Západočeská univerzita v Plzni
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATICKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

VYUŽITÍ NOVÝCH FUNKCÍ A NÁSTROJŮ VE ČTVRTÉ VERZI PROGRAMU GEOGEBRA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Veronika Šofrová

Učitelství pro základní školy - učitelství matematiky a technické výchovy

(2011 - 2013)

Vedoucí práce: *Mgr. Lukáš Honzík*

Plzeň 2013

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 30. červen 2013

……………………………………………

vlastnoruční podpis

Poděkování

Děkuji vedoucímu diplomové práce Mgr. Lukášovi Honzíkovi za cenné rady, připomínky, a metodické vedení práce.

ZADÁNÍ

Rozhodnutí

Obsah

1 ÚVOD

Patřím k té části obyvatelstva, která si musí vždy danou situaci představit. Proto jsem hledala program na geometrii, s kterým bych se naučila snadno pracovat a pochopit tak velkou část geometrických úloh. Na začátku svého studia jsem se seznámila s programem GeoGebra a pracují s ním dodnes.

GeoGebra je jeden z mnoha programů dynamické geometrie s freeware licencí. Charakteristické je i jeho velice intuitivní ovládání. V novějších verzích se neomezuje jen na geometrii, ale nabízí i možnost práce v jiných matematických oborech.

Cílem této práce je ukázat použitelnost nových funkcí programu GeoGebra. Proto je řešení některých příkladů pouze nastíněno, nebo provedeno jen částečně.

Na úvod se budu věnovat krátkému shrnutí postupného vývoje programu a zvýraznit podstatné rozdíly mezi jednotlivými verzemi. Nyní je k dispozici již verze 4.2 a ve vývoji je verze 5.0.

V další části popíši a na vhodně zvolených příkladech ukáži použití nových funkcí a prvků. Poukáži na možnost využití GeoGebry při výuce a to zejména na interaktivní tabuli.

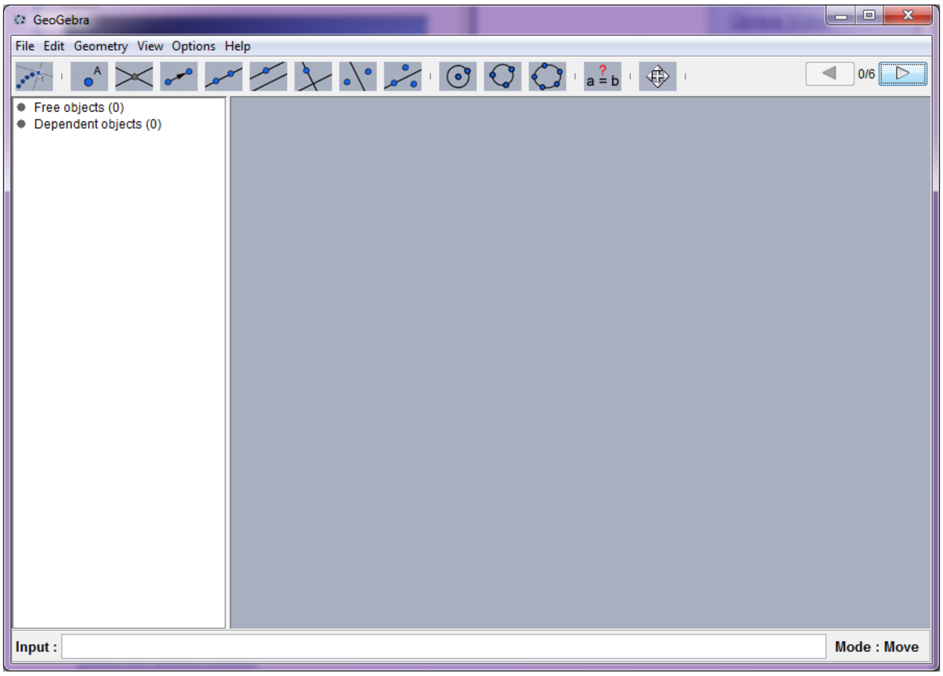
Poslední oddíl je věnován beta verzi 5.0, zejména popisu Grafického 3D pohledu.

2 GEOGEBRA

GeoGebra je matematický freeware, který využijí nejen žáci a studenti při svém samostudiu, ale i učitelé během vyučování. Tento program dynamické geometrie získal mnoho příznivců. Proto dnes můžeme pracovat již ve čtvrté verzi. Podívejme se ve zkratce na to, jaké byly verze předchozí.

2.1 GEOGEBRA 1.0

První verze programu se na první pohled o mnoho neliší od té nejnovější. Měla také dvě okna, algebraické a nákresnu, byl zde i vstupní řádek. V pravém rohu nechybí šipky „zpět“ a „dopředu“. Kromě velmi omezených funkcí nabízí první verze pouze angličtinu a němčinu a uživatelé, kteří s ní chtěli pracovat, se neobešli bez anglických nebo německých slovíček a základních matematických pojmů.

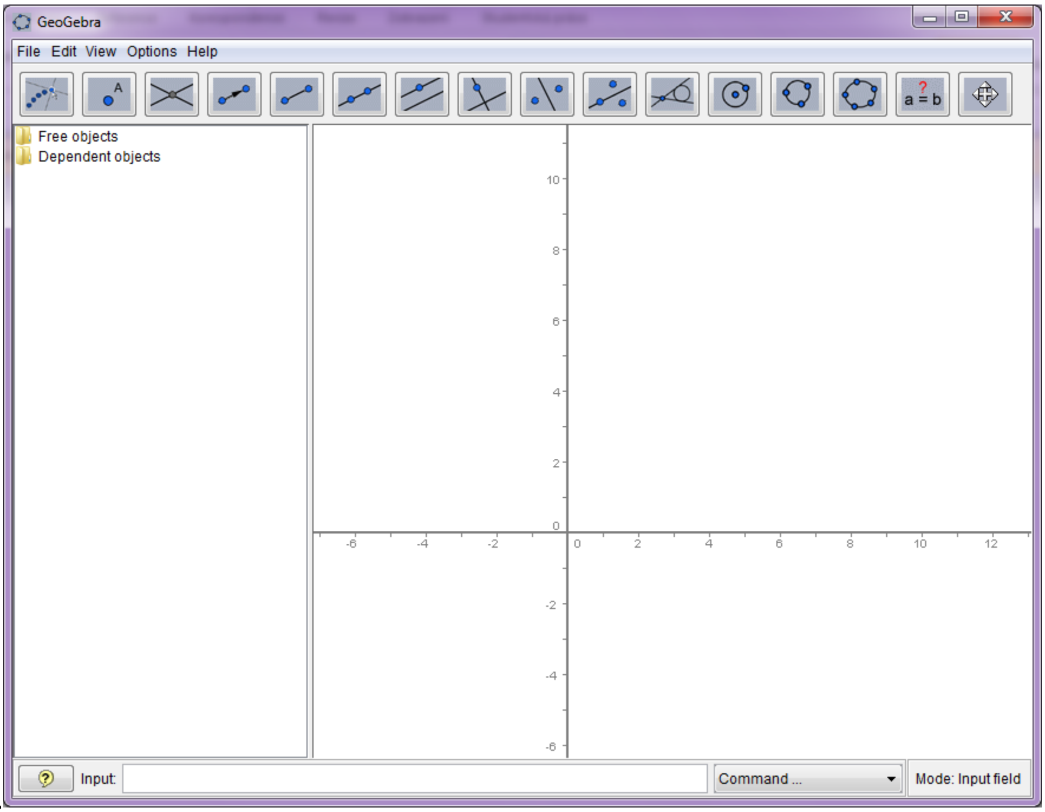


Obrázek 1 - GeoGebra 1.0

Na obrázku 1 vidíme všechny funkce, které tato verze nabízí. Při práci s touto verzí uživatele asi nejvíc zaujme, že nelze sestrojit přímku bez toho, aniž bychom nejdříve sestrojili body. Při práci tedy musíme zadávat kroky postupně za sebou.

2.2 GeoGebra 2.0

Druhá verze je téměř stejná jako první. Změna na první pohled nastala snad jen v barvě. Po důkladnějším prozkoumání si ve spodním vstupním řádku všimneme tlačítka „Command ...“, po jehož rozbalení vidíme několik možností pro zadávání různých příkazů. Dále přibyla možnost zobrazení čtvercové sítě. Tato verze stále používá jen angličtinu a němčinu.

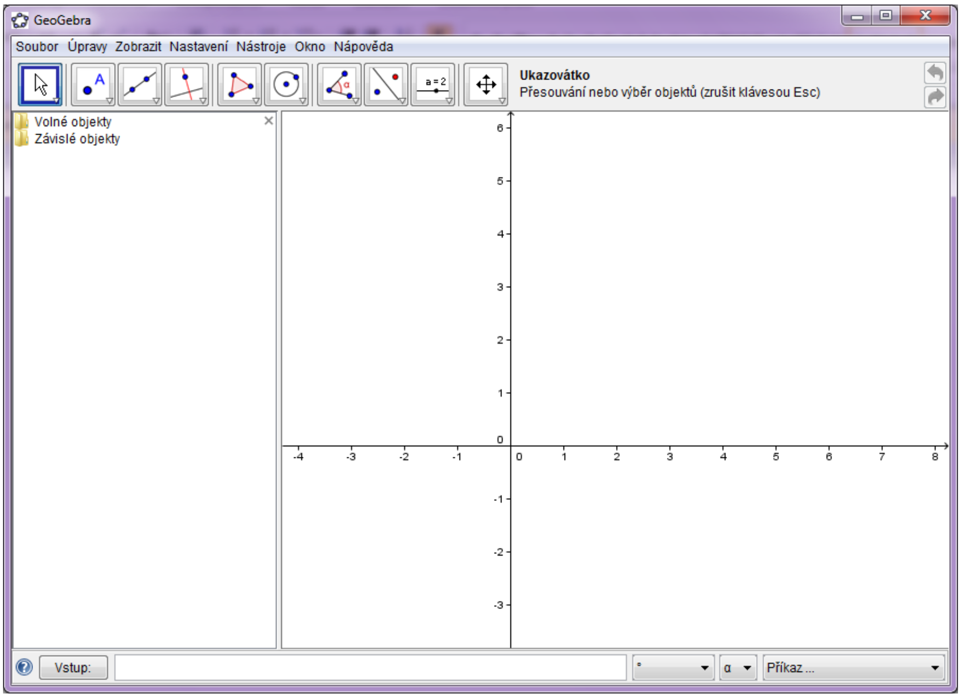


Obrázek 2 - GeoGebra 2.0

Při práci v této verzi nastala oproti předchozí verzi příjemná změna. Nemusíme již zadávat nejprve body a pak s nimi pracovat, ale pokud chceme například úsečku, stačí kliknout na prázdnou nákresnu a bod se sám vytvoří. Po důkladnějším prohlédnutí obrázku 2 vidíme, že přibyly dvě funkce. Již zmiňovaná úsečka se v první verzi nenacházela. A tečna z bodu ke kružnici je také novinka. Druhá verze celkově nabízí snadnější a přehlednější práci.

2.3 GEOGEBRA 3.0

Tato verze je velice přelomová, což napovídá i její velikost. První a druhá verze dohromady nemají takovou velikost jako verze 3.0. Na první pohled ubylo množství nástrojů. Není tomu tak, je tomu právě naopak. Mnoho nástrojů přibylo a kvůli přehlednosti jsou seskupeny do několika blízkých skupin a jsou dostupné v rozevíracích seznamech. I v jazykové oblasti se tato verze polepšila. Nabízí 39 možností, mezi kterými nechybí čeština, ale nalezneme například i čínštinu a to v tradiční čínské symbolice. Díky českému jazyku mohou v této verzi pracovat i žáci, kteří nemají s anglickým či německým jazykem takové zkušenosti. Použití pro výuku se tímto značně rozšiřuje.



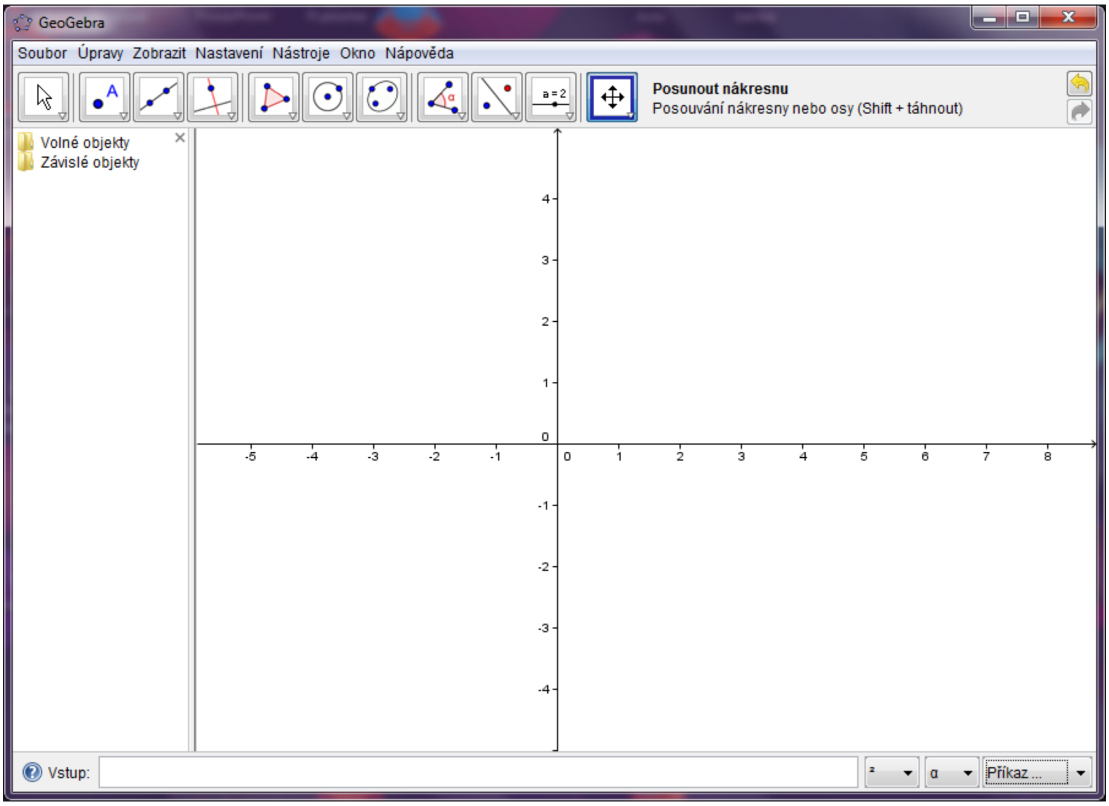
Obrázek 3 - GeoGeobra 3.0

Použití této verze je již velice intuitivní a to nejen díky již zmíněné češtině. Velkým přínosem této verze je, mimo velkého množství funkcí, i to, že můžeme vkládat text. Díky tomu si můžeme vytvořit různé geometrické figury, které lze použít při výuce. Podmínka zobrazování například umožňuje ukázat, kdy daný bod náleží objektu a kdy nikoliv. Celkově je verze 3.0 velice rozsáhlá a použitelná na všech stupních vzdělávání.

2.4 GeoGebra 3.2

Tato verze přináší uživatelům pouze málo změn. Mezi ty nejviditelnější patří opět rozšíření jazykové výbavy programu. Verze 3.2 ovládá již 54 jazyků. I když toto číslo není úplně pravdivé. Zahrnuje i různé varianty jednotlivých jazyků. Například angličtina je zde ve třech verzích a to angličtina britská, americká a australská.

Ohledně nástrojů nám tato verze nově přináší lepší práci s kuželosečkami, které nyní mají svojí vlastní ikonu. Další novinkou je kruhová inverze, umožňující snadnější řešení úloh jako jsou například úlohy Apolloniovy.

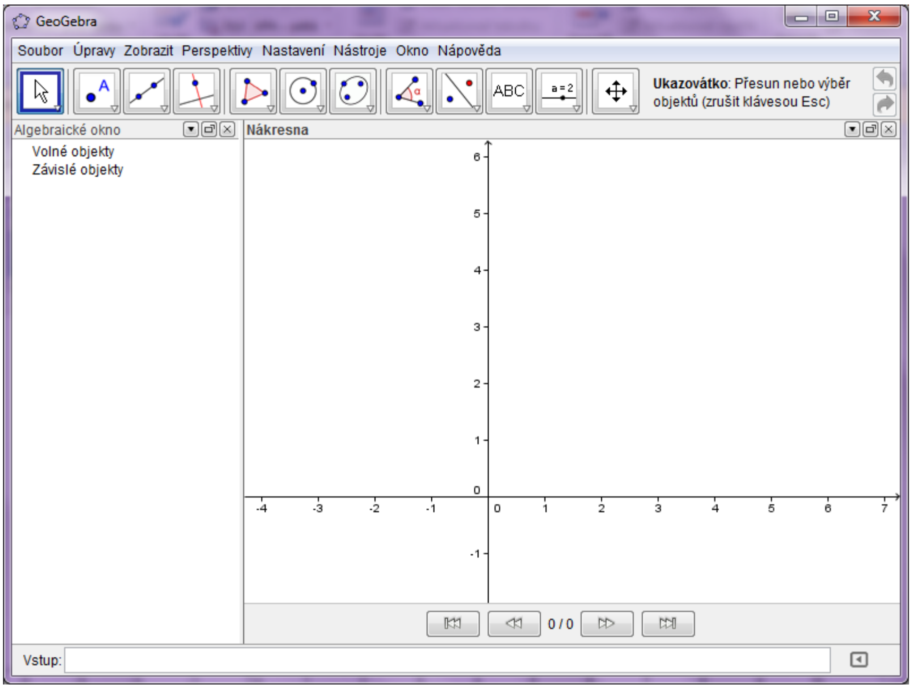


Obrázek 4 - GeoGebra 3.2

První pohled na další verzi nenaskýtá mnoho změn. Nové nástroje jsou popsány výše, za zmínku však stojí to, že od první verze se s programem pracuje „stejně“. Tedy práce v programu je jednodušší a přehlednější, ale základní schéma je stále stejné. Pokud uživatel pracoval s první verzí, po krátké době se bude dobře orientovat i verzi 3.2.

2.5 GEOGEBRA 4.0

Čtvrtá verze přináší mnoho dalších novinek. K dispozici je několik perspektiv, umožňujících lepší přehlednost. Mimo jiné je zde velice snadná možnost sdílení materiálů přes internet, kdy se pouhým kliknutím dostaneme na web. Stačí jen vybrat soubor, který chceme zveřejnit. Oproti předchozím verzím je zde větší množství nových funkcí, kterým se budeme věnovat v následujícím textu.



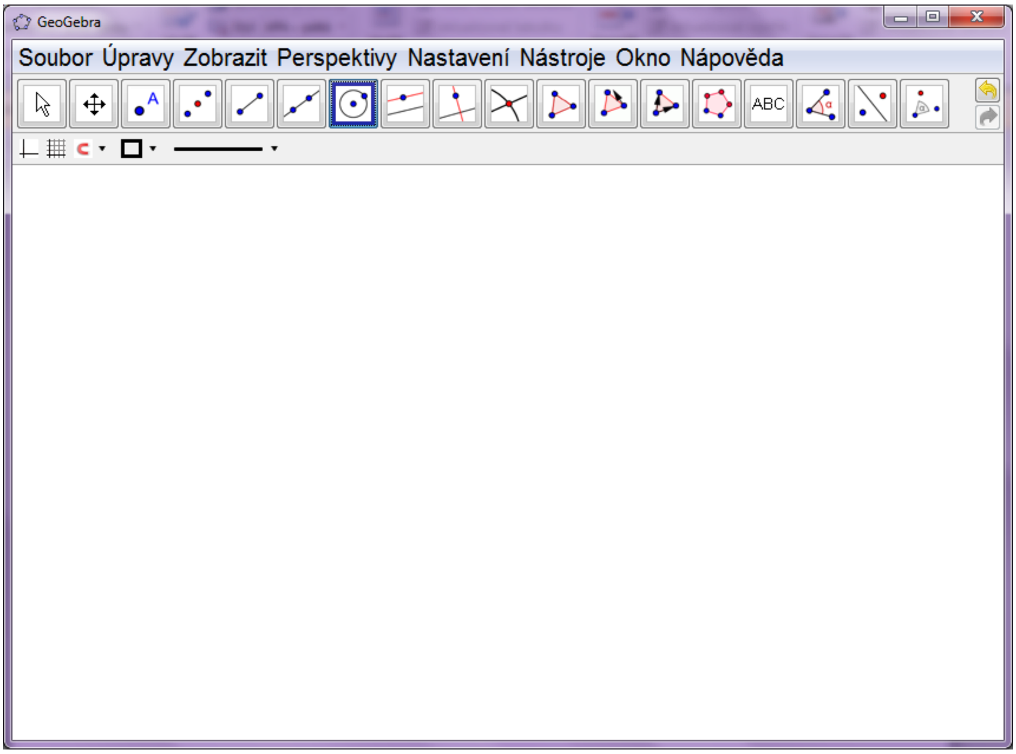
Obrázek 5 - GeoGebra 4.0

Na obrázku 5 vidíme, že se pracovní prostřední ve verzi 4.0 téměř nezměnilo. Opak je však pravdou. Uživatel si zde může nastavit několik možností zobrazení a perspektiv. Mezi možnosti zobrazení spadá i „krokování konstrukce“, jehož ovládací panel je vidět na obrázku 5. V perspektivách Elementární Geometrie a Geometrie, je snazší také formátování jednotlivých objektů. Díky zobrazení formátovací lišty můžeme objekty formátovat ihned při vytváření.

Čtvrtá verze přináší mnoho novinek nejen pro použití jednotlivci, ale i pro účely výukové. Například zobrazení klávesnice je velice užitečné při výuce na interaktivní tabuli.

2.5.1. GeoGebraPrim

Za zmínku také stojí GeoGebraPrim, která je součástí standardní verze 4.0. Při standartní instalaci je vytvořena samostatná ikona na ploše. Dle oficiálních stránek je GeoGebraPrim speciální rozhraní určené pro mladší uživatele. Ale i pokročilejší uživatel zde vytvoří, co potřebuje.

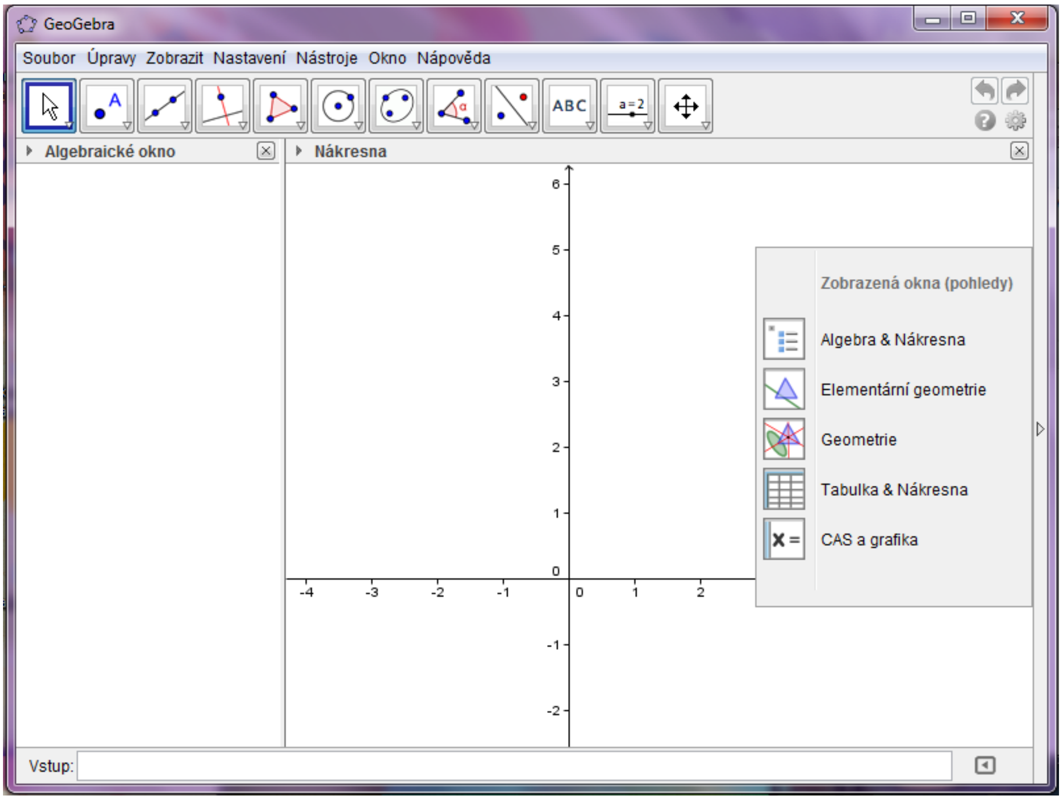


Obrázek 6 - GeoGebraPrim

Jelikož je toto rozhraní určené pro mladší uživatele, jednotlivé funkce nejsou v rozevíracích seznamech, ale každá jedna ikona zobrazuje danou konkrétní funkci. GeoGebra se díky tomuto rozhraní dá použít i na základních školách bez větších potíží.

2.6 GEOGEBRA 4.2

Nejnovější verze programu se výrazně neliší od verze předchozí, ale jak je již u Geogebry zvykem opět usnadňuje práci. Nových funkcí není mnoho, za to je zde ještě snadnější způsob zobrazení, které vyhovuje jednotlivým uživatelům.



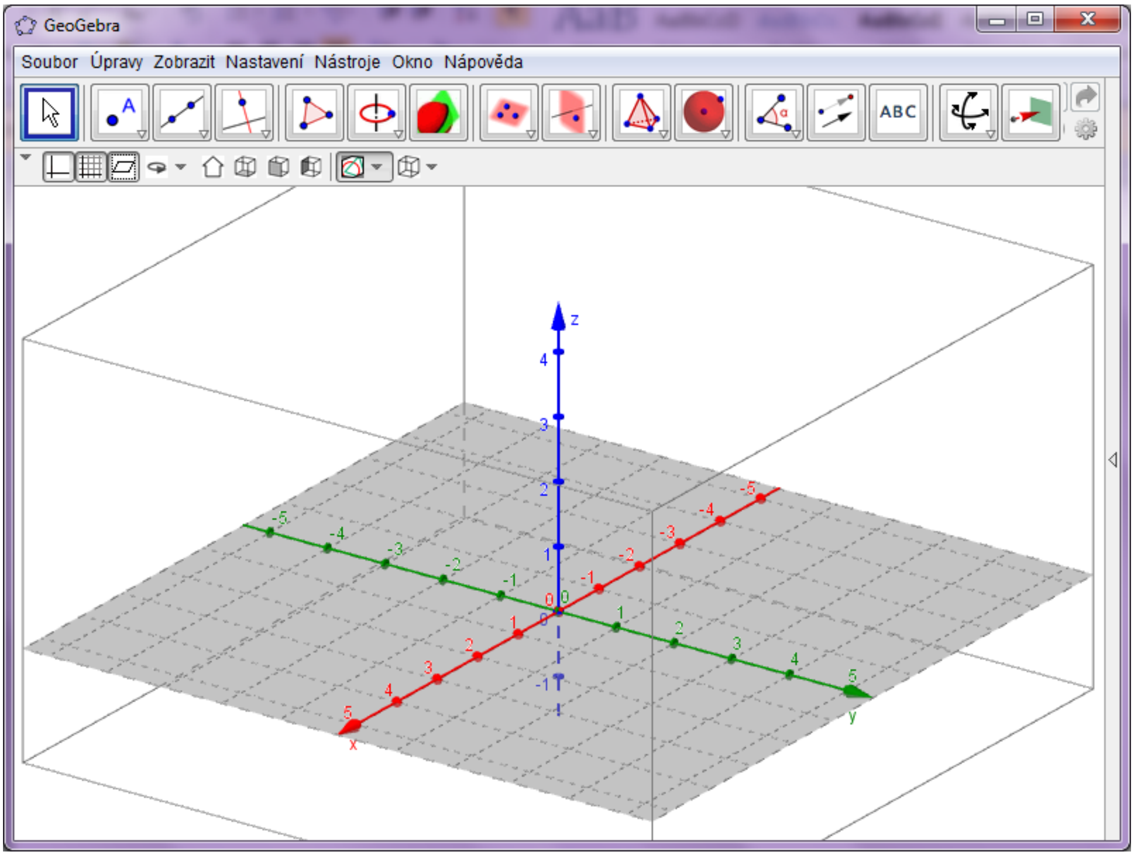
Obrázek 7 - GeoGebra 4.2

Hned po otevření máme k dispozici výběr zobrazení. Snaha vývojářů je zřejmá. Umožnit co nejjednodušší práci uživatelům a to jak ze sféry vědecké tak i laické veřejnosti.

Podrobně se všem novým nástrojům a funkcím budeme věnovat dále.

2.7 GEOGEBRA 5.0

Budoucnost GeoGebry je verze 5.0. Zatím dostupná jen jako beta verze. Tato verze bude přelomová, jelikož umožňuje práci ve 3D.



Obrázek 8 - GeoGebra 5.0

Malou recenzi této testovací verze provedeme v následujících kapitolách.

Jistě neobsáhne vše, co bude nová verze nabízet. Veškeré informace ohledně verze 5.0 jsou k nalezení na této internetové adrese v sekci Budoucnost:

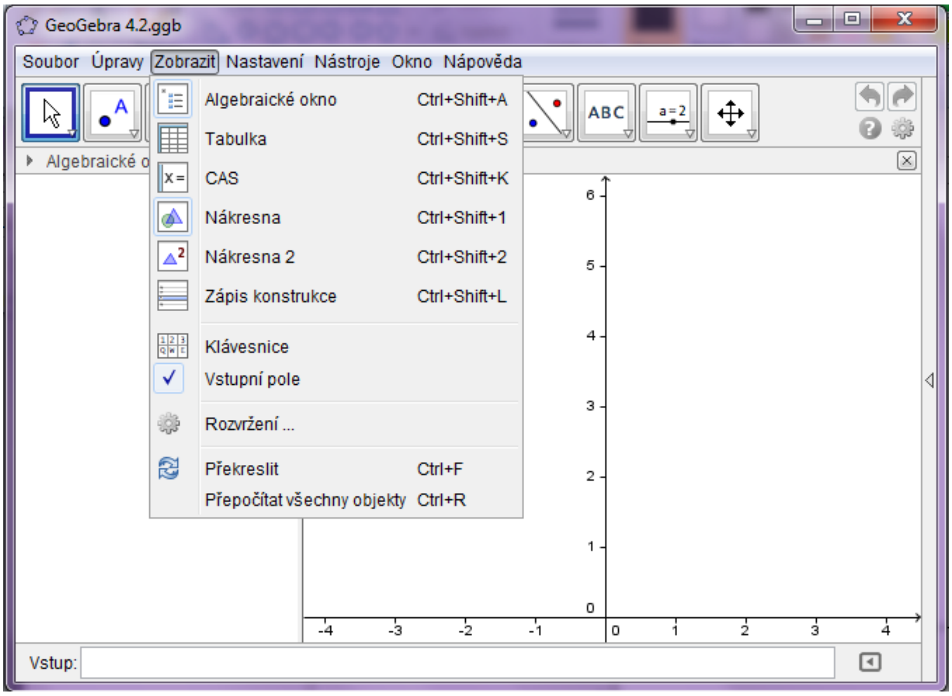
http://www.geogebra.org/cms/cs/roadmap

3 NOVÉ FUNKCE A NÁSTROJE VERZE 4.2

Jak již bylo řečeno v předchozí kapitole GeoGebra 4.0 a 4.2 přinesly mnoho nových funkcí a nástrojů, které se v předchozích verzích buď nenacházeli vůbec, nebo se zde jmenovali, případně fungovali jinak. Pro přehlednost budeme porovnávat nejnovější čtvrtou verzi GeoGebra 4.2 se třetí nejvyšší verzí GeoGebra 3.2.

3.1 ZOBRAZENÁ OKNA (POHLEDY)

V předchozí kapitole jsme se zmínili o perspektivách, které se nachází ve verzi 4.0. Ve verzi 4.2 jsou tyto perspektivy nahrazeny vhodnějším názvem, Zobrazená okna neboli pohledy. Tyto pohledy si můžeme vybrat ihned po otevření GeoGebry nebo je během práce velice snadno měnit. Na obrázku 7 jsme viděli, jak vypadá GeoGebra když ji spustíme. Pokud chceme zobrazená okna měnit během práce, máme dvě možnosti. První z nich je jednoduché kliknutí myší na pravý okraj okna, kde se nachází šipka, naznačující rozbalení seznamu. Objeví se panel s výběrem předdefinovaných pohledů jako při spuštění. Druhou možností je upravit si zobrazená okna pomocí příkazu Zobrazit z hlavní nabídky.



Obrázek 9 - Karta Zobrazit

Podívejme se podrobně na předdefinované pohledy, které se nám nabízí ihned po spuštění. Rozeberme možnosti a funkce těchto pohledů jejich použití a rozdíly mezi nimi.

3.1.1 ALGEBRA & NÁKRESNA

Algebra & Nákresna je klasické pracovní prostředí, na které jsme zvyklí z předchozích verzí. Jiné je to, že pracujeme v jednotlivých oknech, která si můžeme dle libosti zmenšovat, zvětšovat nebo úplně vypnout. O tom v jakém okně pracujeme, informují nadpisy jednotlivých oken.

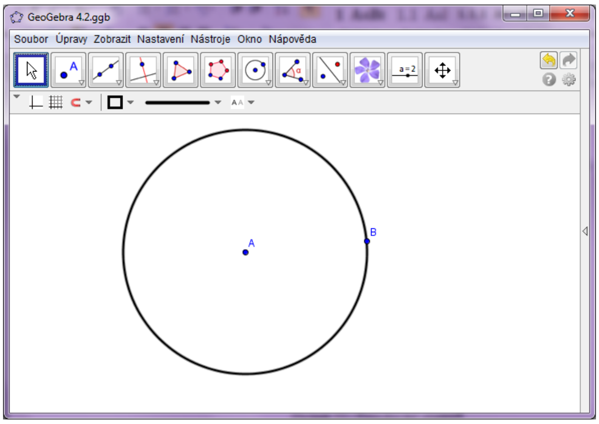
3.1.2 ELEMENTÁRNÍ GEOMETRIE

Tato perspektiva je téměř totožná jako GeoGebraPrim. Stručný popis jsme provedli výše, podívejme se ale podrobněji na způsob práce v tomto pohledu.

Jediný rozdíl oproti GeoGebraPrim je ten, že se funkce nabízejí v rozevíracích seznamech, ale je jich menší množství, než když pracujeme v pohledu Geometrie. Díky názorným ikonám, dokáží i mladší žáci narýsovat jednoduché objekty a to i bez znalostí jakéhokoli geometrického softwaru.

Další výhodou pro mladší žáky, je zobrazení pouze okna s nákresnou. Při samotném rýsování je neruší okno Algebraické, ve kterém se neustále mění údaje.

Formátování objektů je přizpůsobeno jednoduššímu prostředí. Díky další liště nemusíme formátovat objekty přes Vlastnosti objektu. Ale barvu, sytost, vzhled čáry atd. si jednoduše navolíme. Stačí objekt označit a jednotlivé volby se zobrazí, jak můžeme vidět na obrázku 10.



Obrázek 10 - Formátování objektů

3.1.3 GEOMETRIE

Pohled Geometrie, je téměř totožný s pohledem Elementární geometrie. Liší se jen v počtu funkcí. V tomto pohledu můžeme pracovat se všemi funkcemi, které GeoGebra 4.2 nabízí.

Tento pohled je výhodný zejména pokud potřebujeme, narýsovat různé objekty a nezáleží nám na jejich popsání.

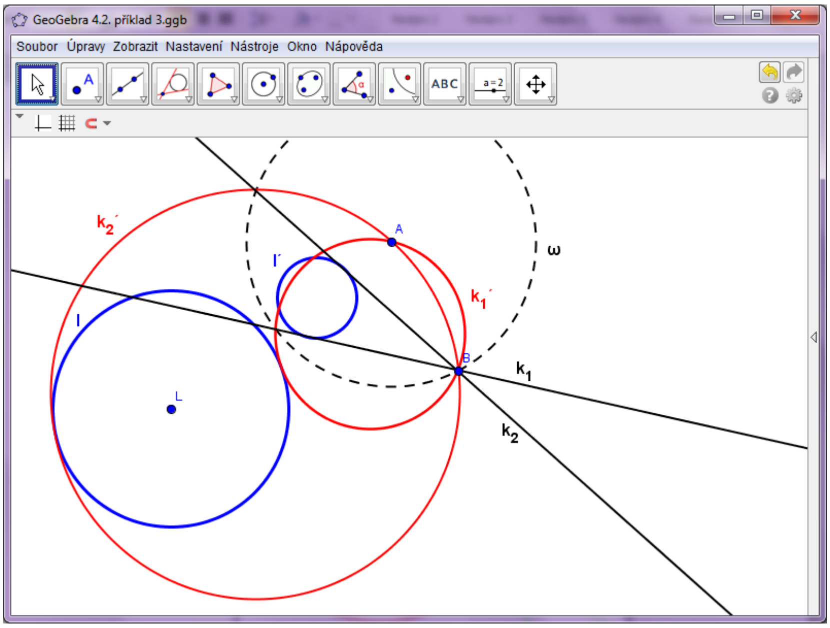
3.1.3.1 Příklad 1

Zadání:

Sestrojte kružnici k, která prochází body A, B a dotýká se kružnice l (L, r). Body A, B leží vně kružnice l.

Řešení:

Jedná se o Apolloniovu úlohu typu BBk, která se řeší pomocí kruhové inverze.



Obrázek 11 - Příklad 1

Na řešení příkladu jsme ukázali, možnost využití pohledu Geometrie. Pokud ovšem během rýsování zjistíme, že potřebujeme znát popis některého objektu, veškeré informace nalezneme v jeho Vlastnostech. Nebo máme možnost zobrazení algebraického okna, kde nalezneme popisy všech objektů.

3.1.4 TABULKA & NÁKRESNA

Okno Tabulka, můžeme použít pro zadávání jednotlivých objektů, jelikož v tomto pohledu se nenachází vstupní řádek.

Do tabulky můžeme zaznamenat pohyb nějakého objektu (bodu) a tyto data poté můžeme dále zpracovávat. Tento pohled nabízí celou řadu statistických a pravděpodobnostních funkcí. My se ale podíváme na jiné využití tohoto pohledu.

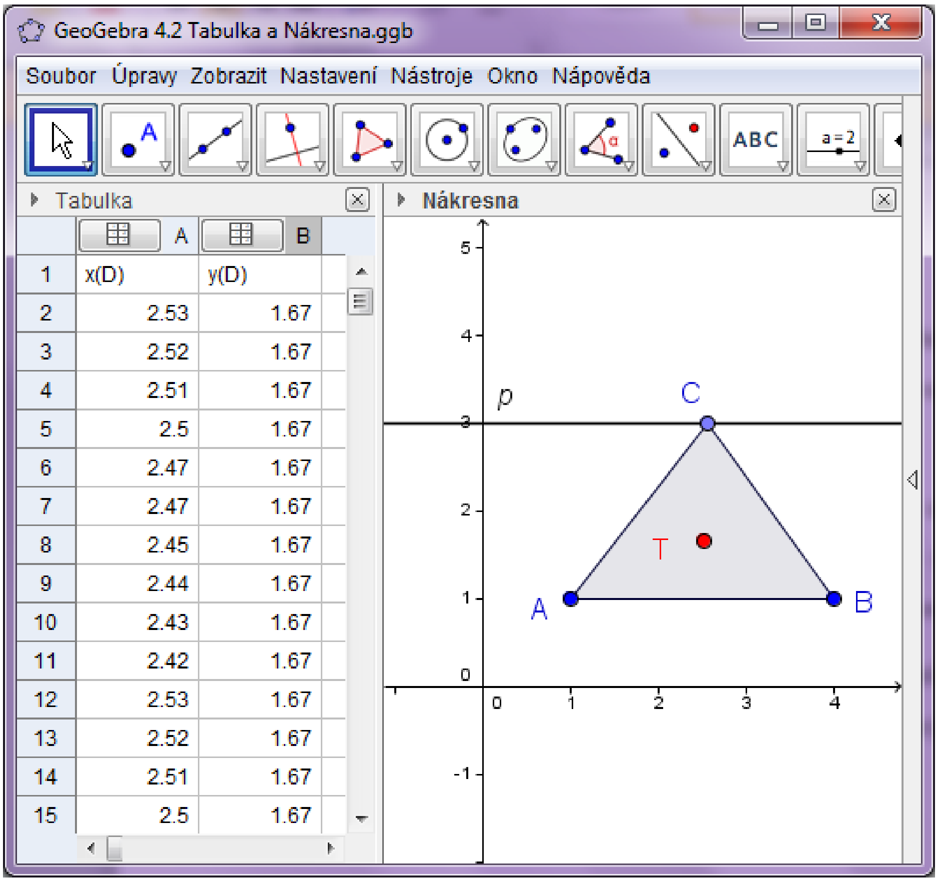
3.1.4.1 Příklad 2

Zadání:

Máme úsečku $|AB| = a$, máme přímku $p \parallel |AB|, p \cap |AB| = \emptyset$. Určete množinu všech těžišť trojúhelníku $ABC, C \in p$.

Řešení:

Zadanou úsečku si narýsujeme tak, aby byla rovnoběžná s osou x. Sestrojíme libovolnou rovnoběžku s touto přímkou. Bod C umístíme na přímku a sestrojíme trojúhelník ABC. Zobrazíme si těžiště T tohoto trojúhelníku. Označíme si tento bod, pravým tlačítkem myši zvolíme možnost Zaznamenat do tabulky. Nyní budeme pohybovat bodem C.



Obrázek 12 - Tabulka a Nákresna

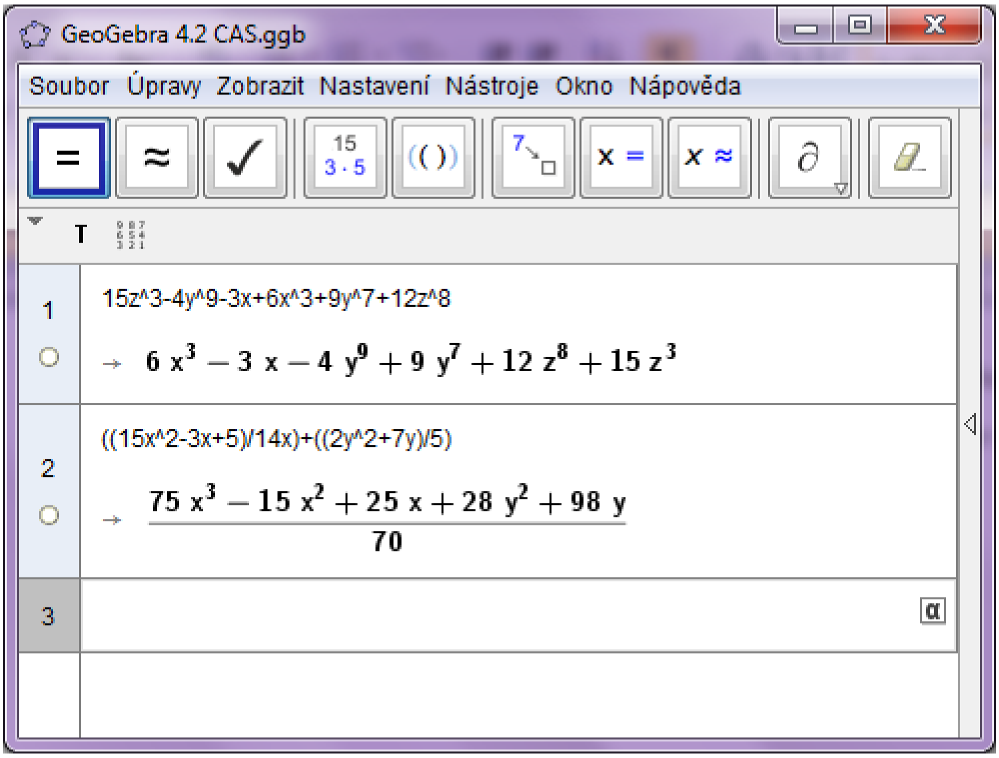
Z tabulky nyní vyčteme řešení zadaného příkladu. Při pohybu bodu C se mění pouze x-ová souřadnice bodu T, y-ová souřadnice je konstantní. Je tedy zřejmé, že množinu všech těžišť tohoto trojúhelníku tvoří přímka rovnoběžná se zadanou úsečkou.

3.1.5 CAS A GRAFIKA

Tento pohled slouží zejména pro jednoduché matematické operace. Předchozí verze nic podobného nenabízeli, proto si tento pohled zaslouží naši zvýšenou pozornost. Jednotlivé funkce si probereme podrobně.

Zajímavé je zadávání rovnic a výrazů. Při zápisu rovnice n-tého stupně o m neznámých nezáleží, v jakém pořadí jednotlivé členy uvádíme. Po potvrzení se automaticky členy seřadí a to jak abecedně tak i od nejvyšší mocniny. Viz obrázek 16, řádek 1.

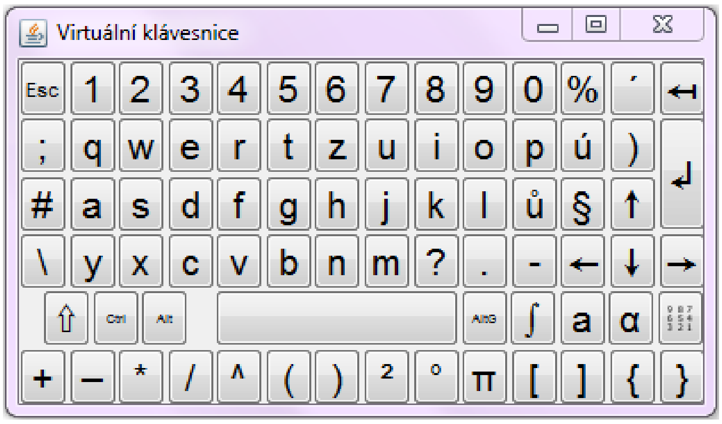
Další zajímavostí je zadávání lomených výrazů, zda při zápisu použijeme závorky nebo ne, vždy se nám objeví jeden lomený výraz, který samozřejmě odpovídá výrazu námi zadanému. Viz obrázek 16 řádek 2.



Obrázek 13 – CAS

Při popisu toho pohledu nesmíme zapomenout na lištu pod hlavní nabídkou nástrojů. Kde nalezneme možnost jednoduchého formátování textu a zobrazení virtuální klávesnice.

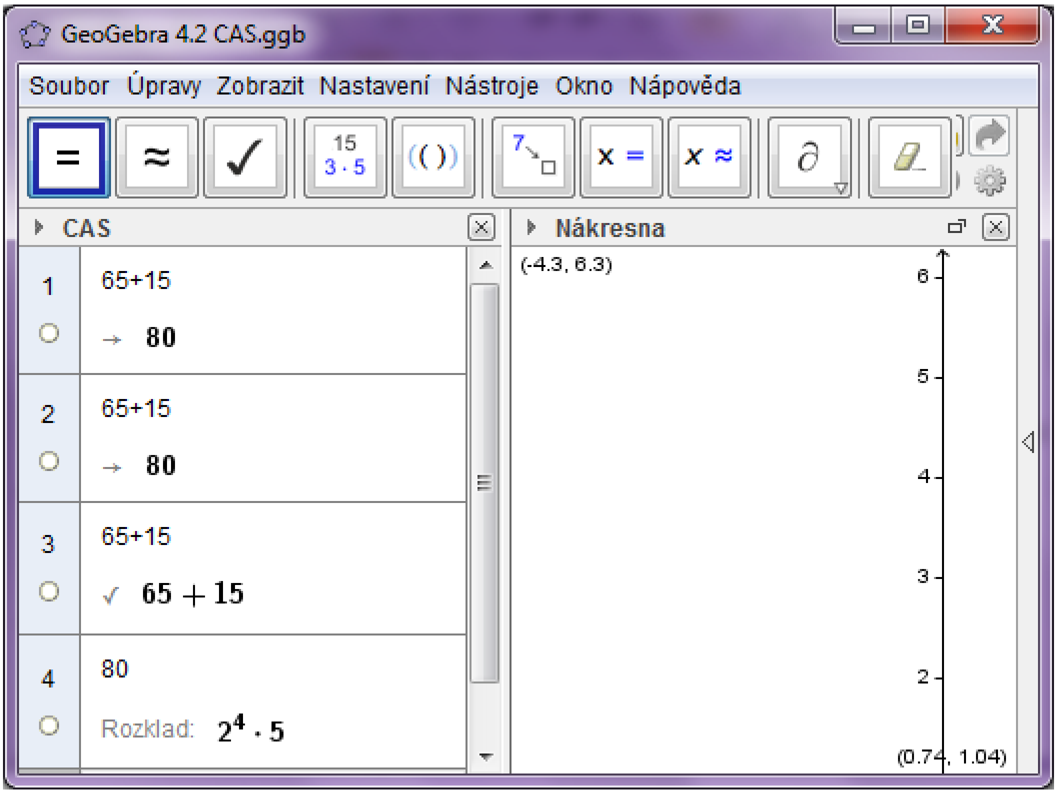
Virtuální klávesnici využijeme zejména při práci na interaktivní tabuli, kde nemáme tolik možností, zadávání matematických výrazů.



Obrázek 14 - CAS virtuální klávesnice

Nyní se podíváme podrobněji na funkce, které tento pohled nabízí.

3.1.5.1 CAS nástroje



Obrázek 15 – CAS

Na obrázku 15 jsou ukázány první čtyři funkce. V řádku 1 vidíme přesný výpočet. Řádek 2 nabízí stejný výsledek, jde však o výpočet numerický. V řádku 3 je zachovaný vstup, a nakonec v řádku 4 je rozklad na prvočinitele.

3.1.5.2 Rozšířit

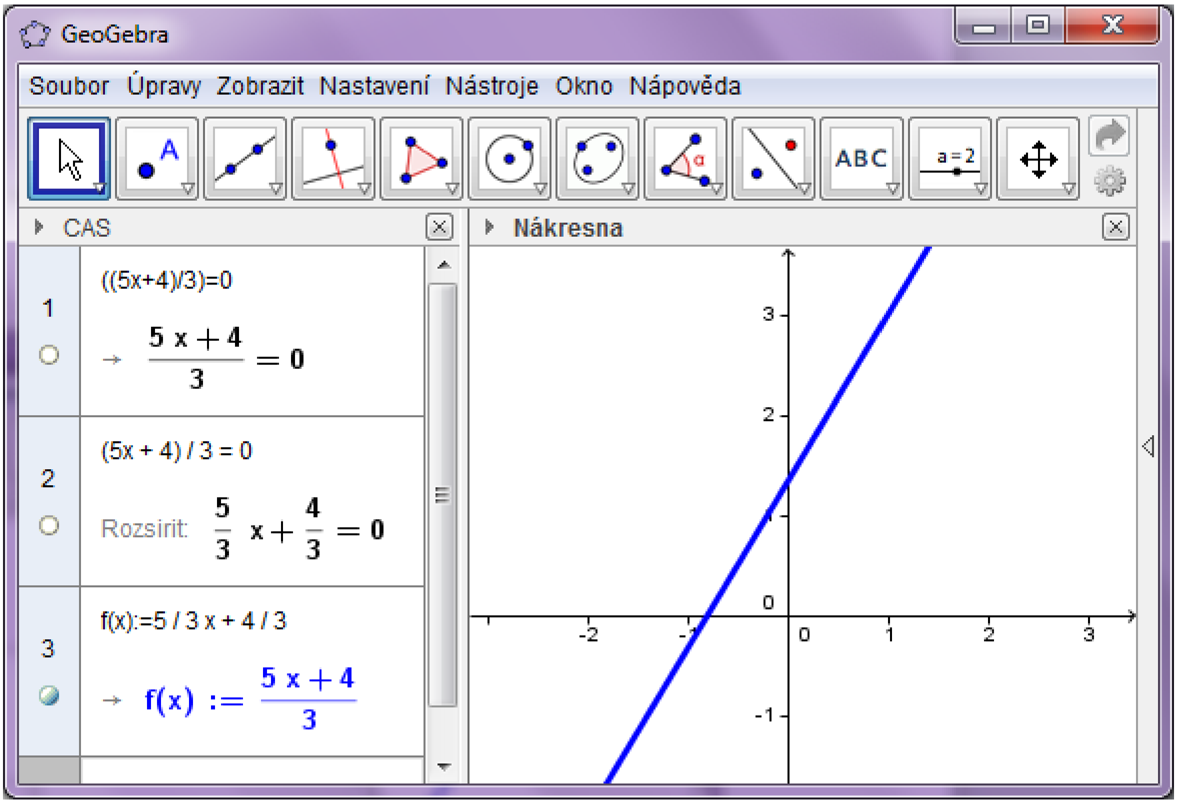
Další funkce je rozšířit. Při prvních pokusech, s tímto nástrojem, může být uživatel zmatený. Neslouží totiž ke klasickému rozšiřování zlomků, ale k oddělení jednotlivých proměnných.

3.1.5.2.1 Příklad 3

Zadání:

Z rovnosti s lomeným výrazem $\frac{5x+4}{3} = 0$ vyjádřete x

Řešení:



Obrázek 16 - CAS Rozšířit

V prvním řádku je zadání, v druhém použit nástroj Rozšířit. V řádku 3 vidíme, že pokud zaškrtneme políčko pod číslem řádku, objeví se zadaný objekt na nákresně.

<u>Poznámka:</u> Pokud bychom chtěli při zobrazování postupovat obráceně, tedy nejprve na nákresně narýsovat nějaký objekt a poté zobrazit v okně CAS, GeoGebra nám to bohužel neumožňuje. Zadáme-li rovnici, která nepopisuje žádný objekt, políčko nelze zaškrtnout.

3.1.5.3 Substituce

Další velmi užitečnou funkcí je substituce. Program dokáže provést libovolnou substituci. Uživatel si musí jen dát pozor na tvar rovnice, ve které chce substituovat.

3.1.5.3.1 Příklad 4

Zadání:

Určete kořeny rovnice:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

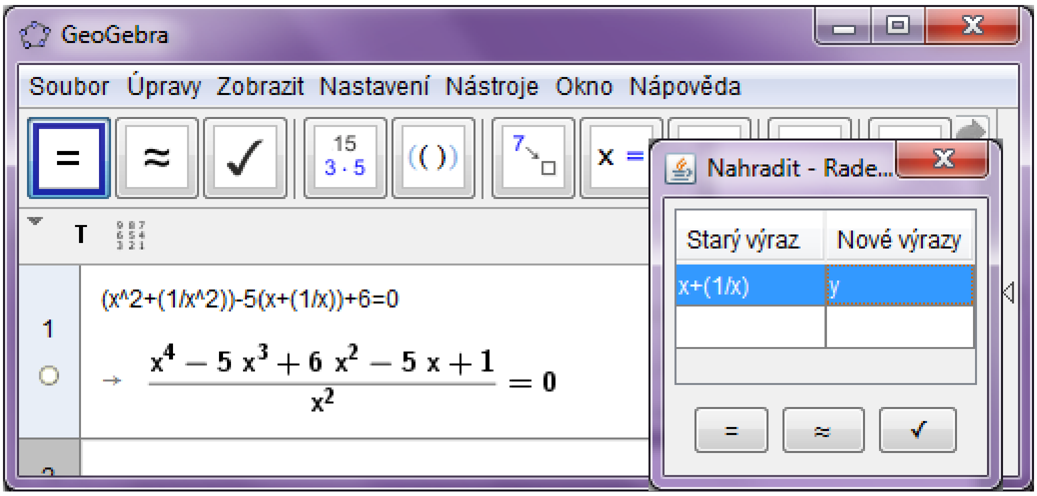
Řešení:

Rovnici si upravíme, tak abychom mohli použít substituci.

$$(x^4 + 1) - 5(x^3 + x) + 6x^2 = 0$$

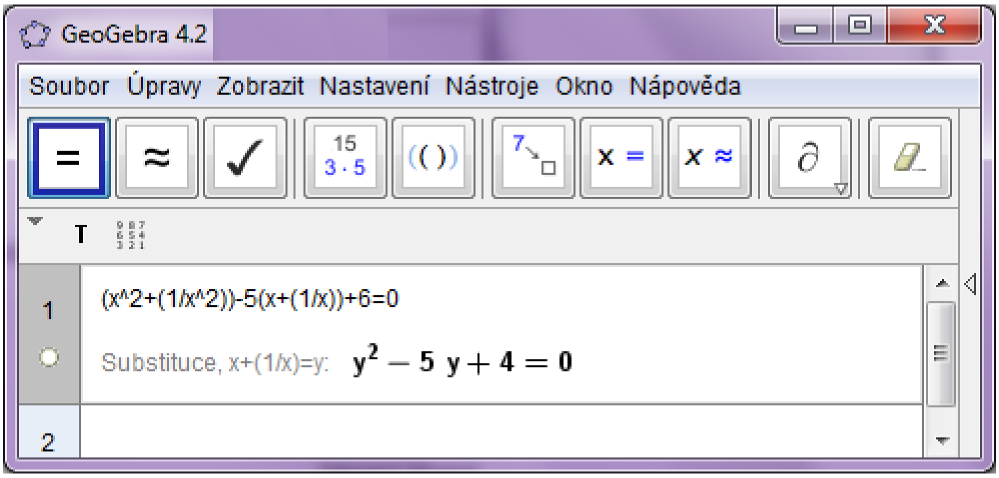
Rovnici vydělíme x^2

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$$



Obrázek 17 – CAS Substituce

Na obrázku 17 vidíme, jakým způsobem zadáváme substituci. Jako téměř vše v GeoGebře i zde je zadávání velmi intuitivní.



Obrázek 18 – CAS Substituce 2

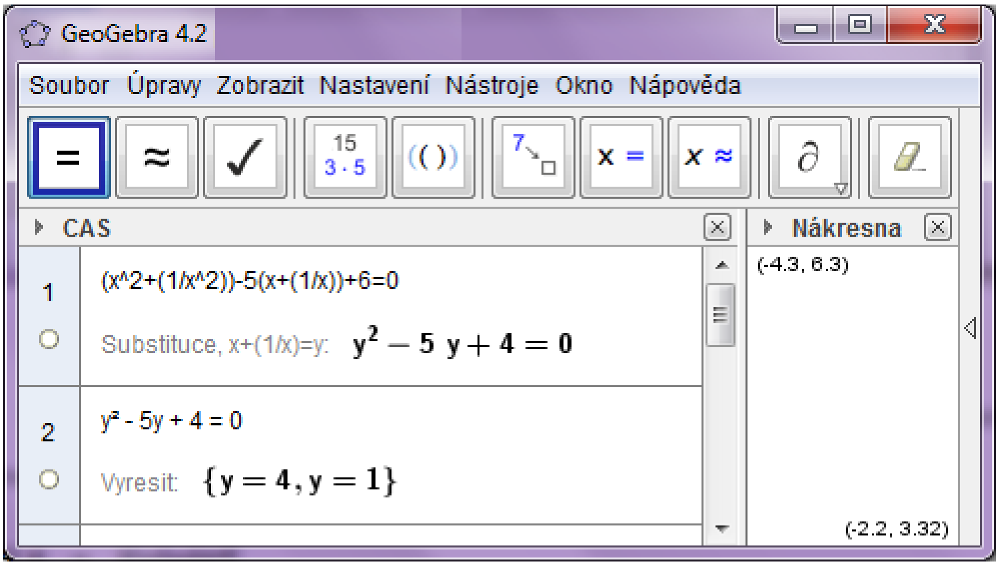
Na obrázku 18 vidíme výsledek po substituci.

3.1.5.4 Vyřešit

Dalším nástrojem v pořadí je Vyřešit, sloužící k vyřešení jakékoliv rovnice nebo soustavy rovnic.

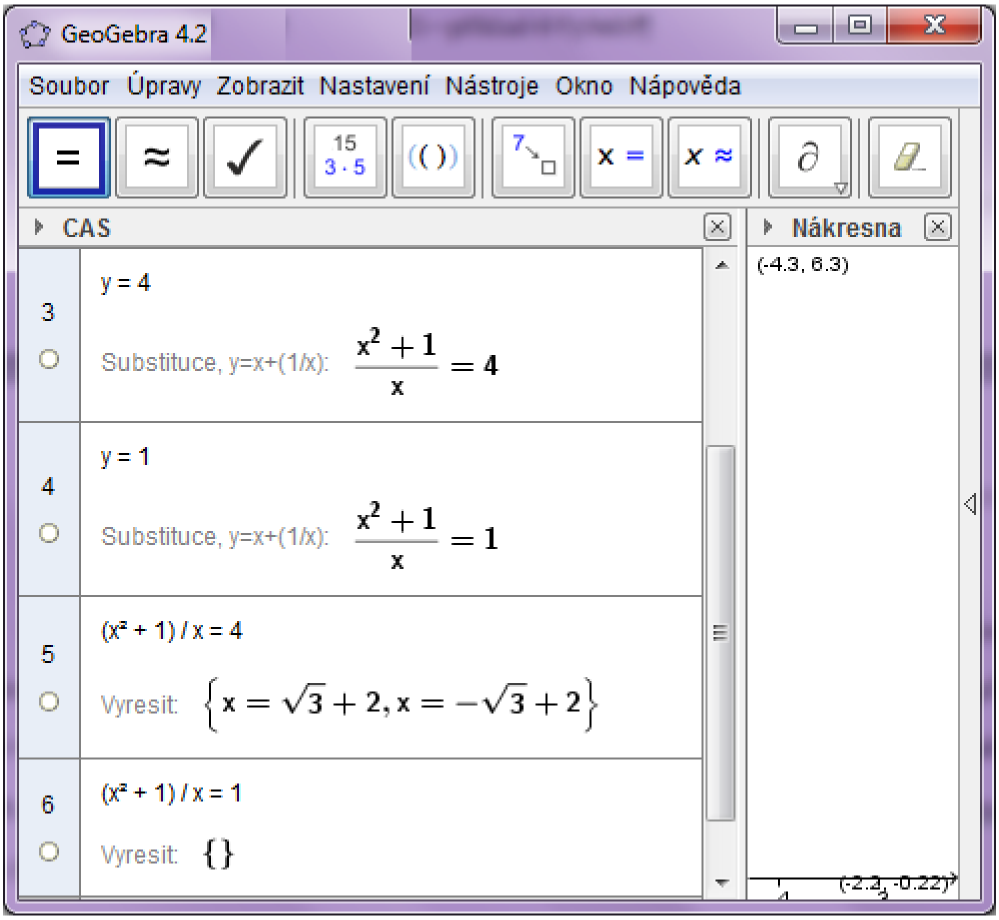
3.1.5.4.1 Pokračování Příklad 4

V předchozí části, jsme rovnici upravili a provedli substituci, nyní budeme pokračovat v řešení.



Obrázek 19 - CAS Vyřešit

Při řešení stačí rovnici znovu napsat, nebo jen pouhým kliknutím „zkopírovat" do dalšího řádku, řádek označit a stisknout tlačítko Vyřešit. Dále při řešení toho příkladu musíme provést resubstituci, a takto získané rovnice opět vyřešit. Při resubstituci budeme postupovat tak, že výsledné y rozdělíme do dvou řádků, jelikož y nám vyšla dvě, budeme mít dvě rovnice.



Obrázek 20 - CAS Resubstituce

Obrázek 20 kromě výsledku, nabízí další informaci o funkci Vyřešit. Čtenář si jistě všiml, že GeoGebra neumí vyřešit rovnici, jejímž výsledkem jsou komplexní čísla.

Kořeny zadané rovnice jsou $P = \left\{2 + \sqrt{3}; 2 - \sqrt{3}; \frac{1+3i}{2}; \frac{1-3i}{2}\right\}$.

Další otázkou, je zda bylo nutné provádět substituci, je-li k dispozici nástroj Vyřešit.

3.1.5.4.2 Příklad 5

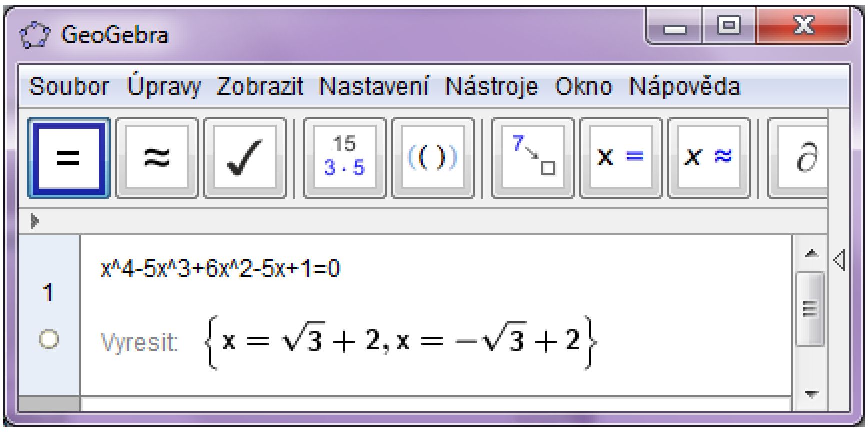
Zadání:

Určete kořeny rovnice:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$$

Řešení:

Nyní zadáme rovnici přímo a použijeme nástroj Vyřešit.

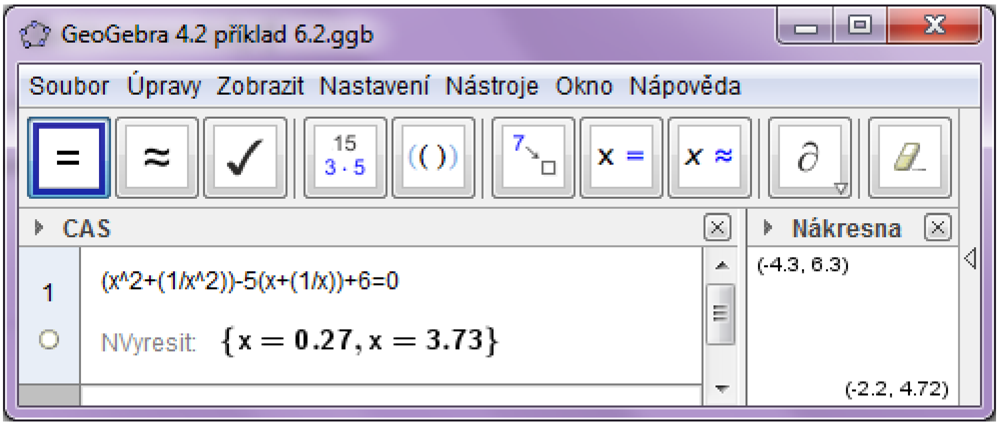


Obrázek 21 – CAS Řešení rovnice

Zde pozorujeme fakt, že při řešení rovnic nepotřebuje nástroj Substituce. Ale rovnice lze vyřešit přímo v jednom kroku. Musíme mít ovšem na paměti neschopnost GeoGebry ohledně výsledku s komplexním číslem.

3.1.5.5 *Řešit numericky*

Další funkce vyřeší zadané rovnice numericky. Použijeme-li ji na předchozí příklad, získáme tento výsledek:



Obrázek 22 - CAS Řešit numericky

3.1.5.6 *Řešení kvadratické rovnice numericky i graficky*

Díky možnosti zobrazení nákresny, můžeme ukázat řešení rovnic i grafickou metodou.

3.1.5.6.1 Příklad 6

Zadání:

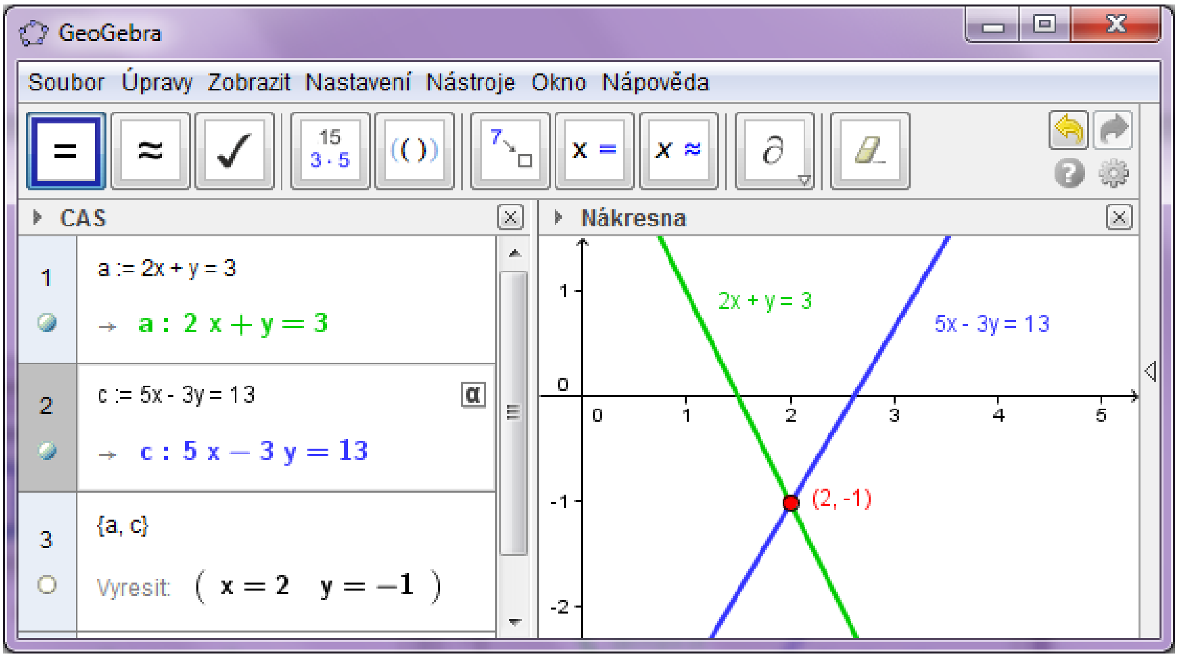
Vyřeště početně i graficky soustavu rovnic:

$$2x + y = 3$$

$$5x - 3y = 13$$

Řešení:

Při řešení jakékoliv rovnice grafickou metodou musíme zadanou rovnici upravit do tvaru funkce. GeoGebra toto převede sama při zaškrntuní políčka na levé straně příslušného řádku. Řešením soustavy rovnic je poté jejich průsečík. Řešení početní provedeme pomocí funkce Vyřešit.



Obrázek 23 - CAS a nákresna

Tento způsob řešení rovnic je vhodný zejména k tomu, že si žáci uvědomí, jaký objekt je popisován danou rovnicí a k lepšímu pochopení co je řešením rovnice.

3.1.5.7 Vyřešit více rovnic, Řešit numericky více rovnic

Předchozí funkce, lze použít i na řešení soustav rovnic, a to takových kde máme stejný počet rovnic jako neznámých, ale i soustav obsahujících n neznámých a m rovnic. Na takovém příkladu si ukážeme fungování tohoto nástroje.

3.1.5.7.1 Příklad 7

Zadání:

Řešte soustavu rovnic

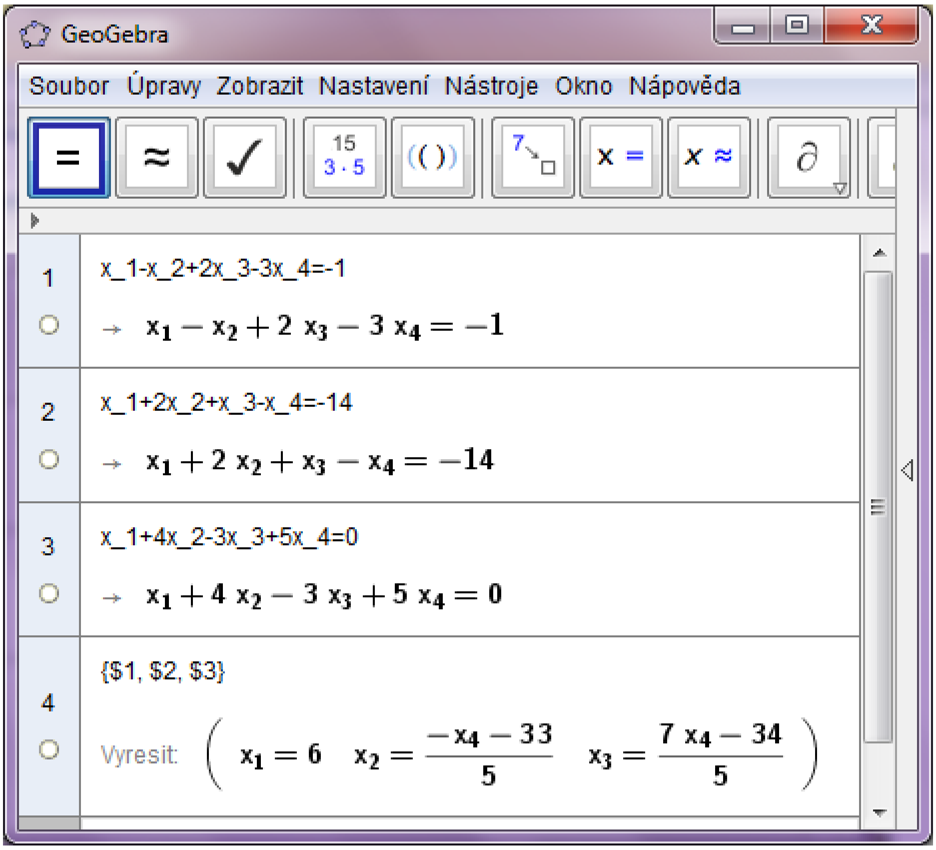
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -14$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0$$

Řešení:

Každou rovnici zadáme do jednoho řádku, poté tahem označíme všechny tři řádky a stiskneme tlačítko Vyřešit.



Obrázek 24 – CAS Soustava rovnic

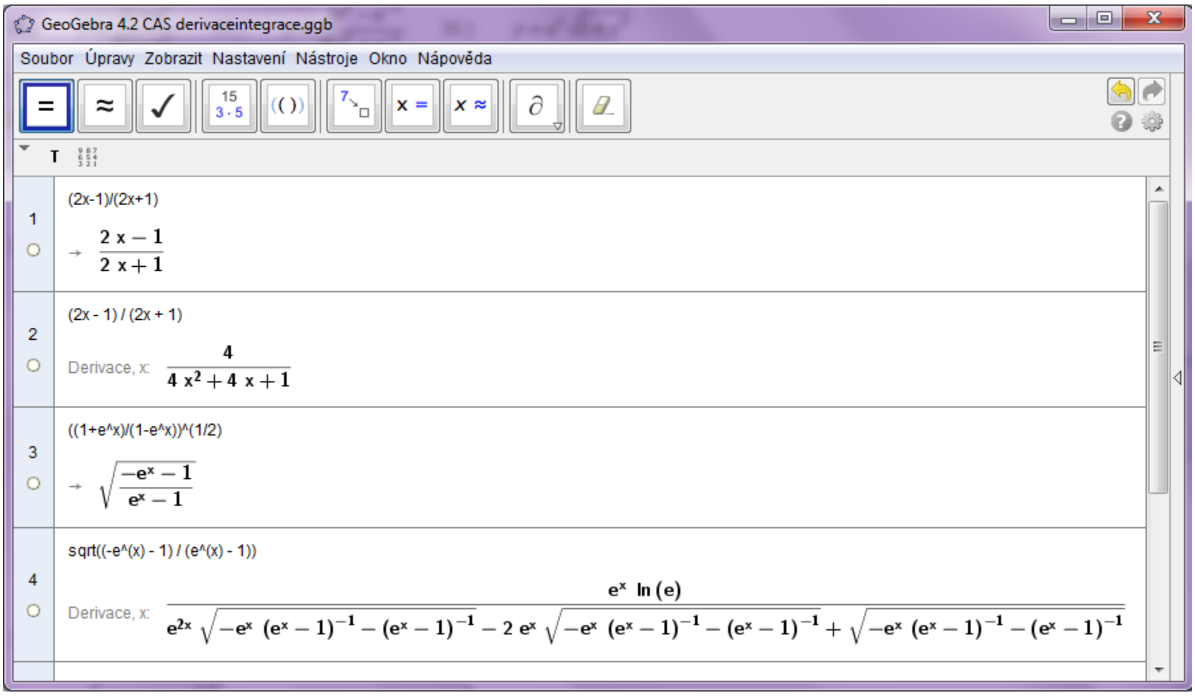
Pokud bychom potřebovali, řešení například soustavy tří rovnic o 5 neznámých GeoGebra si s tím poradí. A to stejným způsobem jako při řešení příkladu 7. Vypočítá řešení pouze tří neznámých s tím, že se v tomto objeví další dvě neznámé. Nepoužívá žádné substituce a parametry.

3.1.5.8 Derivace, Integrace

Poslední funkce, které nám nabízí pohled CAS, jsou Derivace a Integrace.

Tyto nástroje můžeme využít na jakoukoliv funkci. Chybí zde, však možnost vybrat neznámou kterou derivujeme. Pokud máme funkci o více neznámých a chceme provést derivaci, vždy se zderivuje abecedně první neznámá. Ze stejného důvodu nelze vypočítat vícenásobný integrál.

Při používání těchto nástrojů musíme být ostražití ohledně způsobu vyjádření výsledku. Pokud budeme počítat základní derivace a integrace výsledek není těžké ověřit. Ovšem pokud derivovaná nebo integrovaná funkce je složitější, výsledek je mnohem těžší ověřit.



Obrázek 25 – CAS Derivace, integrace

V řádku 2 je výsledek derivace, ke kterému dojdeme i pokud budeme počítat ručně. Řádek 4 je velice matoucí, jelikož při klasickém derivování pomocí obvyklých vzorců a úprav dojdeme k výsledku, který se velice liší.

$$\frac{e^x}{(1-e^x)\sqrt{1-e^x}}$$

Pokud bychom tyto dva výsledky porovnaly, měli by být stejné, trvalo by nám to však velice dlouho. Proto je vhodné nástroj Derivace a Integrace používat jen na jednodušší funkce.

Integrace, zde nezahrnuje integrál určitý. Můžeme ho však získat v několika málo krocích.

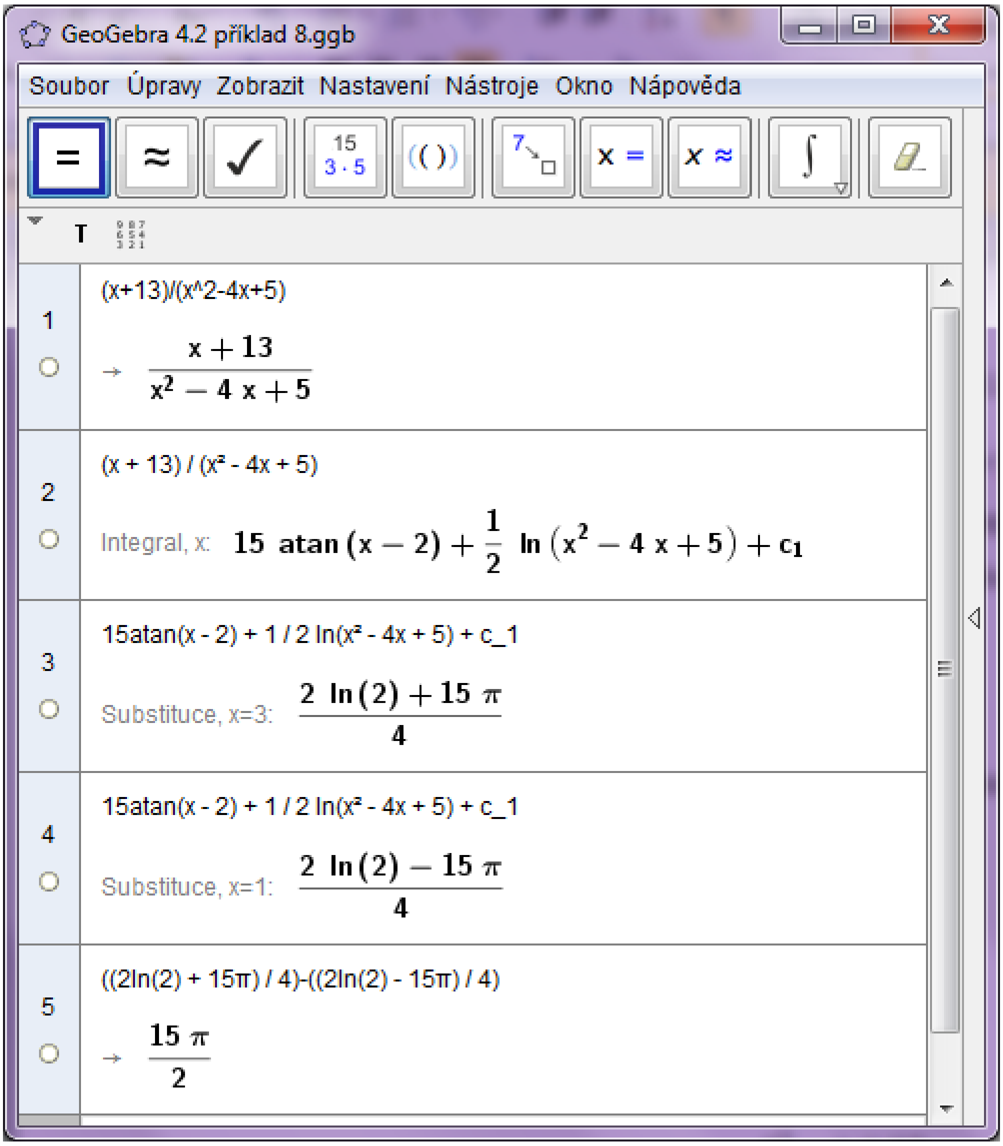
3.1.5.8.1 *Příklad 8*

Zadání:

Vypočítejte určitý integrál:

$$\int_1^3 \frac{x+13}{x^2-4x+5}\,dx$$

Řešení:



Obrázek 26 – CAS Určitý integrál

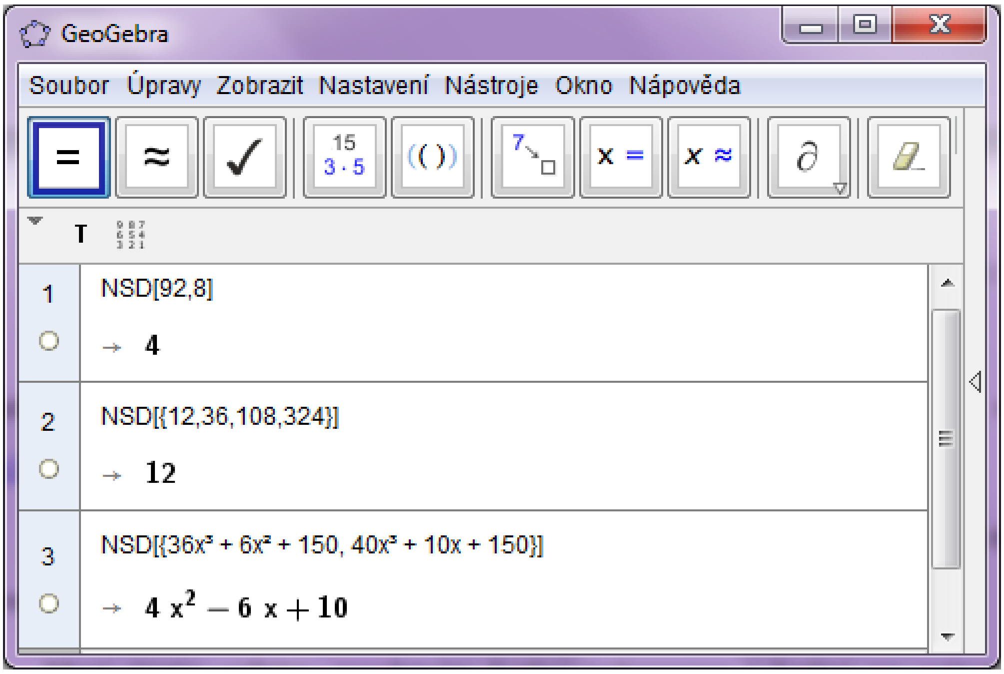
Při řešení tohoto příkladu, jsme využili několik funkcí. V řádku 1 je zadání, v řádku 2 je použita funkce Integrál. V řádku 3 je výsledek po integrování a provedena substituce $x = 3$. V řádku 4 je opět výsledek integrace z řádku 2 a provedena substituce $x = 1$. V řádku 5 je výsledek z řádku 4 odečten od výsledku z řádku 3, tedy vypočten určitý integrál ze zadané funkce.

3.1.5.9 Další funkce pohledu CAS

Pro náročnější uživatele, je k dispozici další velké množství funkcí, které ovšem nezadáme pomocí stisknutí tlačítka. Ale pomocí zadání příkazu přímo do požadovaného řádku. Celý seznam těchto funkcí je dostupný na internetové adrese:

http://wiki.geogebra.org/cs/CAS_Specifický_příkaz

Mezi tímto velkým množstvím funkcí nalezneme i funkci na nalezení Největšího společného dělitele.



Obrázek 27 – NSD

Na obrázku je viditelné, že tuto funkci lze použít i na polynomy.

Další funkce jsou například:

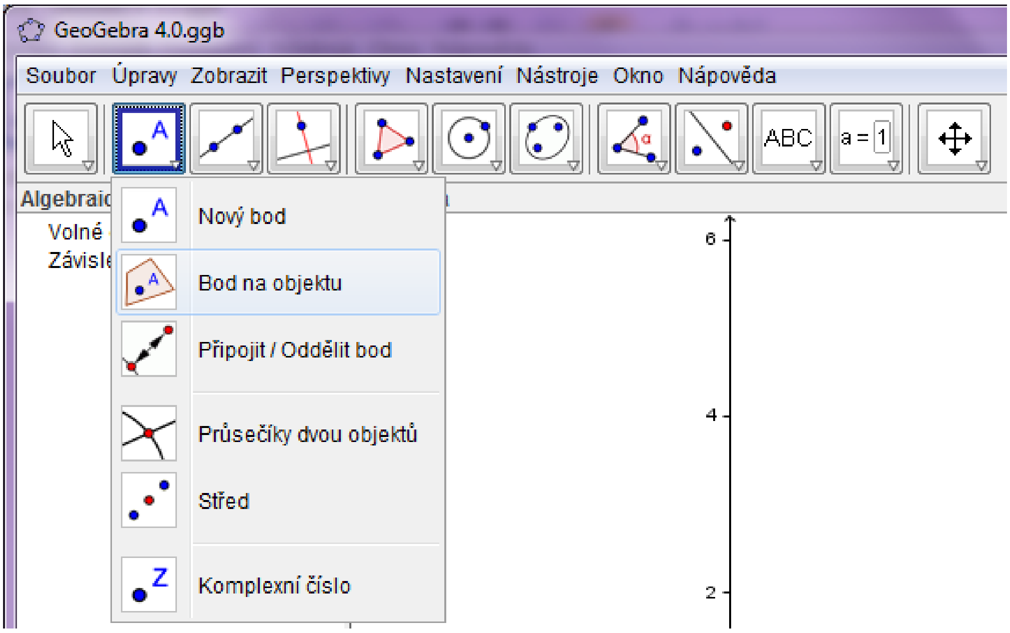
- Rozklad na parciální zlomky
- Hodnost matice
- Posloupnost
- Taylorova řada
- Průsečík
- Vektorový součin
- Koeficienty
- Limita
- Kombinační číslo
- …

3.2 NOVÉ NÁSTROJE

Jak již bylo řečeno v předchozích kapitolách GeoGebra 4.0 a GeoGebra 4.2 nabízí oproti předchozím verzím mnoho nových nástrojů. Panel nástrojů projdeme krok po kroku, vypíšeme všechny nové nástroje a pokusíme se co nejvýstižněji popsat jejich využití.

Nové nástroje se objevují v druhé ikoně nástrojového řádku. Jsou to:

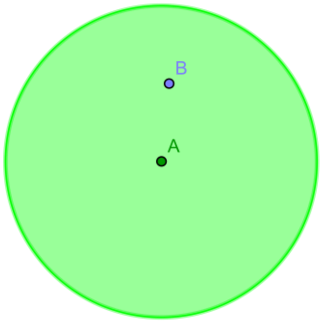
- Bod na objektu
- Připojit/Oddělit bod
- Komplexní číslo



Obrázek 28 - Nové nástroje: Bod

3.2.1 BOD NA OBJEKTU

Tento nástroj vytvoří bod vázaný k danému objektu. S tímto bodem je pak možné pohybovat jen po daném objektu.



Obrázek 29 - Bod na objektu

Poznámka: Na obrázku 29 je bod upevněn na kruhu. Bod na kruh nebo elipsu umístíme, tak že nejprve musíme nastavit průhlednost. Pokud průhlednost nenastavíme, bod se chová jako normální bod a je možno s ním pohybovat po celé nákresně. Nebo můžeme bod umístit jen na kružnici.

Bod na objektu můžeme využít zejména v příkladech, kde potřebujeme najít optimální polohu bodu na nějakém objektu.

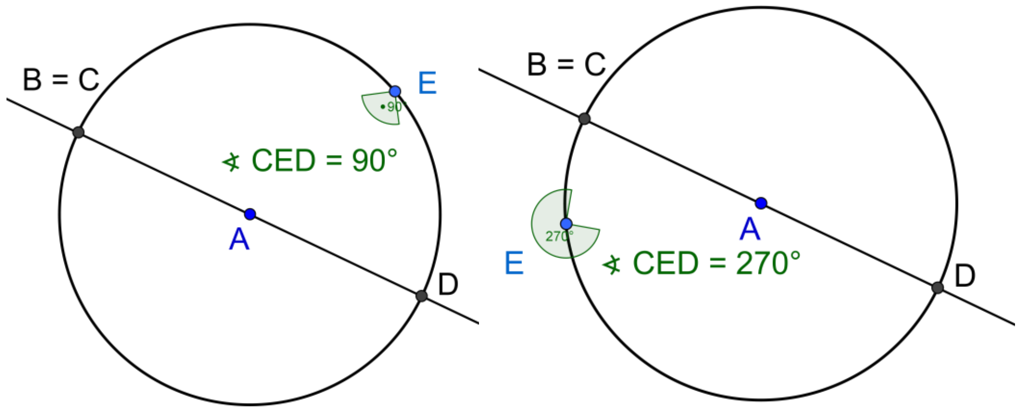
My si vytvoříme příklad vhodný pro základní školu, kde žákům ukážeme platnost Thaletovy věty.

3.2.1.1 Příklad 1

Zadání:

V programu GeoGebra si narýsujte libovolnou kružnici $k\ (A, r)$. Středem kružnice bude procházet přímkaAB. Průsečíky kružnice k a přímky AB, nazveme body C, D. Zvolte nástroj Bod na objektu a bod E umístíme na kružnici. Dále si zadejte úhel $\sphericalangle CED$. Pohybuj s bodem E a řekni, co jsi objevil.

Řešení:



Obrázek 30 - Bod na objektu Thaletova věta

Pokud pohybujeme bodem E v polorovině CDE, velikost úhlu $\sphericalangle\, CED$ je vždy 90°, pokud pohybujeme bodem E v polorovině opačné, velikost úhlu $\sphericalangle\, CED$ je vždy 270°.

Poznámka: Tuto úlohu lze téměř stejně vytvořit i v předchozí verzi. Pokud totiž v GeoGebře 3.2 umístíme bod na kružnici, lze ho přemísťovat jen po této kružnici.

Nyní si ukážeme příklady, které v žádné předchozí verzi neuděláme.

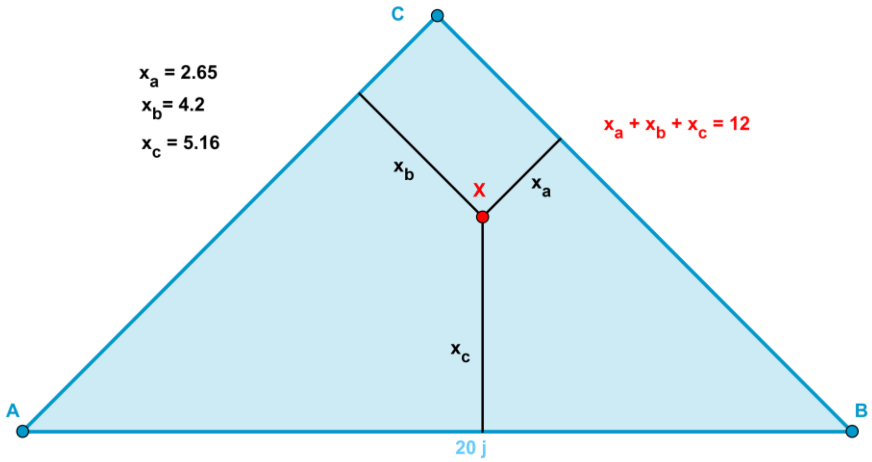
3.2.1.2 Příklad 2

Zadání:

Máme pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC, $|\sphericalangle ACB| = 90°$, $|AB| = 20$ jednotek. Nalezněte množinu bodů X, jejichž součet vzdáleností od všech tří stran je 12 jednotek.

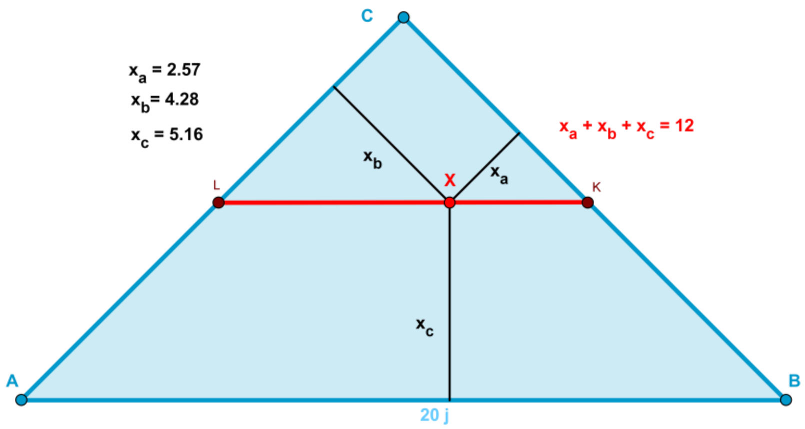
Řešení:

Sestrojíme si zadaný trojúhelník, upevníme bod X na tento objekt a experimentální metodou zjišťujeme, kdy je součet vzdáleností roven 12 jednotkám.



Obrázek 31 - Bod na objektu Trojúhelník 1

Při pohybu bodem X můžeme zjistit, že řešením zadané úlohy je úsečka ohraničená body K, L.



Obrázek 32 - Bod na objektu Trojúhelník 2

Další příklady, na využití bodu na objektu jsou jednoduché optimalizační úlohy.

3.2.1.3 Příklad 3

Zadání:

Mléko z mlékárenských závodů ve městech A a B se vozí do měst R, S a T. denně se z A může dodat 250 přepravek s mlékem a z města B 350. Denně je potřeba dodat 150 přepravek do města R, 240 přepravek do S a 210 přepravek do T. Náklady na dopravu jedné přepravy (v eurech) z mlékárenských závodů do místa prodeje jsou v tabulce.

Závod/ město	R	S	T
A	4	3	5
B	5	6	4

Sestavte takový plán rozvoru mléka, aby přepravní náklady byly co nejnižší.

Řešení:

Při řešení optimalizačních úloh si nejprve sestavíme účelovou funkci a podmínky.

Účelová funkce: $f\ (x, y) = -2x - 4y + 3280$

Podmínky: $x \geq 0;\ \ x \leq 150$

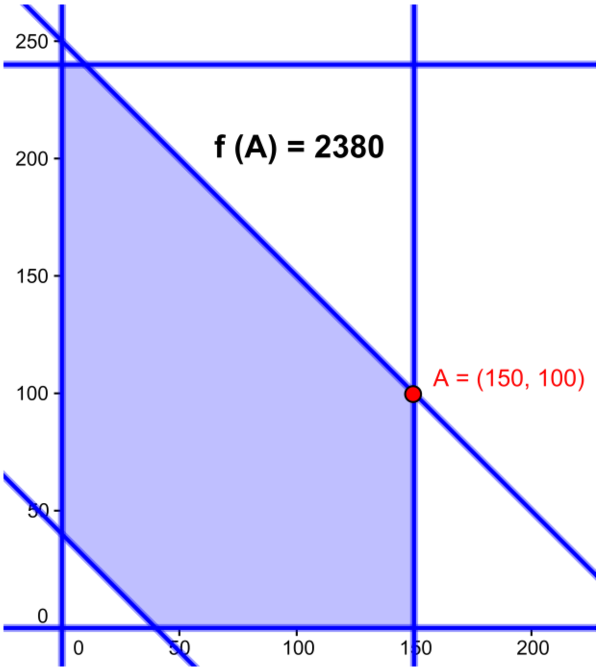
$y \geq 0;\ \ y \leq 240$

$x + y \leq 250;\ \ x + y \geq 40$

V naší konkrétní úloze hledáme minimum této účelové funkce f za zadaných podmínek.

Všechny podmínky musí platit současně, není tedy problém sestrojit mnohoúhelník, který je průnikem těchto podmínek. Dále je nezbytné sestrojit přímku, tedy účelovou funkci f. Poté umístíme bod A na mnohoúhelník. Nakonec do funkce f dosadíme souřadnice bodu A, získáme tím jisté číslo. Experimentální metodou (pohybem bodu A po mnohoúhelníku) zjistíme, kdy má toto číslo nejnižší hodnotu.

Řešením jsou poté souřadnice tohoto bodu, jelikož hledáme optimální hodnotu pro x a y.



Obrázek 33 - Bod na objektu Optimalizační úloha

Odpověď můžeme zapsat takto:

Nejnižší přepravní náklady budou při dodržení tohoto plánu rozvozu mléka:

	R	S	T
A	10	240	0
B	140	0	210

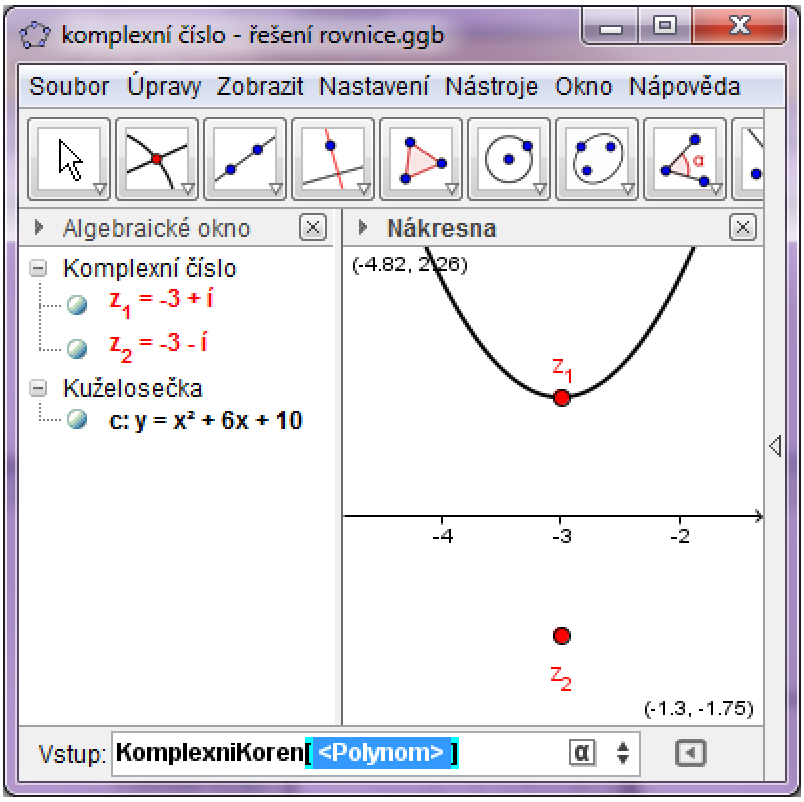
3.2.2 Připojit/Oddělit bod

Tento nástroj navazuje na nástroj Bod na objektu. Umožňuje libovolný bod připojit nebo oddělit od daného objektu.

3.2.3 Komplexní číslo

Velkou pozornost přitahuje další nový prvek, komplexní číslo. Zobrazení komplexního čísla do kartézské soustavy souřadnic není nic nesnadného. Reálné části komplexního čísla bude odpovídat *x*-ová souřadnice, imaginární části souřadnice *y*-ová. Pokud chceme zadat komplexní číslo pomocí vstupního řádku, zadáme pouze $A = (5 - 3i)$a program automaticky zobrazí komplexní číslo. Podívejme se, ale jak je to s počítáním s těmito čísly (body).

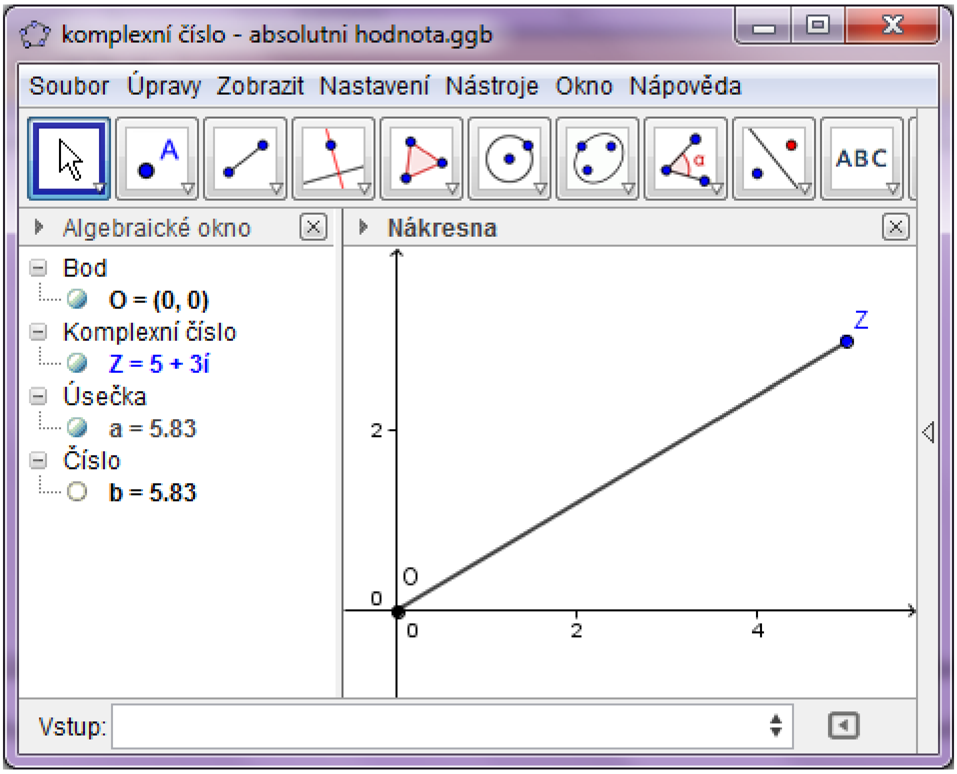
Sčítání, odčítání, násobení a dělení komplexních čísel není problém. Stejně snadné je i umocňování. Nejčastěji používáme komplexní číslo v souvislosti s výpočtem kořenů rovnic. I na toto mysleli vývojáři. Nestačí ovšem zadat polynom, který se nám zobrazí jako nějaká křivka a najít společný bod této křivky s osou x. Tento bod totiž neexistuje. Na vyřešení takovýchto rovnice je určen příkaz, který zadáme do vstupního řádku.



Obrázek 34 - Komplexní číslo Řešení rovnice

Můžeme si všimnout, že do příkazu zadáváme polynom, nestačí tedy zadat název kuželosečky, která je tímto polynomem popisována, ale musíme tento polynom zadat.

Dále můžeme pracovat s absolutní hodnotou. Na jednoduchém příkladu můžeme žákům ukázat platnost věty: „Absolutní hodnota komplexního čísla je rovna vzdálenosti jeho obrazu v Gaussově rovině od počátku soustavy souřadnic.“



Obrázek 35 - Komplexní číslo Absolutní hodnota

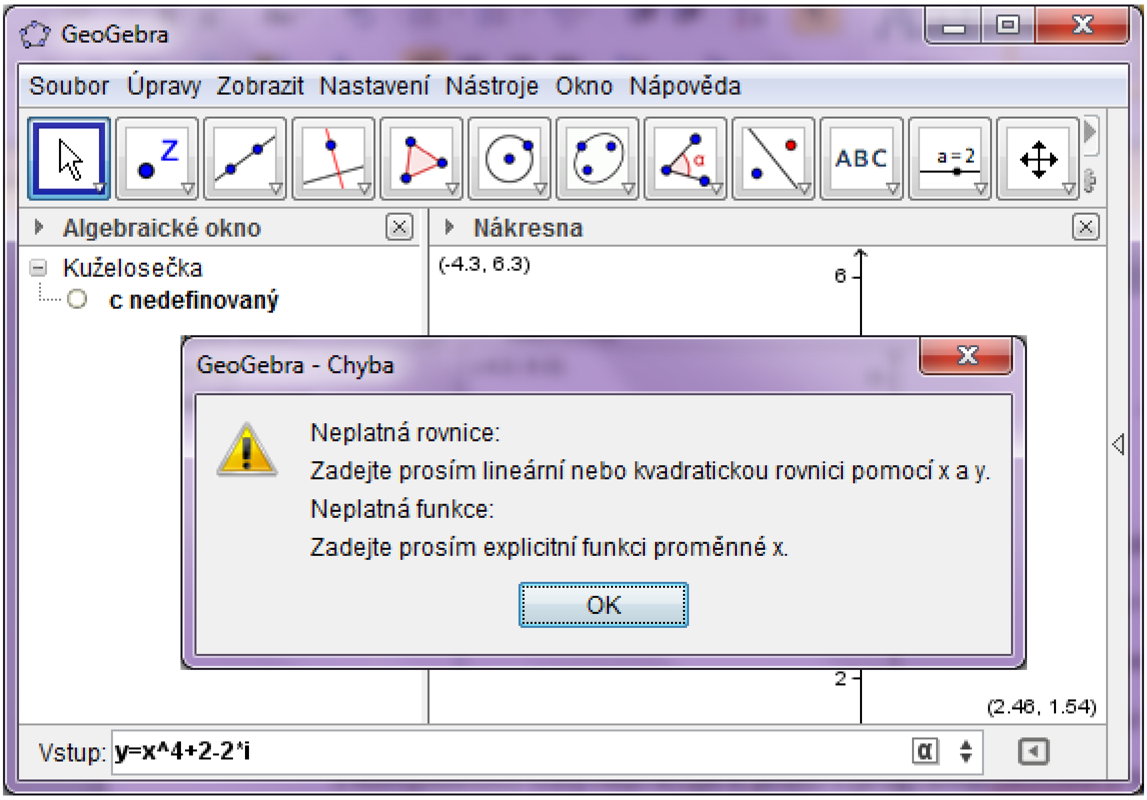
Na obrázku 35 je vidět délka úsečky a, vzdálenost OZ. Číslo b je výsledek po zadání příkazu abs(Z) tyto hodnoty se rovnají je tedy zřejmé, že výše uvedené tvrzení je platné.

Popsali jsme operace, které s komplexními čísly provádět lze, podívejme se ale i na ty operace, které provádět nelze.

K dispozici sice máme příkaz GoniometrickyTvar[<Komplexní číslo>] po jeho zadání ale dostaneme souřadnice v polárním tvaru, tedy číslo určující vzdálenost od počátku a úhel, který svírá spojnice tohoto bodu a osou x.

V předchozí části, jsme popisovali pohled CAS, tento pohled však s komplexními čísly pracovat neumí. Bylo již řečeno, že pokud je řešení rovnice komplexní číslo, tato čísla se nezobrazí. Pokud zadáváme čísla, v nichž se vyskytuje i, program je chápe jen jako neznámé, nikoliv jako čísla komplexní. Pracovat s komplexními čísly, lze tedy jen v pohledu Algebra & Nákresna.

Z předchozích tvrzení vyplývá i další operace, kterou zde nemůže provádět. Tím je řešení rovnic, v nichž se vyskytují komplexní čísla. Ať už jsou to rovnice binomické, nebo rovnice kvadratické s komplexními koeficienty. Tyto rovnice nelze zobrazit jako funkci, pokoušíme-li se je jako funkci zadat do vstupního řádku objeví se chyba.



Obrázek 36 - Komplexní čísla rovnice

Na obrázku vidíme okno, které se zobrazí po zadání binomické rovnice.

Jak bylo již řečeno pohled CAS s komplexními čísly nepracuje a proto v programu GeoGebra tyto rovnice nevyřešíme.

3.2.4 LOMENÁ ČÁRA

Lomenou čáru vytvoříme, pokud zvolíme minimálně tři body a ukončíme kliknutím na první bod. Délka této čáry se zobrazí v algebraickém okně.

Zajímavé využití lomené čáry si ukážeme na slovní úloze o pohybu.

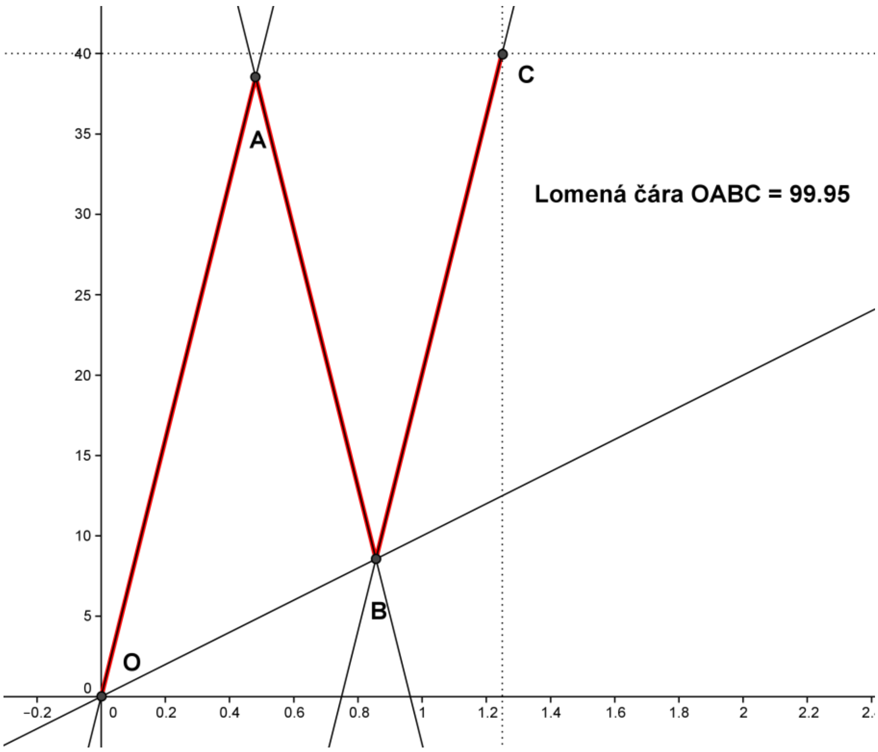
3.2.4.1 Příklad 4

Zadání:

Mohou tři cestující stihnout vlak, který odjíždí za 75 minut ze stanice vzdálené 40 km, dokáže-li každý z nich běžet průměrnou rychlostí 10 km/h a mají-li k dispozici dvoumístný motocykl, který může jet průměrnou rychlostí 80 km/h? Jak mají postupovat? A kolik kilometrů ujede motocykl?

Řešení:

Do grafu si zaneseme přímky znázorňující pohyb cestujících na motocyklu a cestujícího, který poběží. Již ze zadání je patrné, že běžec by vlak nestihl. Je nutné, aby po nějaké vzdálenosti z motocyklu sesedl jeden z testující a do stanice doběhl. Motocykl se poté vrátí a nabere cestujícího, který mezitím uběhl kus cesty. A společně dojeli na nádraží. Zde využijeme lomenou čáru.



Obrázek 37 - Lomená čára

Na obrázku 36 vidíme, že délka lomené čáry, znázorňující pohyb motocyklu je 99,95 jednotek. Odpověď na druhou otázku ze zadání zní: „Motocykl celkem najede 99,95 km.“

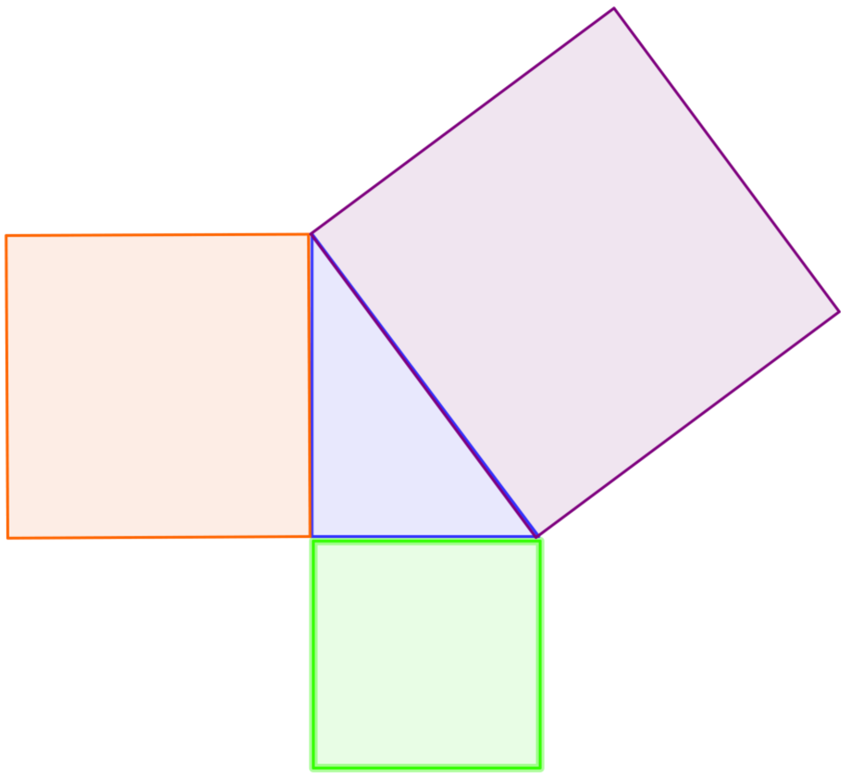
3.2.5 NEMĚNNÝ MNOHOÚHELNÍK

Z názvu vyplývá nejdůležitější vlastnost tohoto objektu, nelze ho měnit. Přesněji řečeno, nelze pohybovat s jednotlivými body tohoto mnohoúhelníku. Takto vytvořený objekt můžeme pouze přemisťovat, nebo s ním rotovat okolo prvního zadaného bodu.

Na grafickém důkazu Pythagorovy věty si ukážeme jedno z možných využití toho nástroje.

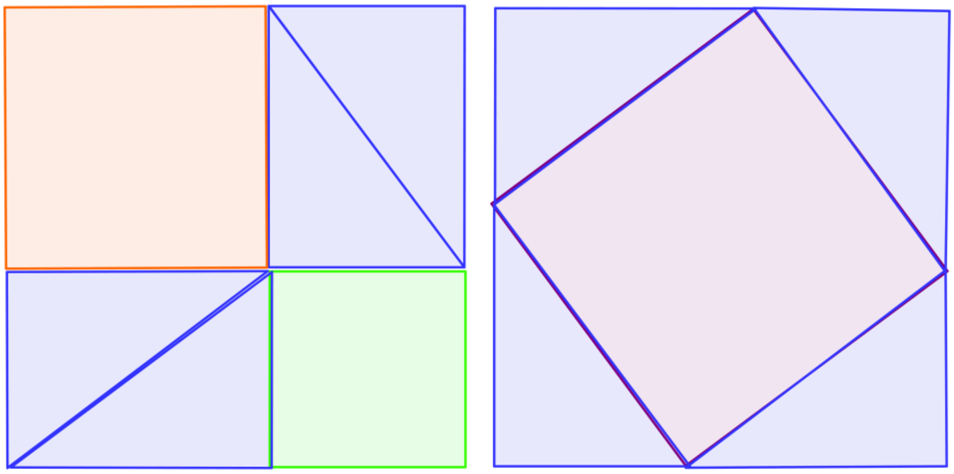
3.2.5.1 Příklad 5

Nejprve si sestrojíme 4 neměnné mnohoúhelníky. Prvním z nich je pravoúhlý trojúhelník, a další tři jsou čtverce o délce strany rovnající se vždy jedné straně trojúhelníka. Tyto objekty sestavíme, tak abychom měli sestrojené čtverce nad všemi stranami trojúhelníka.



Obrázek 38 - Pythagorova věta 1

Dalším krokem je zkopírování trojúhelníku a to tak abychom měli na nákresně celkem 8 shodných trojúhelníků. A nyní všechny objekty sestavíme do dvou shodných čtverců.



Obrázek 39 - Pythagorova věta 2

Z obrázku je patrné, že poskládání objektů není úplně přesné, k demonstračnímu příkladu ovšem postačuje. I přes nepřesnosti je zřejmé, že Pythagorova věta platí, jelikož v každém velkém čtverci je použit stejný počet shodných trojúhelníků.

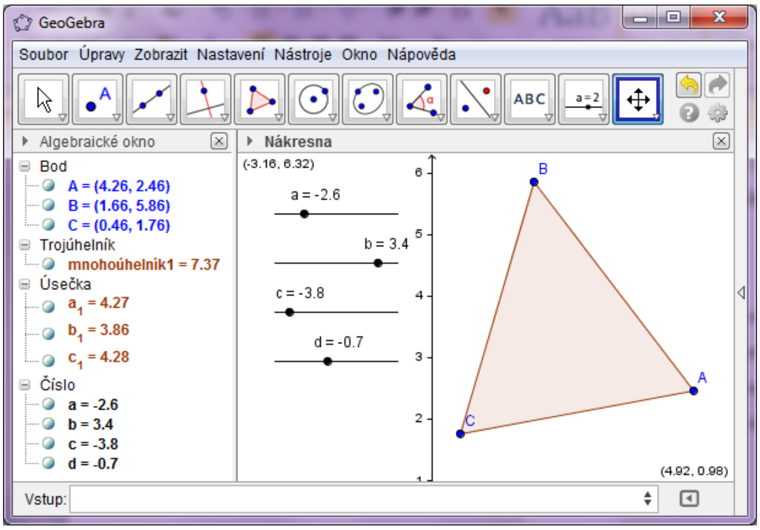
Pokud bychom měli při výuce k dispozici interaktivní tabuli, byl by důkaz proveden přesvědčivě.

<u>Poznámka</u>: I bez programu dynamické geometrie, lze důkaz Pythagorovy věty provést, k dispozici je vyučovací pomůcka určená přímo k provedení tohoto důkazu.

Uživatel může ocenit novinku při vytváření všech mnohoúhelníků, které jsou v GeoGebře dostupné. Pokud při označování bodů, držíme klávesu Alt, vytváříme úhel, který je násobkem $15°$.

3.2.6 VEKTOROVÝ MNOHOÚHELNÍK

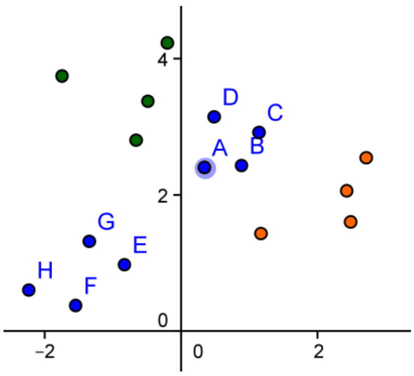
Vektrový mnohoúhelník je do jisté míry fixní, jde s ním posouvat pohybem jedním z jeho vrcholů, ale přeci jen lze měnit polohu i vrcholů zbývajících (oproti ostatním mnohoúhelníkům se v algebraickém okně objeví i příslušný počet čísel, která jsou po zviditelnění reprezentována posuvníky a uživatel jimi může měnit *x*-ovou a *y*-ovou souřadnici příslušného vrcholu – v podstatě tedy jde o jakousi představu *x*-ové a *y*-ové souřadnice vektoru, jehož počáteční bod je v jednom vrcholu a koncový bod odpovídá vrcholu, s nímž pohybujeme).



Obrázek 40 - Vektorový mnohoúhelník

3.2.7 VYTVOŘIT SEZNAM

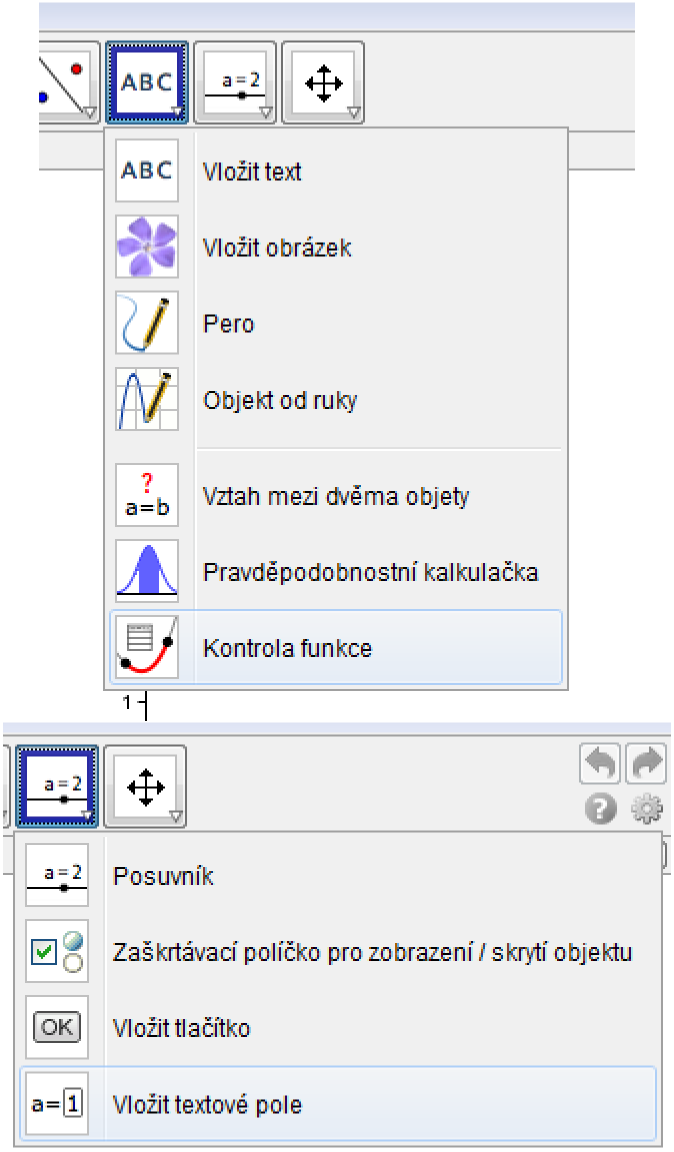
Seznam vytvoříme například z bodů, pokud vytvoříme dva seznamy, obsahující stejný počet objektů (bodů), můžeme tyto seznamy sčítat, odčítat a vytvoříme tak nové seznamy obsahující nové body.



Obrázek 41 - Vytvořit seznam

Na obrázku vidíme body A, B, C, D tvořící seznam 1 a body E, F, G, H tvořící seznam 2. Body zelenou barvou jsou body vytvořené sečtením těchto seznamů a body oranžové vznikly odečtením seznamu 2 od seznamu 1.

GeoGebra 4.2 má oproti předchozím verzím, více rozbalovacích seznamů, v seznamu obsahující posuvník přibylo tolik funkcí, že zde jeden seznam nestačil.



Obrázek 42 - Nové rozbalovací seznamy

3.2.8 PERO

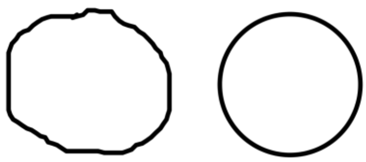
Zvolením tohoto nástroje můžeme na nákresnu psát od ruky, nemusíme vkládat žádný text, ale potřebné informace rovnou zapsat.

Tento nástroj je využitelný, zejména pokud pracujeme na interaktivní tabuli a potřebujeme zapsat nějakou poznámku. K zapsání libovolné poznámky můžeme použít i nástroj vložit text. Na interaktivní tabuli je snadnější zapisovat pomocí nástroje Pero. Další výhodou je možnost velmi snadného zvýraznění důležitých bodů.

3.2.9 OBJEKT OD RUKY

Díky tomuto nástroji, můžeme pomocí pera načrtnout základní geometrické tvary, nebo část nějaké funkce. Uživatel musí jen dát pozor, aby byl kreslený útvar dost přesný, pokud totiž není, nezobrazí se vůbec nic.

Toto automatické rozpoznávání načrtnutého geometrického objektu se dá využít opět zejména při používání interaktivní tabule. S takto získaným objektem můžeme dále pracovat, jako s objektem vytvořeným pomocí jiných nástrojů. Můžeme zobrazovat průsečíky s jiným objekty, nebo v případě kružnice vytvořit tečny z bodu atd.



Obrázek 43 - Objekt od ruky

Na obrázku vidíme rozdíl mezi kružnicí načrtnutou pomocí Pera a druhá kružnice je vytvořená pomocí nástroje Objekt od ruky.

3.2.10 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ KALKULAČKA

Po spuštění tohoto nástroje se nám otevře další okno. V tomto okně můžeme přepínat mezi dvěma kartami, první nese název Rozdělení a druhá Statistika.

3.2.10.1 Rozdělení - *Příklad 6*

Zadání:

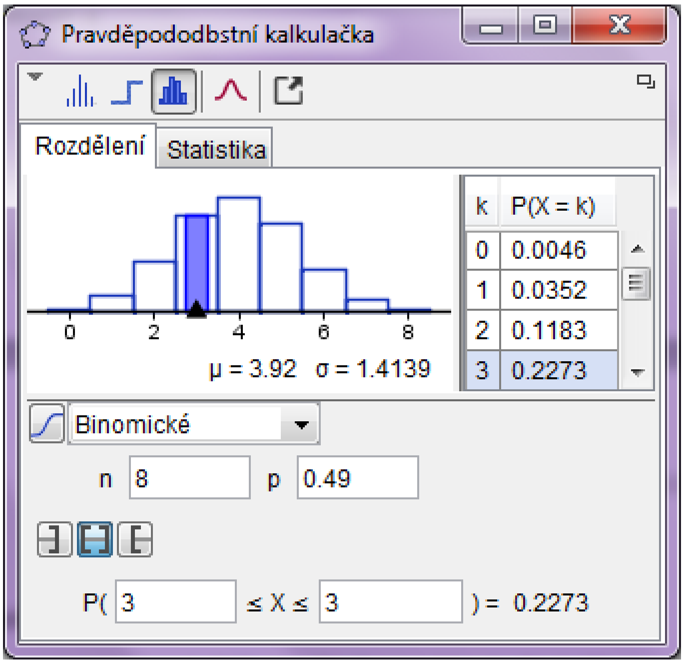
Předpokládejme, že pravděpodobnost narození dívky je 0,49. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině s 8 dětmi jsou právě 3 dívky?

Řešení:

Považujeme-li narození dítěte za náhodný pokus, pak studovanou náhodnou veličinou X je počet dívek v rodině s 8 dětmi.

Předpokládejme, že náhodné pokusy jsou nezávislé, tj. že pohlaví dříve narozených dětí neovlivní pravděpodobnost narození dítěte určitého pohlaví při dalším „pokusu“. Pak můžeme náhodnou veličinu X považovat za binomickou. (Litschmannová, 2011)

V rozbalovacím seznamu vybereme Binomické rozdělení, výše uvedené údaje vyplníme do příslušných kolonek a výsledek získáme bez dlouhých výpočtů.



Obrázek 44 - Pravděpodobnostní kalkulačka Rozdělení

Vidíme, že je-li $X = 3$ je pravděpodobnost $P \doteq 0{,}23$. Odpověď tedy zní:

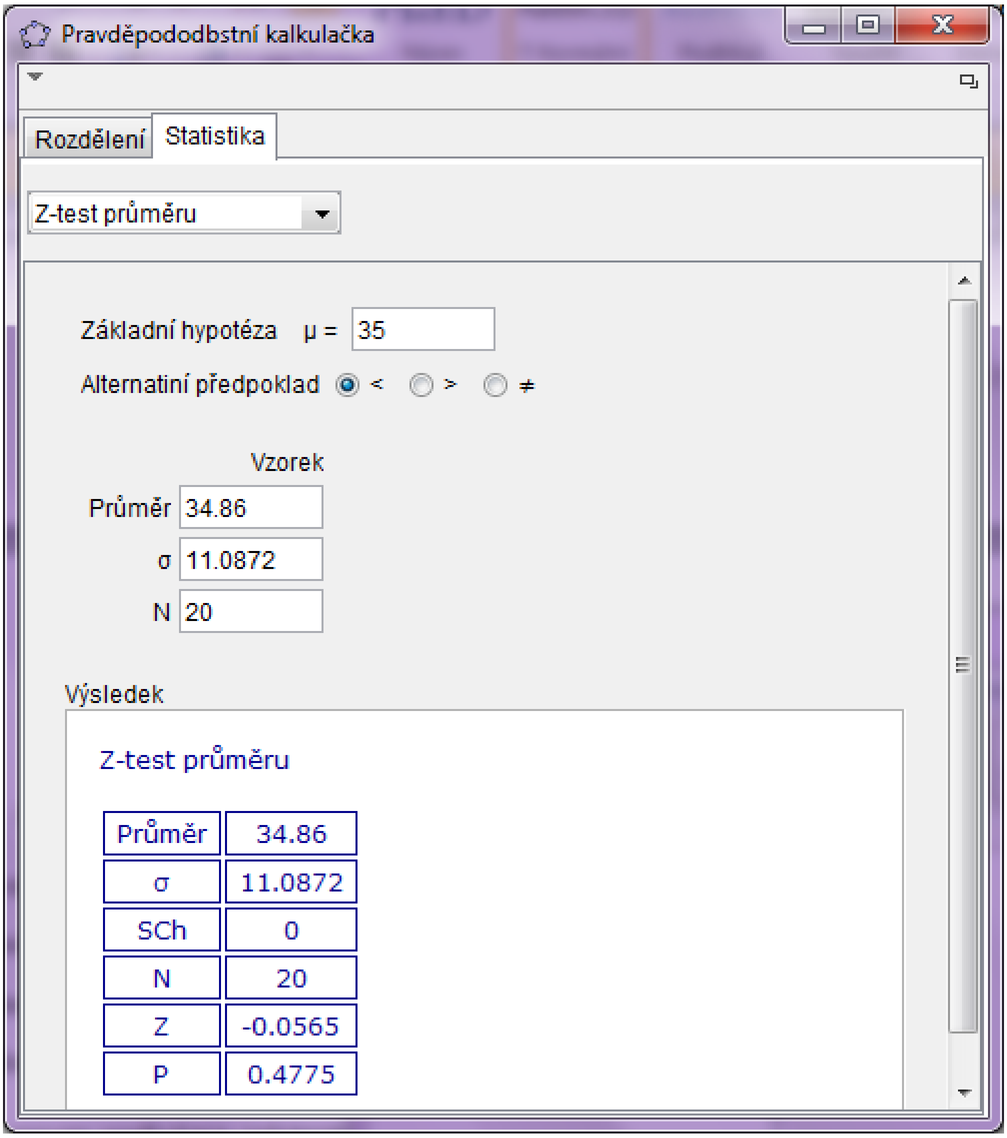
Pravděpodobnost že v rodině s osmi dětmi se narodí právě 3 dívky je 0,23

Poznámka: Pokud bychom chtěli zkoumat jaká je pravděpodobnost, že se v takové rodině narodí například méně než 3 *dívky, změníme pouze interval, z kterého vybíráme* X *na* $0 \leq X \leq 2$. *Pravděpodobnost by po zaokrouhlení byla* $0{,}16$

3.2.10.2 Statistika

Karta statistika nabízí možnosti testování statistických hypotéz. Na výběr je několik testů, které ovšem nesou název způsobů vyhodnocení, nikoliv známé používané názvy. Pokud bude tento nástroj používat uživatel zběhlý v oboru statistiky, tyto názvy ho nijak nezaskočí a dovede je užívat bez problémů.

My se pouze podíváme, jak tento nástroj vypadá.



Obrázek 45 – Statistika

Při změně testu se změní i celé okno podle toho co daný test obnáší a potřebuje.

3.2.11 KONTROLA FUNKCE

Díky tomuto nástroji můžeme získat velice snadno informace o zadané funkci na určitém intervalu. Údaje, které dostaneme, si ukážeme na konkrétním příkladu.

3.2.11.1 Příklad 7

Zadání:

Vypočítejte délku oblouku křivky: $y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(x-3)$, na intervalu omezující průsečíky této funkce s osou x.

Řešení:

Řešení provedeme jak početně, tak s použitím nástroje Kontrola funkce.

1. *Řešení početní.*

Prvním krokem je zjistit interval, na kterém budeme pracovat.

Zadanou funkci položíme rovnu 0.

$$\frac{1}{3}\sqrt{x}(x-3) = 0$$

$$a)\ \frac{1}{3}\sqrt{x} = 0 \Longrightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 0}$$

$$b)(x-3) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x = 3}$$

Funkce protíná osu x v bodech 0 a 3. Délku oblouku křivky budeme tedy počítat na intervalu $\langle 0,3 \rangle$.

délku oblouku křivky na uzavřeném intervalu $\langle a,b \rangle$ vypočítáme pomocí vzorce:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2 dx}$$

Vypočítáme první derivaci zadané funkce:

$$\boldsymbol{f'(x)} = \frac{1}{6}x^{-\frac{1}{2}}(x-3) + \frac{1}{3}\sqrt{x} = \frac{1}{6}\frac{(x-3)}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3}\sqrt{x} = \frac{1\sqrt{x}}{6} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3}\sqrt{x} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

Tuto derivaci umocníme na druhou:

$$(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}))^{\mathbf{2}} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 = \frac{1}{4}x - \sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4x} = \boldsymbol{\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x}}$$

K této mocnině přičteme 1:

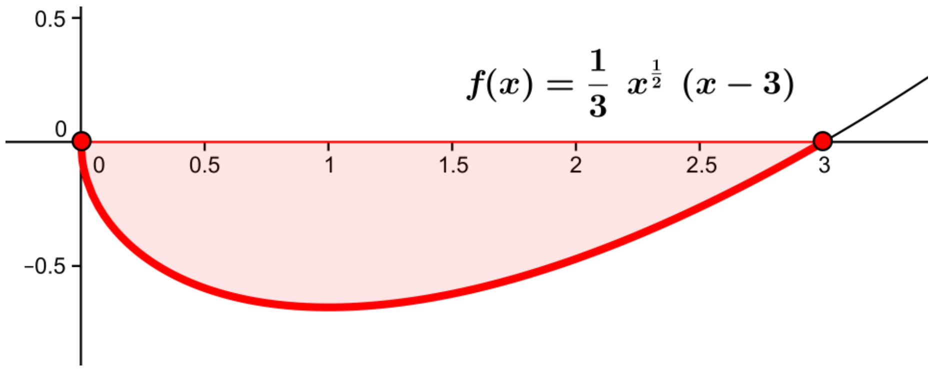
$$\mathbf{1} + \left(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x})\right)^{\mathbf{2}} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x} = \boldsymbol{\left(\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{2}}$$

Nakonec dosadíme do vzorce:

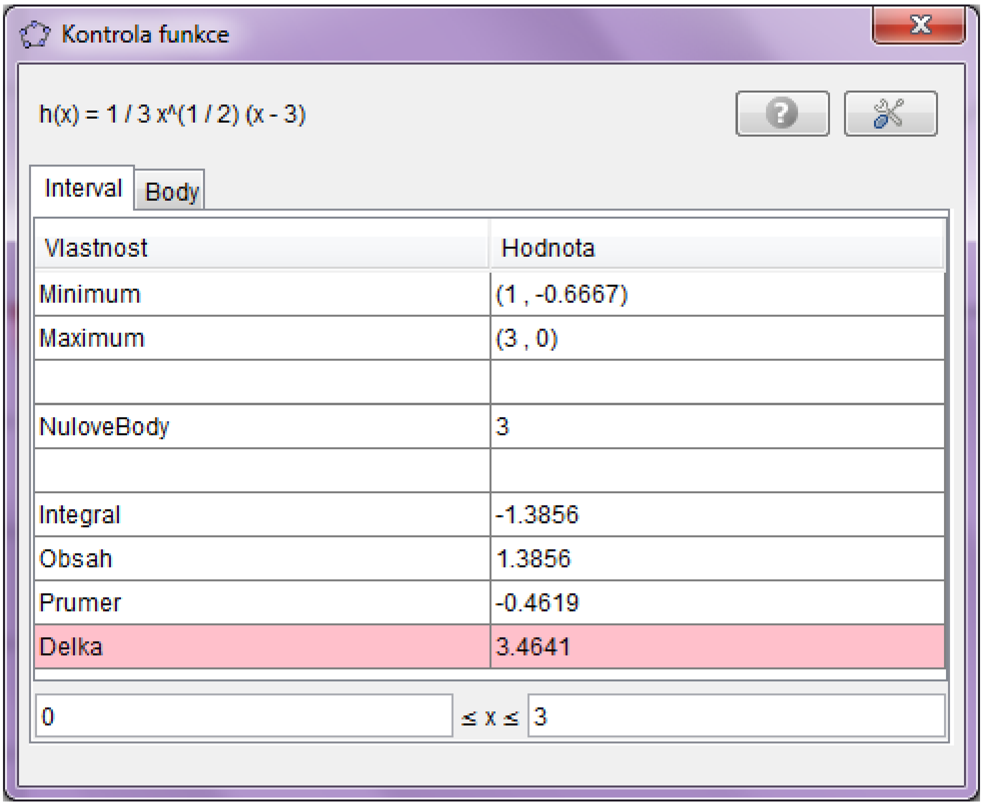
$$\boldsymbol{L} = \int_0^3 \left(\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\left[3^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{2}{3} + 2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\right] = \mathbf{2\sqrt{3}}$$

Délka oblouku křivky je $2\sqrt{3}$ jednotek.

2. *<u>Řešení nástrojem Kontrola funkce</u>*



Obrázek 46 - Kontrola funkce 1



Obrázek 47 - Kontrola funkce 2

Jediné co po použití nástroje Kontrola funkce musíme udělat je změnit interval, na kterém budeme s funkcí pracovat, vše ostatní se vypočítá samo. Interval je samozřejmě ihned vidět po vykreslení zadané funkce, pokud by průsečíky nebyly tak zřejmé jako zde, můžeme použít nástroj Průsečíky dvou objektů.

Nyní porovnáme výsledky, zda jsme někde neudělali chybu. Výsledky můžeme porovnat v pohledu CAS, kde zadáme výsledek početního řešení a použijeme nástroj Numerický výpočet. Tento výsledek by se měl rovnat řádku Délka z obrázku 47.

$$2\sqrt{3} \approx 3{,}46$$

$$Delka = 3{,}4641$$

Nyní se podívejme na další informace, které získáme po použití nástroje Kontrola funkce. Použijme obrázek 47.

Dostali jsme souřadnice ostrého lokálního minima, ostrého lokálního maxima, dále počet nulových bodů (pokud by byl jen jeden nulový bod, byly by zobrazeny opět jeho souřadnice). Dále máme k dispozici určitý Integrál, jehož meze jsou dány zadaným intervalem, nechybí ani Obsah plochy pod křivkou (tento údaj není podstatný, pokud uživatel zná základy integrálního počtu). Dále vidíme průměrnou hodnotu zadané funkce na určeném intervalu a o posledním údaji Délka jsme již hovořili.

3.2.12 Vložit tlačítko

Tlačítka lze použít k ovládání prostřední nebo vlastností objektů. Pro jejich vložení je nutné znát základy GeoGebra Skriptu, tomuto tématu se budeme v krátkosti věnovat v další kapitole.

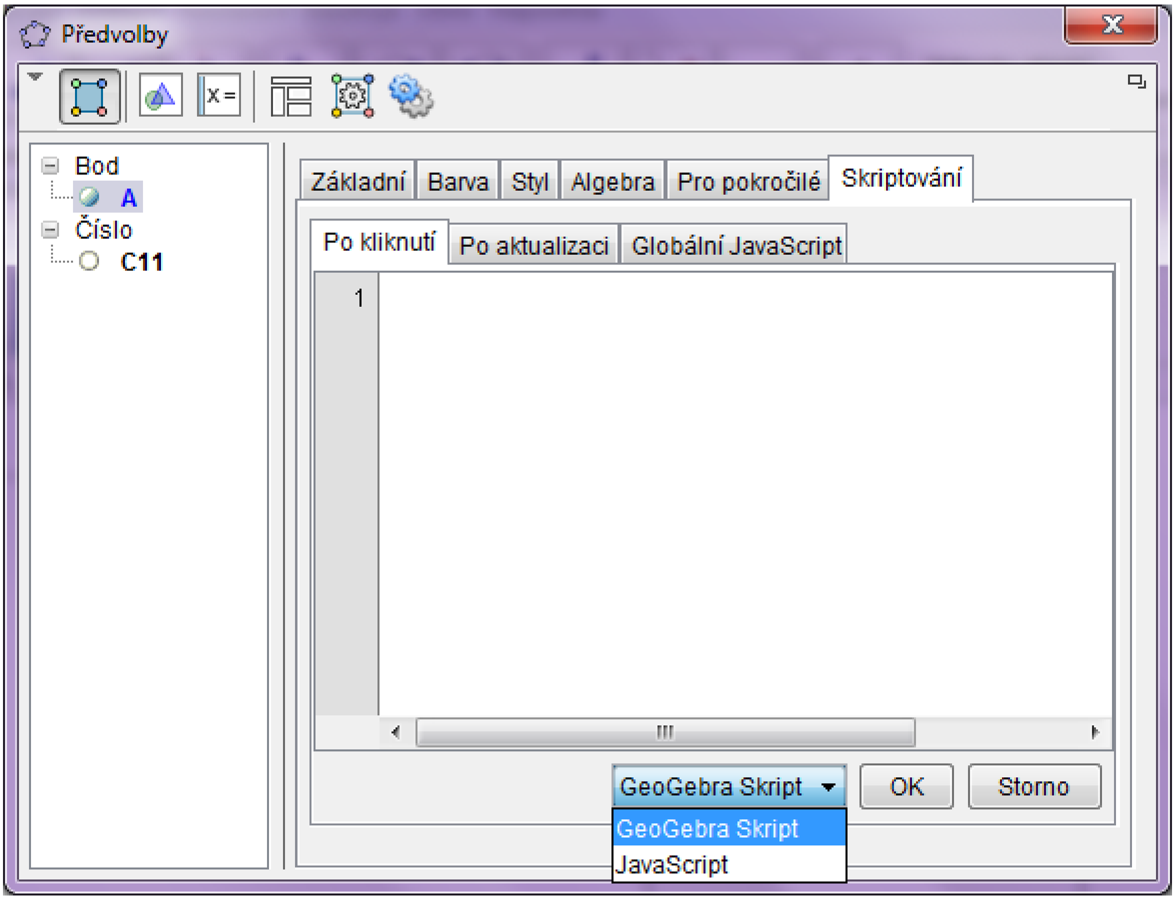
3.2.13 Vložit textové pole

Tento nástroj umožňuje napsat text a k němu propojený objekt, tak, že se informace o objektu mění podle toho, jak se mění poloha daného objektu.

3.3 SKRIPTOVÁNÍ

Pokud chceme obsáhnout všechny důležité změny oproti verzi 3.2, nesmíme zapomenout na možnosti skriptování.

Kartu skriptování nalezneme ve vlastnostech objektu.



Obrázek 48 - 4.2 Skriptování

K dispozici máme dva programovací jazyky. Můžeme použít rozšířený JavaScript nebo jazyk speciálně pro GeoGebru.

Manuál k GeoGebra skriptu nalezneme na stránce: http://wiki.geogebra.org/en/Tutorial:Introduction_to_GeoGebraScript.

Tento návod je k dispozici pouze v angličtině, což není takový problém jako to, že obsahuje jen elementární příkazy. Podrobnější návod není zatím k dispozici.

Využití tohoto skriptování můžeme spatřovat v animacích či názorných ukázkách.

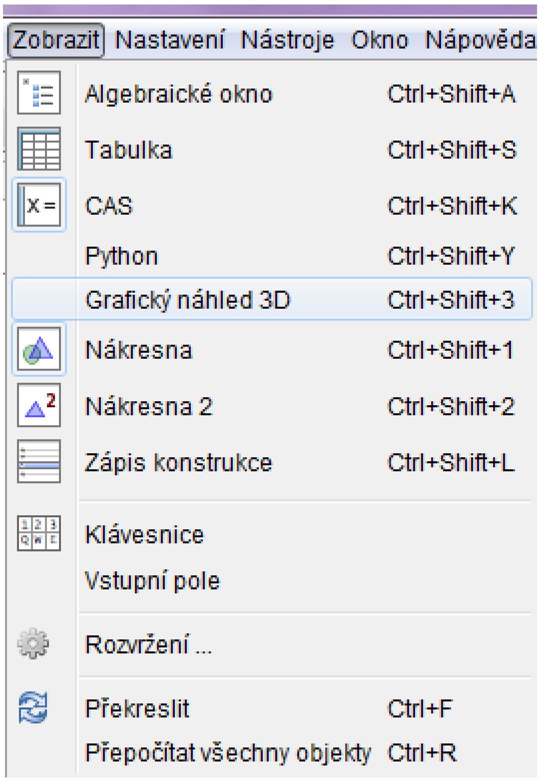
4 GeoGebra 5.0 Beta

Od zadání práce k jeho vypracování došlo k vytvoření nové verze, která ponese označení 5. Zatím je tato verze dostupná jen jako Beta verze, tedy verze testovací, a lze očekávat jisté změny.

Přesto že se jedná zatím o testovací verzi, podíváme se na podstatné změny a rozdíly oproti verzi 4.2.

Při spuštění nás vítá známé okno, a vypadá to, že k žádné změně nedošlo. Pokud projdeme všechny předvolené pohledy, nezaznamenáme ani jednu odchylku od verze předchozí. Malé změny jsou pouze po rozbalení karty Zobrazení. Kde nově nalezneme Python a Grafický náhled 3D.

Zatím jsou tato nová okna bez ikonek, dá se ovšem předpokládat, že v plné verzi tomu bude jinak.

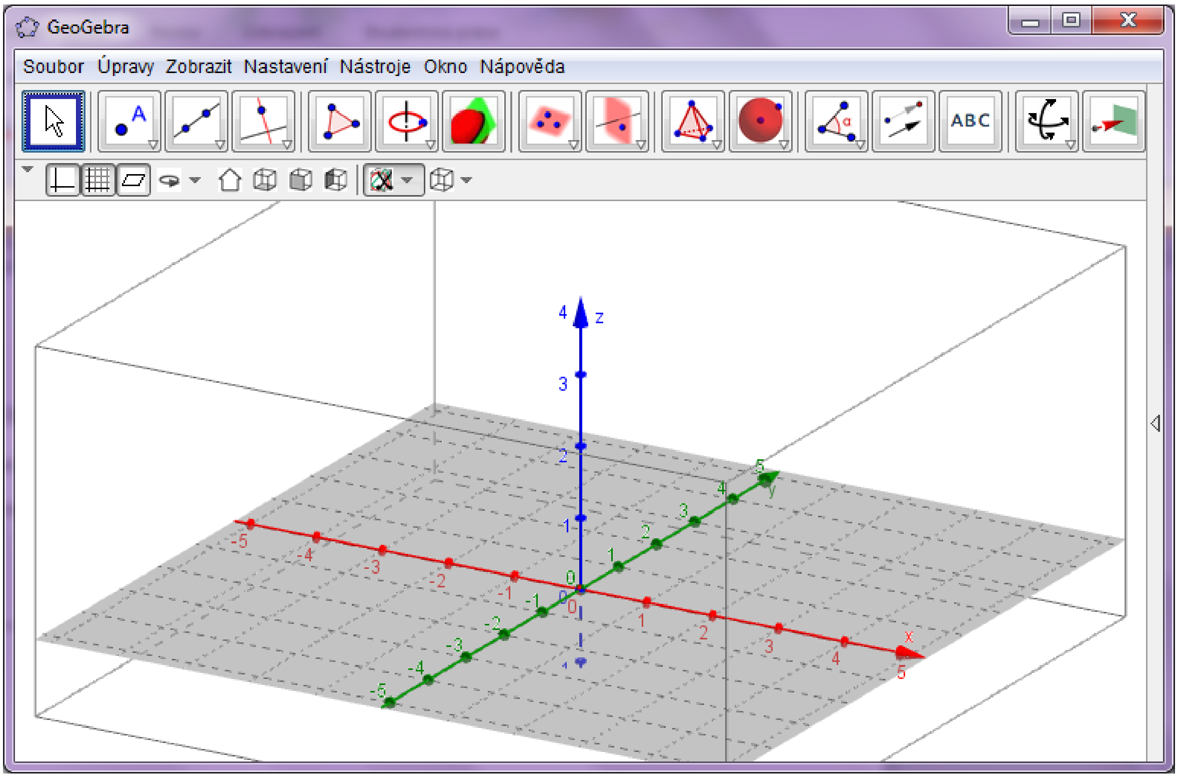


Obrázek 49 - GeoGebra 5.0 Zobarazit

Python je další programovací jazyk, který zde dostal k dispozici své okno, skriptování a programovaní je opět o něco jednodušší.

4.1 GRAFICKÝ NÁHLED 3D

Jelikož se jedná o zcela nové prostředí, které dosud GeoGebra nenabízela, projdeme si vše od začátku.



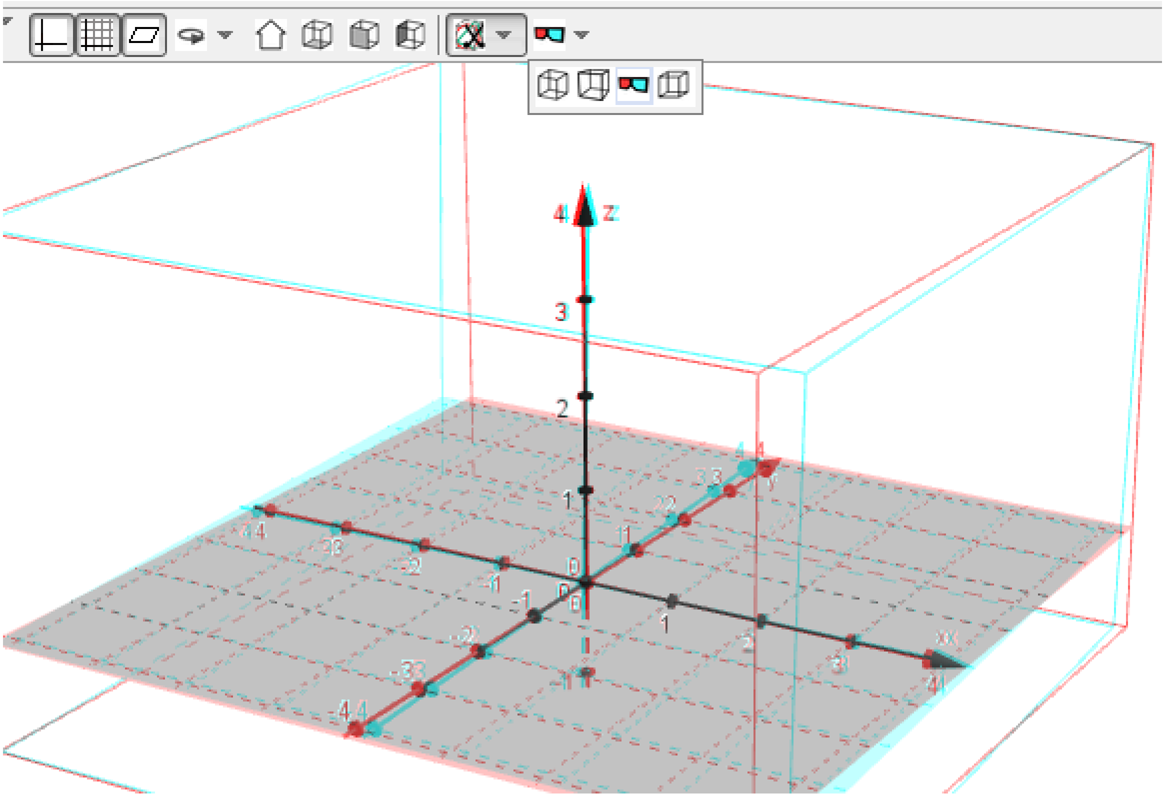
Obrázek 50 - Verze 5.0 3D

4.1.1 MOŽNOSTI 3D ZOBRAZENÍ

Nejprve se podíváme na lištu, kde máme k dispozici různé možnosti nastavení pohledu. První ikona umožňuje zobrazit/nezobrazit osy, druhá slouží k zobrazení mřížky. Třetí ikonou vypínáme/zapínáme šedou rovinu procházející bodem 0 a oddělující kladné hodnoty na ose z.

Další ikony slouží k různému natočení pohledu. K dispozici jsou i možnosti zobrazení nárysu, půdorysu a bokorysu. Předposlední ikona připomínající barevné klubko, poskytuje volbu zobrazení šedých čar vymezujících prostor pro práci s 3D grafikou.

A konečně poslední ikona zprostředkovávající možnosti různého typu projekce. Nachází se zde i Anaglyph projection**,** což je jedna z technik umožňující uživateli prostorově vnímat obraz. Princip spočívá v rozložení obrazů pro levé a pravé oko na barevné složky, konkrétně na modrozelenou a červenou. Existují i jiné barevné techniky projekce, tato je však nejrozšířenější. Brýle s barevnými průzory (pravé oko modrozelený, levé oko červený) používané v 3D kinech, na 3D televize a na 3D obrázky vlastní poměrně velké množství lidí. Je tak velice snadné si tyto 3D obrazy prohlédnout. Je třeba dodržet barevnost brýlí a barevnost rozložení obrazu, při použití jinak barevných brýlí obraz nebude prostorový.



Obrázek 51 - 5.0 Analyph projection

4.1.2 3D OBJEKTY

Možnosti zobrazení jsme si prošli. Nyní se podíváme na to jaké objekty nám Grafický 3D pohled nabízí a jak s nimi lze pracovat.

Pro lepší přehlednost si dostupné objekty a funkce rozdělíme do několika skupin. Všechny objekty můžeme zadat pomocí rovnice, jíž jsou určeny, zapsáním do vstupního řádku. Další způsoby zadávání konkrétních objektů probereme níže.

4.1.2.1 Bod

Základním objektem je bod. S bodem můžeme na 3D nákresně pracovat stejně jako na nákresně 2D. Pokud chceme bod umístit přímo na nákresnu, lze to primárně pouze na osy, nebo zobrazenou mřížku. Chceme-li mít bod v prostoru, musíme na něj kliknout, zobrazí se šipky určující směr možného posunutí (změna x-ové a y-ové souřadnice). Při druhém kliknutí na bod se objeví šipky pro posun z-ové souřadnice.

Další nástroje způsoby zadávání bodu jsou: Bod na objektu, Průsečíky dvou objektů, Střed, Připojit/Oddělit bod, Komplexní číslo.

4.1.2.2 Rovinné objekty a nástroje

Každý n – rozměrný prostor je rozšířením $(n-1)$ - rozměrného prostoru. GeoGebra však ve svém Grafickém 3D pohledu nenabízí všechny objekty, které lze sestrojit v klasickém pohledu Nákresna. Poskytuje nám jen některé možnosti, není to ovšem na škodu 3D prostor nabízí i tak zajímavé využití.

Můžeme pracovat s Přímkou, Úsečkou, Polopřímkou a Vektorem. Nechybí Kolmice a Rovnoběžka. Dalšími prvky jsou Mnohoúhelník a Kružnice. Kružnici zde zadáváme pomocí osy otáčení a bodu na kružnici. Dále můžeme vytvořit úhel daný třemi body, nebo dvěma přímkami.

Z nákresny 2D máme v tomto pohledu k dispozici výpočet vzdálenosti a výpočet obsahu. Z různých geometrických zobrazení je na 3D nákresně k dispozici pouze posunutí. Můžeme také samozřejmě vložit text.

Další nástroje a objekty, které budeme popisovat, jsou k dispozici pouze v Grafickém 3D pohledu.

4.1.2.3 Rovina

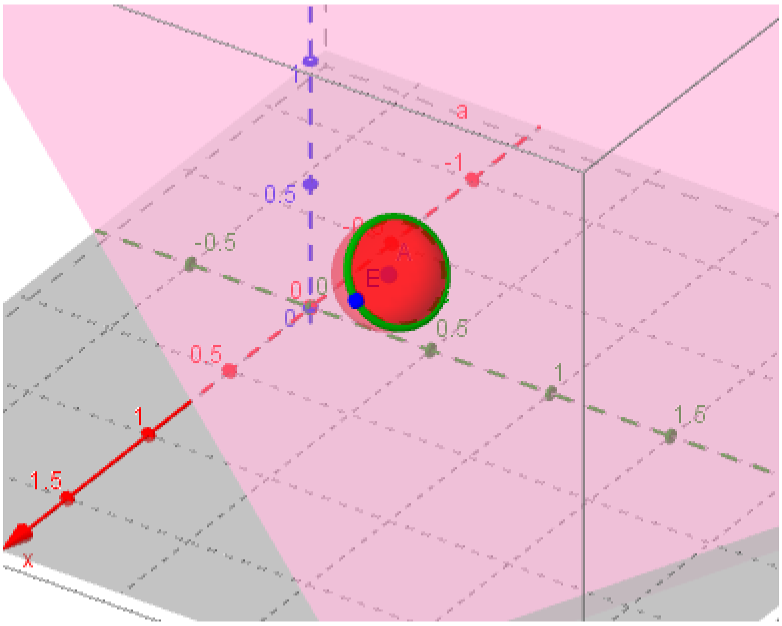
Roviny můžeme zadat dvěma způsoby. Pomocí 3 bodů, nebo pomocí přímky a bodu. Samozřejmostí je rovina kolmá a rovina rovnoběžná k dané přímce a procházející daným bodem.

4.1.2.4 Koule

Ve 3D prostoru nesmí chybět možnost vytvořit Kouli. Tu můžeme vytvořit pomocí středu a bodu na kouli, nebo pomocí středu a poloměru.

4.1.2.5 Průnik ploch

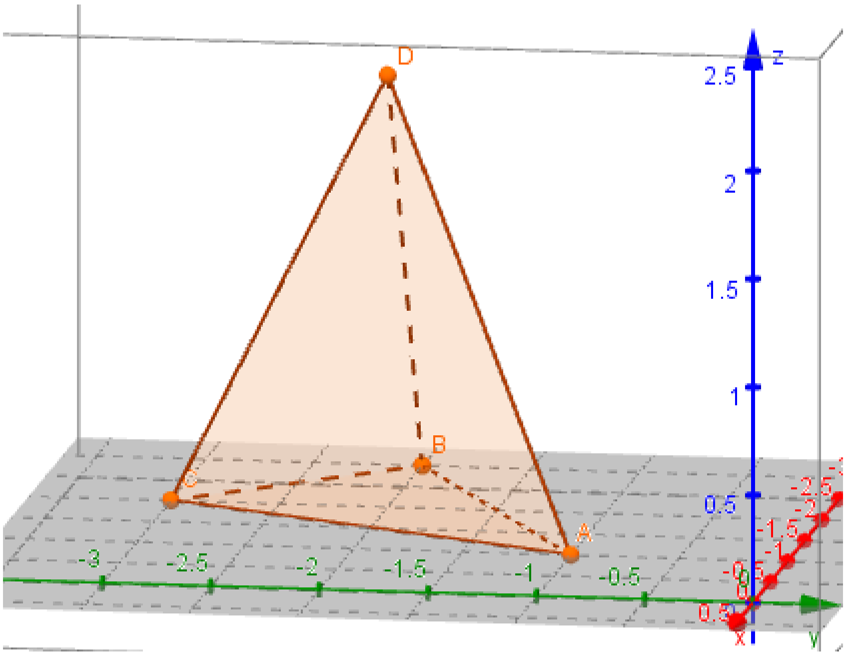
Při práci v prostoru potřebujeme možnosti zobrazení průniku dvou ploch. Používáme-li tento prvek, je lepší zadávat jej pomocí příkazového řádku. V prostoru se velice těžce označují správné objekty. Může se stát, že buď označíme objekty nesprávné, nebo vůbec žádné. Výsledkem průniku dvou rovin je přímka. Zajímavější je ovšem výsledek máme-li určit průnik roviny a koule. Předpokládaným výsledkem by byl kruh. GeoGebra ovšem tento průnik zobrazí pouze hraniční křivkou a popíše jej velice výmluvně: **c: todo-GeoConic 3D**



Obrázek 52 - 5.0 Průnik ploch

4.1.2.6 *Jehlan a hranol*

Dalším objektem je jehlan, kdy je potřeba nejprve označit podstavu a poté vrchol. Stejným způsobem vytvoříme i hranol.



Obrázek 53 - 5.0 Jehlan

Jak můžeme vidět na obrázku GeoGebra používá pro zobrazování objektů obvyklý způsob zobrazování, kdy hrany, které nejsou vidět, jsou zakresleny čárkovanou čarou.

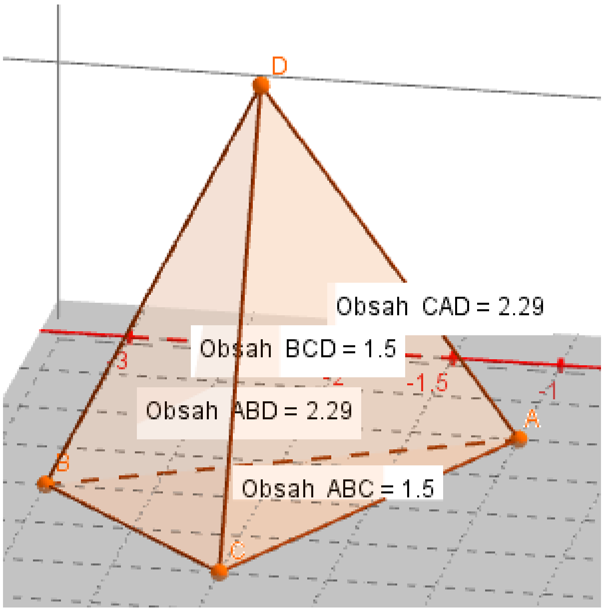
Dalším funkce které jsou k dispozici se nazývají Vytažení hranolu nebo kužele a Vytažení hranolu nebo válce. Pro použití těchto funkcí stačí označit podstavu libovolného tvaru a zadat výšku. Kužely a válce sestrojujeme pomocí těchto nástrojů, nebo pomocí vstupního řádku.

4.1.2.7 *Objem a povrch*

Jestliže, jsme v předchozí verzi narýsovali libovolný mnohoúhelník, automaticky se nám v popisu vypočítal jeho obsah. Zde je tomu podobně, ale místo povrchu pláště je vypočítán objem.

Objem jehlanu, hranolu a koule vypočítáme snadno, složitější je vypočítání objemu jehlanu nebo válce. Pokud chceme znát objem těchto těles, musíme zjistit obsah podstavy a pomocí vzorce dopočítat objem.

Povrch je opět o něco složitější než objem. Pokud bychom chtěli znát povrch jakéhokoliv tělesa, musíme nejprve zjistit obsahy jednotlivých částí a ostatní dopočítat.



Obrázek 54 - 5.0 Povrch

Na obrázku je ukázána první část vypočtu povrchu jehlanu. Zjistit v GeoGebře povrch koule je ještě složitější, musíme znát poloměr a pak v pohledu CAS vypočítat povrch pomocí vzorce. Výpočet povrchu jehlanu nám GeoGebra neumožnuje vůbec a musíme jej vypočítat stejně, jako kdybychom pracovali s papírem a tužkou.

4.1.2.8 Pohled

O změně pohledu již byla řeč, ale dosud jsme se nezmínili o možnosti natáčení nákresny do různých úhlů, které umožňuje další tlačítko. V tomto rozbalovacím seznamu se nachází i Pohyb s nákresnou, zvětšení a zmenšení. Zvětšení a zmenšení je samozřejmě i zde možné pomocí kolečka na myši.

Posledním tlačítkem je Pohled zepředu, který vrátí pohled na nákresnu do původního stavu.

4.2 Využití Grafického 3D náhledu

V předchozí části jsme ve zkratce popsali Grafický 3D pohled, který nám bude nabízet GeoGebra 5.0. Nyní se podíváme na příklady, ve kterých 3D pohled využijeme.

4.2.1 Soustava rovnic se třemi neznámými

O grafickém řešení rovnice o jedné neznámé v krátkosti hovořila jedna z předchozích kapitol. Jelikož máme k dispozici trojrozměrný prostor, můžeme graficky vyřešit soustavu tří rovnic o třech neznámých.

4.2.1.1 Příklad 1

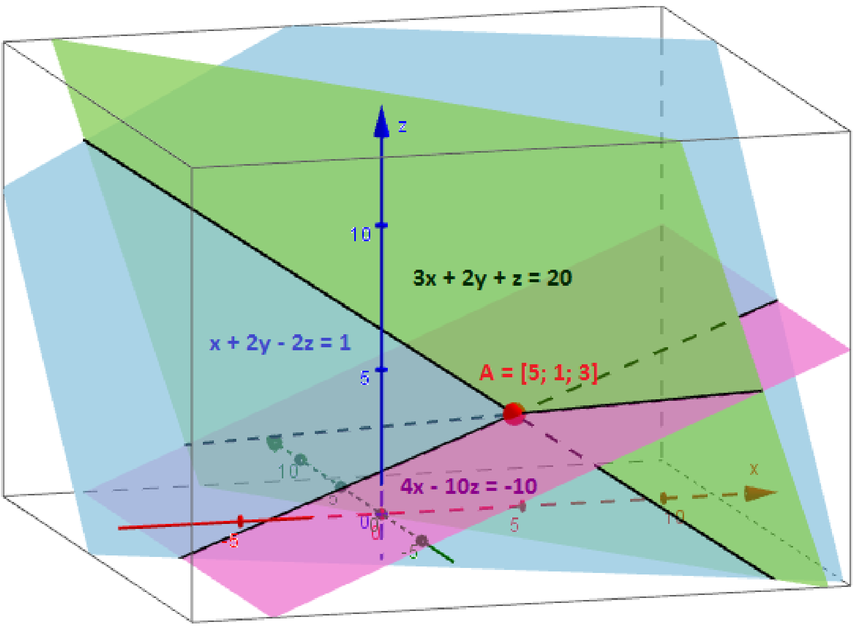
Zadání:

Vyřešte soustavu rovnic:

$$3x + 2y + z = 20$$
$$x + 2y - 2z = 1$$
$$4x - 10z = 20$$

Řešení:

Do vstupního řádku ve 3D pohledu zadáme rovnice, pomocí Průsečíky dvou ploch zjistíme společné přímky těchto rovin. Výsledkem jsou poté souřadnice bodu, kde se tyto společné přímky protínají.

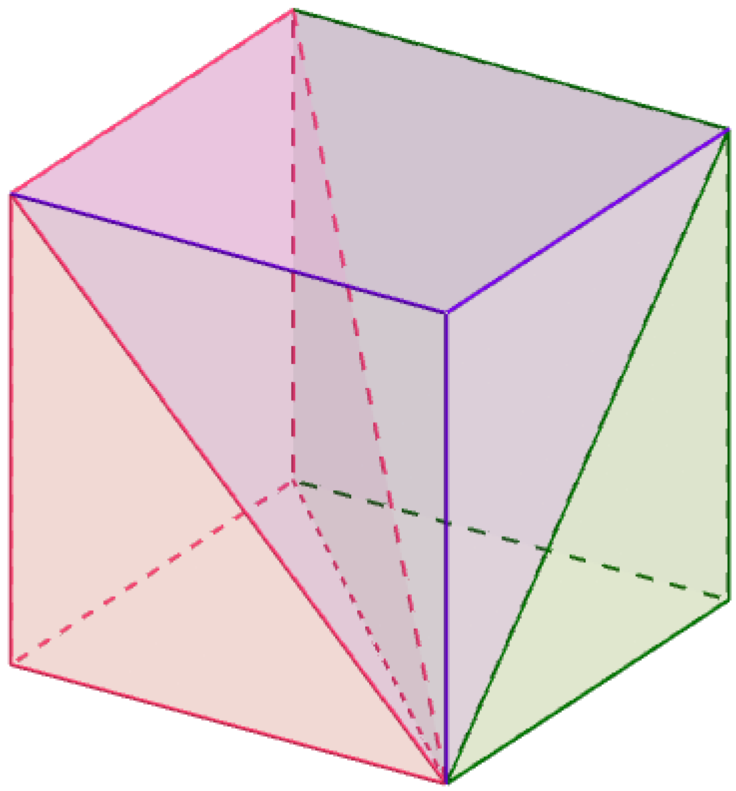


Obrázek 55 – 5.0 soustava rovnic

4.2.1.2 Objem jehlanu

Díky 3D grafice můžeme žákům lépe vysvětlit odvození vzorce pro výpočet objemu pravidelného čtyřbokého jehlanu. Pro tento účel existují didaktické pomůcky, které znázorňují daný problém lépe. Pokud ovšem tuto pomůcku k dispozici nemáme, můžeme si pomocí GeoGebry 5.0 vytvořit jednoduchý model.

Základem je krychle, do níž umístíme tři shodné čtyřboké jehlany. Základy jsou 3 sousední strany krychle a všechny 3 jehlany mají stejný vrchol.



Obrázek 56 – 5.0 Jehlan

Z tohoto obrázku již vyvodíme vzorec pro výpočet objemu jehlanu.

5 ZÁVĚR

Ve své práci jsem se snažila popsat nové prvky a nástroje programu GeoGebra. Cílem bylo ukázat některé možnosti využití těchto prvků a nástrojů. V některých případech bylo složité najít vhodné příklady. Pro ukázku nástroj Připojit/Oddělit bod. Způsob použití je jasný, ale konkrétní využití se hledá velice obtížně. Naopak pro některé nové prvky bylo nesnadné vybrat z většího množství příkladů ten, který daný případ vystihuje nejlépe. Například pohled CAS nabízí mnoho zajímavého využití.

Při zkoumání nových funkcí čtvrté verze, mě zaujalo „počeštění" programu. Všechny příkazy mohou být do vstupního řádku zadány česky, v již zmíněném pohledu CAS je to stejné. Nevýhodou zadávání českých příkazů jsou občasné nepřesnosti překladu. Tyto nepřesnosti se neprojevují jen v příkazech, ale i názvech jednotlivých nástrojů a prvků. I přes některé odchylky je však překlad velice výstižný a pro využití v našich zeměpisných polohách nadmíru přínosný.

Některé nové prvky jsou dle mého názoru nedostatečné. Kupříkladu Komplexní číslo lze v podstatě jen zanést do kartézské soustavy souřadnic a pomocí daného příkazu nalézt komplexní kořeny funkce. V pohledu CAS se s komplexním číslem nedá vůbec pracovat. Z toho důvodu v pohledu CAS nevypočítáme všechna řešení zadaných rovnic.

Neúplný je také návod dostupný na internetových stránkách. K dispozici jsou sice návody téměř ke všem funkcím (některé jen v anglickém originále), většinou jsou však použity elementární příklady. Možnost skriptování je zde popsána jen okrajově. Pokud chceme s GeoGebraSkriptem pracovat musíme se spolehnout na své zkušenosti a výzkumnické schopnosti.

Jedna kapitola je věnována nově připravované verzi GeoGebra 5.0, která je zatím dostupná jako beta verze. Snaha vyjít uživatelům vstříc a nutnost vyvinout 3D prostředí působí velice slibně. Tento program patří mezi poměrně jedinečné vzdělávací nástroje umožňující spojení geometrie s algebrou a analýzou, protože je zde možné pracovat například i s funkcemi více proměnných.

Závěrem musím konstatovat, že i přes některé malé nedostatky je GeoGebra 4.2 snadno ovladatelná. Nejen díky tomu, že od první verze se téměř nezměnilo uživatelské rozhraní, ale i díky neustálé snaze vývojářů o zdokonalení má program stále více uživatelů.

6 SEZNAM OBRÁZKŮ

7 SEZNAM LITERATURY

GeoGebraWiki [online]. 2013. Dostupné z WWW:
⟨http://wiki.geogebra.org/cs/Manuál:Hlavní_stránka⟩

GeoGebraWiki [online]. 2011. Dostupné z WWW:
⟨http://wiki.geogebra.org/en/Manual:Main_Page⟩

CALDA, Emil, Matematika pro gymnázia, Komplexní čísla, Praha 4, Prometheus, spol. s r. o., 2010, 4. vydání, 134 s., ISBN 987-80-7196-364-6

HONZÍK, Lukáš, Přednášky z předmětů Metody řešení matematických úloh 1, 2, 3 a cvičení z předmětu Vybrané kapitoly matematické analýzy

HOHENWARTER, M., HOHENWARTER. J. GeoGebra Help: Oficcial Manual 3.2 [online]. [s.l.] : [s.n.], 2009. Dostupné z WWW:
⟨http://wiki.geogebra.org/help/docuen.pdf⟩

HOHENWARTER, M., PREINER, J. GeoGebra nápověda 3.0 [online]. [s.l.] : [s.n.], 2007. Dostupné z WWW:
⟨http://wiki.geogebra.org/help/docucz.pdf⟩

LITSCHMANNOVÁ, M. Matematik pro inženýry 21. století, 2011 Dostupné z WWW:
⟨http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/resene_priklady_pravdepodobnost.pdf⟩

SVOBODOVÁ, Lenka, Užití programu GeoGebra ve vybraném učivu matematiky a jeho výhody [Bakalářská práce], Plzeň, ZČU v Plzni, 2011

8 RESUMÉ

The diploma thesis deals with description and use of tools and functions of the fourth version of dynamic geometry software "GeoGebra".

This programme is translated to a lot of languages, although, the Czech version offers the quality translation, it is possible to find some inaccuracies. The new tool Complex Number is possible to use only in Algebra and Graphics View unlike the CAS View that does not work with it at all. The manual that is located on webpages contains almost all tools but it is not devoted to GeoGebraScript and it is the reason why the user has to depend on his or her own experience.

One chapter is devoted to the upcoming new version of GeoGebra 5.0, which is currently available as a beta version. There are Grafics View 3D which offers an interesting use.

In conclusion, I would like to mention that despite the fact that the programme GeoGebra has some inaccuracies, it is easy to control. The amount of users is still increasing, not only because of the user interface was not almost changed from the GeoGebra´s first version but also thanks to the developers´ effort to improve the programme.