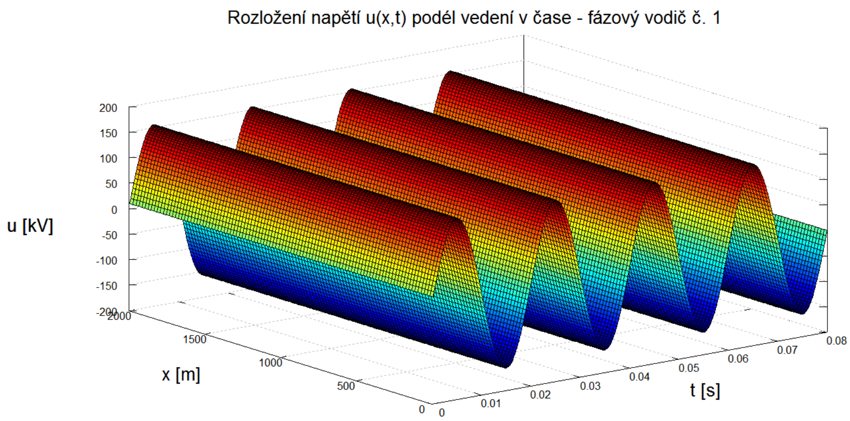
Vlastní indukčnosti vodičů se v případě obou vedení liší v řádu desítek nH. U vzájemných indukčností mezi jednotlivými vodiči je rozdíl vyšší. Liší se v řádu stovek nH. U stožáru typu Donau vyšly vyšší hodnoty vlastních indukčností. Z porovnání vzájemných indukčností jednotlivých vodičů je patrné, že vyšších hodnot je dosaženo u vedení se stožáry typu Soudek.

Vzájemné kapacity jednotlivých vodičů a jejich kapacity proti zemi se liší v řádu desítek pF. Kapacity vodičů proti zemi u vedení se stožáry typu Donau dosahují vyšších hodnot, než v případě vedení se stožáry typu Soudek. V případě vzájemných kapacit mezi jednotlivými vodiči je však situace opačná. U vedení se stožáry typu Soudek vyšli ve všech případech vyšší hodnoty vzájemných kapacit.

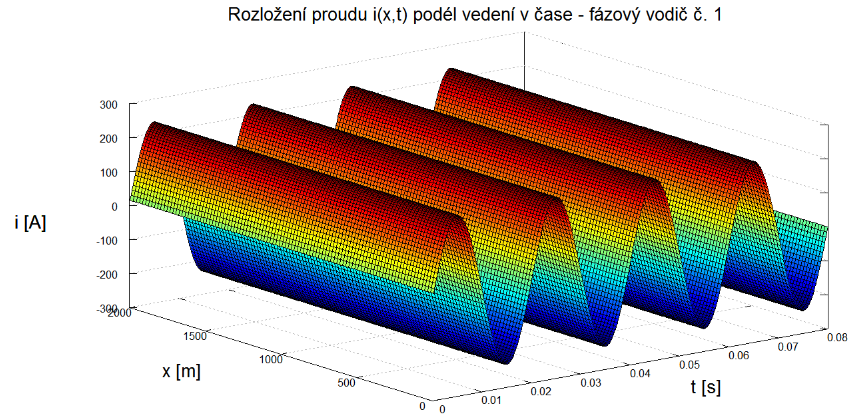
Z tabulek je patrné 5.16 a 5.13, že se odpory jednotlivých fázových vodičů a zemního lana u obou vedení liší v desítkách $\mu\Omega$.

5.1.5.4 Rozložení napětí a proudů na jednotlivých podél vedení se stožáry typu Donau v čase

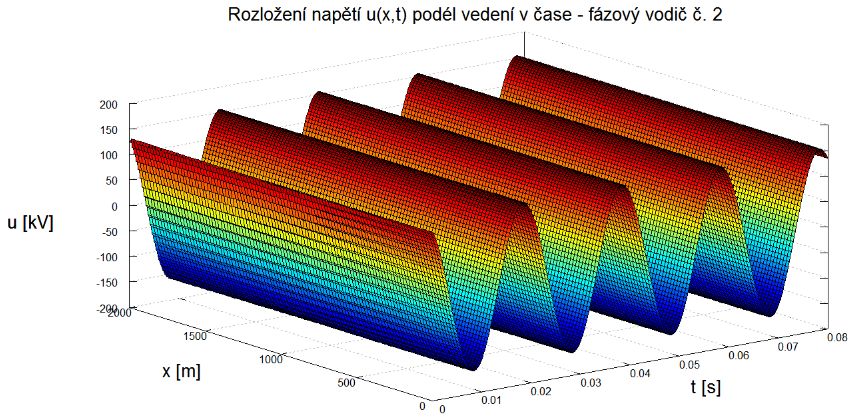
Na následující obrázcích jsou zobrazeny průběhy napětí a proudů na jednotlivých fázích u vedení se stožáry typu Donau. Pro napájení vedení byl uvažován souměrný zdroj napětí 110 kV o frekvenci 50 Hz. Jednotlivé fázové vodiče jsou na výstupu impedančně přizpůsobeny. Průběhy napětí a proudů u vedení se stožáry typu Soudek nejsou zobrazeny, jelikož byly jejich průběhy téměř shodné s průběhy napětí u vedení se stožáry typu Donau.



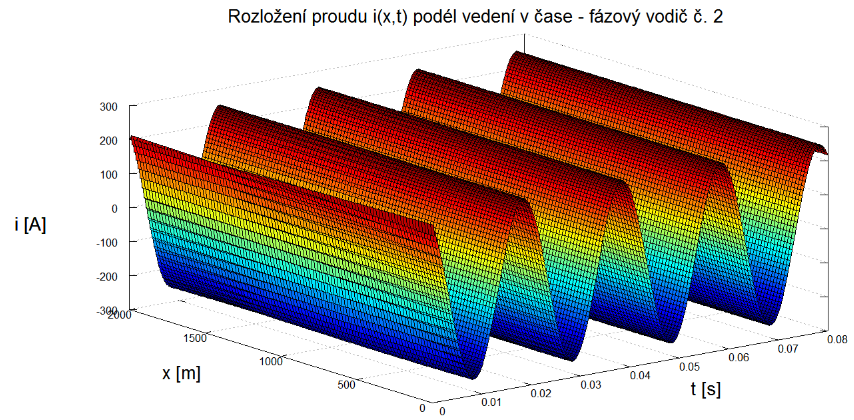
Obr. 5.15: Rozložení napětí u(x,t) podél vedení na stožáru Soudek v čase - 1. fázový vodič



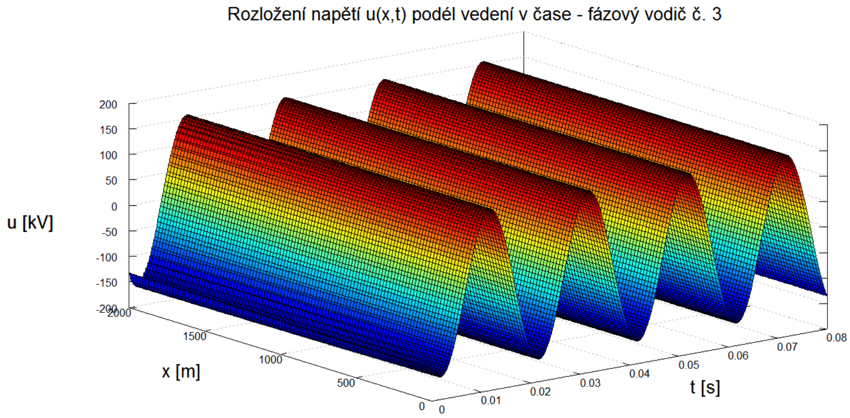
Obr. 5.16: Rozložení proudu i(x,t) podél vedení na stožáru Soudek v čase - 1. fázový vodič



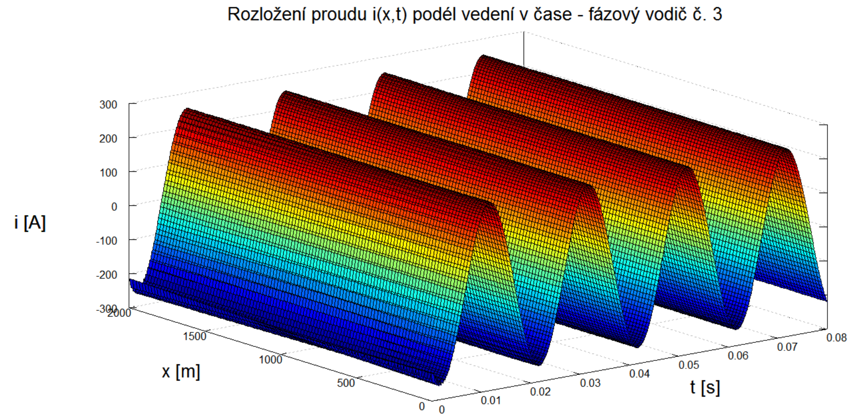
Obr. 5.17: Rozložení napětí u(x,t) podél vedení na stožáru Soudek v čase - 2. fázový vodič



Obr. 5.18: Rozložení proudu i(x,t) podél vedení na stožáru Soudek v čase - 2. fázový vodič



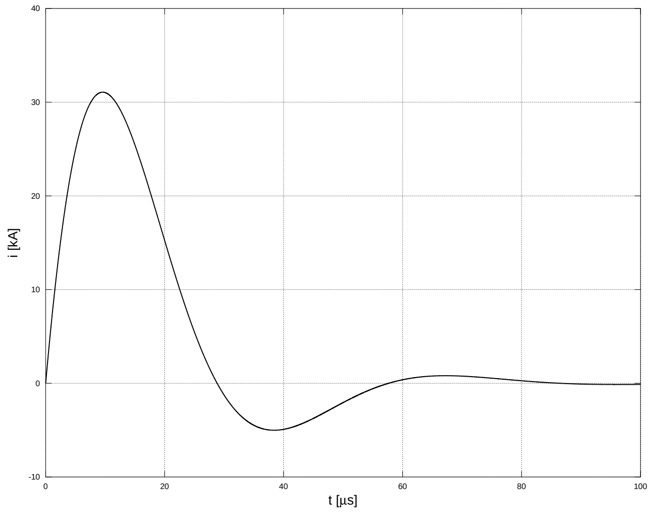
Obr. 5.19: Rozložení napětí u(x,t) podél vedení na stožáru Soudek v čase - 3. fázový vodič



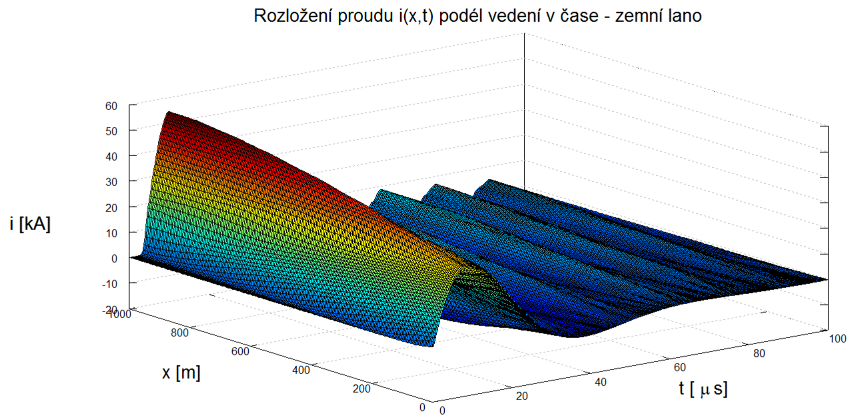
Obr. 5.20: Rozložení proudu i(x,t) podél vedení na stožáru Soudek v čase - 3. fázový vodič

5.1.5.5 Modelování rušivých jevů

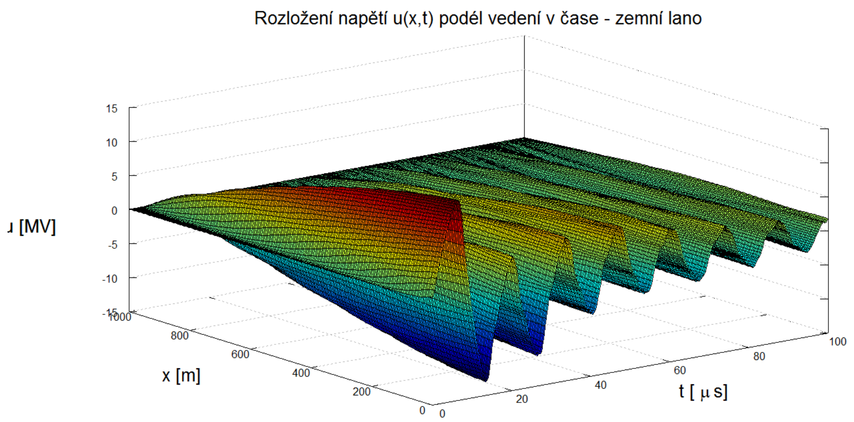
K účelu ochrany vedení proti úderu blesku se používá zemní lano. Vzhledem k jeho umístění je pravděpodobnost zásahu bleskem při atmosférických výbojích mnohem vyšší, než pravděpodobnost zásahu jednotlivých fázových vodičů. Vlivem vzájemných vazeb mezi jednotlivými vodiči však dochází k prudkému nárůstu proudů a napětí na těchto vodičích. Pro modelování úderů blesku se používají normalizované rázové vlny, například 1,2/50 nebo 8/20, kde první údaj značí dobu trvání čela této vlny a druhý údaj dobu půltýlu, tzn. časový interval mezi počátkem vlny a okamžikem, kdy vlna poklesne na polovinu své maximální hodnoty. Oba tyto údaje jsou uváděny v μs. V tomto příkladě byla použita rázová vlna 8/20 o maximální hodnotě 31,3 kA uvedená na obrázku 5.21 pro simulaci úderu blesku do zemních lan vedení na stožárech Soudek. Na následujících grafech jsou zobrazeny časové průběhy napětí a proudu podél vedení na tomto stožáru při zásahu blesku do zemního lana, konkrétně napětí a proud na zemním laně a na prvním fázovém vodiči.



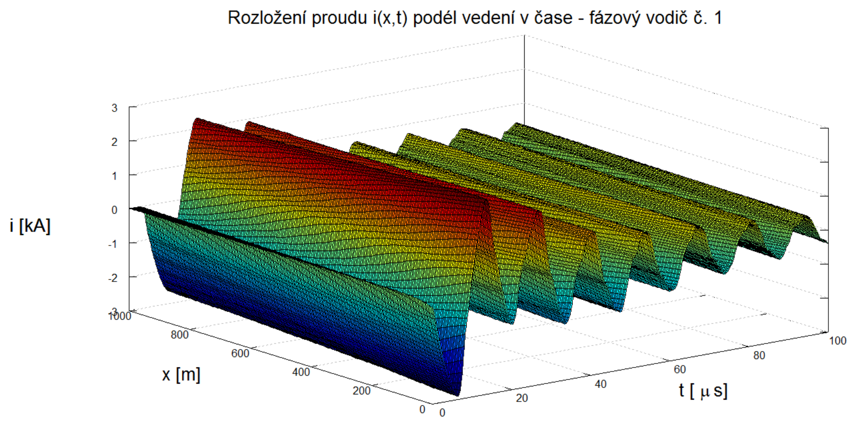
Obr. 5.21: Časový průběh rázové vlny proudu 8/20



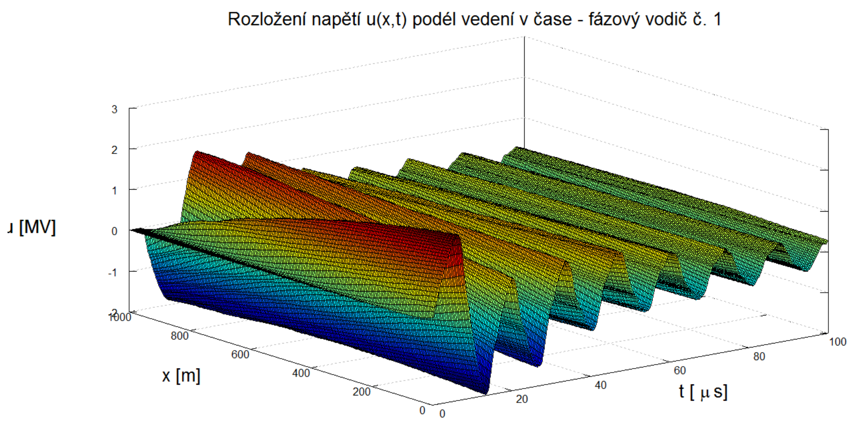
Obr. 5.22: Rozložení proudu i(x,t) podél vedení v čase při zásahu blesku do zemního lana - zemní lano na stožáru Soudek



Obr. 5.23: Rozložení napětí u(x,t) podél vedení v čase při zásahu blesku do zemního lana - zemní lano na stožáru Soudek



Obr. 5.24: Rozložení proudu i(x,t) podél vedení v čase při zásahu blesku do zemního lana - 1. fázový vodič na stožáru Soudek



Obr. 5.25: Rozložení napětí u(x,t) podél vedení v čase při zásahu blesku do zemního lana - 1. fázový vodič na stožáru Soudek

6

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo porovnání analytického a numerického řešení telegrafních rovnic. Pro numerický výpočet byla zvolena metoda konečných diferencí založená na Wendroffově diferenční aproximaci.

Prvním ilustrativním příkladem byl model trakčního vedení. Trakční vedení bylo nejprve zatíženo impedancí $\boldsymbol{Z}_k$ o velikosti 449,881 Ω připojenou na konec vedení. Pro tento případ bylo rozložení napětí a proudu nejprve řešeny analyticky v harmonickém ustáleném stavu a poté numericky. Obě tato řešení byla porovnávána. Absolutní chyba metody výpočtu dosáhla maximálně hodnoty 0,5 V u napětí a 1 mA v případě proudu. Relativní chyby metody výpočtu napětí δu a proudu δi vyšly velice nízké. Hodnoty získané numerickým řešením se lišily od hodnot získaných řešením analytickým maximálně o 0,0035 % v případě napětí a o 0,0032 % v případě proudu.

Dále bylo trakční vedení zatíženo impedancí 449,881 Ω na začátku i na konci vedení. V tomto případě dosahovala maximální absolutní chyba u výpočtu napětí hodnoty 0,3 V, u výpočtu proudu 0,5 mA. V tomto případě opět vyšly relativní chyby metody výpočtu napětí δu a proudu δi velice nízké. Hodnoty získané numerickým řešením lišily od hodnot získaných řešením analytickým maximálně o 0,0023 % v případě napětí a o 0,0032 % v případě proudu.

Pro demonstraci odrazů na vedení bylo v dalším příkladě trakční vedení napájeno zdrojem napětí o frekvenci 125 kHz. Byly zde řešeny případy tohoto vedení nakrátko, naprázdno a vedení zatíženého vlnovou impedancí. Ve všech případech byla na impedančně přizpůsobený vstup přivedena půlvlna sinusového průběhu napětí s amplitudou 37 477 V.

Další část se zabývala trojfázovým vedení VN se zemním lanem na stožárech Soudek a Donau. Byly uvedeny vypočtené primární parametry vedení na obou typech stožárů. Rozdíly ve velikostech vlastních a vzájemných indukčností i rozdíly ve velikostech kapacit jednotlivých vodičů proti zemi a vzájemných kapacit přisuzuji rozdílnému geometrickému uspořádání obou typů stožárů. Hodnoty vzájemných indukčností a vzájemných kapacit mezi jednotlivými vodiči vyšly menší v případě stožáru typu Donau než u stožáru typu Soudek. Tento výsledek přisuzuji větší vzdálenosti jednotlivých fázových vodičů a zemního lana v případě stožáru typu Donau. U stožáru typu Donau jsou jednotlivé vodiče umístěny ve větší výšce než u stožáru typu Soudek. Tomuto faktu odpovídají nižší kapacity vodičů proti zemi. Vyšší hodnoty odporu v případě všech fázových vodičů a zemního lana vyšly u stožáru typu Soudek. U tohoto stožáru byla uvažována jako vodiče AlFe lana. Konduktivita hliníku je $3{,}4 \cdot 10^7$ S/m. Konduktivita mědi je $5{,}7 \cdot 10^7$ S/m. Z toho vyplývá, že menší hodnoty odporu by měly vyjít u stožáru typu Donau, kde byla měď uvažována jako materiál pro jednotlivé vodiče. Této úvaze odpovídají výsledné hodnoty odporů (viz 5.13 a 5.16). Průřezy jednotlivých vodičů byly v obou případech uvažovány stejné.

V poslední části (5.1.5.5) byl nasimulován úder blesku do zemního lana pomocí proudové rázové vlny 8/20. Z grafů uvedených v této kapitole je patrné, že v takovémto případě se do vodičů indukují napětí v řádech MV a proudy v řádech kA. Zobrazeny zde byly průběhy pouze na vodiči nacházejícím se nejblíže zemnímu lanu, u něhož byly hodnoty indukovaných napětí a proudů nejvyšší.

Při řešení všech příkladů byly uvažovány vodiče vedené rovnoběžně se zemí. V praxi jsou vodiče prohnuty a modelování je mnohem složitější. Také námraza a jiné teplotní rozdíly mají vliv na parametry těchto vedení.

Literatura

[1] Mayer, Daniel. *Úvod do teorie elektrických obvodů* Praha: SNTL, 1981.

[2] Mayer, Daniel. *Elektrodynamika v energetice.* Praha: BEN - technická literatura, 2005. ISBN 80-7300-164-0.

[3] Vitásek, Emil. *Numerické metody.* Praha: SNTL, 1987.

[4] Karban, Pavel. *Homogenní vedení s rozprostřenými parametry.* 2005 [vid. 2012-11-20]. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~karban/teaching/te1/vlnynavedeni/vlnynavedeni.pdf

[5] Pěsta, Jan. *Simulace přechodných jevů v mikrovlnných obvodech.* Plzeň, 2011. Diplomová práce (Ing.). Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta elektrotechnická. Vedoucí práce Antonín Předota.

Příloha A

Použité skripty, zdrojové kódy

A.1 Jednofázové vedení

A.1.1 vedeni1fnum.m

```
%Zadané parametry a potřebné konstanty

        gamma = 5.7e7; %S/m
        r = 0.006; %m
        r0 = 5.5; %m
        h = 5.5; %m
        eps0 = 8.85e-12; %F/m
        mi0 = pi*4e-7; %H/m
        U0 = 26500; %V - efektivní hodnota
        f = 50; %Hz

%Výpočet primárních parametrů vedení

        R = 1/(gamma*(pi*(r*r))); %ohm/m
        L = (mi0/(2*pi))*(0.25 + log(r0/r)); %H/m
        C = (2*pi*eps0)/(log(2*h/r)); %F/m
        G = 0; %S/m

%Výpočet vlnové impedance

        Z0 = sqrt((R+j*2*pi*f*L)/(G+j*2*pi*f*C)); %ohm

%Odpor Rv připojený na vstup vedení a odpor Rz připojený na konec vedení

        Rv = 0; %ohm
        Rz = abs(Z0); %ohm

%Parametry pro simulaci

        konecny_cas =4*(1/f); %s
        delka = 2000; %m
        casove_kroky = 1280;
        k = 100; %prostorové dělení
        dx =  delka/k; %m
        dt =  konecny_cas/casove_kroky; %s

%Vytvoření potřebných matic

        A = zeros(2*(k+1),2*(k+1));
        B = zeros(2*(k+1),2*(k+1));
        D = zeros(2*(k+1),1);
        X = zeros(2*(k+1),1);
        XX = zeros(2*(k+1),casove_kroky);
        NAPETI = zeros(k+1,casove_kroky);
        PROUD = zeros(k+1,casove_kroky);

```

```
        for i = 1:1:k
                A(i,i)         = (-1)/(2*dx); % u
                A(i,i+1)       =  1/(2*dx); % u
                A(i+k+1,i)     =  G/4 + C/(2*dt); % i
                A(i+k+1,i+1)   =  G/4 + C/(2*dt); % i

                A(i,i+k+1)     =  R/4 + L/(2*dt); % u
                A(i,i+k+2)     =  R/4 + L/(2*dt); % u
                A(i+k+1,i+k+1) = (-1)/(2*dx); % i
                A(i+k+1,i+k+2) =  1/(2*dx); % i

                B(i,i)         =  1/(2*dx); % u
                B(i,i+1)       = (-1)/(2*dx); % u
                B(i+k+1,i)     = (-G)/4 + C/(2*dt); % i
                B(i+k+1,i+1)   = (-G)/4 + C/(2*dt); % i

                B(i,i+k+1)     = (-R)/4 + L/(2*dt); % u
                B(i,i+k+2)     = (-R)/4 + L/(2*dt); % u
                B(i+k+1,i+k+1) =  1/(2*dx); % i
                B(i+k+1,i+k+2) = (-1)/(2*dx); % i

        end

%Okrajové podmínky

%U0 = Rv*Ip + Up

        A(k+1,1) = 1;
        A(k+1,k+2) = Rv;

%Uk - Rz*Ik = 0

        A(2*(k+1),k+1) = 1;
        A(2*(k+1),2*(k+1)) = (-Rz);

%Řešení soustavy rovnic Ax = Bx + D

        pom = 0;
        for a = 1:1:casove_kroky

                pom=pom+1;
                D(k+1,1)=U0*sqrt(2)*sin(2*pi*f*a*dt); %U0
                X=A\(B*X+D);

                for b= 1:1:2*(k+1)
                XX(b,pom)=X(b);
                end
        end

%Naplnění matic NAPETI a PROUD hodnotami vypočtenými výše

        NAPETI(1:k+1,:) = XX(1:k+1,:);
        PROUD(1:k+1,:) = XX(k+2:2*(k+1),:);

%Grafy

%Graf rozložení napětí podél vedení v čase

        figure
        surf(dt:dt:konecny_cas,0:dx:delka,NAPETI)
        title ('Rozložení napětí u(x,t) podél vedení v čase','FontSize',20);
        xlabel ('t [s]','FontSize',20);
        ylabel ('x [m]','FontSize',20);
        zlabel ('u [V]','FontSize',20);

%Graf rozložení proudu podél vedení v čase

        figure
        surf(dt:dt:konecny_cas,0:dx:delka,PROUD)
        title ('Rozložení proudu i(x,t) podél vedení v čase','FontSize',20);
        xlabel ('t [s]','FontSize',20);
        ylabel ('x [m]','FontSize',20);
        zlabel ('i [A]','FontSize',20);
```

A.2 Trojfázové vedení

A.2.1 Soudek.m

```
%Funkce obsahující geometrické rozměry stožáru Soudek
%        0 ...... zemní lano
%        1-3 ... fázové vodiče

function [h,d,r,gamma,l] = Soudek()

        h0 = 31.85; %m
        h1 = 27.3; %m
        h2 = 23.5; %m
        h3 = 19.7; %m

        d0 = 0; %m
        d1 = 2.7; %m
        d2 = 3.0; %m
        d3 = 2.7; %m

        r0 = 0.00767; %m; S =1.85e-4 m^2 = 185 mm^2
        r1 = 0.01197; %m; S = 4.5e-4 m^2 = 450 mm^2
        r2 = 0.01197; %m; S = 4.5e-4 m^2 = 450 mm^2
        r3 = 0.01197; %m; S=4.5e-4 m^2 = 450 mm^2

        gamma0 = 3.4e7; %S/m
        gamma1 = 3.4e7; %S/m
        gamma2 = 3.4e7; %S/m
        gamma3 = 3.4e7; %S/m

        l = 1; %m
        h=[h0,h1,h2,h3];
        d=[d0,d1,d2,d3];
        r=[r0,r1,r2,r3];
        gamma=[gamma0,gamma1,gamma2,gamma3];

endfunction
```

A.2.2 Donau.m

```
%Funkce obsahující geometrické rozměry stožáru Donau
%        0 ...... zemní lano
%        1-3 ... fázové vodiče

function [h,d,r,gamma,l] = Donau()

        h0 = 40.3; %m
        h1 = 28.8;%m
        h2 = 18.3; %m
        h3 = 18.3; %m

        d0 = 10.2; %m
        d1 = 12.7; %m
        d2 = 8.7; %m
        d3 = 16.7; %m

        r0 = 0.00767; %m; S =1.85e-4 m^2 = 185 mm^2
        r1 = 0.01197; %m; S = 4.5e-4 m^2 = 450 mm^2
        r2 = 0.01197; %m; S = 4.5e-4 m^2 = 450 mm^2
        r3 = 0.01197; %m; S=4.5e-4 m^2 = 450 mm^2

        gamma0 = 5.7e7; %S/m
        gamma1 = 5.7e7; %S/m
        gamma2 = 5.7e7; %S/m
        gamma3 = 5.7e7; %S/m

        l = 1; %m
        h=[h0,h1,h2,h3];
        d=[d0,d1,d2,d3];
        r=[r0,r1,r2,r3];
```

```
        gamma=[gamma0,gamma1,gamma2,gamma3];

endfunction
```

A.2.3 PocitejOdpory.m

```
%Funkce pro výpočet odporů vedení

function R = PocitejOdpory(TypStozaru)

if TypStozaru == 'S'
        [h,d,r,gamma] = Soudek();
elseif TypStozaru == 'D'
        [h,d,r,gamma] = Donau();
else
        error('Typ stozaru neodpovida!')
end

        R = zeros(1,4);

        for i=1:1:4

        R(i)=1/(gamma(i)*(pi*(r(i)*r(i))));

        end

endfunction
```

A.2.4 PocitejKapacity.m

```
%Funkce pro výpočet kapacit vedení

function [beta,C] = PocitejKapacity(TypStozaru)

if TypStozaru == 'S'
        [h,d,r,gamma] = Soudek();
elseif TypStozaru == 'D'
        [h,d,r,gamma] = Donau();
else
        error('Typ stozaru neodpovida!')
end

eps0 = 8.85e-12; %F/m

alfa = zeros(4);
beta= zeros(4);
C = zeros(4);

for i = 1:1:4
        for j = 1:1:4
                if i == j
                alfa(i,j) = (1/(2*pi*eps0))*log(2*h(i)/r(i));
                else
                alfa(i,j) =
                (1/(2*pi*eps0))*log( sqrt((h(i)+h(j))^2+(d(i)-d(j))^2)/(sqrt((h(i)-h(j))^2+(d(i)-d(j))^2)));
                end
        end
end

beta = inv(alfa);

sum = zeros(4,1);

for i = 1:1:4
        for j = 1:1:4
        sum(i) = sum(i)+beta(i,j);
        C(i,i) = sum(i);
                if i!=j
                C(i,j) = (-1)*beta(i,j);
                end
```

```
        end
end

endfunction
```

A.2.5 PocitejIndukcnosti.m

```
%Funkce pro výpočet indukčností vedení

function L = PocitejIndukcnosti(TypStozaru)

if TypStozaru == 'S'
        [h,d,r,gamma] = Soudek();
        r0 = 63;%m
elseif TypStozaru == 'D'
        [h,d,r,gamma] = Donau();
        r0 = 81;%m
else
        error('Typ stozaru neodpovida!')
end

L = zeros(4);

mi0 = pi*4e-7; %H/m

for i = 1:1:4
        for j = 1:1:4
                if i == j
                L(i,j) = (mi0/(2*pi))*(0.25 + log (r0/r(i))) ;
                else
                L(i,j) = (mi0/(2*pi))*log(r0/ sqrt((h(i)-h(j))^2 + (d(i)-d(j))^2));
                end
        end
end

endfunction
```

A.2.6 m1.m

```
%Pomocná funkce pro vytvoření matic A a B

function [A,B]=m1(dx,dt,k,R,L,G,C)

A = zeros(2*(k+1),2*(k+1));
B = zeros(2*(k+1),2*(k+1));

for p = 1:1:k
        A(p,p) = (-1)/(2*dx);
        A(p,p+1) = 1/(2*dx);
        A(p+k+1,p) = C/(2*dt) + G/4;
        A(p+k+1,p+1) = C/(2*dt) + G/4;

        A(p,p+k+1) = R/4 + L/(2*dt);
        A(p, p+(k+1)+1) = R/4 + L/(2*dt);
        A(p+k+1,p+k+1) = (-1)/(2*dx);
        A(p+k+1,p+(k+1)+1) = 1/(2*dx);

        B(p,p) = 1/(2*dx);
        B(p,p+1) = (-1)/(2*dx);
        B(p+k+1,p) = C/(2*dt) - G/4;
        B(p+k+1,p+1) = C/(2*dt) - G/4;

        B(p,p+k+1) = (-R/4) + L/(2*dt);
        B(p, p+(k+1)+1) = (-R/4) + L/(2*dt);
        B(p+k+1,p+k+1) = 1/(2*dx);
        B(p+k+1,p+(k+1)+1) = (-1)/(2*dx);
end

endfunction
```

A.2.7 m2.m

```
%Pomocná funkce pro vytvoření matic A a B

function [A,B]=m2(dt,k,L,G,C)

A = zeros(2*(k+1),2*(k+1));
B = zeros(2*(k+1),2*(k+1));

for p = 1:1:k
        A(p+k+1,p) = C/(2*dt) + G/4;
        A(p+k+1,p+1) = C/(2*dt) + G/4;

        A(p,p+k+1) = L/(2*dt);
        A(p,p+(k+1)+1) = L/(2*dt);

        B(p+k+1,p) = C/(2*dt) - G/4;
        B(p+k+1,p+1) = C/(2*dt) - G/4;

        B(p,p+k+1) = L/(2*dt);
        B(p,p+(k+1)+1) = L/(2*dt);
end

endfunction
```

A.2.8 vedeni3fnum.m

```
close all
clear all

%Výpočet primárních parametrů vedení

        R = PocitejOdpory('D');
        [beta,C] = PocitejKapacity('D');
        L = PocitejIndukcnosti('D');
        G = zeros(4,4);

%Zadané parametry

        U0_0 = 0; %V
        U0_1 =110000; %V
        U0_2 =110000; %V
        U0_3 =110000; %V
        f = 50; %Hz

%Odpor Rv připojený na vstup vedení a odpor Rz připojený na konec vedení

        Z01 = sqrt((R(2)+j*2*pi*f*L(2,2))/(G(2,2)+j*2*pi*f*C(2,2)));  %ohm
        Z02 = sqrt((R(3)+j*2*pi*f*L(3,3))/(G(3,3)+j*2*pi*f*C(3,3)));  %ohm
        Z03 = sqrt((R(4)+j*2*pi*f*L(4,4))/(G(4,4)+j*2*pi*f*C(4,4)));  %ohm

        Rv_0 = 5; %ohm
        Rv_1 = 0; %ohm
        Rv_2 = 0; %ohm
        Rv_3 = 0; %ohm

        Rz_0 = 5; %ohm
        Rz_1 = abs(Z01);  %ohm
        Rz_2 = abs(Z02);  %ohm
        Rz_3 = abs(Z03);  %ohm

%Parametry pro simulaci

        konecny_cas = 4*(1/f); %s
        delka = 2000; %m
        casove_kroky= 400;
        k = 100; %prostorové dělení
        dx = delka/k; %s
        dt = konecny_cas/casove_kroky; %m

%Vytvoření potřebných matic

```

```
        [A1,B1]=m1(dx,dt,k,R(1),L(1,1),G(1,1),beta(1,1));
        [A2,B2]=m1(dx,dt,k,R(2),L(2,2),G(2,2),beta(2,2));
        [A3,B3]=m1(dx,dt,k,R(3),L(3,3),G(3,3),beta(3,3));
        [A4,B4]=m1(dx,dt,k,R(4),L(4,4),G(4,4),beta(4,4));

        [A12,B12]=m2(dt,k,L(1,2),G(1,2),beta(1,2));
        [A13,B13]=m2(dt,k,L(1,3),G(1,3),beta(1,3));
        [A14,B14]=m2(dt,k,L(1,4),G(1,4),beta(1,4));
        [A23,B23]=m2(dt,k,L(2,3),G(2,3),beta(2,3));
        [A24,B24]=m2(dt,k,L(2,4),G(2,4),beta(2,4));
        [A34,B34]=m2(dt,k,L(3,4),G(3,4),beta(3,4));

        A=[A1,A12,A13,A14;A12,A2,A23,A24;A13,A23,A3,A34;A14,A24,A34,A4];
        B=[B1,B12,B13,B14;B12,B2,B23,B24;B13,B23,B3,B34;B14,B24,B34,B4];

        D = zeros(8*(k+1),1);
        X = zeros(8*(k+1),1);
        XX = zeros(8*(k+1),casove_kroky);

        NAPETI_0 = zeros(k+1,casove_kroky);
        PROUD_0 = zeros(k+1,casove_kroky);
        NAPETI_1 = zeros(k+1,casove_kroky);
        PROUD_1 = zeros(k+1,casove_kroky);
        NAPETI_2 = zeros(k+1,casove_kroky);
        PROUD_2 = zeros(k+1,casove_kroky);
        NAPETI_3 = zeros(k+1,casove_kroky);
        PROUD_3 = zeros(k+1,casove_kroky);

%Okrajové podmínky

%U0_0 =  Rv_0*Ip_0 + Up_0

        A(k+1,1)=1;
        A(k+1,(k+1)+1)=Rv_0;

%Uk_0 - Rz_0*Ik_ 0 = 0

        A(2*(k+1),k+1)=1;
        A(2*(k+1),2*(k+1))=-Rz_0;

%U0_1 =  Rv_1*Ip_1 + Up_1

        A(3*(k+1),2*(k+1)+1)=1;
        A(3*(k+1),3*(k+1)+1)=Rv_1;

%Uk_1 - Rz_1*Ik_ 1 = 0

        A(4*(k+1),3*(k+1))=1;
        A(4*(k+1),4*(k+1))=-Rz_1;;

%U0_2 =  Rv_2*Ip_2 + Up_2

        A(5*(k+1),4*(k+1)+1)=1;
        A(5*(k+1),5*(k+1)+1)=Rv_2;

%Uk_2 - Rz_2*Ik_ 2 = 0

        A(6*(k+1),5*(k+1))=1;
        A(6*(k+1),6*(k+1))=-Rz_2;

%U0_3 =  Rv_3*Ip_3 + Up_3

        A(7*(k+1),6*(k+1)+1)=1;
        A(7*(k+1),7*(k+1)+1)=Rv_3;

%Uk_3 - Rz_3*Ik_ 3 = 0

        A(8*(k+1),7*(k+1))=1;
        A(8*(k+1),8*(k+1))=-Rz_3;

%Řešení soustavy rovnic Ax = Bx + D

        pom=0;
```

```
        for a = 1:1:casove_kroky

                pom=pom+1;
                D(k+1,1)=U0_0;
                D(3*(k+1),1)=U0_1*sqrt(2)*sin(2*pi*f*a*dt);
                D(5*(k+1),1)=U0_2*sqrt(2)*sin(2*pi*f*a*dt+(2*pi)/3);
                D(7*(k+1),1)=U0_3*sqrt(2)*sin(2*pi*f*a*dt-(2*pi)/3);
                X=A\(B*X+D);

                for b= 1:1:8*(k+1)
                XX(b,pom)=X(b);
                end
        end

%Naplnění matic NAPETI a PROUD hodnotami vypočtenými výše

        NAPETI_0(1:k+1,:) = XX(1:k+1,:);
        PROUD_0(1:k+1,:) = XX(k+2:2*(k+1),:);

        NAPETI_1(1:k+1,:) = XX(2*(k+1)+1:3*(k+1),:);
        PROUD_1(1:k+1,:) = XX(3*(k+1)+1:4*(k+1),:);

        NAPETI_2(1:k+1,:) = XX(4*(k+1)+1:5*(k+1),:);
        PROUD_2(1:k+1,:) = XX(5*(k+1)+1:6*(k+1),:);

        NAPETI_3(1:k+1,:) = XX(6*(k+1)+1:7*(k+1),:);
        PROUD_3(1:k+1,:) = XX(7*(k+1)+1:8*(k+1),:);

%Grafy

%Graf rozložení napětí podél vedení v čase - zemní lano

        figure
        surf(dt:dt:konecny_cas,0:dx:delka,NAPETI_0)
        title ('Rozložení napětí u(x,t) podél vedení v čase - zemní lano','FontSize',20);
        xlabel ('t [s]','FontSize',20);
        ylabel ('x [m]','FontSize',20);
        zlabel ('u [V]','FontSize',20);

%Graf rozložení proudu podél vedení v čase - zemní lano

        figure
        surf(dt:dt:konecny_cas,0:dx:delka,PROUD_0)
        title ('Rozložení proudu i(x,t) podél vedení v čase- zemní lano','FontSize',20);
        xlabel ('t [s]','FontSize',20);
        ylabel ('x [m]','FontSize',20);
        zlabel ('i [A]','FontSize',20);

%Graf rozložení napětí podél vedení v čase - fázový vodič č. 1

        figure
        surf(dt:dt:konecny_cas,0:dx:delka,NAPETI_1.*1e-3)
        title ('Rozložení napětí u(x,t) podél vedení v čase - fázový vodič č. 1 ','FontSize',20);
        xlabel ('t [s]','FontSize',20);
        ylabel ('x [m]','FontSize',20);
        zlabel ('u [kV]','FontSize',20);

%Graf rozložení proudu podél vedení v čase - fázový vodič č. 1

        figure
        surf(dt:dt:konecny_cas,0:dx:delka,PROUD_1)
        title ('Rozložení proudu i(x,t) podél vedení v čase - fázový vodič č. 1 ','FontSize',20);
        xlabel ('t [s]','FontSize',20);
        ylabel ('x [m]','FontSize',20);
        zlabel ('i [A]','FontSize',20);

%Graf rozložení napětí podél vedení v čase - fázový vodič č. 2

        figure
        surf(dt:dt:konecny_cas,0:dx:delka,NAPETI_2.*1e-3)
        title ('Rozložení napětí u(x,t) podél vedení v čase - fázový vodič č. 2 ','FontSize',20);
        xlabel ('t [s]','FontSize',20);
```

```
        ylabel ('x [m]','FontSize',20);
        zlabel ('u [kV]','FontSize',20);

%Graf rozložení proudu podél vedení v čase - fázový vodič č. 2

        figure
        surf(dt:dt:konecny_cas,0:dx:delka,PROUD_2)
        title ('Rozložení proudu i(x,t) podél vedení v čase - fázový vodič č. 2 ','FontSize',20);
        xlabel ('t [s]','FontSize',20);
        ylabel ('x [m]','FontSize',20);
        zlabel ('i [A]','FontSize',20);

%Graf rozložení napětí podél vedení v čase - fázový vodič č. 3

        figure
        surf(dt:dt:konecny_cas,0:dx:delka,NAPETI_3.*1e-3)
        title ('Rozložení napětí u(x,t) podél vedení v čase - fázový vodič č. 3 ','FontSize',20);
        xlabel ('t [s]','FontSize',20);
        ylabel ('x [m]','FontSize',20);
        zlabel ('u [kV]','FontSize',20);

%Graf rozložení proudu podél vedení v čase - fázový vodič č. 3

        figure
        surf(dt:dt:konecny_cas,0:dx:delka,PROUD_3)
        title ('Rozložení proudu i(x,t) podél vedení v čase - fázový vodič č. 3 ','FontSize',20);
        xlabel ('t [s]','FontSize',20);
        ylabel ('x [m]','FontSize',20);
        zlabel ('i [A]','FontSize',20);
```