ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

ÚLOHY VEDOUCÍ NA SOUSTAVY POLYNOMIÁLNÍCH ROVNIC A METODY JEJICH ŘEŠENÍ V DĚJINÁCH EVROPSKÉ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Veronika Uhrová

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma -Te

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň, 2013

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 15. března 2013

....

vlastnoruční podpis

Děkuji mé vedoucí diplomové práce Mgr. Martině Kašparové, Ph.D., za její cenné rady, připomínky a metodické vedení práce.

Obsah

1. Úvod

V této práci se věnuji úlohám vedoucím na soustavy polynomiálních rovnic a metodám jejich řešení. Vybrané úlohy pochází z doby od 5. do 16. století, tedy přibližně z období středověku. Středověk neboli doba temna, jak jej chápali renesanční myslitelé na konci patnáctého století, lze dle Christophera Kellera (1638 – 1707), německého filologa a historika, vymezit roky 324 a 1453.

Text je uspořádán chronologicky podle roku vzniku práce, z níž jsou úlohy převzaty, případně dle dat jejího autora do čtyř kapitol. Druhá kapitola se zabývá úlohami, které řešili matematikové do první poloviny 13. století. Ostatní kapitoly jsou rozděleny podle původu autorů a zahrnují období 14. až 16. století.

Můžeme říct, že již obyvatelé nejstarších civilizací řešili takové úlohy, které vedly ze současného hlediska na algebraické rovnice. Neměli bychom si je ale představovat jako rovnice, které řešíme dnes. Absence matematických symbolů vedla k slovním postupům a pouze slovnímu označení pro neznámou věc. Častým opakováním slovních postupů řešení úloh se utvářely jakési algoritmy. Některé byly postupem času zobecněny, daly se tedy použít na všechny úlohy stejného typu. Problémem algoritmů bylo, že lidé, kteří s nimi chtěli pracovat, museli z důvodu nepoužívání záporných čísel (pouze přirozená, resp. racionální), místo jediného algoritmu používat algoritmů několik.

Dnes můžeme rovnice rozdělit na algebraické a transcendentní (goniometrické, exponenciální, logaritmické rovnice). Mezi polynomiální rovnice řadíme např. lineární, kvadratické, kubické rovnice a rovnice vyšších řádů. Polynomiální rovnicí $n - t\acute{e}ho$ stupně o jedné neznámé rozumíme rovnici

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_n$ $(n \geq 1)$ a $a_0 \neq 0$ nazýváme koeficienty. Stupněm polynomu rozumíme nejvyšší exponent proměnné x s nenulovým koeficientem.

U jednoduchých rovnic existuje jednotný postup řešení, který nám poskytne všechny kořeny rovnice. S takovýmto postupem se setkáme u lineárních a kvadratických rovnic. Složitějšími vzorci lze naleznout kořeny kubických a bikvadratických rovnic. V první polovině 19. z prací Abela a Galoise vyplývá, že pro obecné rovnice vyšších řádů jednotné vzorce neexistují. To, že existují vzorce pro výpočet kořenů, ovšem neznamená, že některé rovnice nemůžeme vypočítat logickým úsudkem nebo experimentem.

Systémem polynomiálních rovnic rozumíme

$$f_1\left(x_{1,} \dots \dots \dots, x_n\right) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_m\left(x_1, \dots \dots \dots, x_n\right) = 0,$$

kde $f_{1,} \dots \dots, f_m$ jsou polynomy více neurčitých, kde $n \geq 1$ je počet neurčitých a $m \geq 1$ počet polynomů.

Uvedené vybrané úlohy vedou na soustavu polynomiálních rovnic buď přímo, nebo po jednoduchých úpravách. Např. uvažujeme i úlohy vyjádřitelné soustavou

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$$
$$x - y = b.$$

Nelinearita se nejčastěji objevuje ve tvaru součinu neznámých, součtu nebo rozdílu druhých mocnin neznámých, součtu nebo rozdílu vyšších mocnin neznámých, součtu nebo součinu mocniny neznámé a algebraického výrazu apod.

1.1. Matematika ve starověké Evropě

Na vývoj matematiky v Evropě mělo největší vliv Řecko. V 6. stol. př. n. l. zde žil slavný filosof a matematik Pythagoras. O tři století později, tedy ve 3. stol. př. n. l. působil v Alexandrii, centru řecké vzdělanosti, Euklides. Jeho spis Základy (*Stoicheia*) se díky logickému uspořádání stal vzorem pro vědecké práce v matematice, svým obsahem inspiroval učebnice matematiky a geometrie po více než dva tisíce let. Z dalších představitelů alexandrijské školy zmiňme aspoň Archiméda, největšího matematika starověku, který např. položil základy integrálního počtu, a Apollónia, autora knihy o kuželosečkách. Na základě uvedeného bychom mohli říci, že matematika ve starověké Evropě představované starší řeckou matematikou je především geometrická. Rozvoj aritmeticko-algebraického směru zastoupeného Herónem a Diofantem spadá až do římského období řecké matematiky.

Ve starověké Evropě se úlohami vedoucími na soustavy polynomiálních rovnic zabývali výše zmínění autoři, Herón a Diofantos. Nyní se stručně seznámíme s jejich pracemi.

Geometrické úlohy, řešené algebraicky, vedoucí na soustavy polynomiálních rovnic najdeme v pracích *Metrica a Geometrica*, které sepsal Heron Alexandrijský. Dílo

Geometrica je rozděleno na 24 částí, zabývá se v něm výpočty obsahu čtverce, výpočty v rovnoramenném, rovnostranném i pravoúhlém trojúhelníku, pythagorejskými trojicemi apod.. Jako příklad můžeme uvést úlohu, kterou později řešil například Gerbert (viz *př. 2. 1. 4*), ale i indičtí matematikové jako Brahmagupta a pro jiné číselné hodnoty Boëthius.

Příklad 1. 1. 1

Je dán různostranný ostroúhlý trojúhelník, jehož menší strana je 13 schoinos[1], základna 14 schoinos, přepona 15 schoinos; najít jeho odvěsnu. (Přeloženo podle [Hei12], str. 235)

Úloha vede na soustavu rovnic

$$\begin{gathered} y^2 + v^2 = 13^2 \\ x + y = 14 \\ x^2 + v^2 = 15^2, \end{gathered}$$

kde y a x jsou úseky základny rozdělené výškou v. Hledanou odvěsnou rozumíme výšku v. Podobně se v textu hovoří o přeponě, přestože nejde o pravoúhlý trojúhelník. Přeponou se myslí nejdelší strana trojúhelníku. Heronův postup řešení odpovídá výpočtu většího úseku x a menšího úseku y základny podle vzorců

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}, \qquad y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c},$$

kde a, b, c jsou strany trojúhelníka. Z nalezeného úseku x a y následně vypočítáme hledanou výšku pomocí Pythagorovy věty. Podle Herona je pojmenován heronský trojúhelník, jehož strany a obsah jsou vyjádřeny celými čísly. S podobným typem úlohy se setkáme ještě u Boëthia a Gerberta.

Úlohy, které můžeme interpretovat jako úlohy vedoucí na soustavy polynomiálních rovnic, najdeme také v Diofantově Aritmetice. Z třinácti knih, z nichž se práce původně skládala, jich máme k dispozici pouze deset. Diofantos nejspíše roztřídil úlohy do jednotlivých knih podle stupně rovnice, na kterou vedou. V jednotlivých úlohách se objevuje až dvanáct neznámých. Většinou jsou vyššího stupně, až devátého, a jsou svázány několika podmínkami. Zajímavostí je, že Diofantos ve svých úlohách, které vedly na soustavy se

[1] Schoinos je původní perská míra.

stejným počtem neznámých a rovnic, hledal jen jedno řešení. Nejvíce úloh vedoucí na soustavy polynomiálních rovnic se stejným počtem rovnic a neznámých nalezneme v knize I. a to 13. Zatímco v ostatních knihách jsou úlohy s menším počtem rovnic, než je neznámých. Jako příklad můžeme uvést soustavy:

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} = a, \quad x = by, \qquad \text{resp.} \qquad x^2 = a(x+y), \quad x = by,$$

vedoucí na rovnici $x^2(b^2+1) = abx(b+1)$, resp. $bx^2 = ax(b+1)$.

V řadě úloh v I. knize je dán poměr mezi dvěma hledanými čísly, což vyjadřují druhé rovnice uvedených soustav. Soustavy v I. knize *Aritmetiky* lze rozdělit na dvě skupiny. V první je dán poměr mezi hledanými čísly $x = ay,$ kde $a = 3,$ ve druhé skupině jejich součet nebo rozdíl, tj.

$$x + y = a,$$
$$x - y = a.$$

Řešení úloh první skupiny je následující. Za neznámou je zvoleno menší číslo, větší číslo je jeho trojnásobkem, takto vyjádřené neznámé se dosadí do druhé rovnice soustavy obsahující čtverec aspoň jedné z neznámých nebo jejich součin. Ze vzniklé kvadratické rovnice bez absolutního členu se vydělením neznámou dostane výsledek.

1.2. Matematika v podmínkách středověké Evropy

Po rozpadu římského impéria v 5. století vznikla na velké části Evropy nová feudální společnost. Morální a kulturní normy vymezovala církev, která zde hrála hlavní roli, neboť společným prvkem se v Evropě stalo křesťanské náboženství. S šířením křesťanství souvisí rozšiřování znalosti latinského jazyka, v němž byla psána nejen církevní pojednání, ale také vědecké práce.

Matematika vyrůstala za zdmi klášterů ze skromných zbytků antické matematiky, které do latiny přeložil Boëthius. Trvalo několik staletí, než se objevily v evropské matematice první pokroky. Impulsem k nim byl především kontakt s muslimským světem, který obohatil a hlavně zachoval to nejcennější z řecké matematiky. Již v šestém století se v evropské kultuře a vzdělanosti objevují prvky arabské kultury. Díky výbojům, jež Arabové směřovali na staré vyspělé civilizace, se arabští učenci měli možnost seznámit s mnohými díly nejen řeckých matematiků. V devátém století ovládli Sicílii, Korsiku a dokonce i Řím.

Přestože se kultura ve středověké Evropě rozvíjela pomalu, život Evropanů obohacovaly nové technické postupy a vynálezy (např. kolový pluh, vodní a větrné mlýny), které sebou přinesli barbaři. S ulehčením fyzické práce se objevily přebytky potravin. A to vedlo k rozvoji obchodu a měst, ve kterých byly budovány univerzity.

Irsko a franská říše byly první oblasti v Evropě, kde byla podporována výstavba klášterů, z nichž se stala centra učenosti. Někdy se hovoří o irské a karolínské renesanci podle Karla Velikého (768 – 814), franského krále a římského císaře. Karel Veliký si plně uvědomoval význam vzdělání, a proto podporoval zřizování klášterních škol. Je známo, že v této době nebyly vhodné podmínky pro rozvoj matematiky a ostatních přírodních věd a to především zásluhou neomezené církevní moci. V běžném životě si lidé vystačili se základními aritmetickými a geometrickými vědomostmi, například s počítáním s přirozenými čísly, kladnými zlomky a s měřením nejjednodušších geometrických útvarů. Na školách se vyučovalo tzv. sedmero svobodných umění, které se dělilo na trivium (gramatika, rétorika, dialektika) a kvadrivium (aritmetika, geometrie, astronomie, muzika). Aritmetika v sobě zahrnovala výklad jednoduchých vlastností čísel kombinovaných s číselnou mystikou. Geometrie pojednávala o základních geometrických útvarech, jednotkách míry a o geografii.

Z doby byzantské říše, tedy ze 7. až 9. století, se zachovalo jen málo informací o rozvoji matematiky. Matematikové z byzantské říše čerpali své znalosti a vědomosti ze staré řecké a latinské kultury. Dále se seznamovali také s díly arabských a perských myslitelů. V Byzanci od 11. století se díky tomu rozšířily arabské číslice a poziční systém.

Jmenujme aspoň některé středověké učence, kteří významně přispěli k rozšíření vzdělanosti ve středověké Evropě. Byli to: Isidor ze Sevilly (asi 565 – 636), španělský učenec, Beda Venerabilis (asi 673 – 735), irský mnich, Alkuin (asi 735 – 804), anglosaský učenec, Gerbert z Aurillacu (asi 945 – 1003), francouzský učenec a později papež Silvestr II., a bez pochyby největší matematik středověké Evropy, Leonardo Pisánský (asi 1170 – 1250).

Přibližně v druhé polovině 15. století začíná období renesance, období, kdy vzkvétalo nejen umění, ale i věda. Zdokonalovaly se dosud používané matematické metody a objevovaly se nové. O rozvoj vědy se nepochybně zasloužil i nově vynalezený knihtisk.

Díky knihtisku se objevují nová vydání matematických knih po celé Evropě, převážně v Itálii, Německu a Francii. Největší rozkvět v této době zaznamenala odvětví matematiky jako je trigonometrie a algebra.

Tato doba je charakteristická svými prvními pokusy o řešení rovnic vyššího stupně odmocninami tzv. v radikálech, tj. pomocí sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování. V 16. století byl nalezen postup k řešení kubických rovnic a následně rovnic čtvrtého stupně. V dnešní symbolice můžeme návod k řešení kubických rovnic ve tvaru

$$x^3 + px + q = 0$$

popsat tzv. Cardanovým vzorcem.

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Je třeba poznamenat, že přestože tento vzorec nebyl vymyšlen Cardanem, jmenuje se po něm.

Tento vzorec mohli využít i pro obecnou kubickou rovnici, kterou dokázali převést na řešení kubické rovnice bez kvadratického členu a to jednoduchou substitucí. Dosazením $y - \frac{a}{3}$ za x v rovnici

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

se získá rovnice

$$y^3 + px + q = 0$$

bez kvadratického členu, kde koeficienty p, q jsou vyjádřeny pomocí koeficientů a, b, c:

$$p = b - \frac{1}{3}a^3, \;\; q = c - \frac{1}{3}ab + \frac{2}{27}a^3$$

V 16. století pracovali evropští matematici s kladnými čísly, a proto musely být koeficienty i výsledky kubických rovnic kladná čísla. Z toho důvodu rozlišovali tři základní typy kubických rovnic bez kvadratického členu, $x^3 + ax = 0$, $x^3 = ax + b, x^3 + b = ax$, pro které byl Cardanův vzorec modifikován tak, aby pracovali výhradně s kladnými čísly.

Jak se ukázalo, Cardanův vzorec nebyl řešením pro všechny typy rovnic. Problém nastal tehdy, jestliže bylo potřeba odmocnit záporné číslo.

Situaci, kdy rovnice měla tři reálné kořeny, vycházela ve vzorci druhá odmocnina ze záporného čísla, reálné kořeny byly vyjádřeny jako součet komplexně sdružených čísel, nazývali „*casus irreducibilis*“. Tato situace vedla k postupnému uznání záporných čísel a studiu komplexních čísel.

Vzorec pro výpočet kořenů algebraických rovnic čtvrtého stupně objevil Cardanův žák Lodovico Ferrari (1522 – 1565). Substitucí lze od obecné rovnice čtvrtého stupně přejít k rovnici čtvrtého stupně bez kubického členu. Postačí proto uvažovat pouze případ:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Doplněním prvních dvou členů rovnice na čtverec, můžeme psát:

$$(x^2 + \frac{a}{2})^2 = -bx - c + \frac{a^2}{4},$$

odtud

$$(x^2 + \frac{a}{2} + t)^2 = (x^2 + \frac{a}{2})^2 + t^2 + 2tx^2 + at = 2tx^2 - bx + \left(t^2 + at + \frac{a^2}{4} - c\right).$$

Výraz vpravo, bude čtvercem za podmínky

$$4 \cdot 2t\left(t^2 + at + \frac{a^2}{4} - c\right) - b^2 = 0.$$

Nyní dostáváme kubickou rovnici s neznámou t, která má alespoň jeden reálný kořen t_0. Jestliže $t = t_0$ je pravá strana výše uvedeného vztahu čtvercem. Upravíme-li odmocněním, dostaneme kvadratickou rovnici, kterou již snadno vyřešíme.

$$x^2 + \frac{a}{2} + t_0 = \pm\sqrt{2t_0}\left(x - \frac{b}{4t_0}\right).$$

Rovnicemi čtvrtého stupně se dále zabýval například Leonhard Euler (1707 – 1783) nebo René Descartes (1596 – 1650), který využíval tzv. znaménkové pravidlo.

Nejvýznamnější učenci, kteří přispěli k rozvoji vzdělanosti té doby, byli mimo jiné Niccolo Fontana Tartaglia (1499 – 1557), Girolamo Cardano (1501 – 1576), Regiomontanus (1436 – 1476), Leonardo da Vinci, Luca Pacioli (1445 – 1517), Nicolas Chuquet (1430- 1487).

V době středověku zaostávala evropská matematika za matematikou indickou, arabskou a čínskou. V Indii vytvořili desítkovou poziční soustavu, kterou později převzali Arabové.

Nutno poznamenat, že neexistoval spolehlivý a rychlý vzájemný přenos informací. To vedlo k tomu, že na mnoha místech vznikaly stejné objevy nezávisle na sobě.

V Číně byly vypracovány postupy pro řešení soustav polynomiálních rovnic až o čtyřech neznámých. V Indii a Blízkém východě patrně pod vlivem Diofantovy *Aritmetiky* dominovaly neurčité úlohy, tj. takové, ve kterých je počet neznámých větší než počet podmínek (rovnic) na ně.

2. Úlohy vedoucí na soustavy v pracích evropských autorů od 5. stol. do 13. stol.

Jak již je výše zmíněno, začátek středověku je často spojován s 5. stoletím a jeho konec s 15. stoletím našeho letopočtu. V této kapitole se pokusíme postihnout největší část tohoto období, od počátku 5. století do konce 13. století z hlediska postupů, jimiž byly řešeny úlohy, které bychom dnes mohli zapsat soustavou nelineárních algebraických rovnic.

Následující úlohy pocházejí od vybraných učenců, kteří svým dílem významně přispěli k rozšíření vzdělanosti ve středověké Evropě. V první části této kapitoly se věnuji úlohám, které řešili Boëthius, Savasorda a Gerbert a postupům řešení polynomiálních soustav, na které dané úlohy vedou. Druhá část kapitoly pojednává převážně o Leonardu Pisánském, který ve svém díle Liber abaci, věnuje úlohám vedoucím na soustavy polynomiálních rovnic velký prostor.

2.1. Boëthius, Savasorda, Gerbert

Nacházíme se v období 5. století až první polovina 12. století našeho letopočtu. Tato podkapitola popisuje Böethiovy, Gerbertovy a Savasordovy postupy pro řešení polynomiálních soustav.

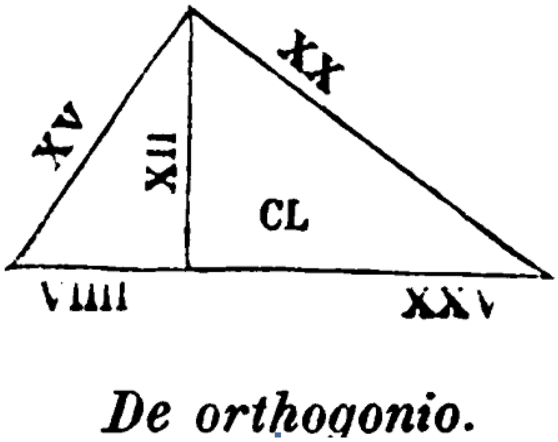
<u>Anicius Severinus Boëthius (cca 480 – 524)</u>

Poslední postavou období matematiky v helenistických zemích a zároveň prvním scholastickým učencem bývá označován Anicius Severinus Boëthius.

Práce nazvaná *De institutione arithmetica libri duo* se stala základem pro výuku kvadria (aritmetiky, geometrie, astronomie a teorie hudby) ve středověkých školách a univerzitách po dobu delší než tisíc let. Boëthiova práce je považována za překlad Nikomachova *Úvodu do aritmetiky*. Jiné zdroje uvádějí, že Nikomachovo dílo bylo Boëthiovi pouze vzorem při sepisování. V každém případě lze v práci najít úlohy vedoucí na soustavy jednoduchých polynomiálních rovnic.

Příklad 2.1.1.

Předpokládejme různostranný trojúhelník, který se nazývá klín, jehož menší skloněná strana má 15, delší prodloužená strana zaujímá 20, ale základna je 25. Kolik je vskutku odvěsna tohoto trojúhelníku a obsah, to se hledá. (Přeloženo podle [God67], str. 407.)



Obrázek 1, převzato z [GOd67], str. 408

Pro výpočet je důležité poznamenat, že Boëthius odvěsnou myslel výšku na základnu trojúhelníka. Podobnou úlohu, v níž je třeba ze známých délek stran trojúhelníka určit délku výšky na jednu z nich, řešil např. Heron (*viz př. 1. 1. 1.)* nebo Gerbert (*viz př. 2. 1. 4*).

Úlohu bychom mohli zapsat soustavou:

$$x^2 + y^2 = 15^2$$
$$(25 - x)^2 + y^2 = 20^2$$

kde x je úsek na základně a y je výška na základnu, kterou je třeba určit.

Boëthiovo řešení obsahuje nejprve výpočet druhých mocnin délek všech stran, tj.

$$15^2 = 225; \quad 25^2 = 625; \quad 20^2 = 400$$

Následně odečte čtverec větší skloněné strany od součtu čtverců menší skloněné strany a základny. To odpovídá levé straně rovnice

$$450 = 50x, \quad (*)$$

kterou lze získat odečtením první rovnice od druhé v soustavě uvedené výše a jednoduchými úpravami. Obě strany rovnice (*) nejprve půlí,

$$225 = 25x,$$

pak krátí 25, čímž nalezne délku úseku na základně.

$$9 = x.$$

Výšku zadaného trojúhelníka určil pomocí Pythagorovy věty, která je zapsaná první rovnicí soustavy, a obsah vypočetl jako polovinu součinu základny a výšky. Odpověď na Boëthiovo otázku by byla: Výška (v zadání odvěsna) trojúhelníka je 12 a obsah 150.

Dnes bychom nejspíš využili poznatku, že daný trojúhelník je pravoúhlý. Jeho obsah se proto velmi snadno získá už ze zadaných hodnot stejně jako výška na základnu, kterou lze vypočítat jako podíl obsahu a základny.

Poznamenejme, že stejným způsobem řeší Boëthius uvedenou úlohu ještě pro tupoúhlý trojúhelník o stranách 10, 9, 18 a pro ostroúhlý trojúhelník se stranami 13, 14, 15. V případě tupoúhlého trojúhelníku nevychází výška na základnu, tj. na největší stranu, celočíselná, ale $\frac{1}{6^2}\sqrt{17 \cdot 19 \cdot 37}$. Nejedná se proto na rozdíl od zbývajících dvou případů o heronský trojúhelník.

<u>Gerbert (cca. 945 – 1003)</u>

Francouzský mnich Gerbert, známý také pod jménem Silvestr II. Studoval v benediktýnském klášteře Saint-Gerald v Aurillac. Sám v letech 972 – 982 přednášel ve škole v Remeši, kde se kromě matematiky, logiky a filozofie zabýval také astronomií. Gerbert nebyl pouze učitelem, ale také poradcem arcibiskupa Adalbera. Po Adalberově smrti se stal arcibiskupem potomek Karla Velikého, Arnulf. Ten byl později francouzským králem sesazen a na jeho místo byl jmenován Gerbert, který byl ovšem po čtyřech letech odvolán. Dne 9. dubna 999 byl Gerbert vysvěcen a jmenován papežem.

Gerbert napsal několik matematických děl. Není ovšem jisté, zda je opravdu autorem všech knih, které se mu přisuzují. Napsal například „Knihu o dělení čísel“ (*Libellus de numerorum divisione*) nebo knihu „Pravidla počítání na abaku“ (*Regule de abaco computi*). Třetí kniha, která je mu přisuzována, a kde se zrcadlí převážně římský vliv, je dílo o geometrii, z kterého si ukážeme úlohu vedoucí na soustavu polynomiálních rovnic. *Geometria* má 94 článků. Prezentuje zde také jednoduché geometrické poznatky o rovinných útvarech, hlavně o trojúhelnících, které zřejmě čerpal z Eukleida nebo Boëthia. Gerbert s největší pravděpodobností pracoval jako první Evropan s indicko-arabskými číslicemi.

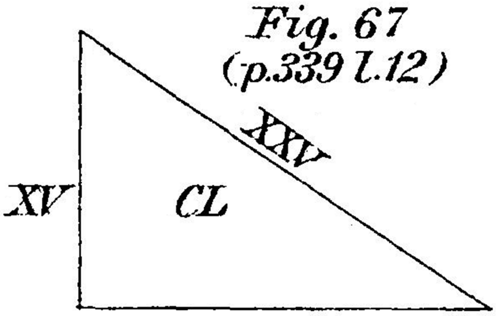
V dalším textu předvedeme některé úlohy z Gerbertovy *Geometrie*, které dnes připouštějí matematizaci pomocí soustavy polynomiálních rovnic.

Příklad 2. 1. 2.

Hlava XLII. Jak se v pravoúhlém trojúhelníku získá odvěsna a základna

V pravoúhlém trojúhelníku, jehož přepona je 25 stop, obsah 150, se hledá odvěsna a základna. (Přeloženo podle [Bub99], str. 339, resp. [Beč03], str. 219.)

Označíme-li odvěsny x, y, úloha vede na soustavu rovnic



Obrázek 2, převzato z [Bub99], Tab. III

$$x^2 + y^2 = 25^2$$
$$\frac{1}{2}xy = 150.$$

Gerbert postupoval tak, že druhou rovnici vynásobil 4, tj. $2xy = 600$. Tuto rovnici přičetl a odečetl od první rovnice

$$\begin{array}{rr} x^2 + y^2 = 25^2 & x^2 + y^2 = 25^2 \\ -2xy = 600 & +\ 2xy = 600 \\ \hline (x-y)^2 = 25 & (x+y)^2 = 1225. \end{array}$$

Odmocněním dostaneme soustavu dvou lineárních rovnic. Jednu pro součet a druhou pro rozdíl hledaných odvěsen

$$x + y = 35$$
$$x - y = 5.$$

Jejich sečtením získal dvojnásobek delší odvěsny (základny) a dosazením do rovnice pro součet odvěsen snadno určil druhou odvěsnu, tj. $x = 20, y = 15$.

Daný trojúhelník je podobný základnímu pythagorejskému trojúhelníku se stranami o délkách (3, 4, 5). Gerbertův postup je zajímavý, neboť s využitím identit

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

vtipně převedl soustavu polynomiálních rovnic na soustavu lineárních rovnic, kterou již snadno vypočítal.

Jednou z variant řešení této úlohy v dnešní době je takový postup, kdy z druhé rovnice $\frac{1}{2}xy = 150$ vyjádříme $x^2 = \frac{300^2}{y^2}$. Dosazením za x^2 v rovnici $x^2 + y^2 = 25^2$ získáme po několika krocích rovnici $y^4 - 625y^2 - 300^2 = 0$. Tu vyřešíme substitucí $y^2 = s$, což vede na kvadratickou rovnici $s^2 - 625s - 300^2 = 0$. Pomocí vzorce vypočítáme $s_1 = 400, s_2 = 225$. Resubstitucí dopočítáme $y_1 = 20, y_2 = 15$. Řešením soustavy rovnic jsou tedy uspořádané dvojice čísel $[20, 15]$ a $[15, 20]$ a to se shoduje s Gerbertovým řešením.

Podobný příklad se objevil v článku XLIII. O nalezení základny a odvěsny odděleně v trojúhelníku (*Ad inveniendam basis et catheti disjunctionem in trigono*).

Příklad 2. 1. 3.

Hlava XLIII. O nalezení základny a odvěsny odděleně v trojúhelníku.

Jestliže byl dán trojúhelník, jehož odvěsna a základna společně spojené jsou 23, obsah 60, přepona 17, hledá se základna a odvěsna odděleně. (Přeloženo podle [Bub99], str. 339, zadání úlohy viz též [Beč03, str. 204.])

Je zadána délka přepony 17, obsah pravoúhlého trojúhelníka 60 a součet odvěsen 23, které máme zjistit. Úloha vede na soustavu tří rovnic o dvou neznámých

$$\begin{gathered} x^2 + y^2 = 17^2 \\ \tfrac{1}{2}xy = 60 \quad , \\ x + y = 23 \end{gathered}$$

je tedy „přeurčená“ – obsahuje menší počet neznámých než je počet podmínek, které mají splňovat.

Gerbert postupoval podobně jako v předchozí úloze; čtyřnásobek druhé rovnice $2xy = 240$ odečetl od první rovnice. Po úpravách nám vyjde rozdíl odvěsen $x - y = 7$. Vzhledem k tomu, že součet odvěsen, $x + y = 23$, je zadán, nemusí ho zjišťovat. Soustavu dvou lineárních rovnic

$$\begin{gathered} x + y = 23 \\ x - y = 7 \end{gathered}$$

již snadno vyřešíme

$$x = 15, y = 8.$$

Tato úloha byla pravděpodobně konstruována od výsledku, tzv. „aby to vyšlo“. Jím zvolený postup není univerzální, ale funguje jen pro vhodně zvolené hodnoty přepony, obsahu a odvěsen. Vyplývá to z toho, že neověřil, zda z první a druhé rovnice plyne třetí, tedy neudělal zkoušku.

Gerbert neověřuje, zda přičtením čtyřnásobku druhé rovnice k první dostane na pravé straně skutečně druhou mocninu 23. Pokud by místo 17 byla přepona 15 a místo 60, obsah 44 a navíc by postupoval stejně, pak by též došel k výsledku $x = 15, y = 8$, ale ten by řešením soustavy nebyl, neboť z první a druhé rovnice by vyplynulo $(x + y)^2$ = 401, což není druhá mocnina 23.

Dnes bychom úlohu mohli řešit dosazovací metodou, kdy z rovnice $x + y = 23$ vyjádříme x a dosadíme za něj do druhé rovnice. Tato metoda vede na kvadratickou rovnici

$$\frac{1}{2}(23 - y)y = 60.$$

Řešením soustavy tvořené třetí a druhou rovnicí soustavy z předchozí strany jsou uspořádané dvojice čísel {[8,15], [15,8]}. Hodnoty x = 8, y = 15, resp. x = 15, y = 8 vyhovují i první rovnici této soustavy, proto jsou obě dvojice řešením zadané úlohy.

Třetí příklad, který ~~si~~ zde uvedeme, byl zadán v článku XLIV. V ostroúhlém trojúhelníku, jehož délky stran jsou vyjádřeny různými čísly, najít výšku atd. (*In trigono oxygonio, cujus in lateribus numeri quantitate dissimiles sint, invenire perpendicularen etc.*).

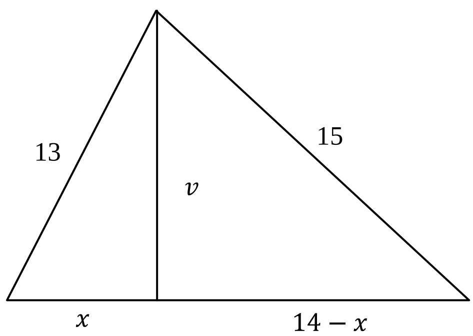
Příklad 2. 1. 4.

Nalezněte výšku na „základnu“ trojúhelníka, znáte-li velikost jeho „menší přepony“ 13, „základny“ 14 a „větší přepony“15.

Z našeho pohledu může tato úloha vést na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$x^2 + v^2 = 13^2$$
$$(14 - x)^2 + v^2 = 15^2,$$

kde x a v jsou odvěsnami pravoúhlého trojúhelníku.



Obrázek 3 - Grafické znázornění př. 2. 1. 4.

Z Gerbertova postupu, který popisuje vytváření číselných výrazů

$$13^2 + 14^2 = 365, \quad 15^2 = 225, \quad 365 - 225 = 140$$
$$140 : 2 = 70, \quad 70 : 14 = 5, \quad 13^2 - 5^2 = 144, \quad \sqrt{144} = 12,$$

můžeme předpokládat, že vyšel ze stejných vztahů, které jsme uvedli výše, tj. dvakrát použil Pythagorovu větu pro pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnou v. Odečteme-li od sebe rovnice $v^2 = 13^2 - x^2$, $v^2 = 15^2 - (14 - x)^2$ dostaneme rovnice

$$14^2 + x^2 - 28x + v^2 - x^2 - v^2 = 15^2 - 13^2,$$

a po malé úpravě

$$28x = 13^2 - 15^2 + 14^2,$$

z níž je patrné, že Gerbert provedl prvních pět výpočtů, aby našel úsek x na základně trojúhelníku, který na ní vytíná výška. Poté teprve určil výšku dosazením za $x = 5$ do první rovnice, tj. $5^2 + v^2 = 13^2$. Hledaná výška je $v = 12$.
(Podle [Beč03, str. 204 – 205].)

Tato úloha je identická s Heronovou úlohou (viz *př. 1.1.1.*) a velmi podobná Böethiově úloze (viz *př. 2.1.1.).* V Böethiově úloze se setkáváme pouze s jinými délkami stran, a kromě výšky trojúhelníka se počítá ještě obsah. Všichni tři autoři postupovali podobně. Nejdříve našli x, neboli kratší úsek základny, a pomocí Pythagorovy věty určili hledanou výšku.

<u>Avraham bar Chija (Abraham Bar Ḥiyya, Savasorda) (cca 1065 – 1145)</u>

Na polynomiální soustavy vedou některé geometrické úlohy židovského matematika známého pod jménem Savasorda, který se narodil v Barceloně a velkou část života strávil v Narbonne v jižní Francii. V práci *Ḥibbūr ha-meshīah we-ha-tishbore* (Pojednání o měřeních a výpočtech[2]) přeložené z hebrejštiny do latiny Platem z Tivoli (12. stol.) pod názvem *Liber embadorum* (Kniha obsahů ploch, 1145) se hledají strany pravoúhelníku, je-li znám obsah pravoúhelníku a součet, resp. rozdíl jeho stran nebo obsah pravoúhelníku a délka úhlopříčky. Takové úlohy lze zapsat soustavami:

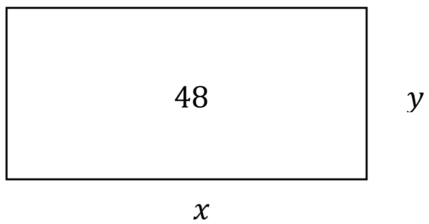
$$\begin{aligned} xy &= S \\ x \pm y &= c \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} xy &= S \\ x^2 + y^2 &= c^2. \end{aligned}$$

Uveďme na ukázku alespoň jednu úlohu.

Příklad 2. 1. 5.

Kolik loktů je obsaženo v délce a šířce pravoúhelníku, jehož obsah je 48 a součet délky a šířky je 14? (Přeloženo podle [Cur02], str. 47)
Úloha vede na soustavu

$$\begin{aligned} x + y &= 14 \\ xy &= 48 \end{aligned}$$



Obrázek 4 - Grafické znázornění př. 2. 1. 5.

[2] Savasordova práce se stala vzorem pro Fibonacciho *Praxi geometrıe*.

kde x je neznámý počet loktů obsažených v délce a y je neznámý počet loktů obsažený v šířce pravoúhelníku.

V popisu řešení Savasorda umocní polovinu součtu délek a od tohoto čtverce odečte obsah, tj.

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{x^2}{4} - \frac{xy}{2} + \frac{y^2}{4}.$$

Odtud platí

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = 1.$$

Dále máme přičíst odmocninu ze získaného rozdílu k 7, tím se dostane délka. Odečtením odmocniny od 7 se získá šířka. Zdůvodnění je patrné ze zápisu

$$\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^2} + \frac{x+y}{2} = 1 + 7$$

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^2} = 7 - 1$$

Řešení se tedy opírá o identitu

$$\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy,$$

pomocí níž je daná soustava linearizována. Savasorda ještě popisuje případ, kdy čtverec poloviny součtu rozměrů pravoúhelníku je menší než jeho obsah. V takovém případě uvádí, že úloha nemá řešení.

2.2. Leonardo Pisánský, Nemore

Dostáváme se do první poloviny 12. století až do 13. století. Za nejvýznamnějšího autora té doby můžeme označit Leonarda Pisánského. Další významní autoři, kteří jsou zde zmíněni, jsou Leonardovo současníci Nemore a Jacobo de Florenti.

Leonardo Pisánský (1170 – 1250)

Leonarda Pisánského známe spíše pod jménem Fibonacci. Žil na přelomu 12. a 13. století v Itálii. Považujeme ho za jednoho z nejvýznamnějších matematiků Evropy. Studoval v severní Africe, kde trávil čas se svým otcem, diplomatem a obchodníkem. Právě zkušenosti s obchodem a také rozvoj řemesel a podnikání jej přivedl k počtářství.

Leonardo Pisánský je autorem mnoha rukopisů. Do dnes se jich dochoval pouze zlomek. Mezi jeho nejznámější díla patří *Liber abaci* (Kniha o abaku 1. vyd. 1202, přepracováno 1228), spis, kterému zasvětil téměř čtvrt století. Věnuje se zde aritmetice, algebře, teorii čísel a vše demonstruje na příkladech. Inspirací pro tuto knihu byly Fibonaccimu převážně arabsky psané matematické práce. V budoucnu se stala námětem pro mnohé autory (např. Euler). Anglický překlad této knihy byl zdrojem níže uvedených příkladů. Další významnou knihou je *Practica Geometriae* (Praxe geometrie, cca 1220) zabývající se planimetrií či stereometrií. Od Leonarda Pisánského si dále můžeme přečíst *Flos* (Květ, 1225) nebo *Liber quadratorum* (Kniha čtverců, 1225). Zajímavostí je, že knihu *Flos* sepsal pro císaře Fridricha II., na jehož dvoře se Fibonacci účastnil matematického turnaje.

Pro přiblížení tehdejšího způsobu zápisu uvádíme tabulku označení přirozených mocnin neznámé.

neznámá (věc, kořen)	x	*res, radix*
dvojmoc neznámé (čtverec)	x^2	*census, quadratus*
absolutní člen		*numerus simples, numerus, denarius, dragma*
třetí mocnina neznámé	x^3	*cubus*
čtvrtá mocnina neznámé	x^4	*census census, censuum census*
šestá mocnina neznámé	x^6	*cubus cubi*
osmá mocnina neznámé	x^8	*census census census census*

Tabulka 1 - Označení přirozených mocnin neznámé dle Fibonacciho

K tomu, abychom mohli vyřešit soustavu polynomiálních rovnic, je nutné umět najít kořeny lineární a kvadratické rovnice, případně i rovnice vyššího stupně. Lineární rovnice řešil Leonardo Pisánský metodou chybného předpokladu – *regula versa*, kterou znali již staří Egypťané. Po vzoru arabského matematika al-Chwárizmího rozdělil Fibonacci kvadratické rovnice na tři typy jednoduchých rovnic:

census je roven počtu kořenů: $ax^2 = bx$

census je roven numerus simples : $ax^2 = c$

kořen je roven numerus simples : $bx = c$, a tři typy složených rovnic:

census a kořeny jsou rovny číslu: $ax^2 + bx = c$

kořeny a číslo jsou rovny censu: $ax^2 = bx + c$

census a číslo jsou rovny kořenům: $ax^2 + c = bx$,

kde a, b, c jsou kladná čísla, a u každého typu uvedl algoritmus jejího řešení. Všech šest předchozích typů bychom dnes zapsali jedinou rovnicí $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c jsou reálná čísla. Metodou „doplnění na čtverec“ nebo pomocí diskriminantu bychom našli hledané kořeny.

V případě složených typů rovnic Fibonacci pracoval podobně jako al-Chwárizmí, ke každému typu rovnice přiřadil slovní popis jak postupovat pro výpočet kořenů. Poznamenejme, že Fibonacci provádí takové úpravy, aby byl vedoucí koeficient roven 1, tj. $a = 1$ ve výše uvedených typech rovnic.

Postupy, jimiž Fibonacci vypočetl kořeny rovnic

(1) $x^2 + bx = c$, (2) $x^2 = bx + c$, (3) $x^2 + c = bx$,

bychom dnes postupně zapsali vzorci

$$x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}, \qquad x = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}, \qquad x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Vzhledem k tomu, že jako řešení uznává většinou pouze kladná čísla, mají rovnice (1) a (2) pouze jeden kořen. V případě rovnic třetího typu vypočte kořeny dva, pokud jsou reálné.
Pro převod rovnice o jedné neznámé na některý z šesti uvedených typů rovnic používali mistři abaku tři různá pravidla.

I. Pravidlo obnovení

II. Pravidlo kombinování členů obsahujících neznámou

III. Pravidlo přesunutí

První pravidlo odpovídá přičtení těch členů k oběma stranám rovnice, které jsou od nějakého jiného členu odečítány. Např. u rovnice $3x + 8 = -6x + x^2$ přičteme k oběma stranám rovnice $6x$, tj. $9x + 8 = x^2$. Pomocí druhého pravidla lze sečíst členy „stejného druhu“. Třetí pravidlo nám říká, že mezi jednotlivými členy rovnice platí zákon komutativnosti a asociativnosti sčítání.

Tato pravidla umožňovala transformovat libovolnou rovnici ve tvaru

$$\pm ax^2 \pm bx \pm c = \pm a'x^2 \pm b'x \pm c',$$

kde *a*, *b*, *c*, *a´*, *b´*, *c´* jsou nezáporná čísla, na některou z již uvedených šesti typů základních kvadratických rovnic. Při úpravách rovnice je nutné si uvědomit, že algebraické výrazy, ve kterých se vyskytovalo odečítání, bereme jako nekompletní. Odečítaná část se uvádí jako poslední a při řešení se upravuje jako první, tzn., že se vrací do rovnice chybějící části.

Úlohy, které bychom dnes mohli zapsat soustavou polynomiálních rovnic, se objevují v každém ze tří oddílů 15. kapitoly *Liber abaci*. První z nich se týká poměrů mezi třemi a čtyřmi čísly, z nichž jedno nebo dvě čísla jsou daná. Ve druhém oddílu najdeme úlohy vedoucí na geometrické problémy a poslední část je věnována algebře a almukabale; obsahuje vzorové postupy pro řešení uvedených šesti typů rovnic a mnoho úloh o rozdělení čísla 10 na dvě části.

Ukážeme si několik příkladů, které jsou vypočítány jak nám dnes dostupnými metodami, tak dle Fibonacciho. Uvedené příklady jsou přeloženy z anglického překladu [Sig02]. Vybrané úlohy vedoucí na soustavy polynomiálních rovnic, které zde uvádíme, vedou na řešení pomocí kvadratických rovnic. Najdeme zde ovšem i úlohy, které vedou na neurčité rovnice a postup řešení je od předchozího typu úloh odlišný. Při řešení pomocí kvadratických rovnic užívá Fibonacci doplnění na čtverec. Jak již bylo řečeno, Fibonacci člení rovnice na několik typů. V této práci vybíráme úlohy vedoucí dle Fibonacciho klasifikace na složené typy. U každé úlohy se provede přiřazení kvadratické rovnice k Fibonacciho typu, které nalezneme na str. 19. Následující úloha vede na první typ rovnice, $x^2 + bx = c$.

Příklad 2. 2. 1.

Nejprve nechť čísla[3] *.ab., .bc., .cd.* jsou v souvislém poměru, tj. *.ab.* je k *.bc.* jako je *.bc.* k *.cd.*, a nechť je součet čísel *.ab.* a *.bc.* 10 a číslo *.cd.* je 9 a rozdíl čísel *.ab.* a *.bc.* se hledá. (Přeloženo podle [Sig02], str. 531, viz též [Beč01], str. 293. Úloha z 1. oddílu 15. kapitoly Knihy o abaku.)

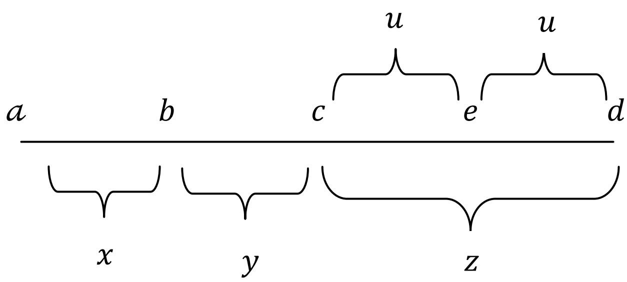
Čísla *.ab.*, *.bc.* a *.cd.* označme dle našich zvyklostí *x, y, z.* V dnešní symbolice bychom danou úlohu mohli zapsat v následujícím tvaru.

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

$$x + y = 10$$

$$z = 9$$

Úlohu můžeme graficky znázornit.



Obrázek 5 - Grafické znázornění př. 2. 2. 1.

V následujících odstavcích uvedeme překlad Fibonacciho řešení.

Pro lepší srozumitelnost ho doplníme matematickým zápisem na samostatném řádku.

Protože *.ab.* je k $.bc.$ stejně jako *.bc.* k $.cd.$,

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}.$$

je součet dvou předchozích čísel k jednomu z nich jako součet zbývajících k následujícímu; tj. první *.ac.* je k druhému *.bc.* jako třetí *.bd.* ke čtvrtému *.cd.* a první a poslední známe.

$$\frac{x+y}{y} = \frac{y+z}{z},$$

[3] Pro zápis čísel používal Fibonacci písmena, která byla z důvodu odlišení od textu oddělena tečkami, např. *.a.* Číslo také zapisoval dvěma písmeny, např. *.ab.*, když si ho představil jako úsečku.

A protože, když jsou čtyři čísla v souvislém poměru, součin prvního a posledního je roven součinu druhého a třetího.

$$(x+y)z = y(y+z)$$

Skutečně první *.ac.* je 10 a čtvrté *.cd.* je 9;

$$x+y=10 \text{ a } z=9,$$

součin, který je 90, je roven součinu druhého *.bc.* a třetího *.bd.*;

$$90 = y(y+9).$$

Proto číslo *.cd.* je rozděleno na dvě stejné části bodem .e. každá z nich bude $4\frac{1}{2}$.

$$u = \frac{z}{2} = 4\frac{1}{2}$$

A protože je číslo *.cd.* rozděleno na dvě stejné části bodem .e., k nim je přičteno číslo *.bc.*, přičtené vynásobeným celým *.bd.* plus čtverec čísla *.ce.* je rovno čtverci čísla *.be.*;

$$y(y+2u) + u^2 = (y+u)^2$$

Skutečně součin *.bc.* a *.bd.* je 90 a čtverec čísla *.ce.* je $\frac{1}{4}20$;

$$y(y+2u) = 90, \quad u^2 = \frac{1}{4}20$$

Tyto podobně sečteny tvoří $\frac{1}{4}100$ pro čtverec čísla *.be.*;

$$\frac{1}{4}100 = (y+u)^2$$

Kořen toho, tedy $\frac{1}{2}10$, je číslo *.be.*,

$$\frac{1}{2}10 = y+u$$

ze kterého je odečteno číslo *.ce.*, tedy $\frac{1}{2}4$; *.bc.* bude číslo 6;

$$y+u-u = \frac{1}{2}10 - \frac{1}{2}4 = 6$$

to je odečteno od *.ac.*, tj. od 10; $.ab.$ bude číslo 4.

$$x+y-y = 10 - 6 = 4.$$

(Přeloženo podle [Sig02], str. 531–532.)

Normovaná kvadratická rovnice $90 = y(y+9)$, na níž úloha vede, je prvního typu a postup jejího řešení odpovídá doplnění na čtverec nebo výpočtu podle vzorce uvedeného na str. 15. Ze zřejmých důvodů uvádí Leonardo pouze kořen $y = 6$ jako číslo *.bc.*, a *.ab.* jako číslo $x = 4$. V zadání úlohy je požadován rozdíl čísel *.bc.* a *.ab.*, ten však autor neuvádí.

Kdybychom danou úlohu řešili dnes**,** patrně bychom použili dosazovací metodu následujícím způsobem. Ze zadání již známe neznámou $z = 9$ a z druhé rovnice bychom si vyjádřili neznámou $x = 10 - y$. Dosadíme do první rovnice:

$$\frac{10 - y}{y} = \frac{y}{9}.$$

Vznikla rovnice s neznámou ve jmenovateli. Celou rovnici vynásobíme společným jmenovatelem $9y$. Vidíme, že příklad vede na kvadratickou rovnici $0 = y^2 + 9y - 90$, kterou již snadno vyřešíme. Rovnice má dvě řešení, $y = 6$, y = –15, ale nesmíme zapomenout, že Fibonacci nepočítal se zápornými čísly, záporný kořen tedy zanedbáme. Hledané číslo x vypočítáme tak, že y dosadíme do druhé rovnice $x = 10 - 6$. Řešením je $x = 4$.

Příklad 2. 2. 2.

Znovu je *.a.* k *.bg.* jako je *.bg.* k *.ed.* A nechť 2 je číslo *.bc.*, o které *.bg.* přesahuje číslo *.a.*. Číslo *.ed.* je rovno 9. (Přeloženo podle [Sig02], str. 532. Úloha z 1. oddílu 15. kapitoly *Knihy o abaku*.)

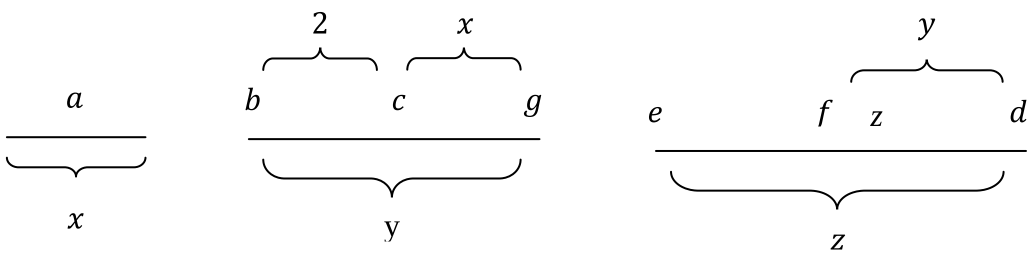
Poměry čísel *.a.*, *.bg.* a *.ed.* si opět jako v předešlém příkladě můžeme pro lepší názornost označit *x, y, z.* V dnešní symbolice bychom danou slovní úlohu mohli zapsat ve tvaru:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

$$y = x + 2$$

$$z = 9$$

Úlohu si můžeme graficky znázornit.



Obrázek 6 - Grafické znázornění př. 2. 2. 2.

Pro lepší názornost jsme zavedli označení x, y, z,[4] kde platí, že *.a.* značíme jako x, *.bg.* značíme jako y a *.ed.* značíme jako z.

Následuje překlad Fibonacciova řešení podle [Sig02], str. 532 – 533, který opět doprovodíme dnešním zápisem.

Číslo *.ef.* je sčítanec čísla *.ed.*, který je roven číslu, o které *.ed.* přesahuje číslo *.bg.*. Proto je první číslo *.ed.* k druhému číslu *.bg.* jako je třetí *.ef.* ke čtvrtému *.bc.*;

$$\frac{z}{y} = \frac{z - y}{y - x}$$

proto vynásobíš číslo *.ed.* číslem *.bc.*, která jsou známa;

$$y(z - y) = z(y - x)$$

to bude 18, což je rovno součinu *.bg.* krát .ef;

$$y(z - y) = 18$$

skutečně, *.fd.* je rovno číslu *.bg.*; proto je výsledkem součinu *.ef.* krát *.fd.* 18, což je odečteno od čtverce poloviny čísla *.ed.* a polovina je .ez.;

$$\left(\frac{z}{2}\right)^2 - y(z - y) = \left(\frac{9}{2}\right)^2 - 18$$

zůstane $2\frac{1}{4}$,

$$\left(y - \frac{z}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$$

z čehož odmocnina je $1\frac{1}{2}$ a to je množství *.fz.*;

$$y - \frac{z}{2} = 1\frac{1}{2}$$

to je odečteno od *.ze.*;

$$\frac{z}{2} - \left(y - \frac{z}{2}\right) = \frac{9}{2} - 1\frac{1}{2}$$

zbude 3 pro *.fe.*;

$$z - y = 3$$

těchto 3 je odečteno od *.ed.*; zůstane 6 pro *.fd.*, to je pro *.bg.*;

$$z - (z - y) = 6$$

[4] Označení z je zde ve dvou rolích – jednou jako bod, jednou jako délka úsečky *.ed.*.

Od toho je odečteno *.bc.*; zbude *.cg.*, to je *.a.*, tedy 4.

$$y - 2 = x = 4$$

Úloha vede dle Fibonacciho rozdělení na třetí typ rovnice.

Dnes bychom soustavu převedli na kvadratickou rovnici. Dosazovací metodou budeme úlohu řešit tak, že si do první rovnice

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z},$$

dosadíme $x + 2$ za y a 9 za z.

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x+2}{9}.$$

Úprava vede na kvadratickou rovnici $0 = x^2 - 5x + 4$, jejíž kořeny jsou $x_1 = 4$ a $x_2 = 1$. Dosazením do druhé rovnice dopočítáme $y_1 = 6$ a $y_2 = 3$. Kromě trojice 4, 6, 9 nalezené Fibonaccim je řešením také trojice čísel 1, 3, 9. Můžeme se pouze domnívat, proč se Fibonacci spokojil pouze s jedním výsledkem.

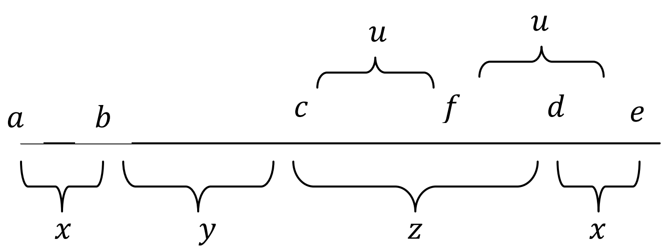
Příklad 2. 2. 3.

Znovu je *.ab.* k *.bc.* jako *.bc.* k *.cd.*; nechť *.bc.* je 6; proto součet čísel *.ab.* a *.cd.* je 13. (Přeloženo podle [Sig02], str. 532. Úloha z 1. oddílu 15. kapitoly Knihy o abaku.)

Při stejném označení jako v příkladu 2. 2. 1 vede úloha na soustavu rovnic

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$
$$y = 6$$
$$x + z = 13.$$

Úlohu si můžeme opět graficky znázornit.



Obrázek 7 - Grafické znázornění př. 2. 2. 3.

Fibonacciovo řešení:

Protože součin prvního se třetím je roven součinu druhého se sebou samým, když jsou tři čísla v souvislém poměru, vynásobíš druhé číslo samo se sebou; to bude 36, což je stejné jako součin *.ab.* krát *.cd.*.

$$xz = 36$$

Proto vezmeš číslo *.de.* stejně velké jako *.ab.*; celé *.ce.* je tudíž 13. Toto je rozděleno na dvě stejně velké části bodem *.f.*. každá z částí bude $6\frac{1}{2}$

$$\frac{x+z}{2} = u = 6\frac{1}{2}$$

a protože je číslo *.ce.* rozděleno na dvě stejné části bodem *.f.* a na dvě nestejné části bodem *.d.* , plochy obdélníků budou ve stejných proporcích, tj. *.ed.* vynásobené *.dc.* plus čtverec čísla *.df.* bude roven čtverci čísla *.ef.*

$$xz + (z-u)^2 = u^2.$$

Proto *.ef.*, a to $\frac{1}{2}6$, je vynásobeno samo se sebou.To bude $\frac{1}{4}42$, z čehož je odečten součin *.ab.*, tedy *.ed.*, krát *.dc.* a součin (xz) je 36;

$$u^2 - xz = 42\frac{1}{4} - 36$$

zůstane $\frac{1}{4}6$ pro čtverec čísla *.fd.*;

$$(z-u)^2 = 6\frac{1}{4}$$

odmocnina z toho, jmenovitě $\frac{1}{2}2$, je číslo *.fd.*;

$$z - u = 2\frac{1}{2}$$

to přidáno k .cf. dá 9 pro celé *.cd.*

$$(z-u) + u = 2\frac{1}{2} + 6\frac{1}{2}$$

$$z = 9.$$

To je odečteno od *.ce.*, tj. od 13; zůstane 4 pro číslo *.de.*, což je pro číslo *.ab.*

$$(x+z) - z = 13 - 9$$

$$x = 4$$

(Přeloženo podle [Sig02], str. 533.)

V dalším textu za touto úlohou Fibonacci postupy zobecňuje pro další typy úloh. Píše, že vše by zůstalo stejné, kdyby v jeho úlohách pro tři čísla v souvislém poměru vystupovaly místo rozdílů jejich druhé nebo třetí mocniny. Jsou-li totiž čísla v souvislém poměru, jsou v souvislém poměru také jejich druhé nebo třetí mocniny, a proto např. platí

$$\frac{(x+y)^2}{y^2} = \frac{(y+z)^2}{z^2} \quad \text{resp.} \quad \frac{z^2}{y^2} = \frac{(z-y)^2}{(y-x)^2},$$

Soustavu rovnic odpovídající úloze 2. 2. 3 můžeme vyřešit pomocí Viètových vzorců pro kořeny a koeficienty algebraických rovnic, kde pro rovnici $x^2 + px + q = 0$ platí, $x_1 \cdot x_2 = q$ a zároveň $x_1 + x_2 = -p$. Známe součin i součet neznámých,

$$xy = 36; \qquad x + y = 13,$$

můžeme tedy sestavit kvadratickou rovnici

$$y^2 - 13y + 36 = 0,$$

kterou pomocí diskriminantu jednoduše vyřešíme.

$$y_1 = 9 \quad a \quad y_2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 4 \quad a \quad x_2 = 9$$

Úloha vede podle Fibonacciho klasifikace úloh (viz str. 19) na třetí typ rovnice. Takové úlohy připouštějí i druhé řešení. Druhou trojici $x = 9$, $y = 6$, $z = 4$ Fibonacci neuvedl. Nejspíše předpokládal, že x, y, z jsou seřazené podle velikosti od nejmenšího.

V *Liber abaci* se v třetím oddílu 15. kapitoly objevuje mnoho příkladů, kdy se má nějaké číslo rozdělit na dvě části. Jako příklad můžeme uvést následující úlohy.

Příklad 2. 2. 4

V dnešní symbolice lze např. úlohu ([Beč01] str. 294) zapsat jako soustavu rovnic

$$\begin{gathered} 24 = xy \\ 10 = y + x. \end{gathered}$$

Ze zápisu vidíme, že hledané číslo je takové číslo, které když odečteme od 10, tak součin rozdílu a hledaného čísla dává 24. Budeme předpokládat, že řešení je kladné celé číslo. V takovém případě můžeme využít metodu experimentu. Řešení metodou experimentu:

Nejdříve si vyjádříme z rovnice $10 = y + x$, $y = 10 - x$. Dosadíme do první rovnice a dostaneme jednoduchou rovnici

$$24 = x(10 - x).$$

Utvoříme tabulku, z které je jasně patrné, že $x = 4$ nebo $x = 6$.

$\boldsymbol{x}$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
$\mathbf{10} - \boldsymbol{x}$	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$\boldsymbol{x}(\mathbf{10} - \boldsymbol{x})$	9	16	21	24	25	24	21	16	9

Tabulka 2 - Tabulka př. 2. 2. 4.

Neznámé číslo lze samozřejmě zjistit řešením kvadratické rovnice.

$$24 = x(10 - x) \quad \Rightarrow \quad x^2 - 10x + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 4, x_2 = 6$$

Leonardo řeší úlohu doplněním rovnice typu $ax^2 + bx = 0$ na čtverec.

$$1 = 25 - 24 = 25 - x(10 - x) = (5 - x)^2 \quad ;$$ [5]

Protože Fibonacci dal podmínku, že za výsledek považuje menší z obou částí, na které je 10 rozděleno, proto je řešením úlohy $x = 4$. Úloha vede na třetí typ rovnice.

Poznamenejme, že předchozí úloha i příklad 2. 2. 3 vedou až na číselné hodnoty na stejnou soustavu rovnic. Na straně 541 překladu *Knihy o abaku* věnované čtyřem číslům a poměrům mezi nimi uvedl úlohu, v níž je potřeba najít čtyři čísla, jestliže první je 6, čtvrté 9, poměr mezi prvním a druhým je stejný jako poměr mezi třetím a čtvrtým a součet třetího a čtvrtého je roven 21. Označíme-li postupně první, druhé, třetí a čtvrté číslo x, y, z, u, pak úloha vede na soustavu

$$yz = 54,$$
$$y + z = 21,$$

tj. stejnou soustavu jako v předchozích úlohách. Tentokrát však v řešení píše: „…6 je ke 3 jako 18 k 9, nebo 6 je k 18 jako 3 k 9." Uvedl tedy obě řešení.

[5] $Pozn.: x(10 - x) = 10x - x^2 = -(5 - x)^2 + 25$

Ukážeme ještě další příklad úlohy vedoucí na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, která vede na 1. typ Fibbonacciho klasifikace rovnic (viz str. 19).

Příklad 2. 2. 5.
Znovu jsem rozdělil 10 na dvě části a vydělil jsem první část druhou a druhou část první a to, co bylo výsledkem dělení, jsem přidal k 10 a vynásobil jsem tento součet první částí a 114 vyšlo. (Přeloženo podle [Sig02], str. 567 - 568. Úloha ze třetího oddílu 15. kapitoly *Knihy o abaku*.)

Úlohu můžeme zapsat jako soustavu rovnic:

$$x + y = 10 \quad \text{a} \quad x\left(10 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 114$$

Úlohu se pokusíme vyřešit dosazovací metodou. Z první rovnice vyjádříme $x = 10 - y$, které dosadíme do druhé rovnice.

$$(10 - y)\left(\frac{10 - y}{y} + \frac{y}{10 - y} + 10\right) = 114$$

Zlomky na levé straně rovnice dáme na společného jmenovatele a celou rovnici vydělíme $10 - y$.

$$\frac{(10 - y)^2 + y^2}{y(10 - y)} + 10 = \frac{114}{10 - y}$$

Nově vzniklý tvar rovnice jednoduchými úpravami vedeme na kvadratickou rovnici, kterou již snadno vyřešíme

$$-8y^2 - 34y + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 2, x_1 = 8.$$

Tato úloha by po vydělení koeficientem kvadratického členu vedla na rovnici prvního typu (viz str. 19).

Fibonaci řešil úlohu následujícím způsobem.

Proto nechť *.a.* je první částí z výše uvedených částí, kterou položíš za věc a nechť *.bg.* je 10, ke kterému jsou přidány čísla *.gd.* a *.de.*, kterou jsou výsledky dělení jedné části druhou a protože *.a.* krát *.be.* dává 114,

$$x\left(10+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=114$$

ze [součinu] *.a.* krát *.bg.* plus *.a.* krát. *.gd.* plus *.a.* krát *.de.* podobně plyne 114;

$$x.10+x.\frac{x}{y}+x.\frac{y}{x}=114$$

proto, když *.a.* krát *.bg.* je odečteno, tj. 10 věcí, potom zůstane 114 minus 10 věcí pro součin čísla *.a.* krát .ge. ;

$$x\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=114-10x.$$

jestliže odečteš od tohoto součin *.a.* krát *.gd.*, tj. to, co je výsledkem dělení jedné části [číslem] *.a.*, jmenovitě deset minus věc $(10-x)$,

$$x\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-x.\frac{y}{x}=x.\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-y=x.\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)-(10-x)$$

potom zůstane 104 minus 9 věcí pro součin *.a.* krát *.de.*,

$$x\left(\frac{x}{y}\right)=104-9x,$$

ale *.de.* je to, co je výsledkem rozdělení *.a.* druhou částí a je zřejmé, že když je jedno číslo vyděleno jiným a to, co vyjde je vynásobeno dělencem, potom je rovno tomu, co je výsledkem, když je čtverec dělence vydělen dělitelem; proto součin *.a.* děleno *.de.* krát *.a.* je roven čtverci *.a.* děleno druhá část, tj. děleno 10 minus věc.

$$\left(\frac{x}{y}\right)x=\frac{x^2}{y}=\frac{x^2}{10-x}$$

Proto je *.a.* vynásobeno samo se sebou, což dává čtverec, který když je vydělen 10 minus věc dává 104 minus 9 věcí;

$$\frac{x^2}{10-x}=104-9x$$

proto, když vynásobím 10 minus věc [výrazem] 104 minus 9 věcí, potom je výsledek 1040 plus čtverec[6] minus 194 věcí rovno čtverec.

$$x^2=1040+9x^2-194x$$

Proto vrátíš minus věci a odečteš jeden čtverec od obou členů.

$$194x=1040+8x^2$$

[6] Je zajímavé, že přestože Fibonacci píše „čtverec“, vychází devět čtverců.

Zůstane 8 čtverců plus 1040 denari rovno 194 věcí. Vydělíš proto všechno počtem čtverců a výsledek bude čtverec plus 130 denari rovno $\frac{1}{4}24$ věcí.

$$\frac{1}{4}24x = 130 + x^2$$

Postupuješ proto podle příslušného pravidla a najdeš části 2 a 8.
(Přeloženo podle [Sig02], str. 567 – 568.)

Kořeny této rovnice jsou 8 a $\frac{1}{4}16$. Protože druhý kořen netvoří část čísla 10, v úvahu připadá pouze kořen s hodnotou 8.
Na druhý typ složené kvadratické rovnice vede následující úloha.

Příklad 2. 2. 6.
Jako je *.a.* k *.bg.*, tak je *.bc.* k *.ef.* a *.a.* je 4 a *.ef.* je 3. (Podle [Sig02], str. 533, *Kniha o abaku.*)

Pro lepší přehlednost opět zavedeme označení x pro *.a.*, y pro *.bg.* a z pro *.ed.*. Označení *.ef.* interpretujeme jako $z - y$, neboť jej Fibonacci definuje jako sčítanec čísla *.ed.*, který je roven číslu, o které *.ed.* přesahuje číslo *.bg.*.

Dnes bychom mohli úlohu zapsat následující soustavou rovnic

$$\frac{x}{y} = \frac{y - x}{z - y}$$
$$x = 4$$
$$z - y = 3.$$

Proto vynásobíš známé první číslo čtvrtým;

$$x(z - y) = 12$$

to bude 12, což je rovno součinu druhého *.bg.* a třetího *.bc.*

$$12 = y(y - x)$$

a *.cg.* je známé, neboť je rovno známému *.a.*; proto polovina *.cg.*, tedy 2, vynásobíš samo se sebou; to bude 4, které přidáš ke 12, výsledku násobení *.bc.* krát *.bg.*;

$$y(y - x) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 12 + 4$$

to dá 16;

$$(y - \frac{x}{2})^2 = 16$$

od kořene toho odeber 2, tj. polovinu *.cg.*, zbude dva pro číslo *.cb.*,

$$\left(y - \frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} = 2$$

které se přidá k *.cg.*; bude 6 pro čísla *.bg.*, tedy pro číslo .fd.;

$$(y - x) + x = 6$$

když se to přidá k *.ef.*, potom 9 je pro *.ed.*.

$$x = 4, y = 6\,, z = 9$$

(Přeloženo podle [Sig02], str. 533, *Kniha o abaku.*)

Z dnešního pohledu bychom úlohu vedli na kvadratickou rovnici $0 = y^2 - 4y - 12$, kterou vyřešíme. Získáme dva kořeny $y_1 = 6, y_2 = -2$. Záporný kořen můžeme zanedbat. Neznámou z snadno získáme dosazením do třetí rovnice $z - y = 3$. Výsledkem je uspořádaná trojice $[x, y, z] = [4, 6, 9]$.

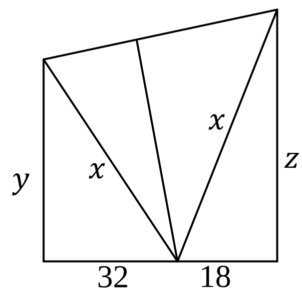
Na neurčitou rovnici vede úloha o dvou ptáčcích letících ze dvou věží, která se nachází v druhém oddíle 15. kapitoly L*iber Abaci*. Druhý oddíl se zabývá geometrickými problémy.

Příklad 2. 2. 7.

Na určitém území jsou dvě věže; a předpokládejme, že dva ptáčkové současně sestupují do středu fontány a že dvojice doletí k fontáně [každý] po své dráze letu z vrcholů věží v jeden a týž okamžik a přeješ si vědět, jak vysoké jsou obě věže; nechť je výše uvedený střed 32 stop od menší věže a 18 stop od větší věže. (Podle [Sig02], str. 544, *Kniha o abaku.*)

Úloha vede na soustavu, kterou můžeme vyjádřit

$$x^2 = y^2 + 32^2$$
$$x^2 = z^2 + 18^2.$$



Obrázek 8 - Grafické znázornění př. 2. 2. 7.

Fibonacci napsal podle ([Sig02], str. 544):

uděláš následující: odečteš čtverec menší vzdálenosti od čtverce vzdálenosti, tj. 324 od 1024.

$$z^2 - y^2 = 32^2 - 18^2$$

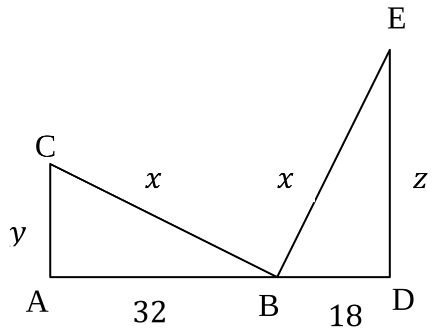
zůstane 700, které si zapamatuješ a zvolíš libovolně výšku menší věže; třeba 30[7]; přičteš čtverec tohoto k zapamatovanému číslu 700; to bude 1600.

$$z^2 = 30^2 + 700$$

odmocnina z toho, tj. 40 bude výška věže.

Dnes bychom úlohu řešili nejspíš stejným způsobem, což ovšem vede stejně jako u Fibonacciho na diofantovskou rovnici druhého stupně o dvou neznámých z a y.

Speciálním případem a jednou z možností řešení této úlohy je využití shodnosti trojúhelníků. Víme, že u vrcholů A a D jsou pravé úhly a strany CB a EB jsou stejně dlouhé. Otočíme-li trojúhelník BDE o 90° doprava zjistíme, že jednou z možností je, že trojúhelníky ABC a DEB jsou shodné. Tzn., že řešením by bylo $y = 18$ a $z = 32$. Odtud bychom již jednoduše dopočítali pomocí Pythagorovy věty $x = 2\sqrt{337}$.



Obrázek 9 - Grafické znázornění př. 2. 2. 7.

Následující úloha vede také na neurčitou rovnici.

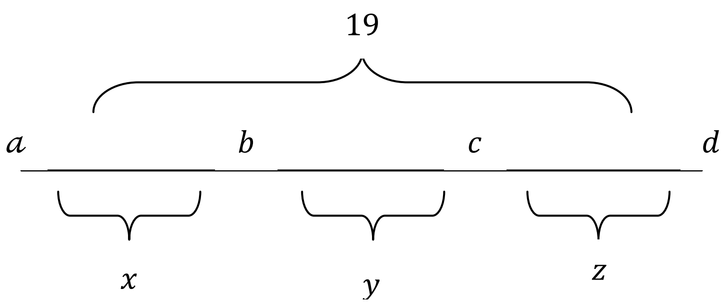
Příklad 2. 2. 8.

Nejprve nechť *.ab.*, *.bc.*, *.cd.* jsou tři čísla v souvislé proporci, tj. *.ab.* je k *.bc.* jako je *.bc.* k *.cd.*, a nechť součet čísel *.ab.*, *.bc.* a *.cd.* je 19. Jaké jsou jednotlivé kvantity?
(Podle [Sig02], str. 532. Úloha prvního oddílu, kapitola 15, *Kniha o abaku.*)

Úlohu si můžeme vyjádřit graficky, ale i jako soustavu rovnic.

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

$$x + y + z = 19$$



Obrázek 10 - Grafické znázornění př. 2. 2. 8.

---

[7] Fibonacci volil výšku menší věže 30, vzal ji z 1. úlohy o dvou ptáčcích letících ze dvou věží, kde je tento údaj uveden v zadání.

Fibonacci vycházel z předpokladu, že poměry mezi $x, y,$ a y, z jsou stejné. Za x, y, z zvolil čísla tak, aby byl poměr mezi nimi zachován, vzal $x = 1, y = 2$ a $z = 4$. Číslo 19 vydělené součtem $1 + 2 + 4$ dává číslo, kterým je třeba zvětšit 1, 2, 4, aby byla splněna i druhá podmínka úlohy. „Fibonacci poznamenává, že tato úloha má nekonečně mnoho řešení (*hocpotest fieri indinitis modis*). ([Beč01] str. 293)

Řešení:

$$x = \frac{19}{7}, y = \frac{38}{7}, z = \frac{76}{7}.$$

Dalším možným řešením, které vyhovuje zadané soustavě rovnic, je $x = 4, y = 6$ a $z = 9$. Je zajímavé, že Fibonacci neuvedl tento výsledek, neboť trojice čísel $4, 6, 9$ se objevuje jako výsledek v řadě jiných úloh. Jednou z možností je, že Fibonacci chtěl předvést obecnější postup. Úloha tedy nejspíš nebyla konstruována od výsledku, neboť kdyby byla, uvedl by pravděpodobně výše uvedené celočíselné řešení.

Řada dalších úloh vedoucích na soustavy algebraických rovnic s větším počtem neznámých než rovnic je v práci *Kniha čtverců.*

<u>Jordanus Nemore (1225 – 1260)</u>

Fibonacciho současníkem byl Jordanus Nemore[8], který sepsal řadu matematických prací a celkově přispěl k rozvoji přírodních věd. Jeho dílo, *Tractatus De numeris datis* (O daných číslech, *1225),* představuje od dob Diofanta první práci s pokročilou algebrou sepsanou v Evropě.

Práce je uspořádána podobně jako Eukleidovy Základy. V úvodu první knihy jsou tři definice, jimiž vysvětluje, co bude rozumět daným číslem a daným poměrem a kdy je dán vztah mezi čísly. Text pokračuje 115 větami rozdělenými do čtyř knih. Tvrzení vět první knihy lze zjednodušeně popsat slovy: Jestliže dvě neznámá čísla splňují dva dané vztahy vyjádřitelné rovnicemi nejvýše druhého stupně, jsou tato čísla daná. Druhá kniha obsahuje úlohy vedoucí jen na lineární rovnice. Problémy s více neznámými řešené pomocí poměrů a druhé odmocniny jsou ve třetí knize. Poslední kniha je věnována kvadratickým rovnicím o jedné nebo dvou neznámých.

[8] Známý též jako Jordanus de Syxonia, Jordan of Namur, Jordanus Nemorarius.

Úlohy vedoucí na soustavy polynomiálních rovnic najdeme především v první a čtvrté knize. Nejčastěji se hledají části daného čísla, které má být určitým způsobem rozděleno. Z příkladů bude patrná jednotná struktura zápisu problémů: (1) tvrzení věty, (2) důkaz věty, (3) příklad demonstrující důkaz.

Příklad 2. 2. 9.

Jestliže je dané číslo rozděleno na dvě [části], jestliže je výsledek násobení jedné části druhou daný, je nutně každá z těchto částí daná. (Třetí věta první knihy, přeloženo podle [Edw74], str. 112.)

Nechť je dané číslo *abc* rozděleno na čísla ab a c, která když se vynásobí, tvoří d, dané číslo;[9]

$$x + y = k$$
$$xy = q$$

Nechť dále *abc*, když je vynásobeno se sebou dá číslo e.

$$(x + y)^2 = e$$

Nechť se také vezme čtyřnásobek čísla d a nechť je to číslo f,

$$4xy = f$$

které odečteno od e ponechá g.

$$(x + y)^2 - 4xy = g$$

To bude čtverec rozdílu mezi ab a c.

$$(x - y)^2 = g$$

Vezme se druhá odmocnina z g a nechť je to h.

$$x - y = h$$

Pak h je rozdíl mezi ab a c; a tedy kdykoli je dáno *h*, *c* a *ab* budou daná.

(Přeloženo podle [Edw74], str. 113.)

Nemore v důkazu dále nepokračuje, neboť podle první věty první knihy platí, že je-li dán součet a rozdíl neznámých, jsou dány i neznámé. Následuje poslední část, která obsahuje demonstraci postupu na konkrétním příkladu. Postup lze snadno ukázat na další úloze.

[9] Číslo *ab* označíme jako *x*, číslo *c* označíme písmenem *y* a jako *d* napíšeme *q*.

Příklad 2. 2. 10.

Nechť 10 je rozděleno na dvě čísla a z násobení jednoho z nich druhým nechť je dán výsledek 21, který když je zčtyřnásoben, je 84 a zanechá 16 po odečtení od čtverce 10, tj. od 100. Odmocnina z 16 je 4 a to je rozdíl, a když je odečten od 10, 6 zůstane a polovina toho budou 3, což je menší část a větší část je 7. (Přeloženo podle [Edw74], str. 113.)

Tzv. důkazové úlohy vznikají z určovacích úloh, je-li už úplně nebo částečně dána soustava řešení. Je-li tomu tak, neprovádí se již úplné řešení příkladu, ale pouze se zkouškou ověřuje, jestli dané řešení je opravdu řešením úlohy.
Jako příklad můžeme uvést úlohu, která je uvedena v Knize I. *De numeris datis*.

Příklad 2. 2. 11.

Jsou daná dvě čísla, jejichž součet je 10. Jestliže je jedno vyděleno 4 a druhé 2, je součin podílů 2. Jaká jsou tato čísla. (Přeloženo z [Coo97])
Úloha vede na soustavu rovnic

$$\begin{gathered} x + y = 10 \\ \frac{x}{4} \cdot \frac{y}{2} = 2. \end{gathered}$$

Podle výše uvedeného návodu upravíme soustavu rovnic na požadovaný tvar tak, že druhou rovnici vynásobíme společným jmenovatelem, dostáváme soustavu

$$\begin{gathered} x + y = 10 \\ xy = 16. \end{gathered}$$

Nyní víme, že rozdíl $(x + y)^2 = 10^2$ a $4xy = 64$ na čtverec rozdílu x a y

$$(x - y)^2 = 36.$$

Odmocníme a získáme rovnici $x - y = 6.$ Teď máme dvě lineární rovnice, z kterých sestavíme soustavu

$$\begin{gathered} x + y = 10 \\ x - y = 6. \end{gathered}$$

Odtud již snadno vypočítáme, že $x = 8$ a $y = 2$, což také odpovídá Nemoreho řešení.

Příklad 2. 2. 12.

Jestliže je dané číslo rozděleno na dvě [části] a součin celku s jednou [z částí] je roven čtverci druhé [části], každá [z částí] bude dána přibližně (29. věta první knihy, přeloženo podle [Edw74], str. 113.)

Úlohu lze zapsat soustavou

$$x + y = k$$
$$(x + y)y = x^2$$

Nemore pokračuje důkazem tvrzení a ilustračním příkladem:

Nechť je součin *ab* s *b* stejný jako [součin] *a* se sebou;

$$(x + y)y = x^2$$

a protože *ab* se sebou je rovno [součtu součinů] *ab* s *a* a [*ab*] s *b*,

$$(x + y)^2 = (x + y)x + (x + y)y$$

bude se také rovnat [součtu součinů] *a* se sebou a s *ab*.[10]

$$(x + y)^2 = (x + y)x + x^2$$

Příklad 2. 2. 12.

Např. nechť 10 je rozděleno na dvě části tak, že 10 vynásobeno s jednou ze dvou částí je rovno součinu zbývající části se sebou.[11]

$$10 = x + y$$
$$10y = x^2$$

Nyní 10 vynásobeno se sebou je 100 a nechť se vezme dvojnásobek jeho dvojnásobku a to bude 400. K tomu nechť se přidá čtverec 10 a budeme mít 500,

$$10^2 = 100, \quad 2 \cdot (2 \cdot 100) = 400,$$
$$D = 400 + 10^2 = 500,$$

z čehož se vezme přibližná odmocnina, ta bude $22\frac{1}{3}$,

$$\sqrt{500} \doteq 22\frac{1}{3}$$

od ní je 10 odečteno a polovina zbytku bude $6\frac{1}{6}$, větší část, která musí být vynásobena se sebou.

$$22\frac{1}{3} - 10 = 12\frac{1}{3}; \quad 12\frac{1}{3} : 2 = 6\frac{1}{6}$$

(Přeloženo podle [Edw74], str. 114.)

---

[10] Nemore dále nepokračuje v důkazu, že *x* je dané. Patrně v tvrzeních předcházejících 29. větě první knihy dokázal, že je-li dáno k a platí-li, že $x^2 + kx = k^2$, pak je dáno také *x*, nebo dokázal obecnější tvrzení pro *k*, *m* a$x^2 + kx = m$. V 29. větě stačí vzít $x + y = k$ a $m = k^2 = (x + y)^2$.

[11] Na základě provedené důkazu víme, že soustava vede na řešení kvadratické rovnice $10^2 = 10x + x^2$. Další postup řešení odpovídá řešení kvadratické rovnice pomocí diskriminantu.

Výše uvedené výpočty odpovídají číslům, která bychom dosazovali ve vzorci pro výpočet kořenů kvadratické rovnice pomocí diskriminantu, tj.

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{22\frac{1}{3}}}{2} \quad \rightarrow \quad x = 6\frac{1}{6}.$$

Předchozí problém bývá interpretován jako úloha rozdělit danou úsečku v poměru zlatého řezu, tj. tak, aby celá úsečka k větší části dávala stejný poměr jako větší část k menší části, tj.

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

Snadno zjistíme, že tento vztah odpovídá druhé rovnici soustavy.

Závěr

V první části kapitoly autoři Gerbert, Böethius a Savasorda postupují při řešení úloh vedoucích na soustavy algebraických rovnic tak, že nejprve pomocí ekvivalentních úprav vedou úlohu na soustavu lineárních rovnic, kterou již dokázali vyřešit. V druhé části kapitoly se setkáváme s úlohami, které pomocí úprav převedli jejich autoři na výslednou kvadratickou rovnici. Doplněním kvadratické rovnice na čtverec dostali základní tvar rovnice, který vypočítali pomocí předem daného postupu.

3. Úlohy vedoucí na soustavy polynomiálních rovnic italských autorů od 14. stol. do 16. stol.

Jak již bylo zmíněno, první polovina 15. století je označována jako počátek renesance. V této době nastal rozvoj veškerého umění, vzdělávání a vědy. Z této doby také pochází téměř dvě desítky italských rukopisů obsahujících text věnovaný algebře. Většinou je to jen kapitola, která je součástí rozsáhlejšího textu nazvaného obvykle *trattato d'abaco.*

Italští historici matematiky (např. R. Franci, L. T. Rigatelli) zkoumají, které práce byly zdrojem pro italské rukopisy 14. a 15. století. Podle [Fra10], str. 177, jím nebyla ani Fibonacciho *Kniha o abaku* ani latinský překlad al-Chwárizmího algebry, který byl díky Gerardu z Cremony k dispozici středověkým učencům od 12. století.

V tabulce nalezneme pojmenování pro jednotlivé členy, které používali italští učenci.

neznámá (věc, kořen)	X	*cosa*
dvojmoc neznámé (čtverec)	x^2	*quadrato censo*
absolutní člen		*numero*
třetí mocnina neznámé	x^3	*conso cubo*
čtvrtá mocnina neznámé	x^4	*censo di censo,*
pátá mocnina neznámé	x^5	*censo di cubo*

Tabulka 3 - Označení přirozených mocnin neznámé dle italských autorů

Setkáváme se, také s prvními pokusy řešení nejen kvadratických, ale i rovnic vyšších řádů pomocí odmocnin. Neznámý autor v 16. stol. publikoval svůj postup řešení kubických rovnic $x^3 + px^2 + qx = r$ podle pravidla

$$x = \sqrt[3]{\left(\left(\frac{q}{p}\right)^3 + r\right) - \frac{q}{p}}.$$

Později se ukázalo, že tento vzorec neplatí obecně, ale pouze pro $p^2 = 3q$.

Jako významné osobnosti té doby můžeme uvést matematiky jako je Antonio Mazzinghi, nebo Dardi jejichž vybrané úlohy vedoucí na soustavy polynomiálních rovnic uvádím v první části této kapitoly. V druhé části se seznámíme s díly italských autorů jako jsou Piero della Francesca, Luca Pacioli, Raffaelo Canacci, Nicollo Fontana a Gerolamo Cardano.

Pravděpodobně nejstarší italsky psanou prací o algebře je Jacopův *Tractatus algorismi*.

3.1. Jacobo de Florenti, Dardi, Mazzinghi

Jacobo de Florentia (cca. 13. – 14. stol.)

Úlohy, které vedou na soustavy jednoduchých nelineárních algebraických rovnic lze najít v dalších dílech méně známých autorů. Např. Jacobo de Florentia (Jacopo z Florencie) v rukopise *Tractatus algorismi* (Traktát o algoritmech, 1307) řeší úlohy, které vedou na soustavy:

$$\frac{x}{y}=\frac{2}{3}, \quad y^2-x^2=20 \qquad \frac{x}{y}=\frac{4}{9}, \quad xy=x+y \qquad 14=4(y-14), \quad \sqrt{x}+y=30 \qquad x+y=10, \quad xy=20$$

$$xy=12, \quad y+xa+x(y+xa)=54 \qquad x+y=10, \quad xy+(y-x)=22 \qquad \frac{15}{y}=\frac{y}{z}=\frac{z}{60}$$

První dvě soustavy řeší zavedením nové neznámé *p* tak, aby byla splněna podmínka daná první rovnicí. Volí $x = 2p$¸ $y = 3p$, resp. $x = 4p$¸ $y = 9p$, druhá rovnice je pak velmi jednoduchá – ryze kvadratická rovnice, resp. kvadratická rovnice bez absolutního členu. V úloze odpovídající třetí soustavě zavádí novou neznámou tak, aby se zbavil odmocniny, tj. $x = p^2$. Kvadratickou rovnici o jedné neznámé získá stejně jako u zbývajících soustav dosazením výrazu za *y*. Postup jejího řešení připomíná metodu doplnění na čtverec.

Jako ukázku předvedeme úlohu odpovídající poslední z uvedených soustav.

Příklad 3. 1. 1.

Někdo pracuje ve skladišti zboží 4 roky a v prvním roce dostane 15 zlatých; ve čtvrtém dostane 60 zlatých. Chci vědět, kolik dostane ve druhém a ve třetím roce ve stejném poměru. (Přeloženo podle [Høy98], str. 33.)

Označme y, resp. z počet zlatých, které získá ve třetím, resp. čtvrtém roce. Úlohu lze potom zapsat soustavou.

$$\frac{15}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{60}$$

Jacopo píše, že je potřeba vydělit to, co dostal ve čtvrtém roce tím, co dostal v prvním roce, čímž se dostane třetí mocnina, tj.

$$\frac{60}{15} = p^3.$$

Vzhledem k tomu, že se sobě rovnají podíly $\frac{15}{y}, \frac{y}{z}, \frac{z}{60}$ rovnají se i jejich převrácené hodnoty, tj.

$$\frac{y}{15} = \frac{z}{y} = \frac{60}{z}.$$

Nechť p je hodnota těchto podílů, pak

$$y = 15p, \quad z = yp, \quad 60 = zp$$

a dosazením za y a z je vysvětlen uvedený vztah pro třetí mocninu. Pro známou hodnotu p získal Jacopo počet zlatých ve druhém a třetím roce jako třetí odmocniny:

$$y = \sqrt[3]{15^{3}.4} = \sqrt[3]{13\,500}, \; z = \sqrt[3]{13\,500\,.\,4} = \sqrt[3]{54\,000}.$$

Z dnešního pohledu bychom si úlohu mohli rozdělit na dvě rovnice druhého stupně

$$15z = y^2 \quad \text{a} \quad 60y = z^2.$$

Úlohu můžeme řešit dosazovací metodou. Z druhé rovnice si vyjádříme $y = \frac{z^2}{60}$. Dosadíme do první rovnice a dostaneme

$$z^3 = 15 \times 60^2 \quad \rightarrow \quad z = \sqrt[3]{54\,000}.$$

Zpětně dosadíme do $y = \frac{z^2}{60}$ a dopočítáme.

<u>Dardi (cca. 14. stol.)</u>

Významným italským autorem do 15. století byl Maestro Dardi z Pisy. Přibližně roku 1344 napsal dílo nazvané *Aliabraa argibra*, které lze považovat za první práci věnovanou výhradně algebře a napsanou v národním jazyce. Obsahovalo smíšené kubické a bikvadratické rovnice. V první části práce se nacházelo 6 typů kvadratických rovnic a geometrické důkazy postupu jejich řešení. V druhé části práce můžeme najít 198 pravidel demonstrovaných na příkladech. Dardi také řešil úlohy vedoucí na nelineární algebraické soustavy rovnic, kde rozděloval číslo 10 na dvě části. Jako ukázku můžeme uvést následující úlohu.

Příklad 3. 1. 2.

Rozděl 10 na dvě části tak, že jejich součin vydělený rozdílem je $\sqrt{N}$. [12] (Převzato z [Wae85], str. 48)

Úlohu můžeme zapsat soustavou

$$x + y = 10$$
$$\frac{xy}{x-y} = \sqrt{N}.$$

Dardi nazval jednu část z deseti x, druhou část označil jako $10 - x$.

Potom dostaneme rovnici o jedné neznámé

$$\frac{x(10-x)}{x-(10-x)} = \sqrt{N}.$$

Příklad vede na kvadratickou rovnici

$$x^2 + x\left(2\sqrt{N} - 10\right) = 10\sqrt{N},$$

jejímž kladným kořenem je

$$x = 5 - \sqrt{N} + \sqrt{25+N}.$$

Jestliže známe x, snadno dopočítáme

$$y = 5 + \sqrt{N} - \sqrt{25+N}.$$

Dardi převedl úlohu na řešení rovnice čtvrtého stupně. Vztah mezi částmi čísla 10 upravil tak, aby neobsahoval odmocniny:

$$\frac{(x(10-x))^2}{(2x-10)^2} = N$$

Odtud je

$$x^4 + 40Nx = 20x^3 + (4N-100)x^2 + 100N. \qquad (\blacklozenge)$$

Mezi 182. a 183. pravidlem uvádí Dardi pravidla pro výpočet kořenů rovnic čtvrtého stupně. Píše, že rovnice

$$ax^4 + cx^2 + dx = bx^3 + e, \text{ resp. } ax^4 + dx = bx^3 + cx^2 + e,$$

na něž vede daná úloha při N < 25, resp. pro N > 25, mají řešení (psáno dnes srozumitelným způsobem):

[12] N je přirozené číslo.

$$x = \sqrt[4]{\left(\frac{c}{4a}\right)^2 + \frac{e}{a} + \frac{b}{4a}} - \sqrt{\frac{\frac{d}{a}}{\frac{2b}{a}}}$$

Toto pravidlo však nefunguje pro uvedené dva typy obecných rovnic čtvrtého stupně, ale jen pro rovnice typu (◆), tj. pro rovnice, které lze převést na řešení kvadratické rovnice.

Antonio Mazzinghi (cca 1353 – 1383)

Antonio Mazzinghi se odlišuje od ostatních řešitelů úloh vedoucí na soustavy polynomiálních rovnic. V jeho díle *Trattato di Fioretti* nalezneme, poměrně komplikované úlohy, které vedou na soustavy tří rovnic o třech neznámých. 55 problémů z díla *Trattato di Fioretti* se dochovalo v jiném díle *Practica d´arismetica*, které je přisuzováno mistru Benediktovi z Florencie. Mazzinghi řešil následující úlohy.

Příklad 3. 1. 3.

Najdi dvě čísla taková, že vynásobeno jednoho druhým dá 8 a jejich čtverce dohromady 27.

(Přeloženo podle [wwwHee].)

Označíme-li první číslo *a* a druhé *b*, odpovídá úloze soustava

$$ab = 8$$
$$a^2 + b^2 = 27,$$

tj. soustava stejného typu jako řešil Gerbert, viz příklad 2. 1. 2. Na rozdíl od Gerberta předpokládal Mazzinghi čísla v poněkud komplikovaném tvaru:

$$a = x + \sqrt{y}, \qquad b = x - \sqrt{y}.$$

$$x^2 - y = 8$$
$$2x^2 + 2y = 27.$$

Úlohu můžeme vyřešit dosazením $y = x^2 - 8$ do druhé rovnice. Tato úprava vede na kvadratickou rovnici

$$x^2 = \frac{43}{4},$$

z níž plyne $x = \frac{\sqrt{43}}{2}$. Druhou neznámou získáme dosazením do první rovnice, tj. $y = \frac{11}{4}$. Nyní již jednoduše úlohu vyřešíme dosazením za x, y do výrazů $a = x + \sqrt{y},\ b = x - \sqrt{y}$. Vyjde nám, že $a = \frac{\sqrt{43}+\sqrt{11}}{2}$ a $b = \frac{\sqrt{43}-\sqrt{11}}{2}$.

Další úloha, která se již týká dělení čísla na tři části v souvislém poměru, vede na soustavu tří rovnic o třech neznámých.

Příklad 3. 1. 4.

Utvoř tři části čísla 10 v souvislém poměru tak, že jejich čtverce jsou dohromady 40. (Přeloženo podle [wwwHee].)

Označíme-li si první číslo x, druhé y a třetí číslo z, můžeme danou úlohu zapsat následující soustavou rovnic

$$x + y + z = 10$$
$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 40.$$

Úlohu lze řešit tak, že odečteme třetí rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 40$ od umocněné první rovnice $(x + y + z)^2 = 10^2$. Druhá rovnice je vynásobena členem yz. To vede na soustavu

$$2xy + 2xz + 2yz = 60$$
$$xz = y^2.$$

Stejnou úvahu provedl i Mazzinghi. V rovnici $2xy + 2xz + 2yz = 60$ se nahradí člen xz členem y^2 a vytknutím $2y$ upravíme na součinný tvar

$$2y(x + y + z) = 60.$$

Součet neznámých čísel $(x + y + z)$ nahradíme číslem 10 a určíme y

$$20y = 60$$
$$y = 3.$$

Zbývající neznámá čísla určil Mazzinghi ze soustavy

$$x + z = 7$$
$$x^2 + z^2 = 31,$$

která vznikne z původní dosazením již známé hodnoty y.

Dnes bychom nově vzniklou soustavu s proměnnými x, z, mohli vést na kvadratickou rovnici. Z rovnice $x + z = 7$ si vyjádříme $z = 7 - x$ a dosadíme do druhé rovnice $x^2 + (7 - x)^2 = 31$. Z kvadratické rovnice $x^2 - 7x + 9 = 0$ vypočítáme kořeny

$$x_1 = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{13}) \text{ a } x_2 = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{13}) .$$

Hodnotu neznámé

$$z_1 = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{13}) \text{ a } z_2 = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{13})$$

dopočítámé z rovnice $z = 7 - x$.

Příklad 3. 1. 5.

Najdi dvě čísla taková, že součet jejich čtverců je 100 a vynásobeno jedno druhým dělá čtverec rozdílu dvou čísel minus 5. (Přeloženo podle [Fra88], str. 246).

Dnes bychom úlohu zapsali soustavou:

$$x^2 + y^2 = 100$$
$$xy = (x - y)^2 - 5$$

Následující překlad Mazzinghiova řešení opět doplníme symbolickým přepisem.

Nechť je první číslo jedna *cosa* plus odmocnina z několika *quantità* a druhé jedna *cosa* minus odmocnina ze stejného *quantità*

$$x = p + \sqrt{q}, \qquad y = p - \sqrt{q}$$

a vynásob každé číslo se sebou a sečti [tyto] čtverce, dělá to 2 *censi* a nějaké neznámé *quantità*.

$$\left(p + \sqrt{q}\right)^2 + \left(p - \sqrt{q}\right)^2 = 2p^2 + 2q$$

A tyto čtverce musejí tvořit 100, kde neznámá *quantità* je rozdílem 100 a 2 *censi*, tj. 100 minus 2 *censi.*

$$\left(p + \sqrt{q}\right)^2 + \left(p - \sqrt{q}\right)^2 = 100 \quad \rightarrow \quad 2q = 100 - 2p^2$$

Proto první násobení, tj. *quantità* je 50 minus 1 *censo*.

$$q = 50 - p^2$$

První číslo je jedna *cosa* plus odmocnina z 50 minus 1 *censo* a druhé je jedna *cosa* minus kořen z 50 minus 1 *censo*.

$$x = p + \sqrt{50 - p^2}, y = p - \sqrt{50 - p^2}.$$

(Přeloženo podle [Fra88], str. 247)

Dále postupoval tak, že vypočetl součin a rozdíl takto vyjádřeného prvního a druhého čísla, tj.

$$xy = 2p^2 - 50$$
$$x - y = 2\sqrt{50 - p^2}.$$

Z podmínky na rovnost součinu neznámých čísel a čtverce jejich rozdílu zmenšeného o pět, $xy = (x - y)^2 - 5$, dostal ryze kvadratickou rovnici

$$6p^2 = 245$$
$$p = \pm\sqrt{\frac{245}{6}}$$

pro pomocnou neznámou p. Vzhledem k tomu, že $q = 50 - p^2$, se snadno dopočtou hledaná čísla:

$$x = \sqrt{40\frac{5}{6}} + \sqrt{9\frac{1}{6}}\ ; \qquad y = \sqrt{40\frac{5}{6}} - \sqrt{9\frac{1}{6}}.$$

Přibližné hodnoty pro x, y jsou $x = 9{,}41775$ a $y = 3{,}36245.$

Dnes bychom příklad mohli řešit tak, že bychom využili rovnice

$$x^2 + y^2 = 100$$
$$x^2 + y^2 = 3xy + 5.$$

Jednu rovnici odečteme od druhé, tím se nám vyruší druhé mocniny neznámých. Vyjádřili bychom si $y = \frac{95}{3x}$ a dosadili do první rovnice $x^2 + y^2 = 100.$ Dostaneme rovnici čtvrtého stupně $9x^4 - 900x^2 + 9025 = 0$, která má řešení

$$x_1 = -\sqrt{50 - \frac{35\sqrt{11}}{3}}; \quad x_2 = \sqrt{50 - \frac{35\sqrt{11}}{3}};$$
$$x_3 = -\sqrt{50 + \frac{35\sqrt{11}}{3}}; \quad x_4 = \sqrt{50 + \frac{35\sqrt{11}}{3}}.$$

Tedy přibližně, $x_1 = -3{,}36245, x_2 = 3, 36245, x_3 = -9{,}41775, x_4 = 9{,}41775.$

Odtud již snadno zpětným dosazením dostaneme

$$y_1 = -\frac{1}{19}\sqrt{50 - \frac{35\sqrt{11}}{3}}(30 + 7\sqrt{11}); \quad y_2 = \frac{1}{19}\sqrt{50 - \frac{35\sqrt{11}}{3}}(30 + 7\sqrt{11});$$

$$y_3 = \frac{1}{19}(7\sqrt{11} - 30)\sqrt{50 + \frac{35\sqrt{11}}{3}}; \quad y_4 = \frac{1}{19}(30 - 7\sqrt{11})\sqrt{50 + \frac{35\sqrt{11}}{3}},$$

což je v přibližných hodnotách

$$y_1 = -9{,}41775, y_2 = 9{,}41775, y_3 = -3{,}36245, y_4 = 3{,}36245.$$

Porovnáme-li Mazzinghiho postup řešení dané úlohy s naším, zjistíme, že Mazzinghiho postup, kdy si zvolil dvě pomocné neznámé p a q, vede k elegantnějšímu vyjádření řešení než náš postup, který směřujeme na bikvadratickou rovnici. Nám vyšly surdické výrazy, tedy odmocniny z odmocnin. Přestože je náš postup poněkud početně pracnější a získali jsme čtyři výsledky oproti jeho jednomu, Mazzinghiho řešení $x = 9{,}41775$ odpovídá našemu $x_4 = 9{,}41775$. Totéž platí i pro Mazzinghiho řešení pro $y = 3{,}36245$, které je totožné s naším řešením $y_4 = 3{,}36245$. Je zajímavé, že přestože nám vyšla dvě kladná řešení, Mazzinghi uvádí pouze jedno.

Mezi další matematiky, kteří řešili úlohy vedoucí na soustavy polynomiálních rovnic, můžeme zařadit již zmíněného matematika Raffaella Canacciho nebo Piera della Francesku, které nalezneme v následující podkapitole.

3.2. Francesca, Canacci, Pacioli, Tartaglia, Cardano

Piero della Francesca (cca. 1420 – 1492)

Francesca je uznáván jako jeden z nejvýznamnějších renesančních malířů své doby. Mimo malování se také věnoval matematice. Napsal několik prací zabývající se matematickými problémy. K šesti typům kvadratických rovnic uvedeným Fibonaccim přidal dalších 55, které odpovídají kubickým, bikvadratickým rovnicím a rovnicím pátého stupně. Úlohy vedoucí na soustavy rovnic bychom dnes nalezli v práci známé pod názvem *Trattato d´Abaco*. Podobně jako u mnoha jiných autorů zde řeší problém rozdělení čísla deset na dvě části. Několik jeho úloh je obsaženo i v Paciolliho *Summa de arithmetica*. Uveďme soustavy vybraných úloh na rozdělení čísla deset na dvě části.

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ xy &= 21 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 10 \\ x^2 + y^2 &= 58 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 10 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= 4\frac{1}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 10 \\ \frac{10}{x} + \frac{10}{y} &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ xy &= 5\frac{1}{4}(x - y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 10 \\ x^2 + y^2 + (x - y) &= 54 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 10 \\ \frac{xy}{x - y} &= 12 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + y &= 10 \\ xy &= (x - y)^2 \end{aligned}$$

Všechny úlohy začíná řešit stejně – jednu z částí volí jako věc, tj. neznámou, druhá je potom 10 minus věc.

V následujícím příkladu o rozdělení čísla 10 na tři části v souvislém poměru volil Francesca stejný postup, tj. jako první část označil neznámou a zbytek rozdělil mezi druhou a třetí část. Jeho postup však není obecně použitelný pro tento typ úloh. Francesca používá pro neznámou věc označení $\bar{I}$, její čtverec, censo, označuje jako $\overset{\square}{\bar{I}}$.

Příklad 3. 2. 1.

Úloha vede na soustavu polynomiálních rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ xz &= y^2. \end{aligned}$$

Francesca uvádí následující řešení. (Podle [Rad95], str. 17.)

Nechť je první část věc, druhá část 5 minus $\bar{I}$ věcí a třetí 5.

$$x = p, \qquad y = 5 - x, \qquad z = 5.$$

Vynásob $\bar{I}$ věcí pěti, dostaneš $\bar{5}$

$$xz = 5p$$

a 5 minus $\bar{I}$ [výrazem] 5 minus $\bar{I}$, [to] dělá $\overset{\square}{\mathrm{I}}$ a 25 minus $\overline{10}$ věcí

$$y^2 = (5 - p)(5 - p) = p^2 + 25 - 10p$$

Obnov části tím, že ke každé přidáš $\overline{10}$

$$15p = p^2 + 25$$

A druhá [z hledaných částí] je 5 minus to, co zbude po [odečtení] minus $\sqrt{31\frac{1}{4}}$ a třetí část je 5.

Uvedený příklad je hezkou ukázkou, jak lze ve speciálním případě použít pro tři neznámé postup užívaný pro dvě neznámé. Francesca si patrně nebyl vědom toho, že úloha má v množině kladných reálných čísel nekonečně mnoho řešení a že jeho postup využívající pouze jednu neznámou je omezující. Se zavedením dalších neznámých došlo k radikálním změnám v postupech řešení. Podobnou úlohu řešil i Fibonacci (viz výše *příklad 2.2 8.*)

<u>Raffaello Canacci (1456 – 1496/1532)</u>

Úlohy, které řešil Raffaello Canacci najdeme v díle *Ragionamenti d'algebra (*Algebraické úvahy, 1490*)*. Canacci řešil úlohu, kterou můžeme přeložit takto.

Příklad 3. 2. 2.

Najdi mně tři čísla tak, že první je k druhému, jako 2 je ke 3. A taková, že druhé je ke třetímu, jako je 3 ke 4. A taková, že součin prvního a druhého vynásobený třetím je roven druhé odmocnině z 12. (Přeloženo podle [Rad95], str. 13.).

Úlohu můžeme z dnešního pohledu zapsat jako soustavu tří rovnic o třech neznámých následujícím způsobem

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{y}{z} = \frac{3}{4}$$
$$xyz = \sqrt{12}.$$

Předpokládej, že první [číslo] jsou 2 věci, druhé jsou 3 věci a třetí jsou 4 věci.

$$x = 2u, y = 3u \text{ a } z = 4u$$

Vynásob 2 věci třemi věcmi a dostaneš 6 čtverců

$$2u \cdot 3u = 6u^2.$$

Nyní řekneš 6 čtverců krát 4 věci se rovná 24 krychlím [třetím mocninám]

$$6u^2 \cdot 4u = 24u^3$$

a že to musí tvořit odmocninu z 12.

$$24u^3 = \sqrt{12}$$

Tak konej podle pravidla, vyděl čísla krychlemi a najdi třetí odmocninu a tím dostaneš hodnotu věci.

$$u = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{12}}{24}}$$

(Přeloženo podle [Rad95], str. 13.).

Dnes bychom danou úlohu mohli řešit dosazovací metodou. Třetí rovnici bychom si upravili na tvar $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{12}}{y^2 z}$. Poměr $x{:}\,y$ je daný, proto

$$\frac{\sqrt{12}}{y^2 z} = \frac{2}{3}$$
$$\frac{y}{z} = \frac{3}{4}.$$

Následně bychom si z druhé rovnice vyjádřili $y = \frac{3}{4}z$ a dosadili do první rovnice. Po úpravách nám vyjde

$$\sqrt[3]{\frac{16\sqrt{3}}{3}} = z.$$

Zbylé dvě neznámé již snadno dopočítáme dosazením za *z*, tj.

$$y = \frac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[3]{4}} \qquad \text{a} \qquad x = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3}}.$$

Správnost řešení jednoduše ověříme zkouškou.

Luca Pacioli (1445 – 1517)

V Benátkách roku 1494 vyšlo encyklopedistické dílo, první tištěná kniha sepsaná v národním jazyce věnovaná mimo jiné algebře a zároveň první tištěná algebra v Evropě, ve kterém Luca Pacioli shrnul veškeré obecné znalosti matematiky tehdejší doby. Nazývalo se *Summa de Arithmetica Geometrie Proportioni e Proportionalita* (Souhrn poznatků o aritmetice, geometrii, poměrech a úměrnosti). Nenalezneme zde mnoho nových myšlenek, spíše využívá znalosti z Eukleida, Ptolemaia, Fibonacciho, Böethia a mnoha dalších. Jeho život, značně ovlivnil Piero della Francesca, v jehož malířské dílně získal Luca aspoň část vzdělání a jehož některé práce přeložil do italštiny. Protože pocházel z obchodního městečka, zabývalo se jeho dílo obchodní aritmetikou, ale také geometrií a trigonometrií. Následující generaci, která se proslavila objevem správného postupu pro řešení kubické rovnice, kniha sloužila jako učebnice. Podle Pacioliho algebra spočívá v „doplňování“ a „kladení proti sobě“. Vyšetřoval některé druhy bikvadratických rovnic, které lze převést na základní typy lineárních a kvadratických rovnic. Např. pro $ax = bx$, $ax^2 = bx^2$ platí, že když $a = b$, potom jsou rovnice neurčité. Jestliže $a \neq b$, potom jsou rovnice nesplnitelné. Pro $x = 0$ rovnici nechává bez komentáře.

Uveďme některé rovnice čtvrtého stupně, které mohou být převedeny na kvadratickou rovnici nebo na rovnici, v níž se řešení najde pouhým odmocněním:

$$ax^4 = e \qquad ax^4 = dx \qquad ax^4 = cx^2$$
$$ax^4 + e = cx^2 \quad ax^4 + cx^2 = e \quad ax^4 = cx^2 + e.$$

Pacioli píše, že pro rovnice

$$ax^4 + cx^2 = dx \quad \text{a} \quad ax^4 + dx = cx^2$$

zatím neexistují žádná obecná pravidla řešení, mají nemožné (impossibile) řešení. Zároveň říká, že na kvadratické rovnice lze převést i některé rovnice řádu vyššího než čtyři.

V *Summa de Arithmetica Geometrie Proportioni e Proportionalita* nalezneme úlohu, ve které se mají najít čtyři veličiny v souvislém poměru, jejichž součet je 15 a součet jejich čtverců je 85. Úloha vede na soustavu rovnic

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{u}$$
$$x + y + z + u = 15$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 85.$$

Veličiny x, y, z, u jsou v souvislém poměru. Pacioli využil při řešení úlohy geometrické posloupnosti, neznámé x, y, z, u vyjádřil pomocí a, b, kde a je první člen posloupnosti a b je kvocient.

$$x = a, \qquad y = ab, \qquad z = ab^2, \qquad u = ab^3.$$

Pro takto vyjádřené neznámé platí, že jsou v souvislém poměru. Pacioli udělal při výpočtu řešení chybu, ale dospěl k závěru, že součet čtverců je představován výrazem $64 + 16 +$ $+4 + 1$, odkud lze správné řešení $8, 4, 2, 1$ snadno vyvodit. Postup, kterým by bylo možné dospět k řešení, ukážeme na následující straně na úloze stejného typu (*příklad 3. 2. 3*).

Třebaže je *Summa* nejznámější Pacioliho prací z matematiky, z hlediska algebry si zasluhuje pozornost i jeho nepublikovaná kniha o aritmetice a algebře. Podle [Hee10] byl rukopis knihy dokončen nejpozději v roce 1480. Kniha nemá žádný název, v poslední době bývá označována jako *Tractatus mathematicus ad discipulos perusinos*, *Trattato d'arithmetica*, resp. *Opera di mathematica*. Např. v části nazvané *Divisioni e partimenti de numeri* najdeme asi 70 úloh požadujících nalezení dvou nebo tří částí daného čísla, což je typický problém nejen italské algebry. Na ukázku uveďme přepis několika úloh do dnešní symboliky.

$$x + y = 1 \qquad x + y = 10 \qquad x + y = 10 \qquad x + y + z = 10$$
$$\frac{y}{x} + y = 5 \qquad x^2 - y^2 = 49 \qquad \frac{xy}{x - y} = 22 \qquad xz = y^2$$

$$x + y = 12 \qquad x + y = 10$$
$$\sqrt{x^2 + 13} + \sqrt{y^2 - 11} = 12 \qquad (x - y)^2 = 20\frac{1}{4}$$

<u>Niccolo Fontana Tartaglia (1499 – 1557)</u>

Niccolo Fontana, známý spíše pod jménem Tartaglia, pocházel z chudé rodiny. Ke své přezdívce Tartaglia přišel tak, že mu obličej znetvořil francouzský voják šavlí a on pak nosil celý život plnovous, aby zakryl nevzhlednou jizvu. Jeho jméno je neodlučně spjaté s řešením kubických rovnic. Některé úlohy, které řešil, lze matematizovat jako soustavu polynomiálních rovnic. Řešil je postupnou eliminací neznámých a tím je vedl na rovnice třetího stupně. Napsal několik knih. V červenci roku 1546 vydal *Quesiti et Inventioni Diverse* (Všeliké úkoly a vynálezy). Inspiroval se antikou a tuto knihu napsal formou rozhovorů, koncipovaných jako dopisy. Knihu můžeme rozdělit do devíti „knih“ a nalezneme v ní na 171 úloh. Z našeho pohledu je nejzajímavější poslední kniha obsahující úlohy z aritmetiky, geometrie a algebry.

Příklad 3. 2. 3.

Vytvoř mi z 10 čtyři veličiny v souvislém poměru tak, že čtverce dávají dohromady 60. (Přeloženo podle [Kat01])

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{u}$$
$$x + y + z + u = 10$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 60$$

Niccolo popsal postup řešení následovně: „Nyní k odpovědi na Vaši první otázku, která zní, že se z 10 mají vytvořit čtyři veličiny ve spojité proporci tak, že jejich čtverce dají dohromady 60, odpovídám, že uvedené části jsou uvedeny níže, totiž: První bude $6\frac{1}{2}$ minus R. $7\frac{1}{4}$ minus R.universale[13] $49\frac{1}{2}$ minus R.$1225\frac{1}{4}$ minus zlomek, totiž R.41876 plus R.9396 minus 288 vyděleno R.116 plus 4.“

[13] R. universale znamená, že se má vzít odmocnina, resp. kořen ze všeho.

Dnes bychom zapsali následovně:

$$x = 6\frac{1}{2} - \sqrt{7\frac{1}{4} - \sqrt{49\frac{1}{2} - \sqrt{1225\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{41876} + \sqrt{9396} - 288}{\sqrt{116} + 4}}}}$$

(Přeloženo dle [Kat01])

Při řešení úlohy využil stejně jako Pacioli geometrickou posloupnost, kde neznámé x, y, z, u v souvislém poměru vyjádřil pomocí a, b, kde a je první člen posloupnosti a b je kvocient.

$$x = a, \qquad y = ab, \qquad z = ab^2, \qquad u = ab^3.$$

Je tedy

$$x + y + z + u = 10$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 60.$$

Z předchozí soustavy po dosazení dostaneme

$$a + ab + ab^2 + ab^3 = 10$$
$$a^2 + a^2b^2 + a^2b^4 + a^2b^6 = 60,$$

což lze upravit na následující tvar

$$a(1 + b)(1 + b^2) = 10$$
$$a^2(1 + b^2)(1 + b^4) = 60.$$

Vydělíme-li druhou rovnici $a^2(1 + b^2)(1 + b^4) = 60$ první $a(1 + b)(1 + b^2) = 10$, dostaneme vztah pro a v závislosti na b

$$a = 6\frac{b+1}{b^4+1.} \ (\bigstar)$$

Dosadíme-li za $a = 6\frac{b+1}{b^4+1.}$ v první rovnici $a(1 + b)(1 + b^2) = 10$ a upravíme, dostaneme reciprokou rovnici

$$b^4 - 3b^3 - 3b^2 - 3b + 1 = 0.$$

Tato rovnice má dva reálné kořeny

$$b_1 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{29}}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{2} + \frac{3\sqrt{29}}{2}}; \qquad b_2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{29}}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{2} + \frac{3\sqrt{29}}{2}}.$$

V úloze, kde se předpokládá $x < y < z < u$, je řešením takové b, které je větší než 1, tj.

$$b = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{29}}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{2} + \frac{3\sqrt{29}}{2}}$$

Dosazením této hodnoty za *b* v (★) dostaneme

$$a = x = \frac{1}{2}(13 - \sqrt{29} - \sqrt{22 + 6\sqrt{29}}.$$

Čtyřmi hledanými veličinami x, y, z a u jsou

$$x = \frac{1}{2}(13 - \sqrt{29} - \sqrt{22 + 6\sqrt{29}}$$

$$y = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{5}{4}\sqrt{22 + 6\sqrt{29}} - \frac{1}{4}\sqrt{29(22 + 6\sqrt{29})}$$

$$z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{29}{2}(11 + 3\sqrt{29})} - \frac{5}{4}\sqrt{22 + 6\sqrt{29}}$$

$$u = \frac{13}{2} - \frac{\sqrt{29}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{22 + 6\sqrt{29}}.$$

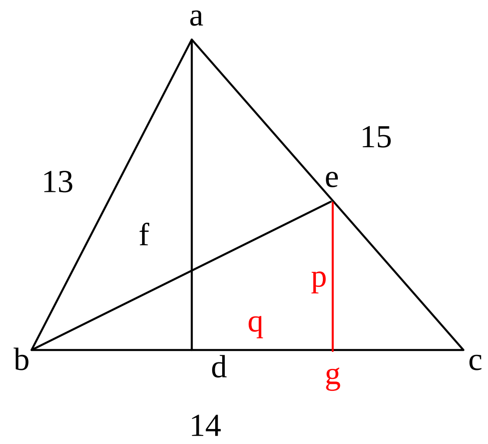
Další příklad jsem do práce zařadila i přesto, že náš postup nevede na žádnou soustavu polynomiálních rovnic, a to z důvodu podobnosti úlohy řešené výše Gerbertem (viz *příklad 2.1.4.*). Úloha má odlišné zadání. V Gerbertově úloze hledáme výšku na základnu trojúhelníku, kdežto v následující úloze hledáme velikost dvou úseků na nejdelší straně trojúhelníka. K vyřešení této úlohy jsme využili znalostí z již zmíněné Gerbertovy úlohy.

Příklad 3. 2. 4.

Je trojúhelník *abc*, jehož strana *ab* 13, *ac* 15, *bc* 14 a jeho výška je *ad*. Z vrcholu *b* vedu čáru *bfe*, která čáru *ad* rozděluje na *fd*, která je 3. Otázkou je velikost dvou dílů *ae* a *ec*. (Přeloženo podle [Kat01], úloha XXVII.)

Tartaglia určil že, *ec* je $7\,\frac{7}{29}$ a *ae* je $7\,\frac{22}{29}$.

Z Gerbertovy úlohy víme, že S je 84, výška 12 a bd je 5 a dc 9. K výpočtu řešení můžeme využít podobnost trojúhelníků.



Obrázek 11 - Grafické znázornění př. 3. 2. 4.

$\Delta bdf \sim \Delta bge$, proto $\frac{3}{5} = \frac{p}{(5+q)}$, kde 5 je vzdálenost *bd*

$\Delta egc \sim \Delta adc$, proto $\frac{p}{(9-q)} = \frac{12}{9}$.

Ze soustavy rovnic nás zajímá řešení pro *p*, které vyjde $\frac{168}{29}$.

Nyní znovu využijeme podobnost trojúhelníka $\Delta adc \sim \Delta egc$:

$$\frac{12}{15} = \frac{p}{|ec|}$$

Odtud dostaneme $|ec| = \frac{210}{29}$, tj. $7\frac{22}{29}$. Délku úsečky *ae* dopočítáme jako doplněk k *ec*, tj. $15 - 7\frac{22}{29} = 7\frac{7}{29}$, je tedy $ae = 7\frac{7}{29}$.

Příklad 3. 2. 5.

Jsou tři [muži], kteří [dohromady] koupili 20 liber masa. Jeden z nich nakoupil tolik liber, že tento počet liber sám se sebou vynásobený je roven součinu liber, který zbývající dva koupili, tedy ten jeden krát druhý, obě menší množství, první krát druhé, dávají právě 8. Ptáme se na množství liber masa, které každý z nich koupil. (Přeloženo podle [Kat01], úloha XX z 12. 9. 1535)

Úloha vede na soustavu rovnic

$$x + y + z = 20$$
$$y^2 = xz$$
$$xy = 8.$$

Tato úloha vede na rovnici čtvrtého stupně. Vynásobíme-li druhou rovnici $y^2 = xz$ proměnnou y, dostaneme $y^3 = xyz$, resp. $y^3 = 8z$. Odtud získáme vyjádření $z = \frac{y^3}{8}$. Z třetí rovnice si vyjádříme dělením x, tj. $x = \frac{8}{y}$. Vše dosadíme do rovnice $x + y + z = 20$. Celou rovnici $\frac{8}{y} + y + \frac{y^3}{8} = 20$ vynásobíme $8y$ a dostaneme rovnici čtvrtého stupně

$$y^4 + 8y^2 - 160y + 64 = 0.$$

Úlohu lze řešit i jinak. Tartaglia si všiml, že množství masa jsou v souvislém poměru, tj. tvoří geometrickou posloupnost $\{a, ab, ab^2\}$, kde $a = x$ a b je kvocient. V takovém případě je splněna druhá rovnice soustavy a první a třetí rovnice má tvar:

$$a + ab + ab^2 = 20$$
$$a^2 b = 8$$

Ze znalosti součinu menších množství masa lze odvodit $b = \frac{8}{a^2}$. První rovnice má po jednoduchých úpravách tvar:

$$a^4 + 8a^2 + 64 = 20a^3$$

Řešením úlohy je trojice kladných reálných čísel vyjádřená komplikovaně pomocí surdických výrazů. Uveďme proto pouze jejich aproximace:

$$x = 1{,}667669, y = 4{,}768522 \text{ a } z = 13{,}553809.$$

<u>Gerolamo Cardano (1501 – 1576)</u>

Gerolamo Cardano se narodil v roce 1501 v Pavii. Známý byl též pod jménem Jerome Cardan. Byl velice nadané dítě, již ve dvanácti letech studoval Eukledia. Cardano pracoval, stejně jako jeho otec, jako praktický lékař. Působil také jako učitel matematiky v Miláně. Za svůj život napsal několik knih mezi nimi i *Ars Magna* (Veliké umění). Cardano se zde věnuje algebraickým rovnicím prvního až čtvrtého stupně. Více jak dvacet kapitol ze čtyřiceti pojednává o kubických rovnicích. Podle historických pramenů Cardana na metodu řešení kubických rovnic zřejmě navedl Tartaglia, který Cardanovi poslal návod formou básně. Ten však zprvu postup řešení nepochopil, a proto Tartaglia požádal o podrobnější vysvětlení. Cardano začal toto řešení podrobněji zkoumat a Tartaglia si po výměně korespondence uvědomil, že Cardano zná více než on sám a přerušil s ním kontakt. Později, roku 1543, ukázal A. M. Fiore Cardanovi rukopis práce Scipiona dal Ferro, ve kterém byla popsána tato metoda řešení kubických rovnic. Můžeme se tedy domnívat, že objevitelem metody pro řešení kubických rovnic nebyl Tartaglia. S metodou se nejspíše seznámil z již zmíněného rukopisu Scipiona dal Ferro. Následující příklad nalezneme v 37. kapitole Ars Magna nazvané Pravidlo uvedení nepravdivého (*De regula Falsum ponendi*).

Příklad 3. 2. 6.

Nechť ab je úsečka, řekněme [délky] 10, [úkolem je] rozdělit ji na dvě části, aby obdélník [z nich sestavený] byl 40. (Přeloženo z [Car45], str. 287.)

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ xy &= 40 \end{aligned}$$

Cardano si byl vědom toho, že úloha nemá řešení. Pokusil se ovšem použít obvyklý postup. Umocnil součet$(x + y)^2 = 100$ a odečetl od něho čtyřnásobek druhé rovnice

$(4xy = 160)$. Poté řeší soustavu lineárních rovnic. Můžeme si všimnout, že pod odmocninou se nachází záporné číslo.

$$x + y = 10$$
$$x - y = 2\sqrt{-15}$$

Řešením jsou čísla

$$x = 5\text{—}\ 15 \text{ a } y = 5 - \sqrt{-15}$$

vyjádřená pomocí odmocniny ze záporného čísla. Taková čísla nazýval Cardano *quantitas sophistica*.

Cardanova práce obsahuje v jednotlivých kapitolách ilustrační příklady k prezentovaným pravidlům. Hledají se v nich dvě, tři i čtyři neznámá čísla, která mají být v souvislém poměru, jejich součet či rozdíl má být dané číslo apod. Mnoho z nich vede na soustavy polynomiálních rovnic. Na tomto místě uveďme aspoň soustavy

$$\begin{array}{c} x + y = 8 \\ x^3 - y^2 = 10 \end{array} \qquad \begin{array}{c} x + y + z = 10 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{y}{z} \\ xy = 6, \end{array}$$

jimiž lze postupně zapsat 4. úlohu 38. kapitoly, 5. úlohu 39. kapitoly.

Při řešení první z nich Cardano šikovně rozdělil 8 na $\frac{1}{3}$ a $7\frac{2}{3}$. Pro splnění druhého vztahu předpokládal $x = \frac{1}{3} + p, y = 7\frac{2}{3} - p$, kde p je pomocná neznámá. Touto substitucí získal kubickou rovnici v p, která už neobsahuje kvadratický člen.

Závěr

S nejkomplikovanějšími úlohami, té doby, vedoucími na soustavy algebraických rovnic se setkáváme u Mazzinghiho. Dnes bychom řekli, že řešil úlohy pomocí substituce, kdy za neznámé zvolil pomocné neznámé v podobě dvojčlenu, ve tvaru $p \pm \sqrt{q}$. Poté soustavu vedl na tvar odpovídající soustavám obsahujícím jednu rovnici druhého stupně a jednu lineární rovnici, které známe již z dob Mezopotámie. Naopak Canacci i Dardi řešili úlohy podobně jako Fibonacci a vedli je pomocí ekvivalentních úprav na rovnici druhého, popřípadě třetího stupně. U Tartaglii se setkáváme dokonce s úlohami, které vedly na rovnice čtvrtého stupně.

4. Úlohy vedoucí na soustavy polynomiálních rovnic francouzských a německých autorů od 14. stol. do 15. stol.

Období renesance, které začalo v Itálii, se do Francie dostalo až na přelomu 15. a 16. stol. Ovšem již ve 14. století se ve Francii objevuje výrazná osobnost matematiky Nicole Oresme. Patří mezi průkopníky vědecké literatury ve francouzštině. Svým překladem Aristotelových děl významně obohatil francouzskou terminologii. Důležitým počinem byla jeho díla o proporcích. Na jeho knihy a algoritmy poměrů navázalo několik dalších autorů např. Hieronimo de Angest (†1538) nebo jeho současník Nicolas Chuquet, jehož úlohami se budeme zabývat v úvodu kapitoly.

V Německu, Francii a Itálii se paralelně vytvářela algebraická symbolika. V Německu se v 15. stol. setkáváme s označením druhé odmocniny tečkou před číslem, třetí odmocnina se značila třemi tečkami a čtvrtá odmocnina dvěma tečkami. Tečky se postupem času, nejspíše rychlým psaním, změnily na čárky.

V této kapitole se dále seznámíme s významným matematikem a astronomem 15. století, jehož práce pojednávají o základech matematiky, matematikovi, který stanovil trigonometrii jako nezávislé odvětví matematiky spíše než astronomie, jmenuje se Regiomontanus.

<u>Nicolas Chuquet (cca 1430 – 1487)</u>

Nicolas Chuquet byl francouzský lékař, který v roce 1484 napsal první francouzskou knihu věnovanou algebře *Le triparty en la science des nombres* (Věda o číslech ve třech dílech). Jeho kniha ovšem vývoj matematiky 16. stol. výrazně neovlivnila, protože se ztratila a byla vytištěna až roku 1880. Jeho originální myšlenky inspirovaly matematiky pouze prostřednictvím jiných autorů, např. Estienna de La Roche (cca 1470 – cca 1530). První díl je věnován racionálním číslům, posloupnostem a proporcím. Druhá část je věnována iracionálním číslům a třetí rovnicím. U Nicolase Chuqueta se poprvé objevují záporná čísla jako koeficienty, exponenty a řešení rovnic. V některých úlohách záporný výsledek vysvětluje jako dluh. Za jeho vlastní objev můžeme považovat „pravidlo průměrných čísel“. Tvrdí, že řešení $\frac{(a_1+a_2)}{(b_1+b_2)}$ se nachází mezi $\frac{a_1}{b_1}$ a $\frac{a_2}{b_2}$. Tuto průměrnou veličinu využívá k řešení úloh metodou dvou chybných předpokladů. Výpočet kořene je však poměrně pracný. Chuquet zkoumal rovnice a rozdělil je na čtyři „kánony“¨

$$ax^m = bx^{m+n} \qquad ax^m + bx^{m+n} = cx^{m+2n}$$
$$ax^m = bx^{m+n} + cx^{m+2n} \qquad ax^m + cx^{m+2n} = bx^{m+n}.$$

Chuquet podobně jako Pacioli neuvažuje o kořenu $x = 0$. Ve srovnáním s Paciolim je Chuquetovo dílo méně rozsáhlé než Pacioliho „*Summa*“, ale je zde více nových myšlenek. Jeho kniha ovšem vývoj matematiky 16. stol. výrazně neovlivnila. Jeho rukopis nejspíše mnoho matematiků nečetlo a vytištěna byla až roku 1880. Nicolas Chuquet se také významně podílel na rozvoji symboliky. V již zmíněné knize popisuje indicko-arabský způsob zapisování čísel a aritmetické operace. Setkáváme se zde se slovy jako je *plus* a *mois*, které zapisoval symboly $\widetilde{p}$, $\widetilde{m}$. V následující tabulce jsou uvedeny pojmy, které využíval.

neznámá	x	*premier, nombre linear*
druhá mocnina	x^2	*champs*
třetí mocnina neznámé	x^3	*cubics*
čtvrtá ocnina neznámé	x^4	*champs de champs*
záporné číslo		*Ung moins [$\widetilde{m}$]*

Tabulka 4 - Označení přirozených mocnin neznámé dle Chuqueta

Chuquet používal úsporný zápis mocnin neznámé, poprvé se objevily záporné exponenty. Úsporné značení používal i pro odmocniny. Příklad můžeme uvést v následující tabulce.

zápis podle Chuqueta	zápis pomocí moderní symboliky
$.\mathbf{9}.^{\mathbf{0}}$	9
$.\mathbf{10}.^{\mathbf{3}}$	$10x^3$
$.\mathbf{9}.^{\mathbf{2}.m.}$	$9x^{-2}$
$\boldsymbol{R}^{\mathbf{2}}_{\times}.\ \underline{\mathbf{14}.\widetilde{\boldsymbol{m}}.\boldsymbol{R}^{\mathbf{2}}_{\times}.\mathbf{12}.}$ [14]	$\sqrt{13-\sqrt{12}}$

Tabulka 5 - Zápis mocnin neznámé dle Chuqueta

Součástí rukopisu Chuquetova rukopisu *Le triparty en la science des nombres* je rozsáhlá sbírka úloh; v pouhém extraktu publikovaném jako [Chuq81] jich je 166. V úvodních

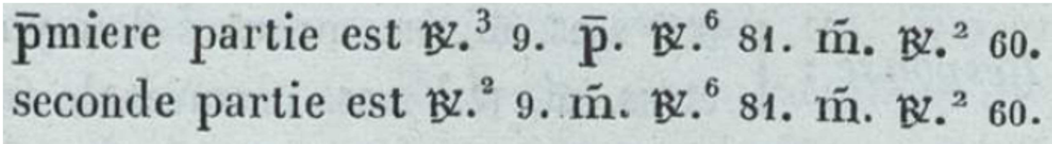
[14] Podtržení výrazu je v dnešní symbolice závorka.

příkladech se požaduje rozdělit dané číslo na dvě či tři části tak, aby byly splněny další podmínky. Řada úloh se týká osob, jejichž obnosy se hledají ze známého součtu obnosů a známých vztahů mezi nimi. Většina úloh však vede pouze na řešení soustav lineárních rovnic (o dvou až pěti neznámých). Soustavami

$$\begin{aligned} x + y &= 20 \\ x^2 - y^2 &= 50 \end{aligned} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{aligned} \frac{2}{3}x &= \frac{3}{4}y \\ xy &= x + y \end{aligned}$$

lze zapsat úlohu X, resp. XV, v níž se dělí číslo 20 na dvě části se známým rozdílem jejich čtverců, resp. ve které se hledají čísla, jejichž dané násobky se rovnají a jejichž součin a součet je stejný.

Sbírka obsahuje klasickou úlohu o nalezení dvou čísel, známe-li jejich součet a součin. Chuquet rozděluje $\sqrt[3]{72}$ na dvě části, které mají součin $\sqrt{60}$, a uvádí řešení


p̄miere partie est ℞.^{3} 9. p̄. ℞.^{6} 81. m̄. ℞.^{2} 60.
seconde partie est ℞.^{2} 9. m̄. ℞.^{6} 81. m̄. ℞.^{2} 60.

(Obrázek 12, převzato z [Chuq81], str. 444.)

tj.

$$\sqrt[3]{9 + \sqrt[6]{81 - \sqrt{60}}}, \qquad \sqrt[3]{9 - \sqrt[6]{81 - \sqrt{60}}}\,.$$

Z Chuquetova postupu plyne, že jako neznámou volil jednu z částí, druhá byla doplňkem neznámé do $\sqrt[3]{72}$. Takto získal z podmínky na součin čísel kvadratickou rovnici. Úloha snad mohla sloužit k procvičení úprav výrazů s odmocninami.

Příklad 4. 0. 1.

Tři obchodníci mají dohromady 10 *escus*, první měl dvojnásobek druhého a 1, třetí měl jako svůj díl druhou odmocninu z dílů dvou ostatních. Kolik měl každý. (Přeloženo podle [Chuq81], str. 444, úloha CXI.)

Označíme-li postupně x, y, z částku prvního, druhého a třetího obchodníka, vede úloha na soustavu:

$$\begin{gathered} x + y + z = 10 \\ x = 2y + 1 \\ z = \sqrt{x + y} \end{gathered}$$

Chuquetův postup není v [Chuq81] uveden, předvedeme proto náš způsob řešení úlohy.

Dosazením z^2 za součet $x + y$ v první rovnici dostaneme kvadratickou rovnici

$$z^2 + z - 10 = 0,$$

jejíž kořen

$$z = \sqrt{10\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$$

představuje částku třetího obchodníka. Druhá a třetí nebo druhá a první rovnice tvoří soustavu lineárních rovnic, jejímž řešením jsou obnosy prvního a druhého obchodníka:

$$x = 7\frac{1}{3} - \sqrt{4\frac{5}{9}}, \qquad y = 3\frac{1}{6} - \sqrt{1\frac{5}{36}}$$

Některé úlohy vedou na neurčité soustavy. Např. se hledají tři čtvercová čísla, jejichž součet je 13, nebo tři čísla, která mají daný součet a která lze zapsat jako třetí mocninu nějakého (racionálního) čísla. (Viz [Chuq81], str. 455.)

Příklad 4. 0. 2.

Ve sbírce úloh patřící k dílu Le *triparty en la science des nombres* řeší úlohu, kterou lze matematizovat jako soustavu dvou polynomiálních rovnic o dvou neznámých

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$$
$$x^2 y = 40.$$

Tu z dnešního pohledu jednoduše vyřešíme například tak, že z druhé rovnice si vyjádříme $x^2 = \frac{40}{y}$. První rovnici upravíme na tvar $x = \frac{5y}{7}$ a umocníme na druhou, což vede na rovnici

$$x^2 = \frac{25y^2}{49}.$$

Nyní můžeme za x^2 dosadit $\frac{40}{y}$ a vznikne nám rovnice o jedné neznámé, po úpravách

$$\frac{392}{5} = y^3,$$

po odmocnění $y = \sqrt[3]{\frac{392}{5}}$. Druhou neznámou x dopočítáme dosazením $x = \frac{2\sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{7}}$.

U Chuqueta se setkáváme s polynomiálními rovnicemi zřídka. Jeho úlohy vedly častěji na soustavy lineárních rovnic.

Regiomontanus (1436 – 1476)

Johannes Müller je nám známý pod jménem Regimontanus. Přestože čerpal převážnou část trigonometrie z arabské literatury a z latinských překladů textů prací al-Battáního nebo např. al-Fargháního, zasloužil se i o vlastní originální důkazy. Regiomontanus je známý svými výsledky z oblasti sférické trigonometrie, které nalezneme v jeho díle *De Triangulis Omnimodis* (O trojúhelnících všelikých knih patero). Sestavil také tabulku pro výpočet odvěsny pravoúhlého sférického trojúhelníku podle vzorce $a = sinc.sinA$, kde a je odvěsna, A je protilehlý úhel a c je přepona trojúhelníku.

Na polynomiální soustavy vedou algebraicky řešené geometrické úlohy v rovině, které jsou součástí prvních dvou knih práce *De triangulis*. Jako příklad můžeme uvést úlohu, kde zná jednu stranu trojúhelníka, výšku na danou stranu a poměr dvou zbývajících stran. Předpokládá, že neznámé jsou a a $b = ra$, kde r je poměr stran. Dále předpokládá, že zná stranu c. Ta je rozdělena na dvě části výškou h. Obecné řešení této úlohy je dáno soustavou rovnic

$$\begin{gathered} a^2 - x^2 = h^2 \\ b^2 - y^2 = h^2 \\ ra - b = 0 \\ x + y = c, \end{gathered}$$

která vede na bikvadratickou rovnici pro a:

$$\frac{(1-r^2)^2}{4c^2}a^4 - \left(\frac{1+r^2}{2}\right)a^2 + \frac{1}{4}c^2 + h^2 = 0.$$

Regiomontanus řešil rovnice podobně jako Al-Chwárizmí. Následujícím příkladem navážeme na výše uvedený postup.

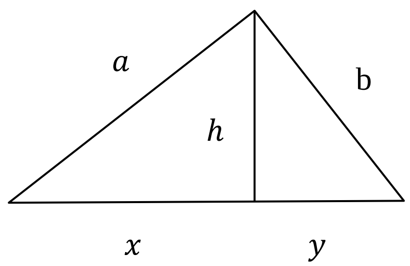
Příklad 4. 0. 3.

Řeš problém s trojúhelníkem s daty $h = 125, c = 250, r = .8165$.

(Přeloženo podle [Coo97], cvičení 14.1, str. 319)

Dle předpisu úloha vede na soustavu rovnic

$$\begin{gathered} a^2 - x^2 = 125^2 \\ b^2 - y^2 = 125^2 \\ 0{,}8165a - b = 0 \\ x + y = 250. \end{gathered}$$



Obrázek 13 - Grafické znázornění př. 4. 0. 3.

To vede na rovnici

$$44{,}442955568025 \times 10^{-8}a^4 - 0{,}833336125a^2 + 31{,}250 = 0.$$

Provedeme-li substituci $u = \frac{a}{100}$ dostaneme

$$44{,}442955568025u^4 - 8333{,}36125u^2 + 31{,}250 = 0,$$

po zkrácení

$$u^4 - 187{,}5u^2 + 703{,}149 = 0.$$

Kvadratická rovnice $s^2 - 187{,}5s + 703{,}149 = 0$, kde $u^2 = s$ dává přibližnou hodnotu kořene

$$s = 3{,}83.$$

Z toho plyne, že $u = \sqrt{3{,}83}$, tj. $u = 1{,}95$. Provedeme resubstituci a zjistíme, že přibližná hodnota je $a = 195$, b dopočítáme z rovnice $0{,}8165a - b = 0$, tj. přibližně $b = 159{,}218$. Hodnoty pro neznámé x, y můžeme dopočítat pomocí Pythagorovy věty.

$$195^2 = 125^2 + x^2$$

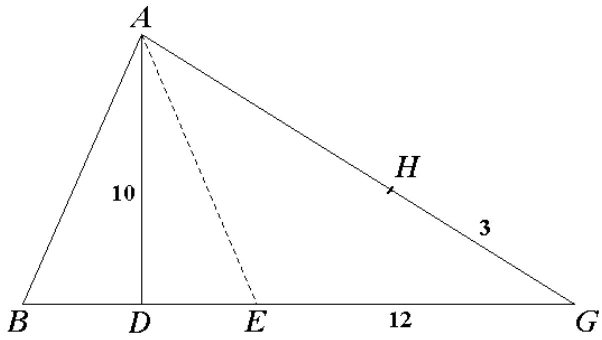
Z výše uvedené rovnice dostaneme hodnotu pro $x = 40\sqrt{14}$. Nyní již jednoduše z rovnice $x + y = 250$ dopočítáme přibližnou hodnotu pro $y = 100{,}334$. Pravdivost ověříme zkouškou.

Příklad 4. 0. 4.

Je dán trojúhelník ABG, jehož rozdíl stran AB a AG se označí HG, kolmice AD rozdělí stranu na dvě části BD a DG, nechť je jejich rozdíl EG: Jsou dány rozdíly a samotná kolmice je dána. Požaduje se určit všechny strany trojúhelníka.

Skrze umění věci a census (čtverec věci) je úloha vyřešena. Buď dán rozdíl stran 3, rozdíl úseků 12 a kolmice 10. (Přeloženo podle [Bal60], str. 168, jde o 23. větu druhé knihy *De triangulis*.)

Situace popsaná zadáním je znázorněna na obrázku na následují straně.



Obrázek 14 - Grafické znázornění př. 4. 0. 4.

Hledané délky stran trojúhelníka označíme x = |BG|, y = |AG|, z = |AB|. Rozdíl délek stran AB a AG je |HG| = 3, tj. $y - z = 3$, |DG| – |BD| = |EG| = 12, je tedy |DE| = |BD| a |BG| lze vyjádřit jako součet 2·|BD| + 12, tj. $x = 2u + 12$, jestliže označíme u = |BD|. Strany trojúhelníka vyhovují soustavě

$$y - z = 3$$
$$x = 2u + 12$$
$$z^2 = u^2 + 10^2$$
$$(12 + u)^2 + 10^2 = y^2$$

Uveďme Regiomontanovo řešení doplněné o symbolický přepis.

Položím pro celou základnu rem a pro součet stran [AG a AB] 4 res,

x = |BG|, |AG| + |AB| = $4x$,

protože poměr základny k sečteným stranám je jako HG ke GE, tj. jako je 1 ke 4.

$$\frac{y - z}{2u - x} = \frac{1}{4}$$

Proto je BD ½ rei minus 6, ale AB je 2 res bez 3/2.

$$u = \frac{x}{2} - 6, \quad z = 2x - \frac{3}{2}$$

Vynásobí se AB se sebou, výsledkem je 4 census a 2 ¼ bez 6 rebus

$$\left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4x^2 + 1\frac{1}{2} - 6x$$

Také BD dělá se sebou ¼ census a 36 minus 6 rebus

$$\left(\frac{x}{2} - 6\right)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 36 - 6x$$

Toto přidám ke čtverci 10, což je 100.

[Výraz] sečtený dohromady, ¼ census a 136 minus 6 rebus, je zřejmě roven 4 census a 2 ¼ bez 6 rebus.

$$\frac{1}{4}x^2 + 136 - 6x = 4x^2 + 1\frac{1}{2} - 6x$$

Obnoví se tedy to, co chybí, a odebere se na obou stranách stejné, kterýmžto způsobem máme několik census rovno číslu

$$3\frac{3}{4}x^2 = 133\frac{2}{4}$$

odkud budeme znát rei

$$x = \sqrt{\frac{107}{3}}$$

a odtud známe tři strany trojúhelníka.

$$x = \sqrt{\frac{107}{3}}, \quad y = \frac{1}{6}\left(9 + 4\sqrt{321}\right), \quad z = \frac{1}{6}\left(4\sqrt{321} - 9\right).$$

(Přeloženo podle [Bal60], str. 268.)

Dnes bychom soustavu

$$\begin{gathered} y - z = 3 \\ x = 2u + 12 \\ z^2 = u^2 + 10^2 \\ (12 + u)^2 + 10^2 = y^2 \end{gathered}$$

mohli řešit tak, že bychom si nejprve vyjádřili $z = \sqrt{u^2 + 100}$ a $y = \sqrt{u^2 + 24u + 244}$. Takto vyjádřené neznámé dosadíme do rovnice $y - z = 3,$ tj.

$$\sqrt{u^2 + 24u + 244} - \sqrt{u^2 + 100} = 3.$$

Umocněním na druhou dostaneme rovnici

$$-2\sqrt{(u^2 + 100)(u^2 + 24u + 244)} = -335 - 24u - 2u^2,$$

kterou opět umocníme dvěma

$$4(u^2 + 100)(u^2 + 24u + 244) = (-335 - 24u - 2u^2)^2,$$

tj.

$$\begin{aligned} 4u^4 + 96u^3 + 1376u^2 + 9600u + 97600 \\ = 4u^4 + 96u^3 + 1916u^2 + 16080u + 112225. \end{aligned}$$

Dostaneme kvadratickou rovnici

$$540u^2 + 6480u + 14625 = 0,$$

kterou vyřešíme pomocí diskriminantu, $u = \frac{\sqrt{\frac{107}{3}}}{2} - 6$. Nyní můžeme jednoduše dopočítat neznámé x, y, z.

Regiomontanus zvolil stranu BG jako neznámou (res) a šikovně vyjádřil stranu AB a úsek BD v závislosti na ní, úloha pak vedla pouze na řešení jedné (ryze kvadratické) rovnice o jedné neznámé. V úvodní Regiomontanově úvaze není ihned zřejmé, proč je součet dvou menších stran čtyřnásobkem základny. Stanovení součtu menších stran v závislosti na zvolené neznámé možná předcházela následující myšlenka. Dvěma způsoby vyjádříme délku výšky na základnu BG.

$$|AG|^2 - |DG|^2 = |AB|^2 - |DB|^2$$

Přičtením $DG^2 - AB^2$ dostaneme rovnost rozdílů čtverců

$$|AG|^2 - |AB|^2 = |DG|^2 - |DB|^2,$$

které lze upravit na rovnost součinů známých rozdílů a neznámých součtů

$$(|AG| - |AB|)(|AG| + |AB|) = (|DG| - |DB|)(|DG| + |DB|)$$

$$3(|AG| + |AB|) = 12(|DG| + |DB|).$$

Odtud je

$$|AG| + |AB| = 4|BG|.$$

Vztah mezi základnou a součtem zbývajících stran použil pro vyjádření délky strany AB v závislosti na zvolené neznámé. Také |BD| zapsal jako výraz ve zvolené neznámé. V pravoúhlém trojúhelníku ABD je známá odvěsna AD, což je zároveň výška daného trojúhelníka ABG, zbývající strany jsou závislé na neznámé. Z Pythagorovy věty se proto snadno vypočte její hodnota, tj. délka základny a následně také délky zbývajících stran.

Jak již jsem zmiňovala výše, matematika se vyvíjela současně v Německu, Itálii a Francii. Všechny typy úloh vedly nakonec k podobnému postupu, kdy autor řešil úlohy pomocí substituce. Pomocnou soustavu následně vedl na rovnice druhého, třetího i čtvrtého stupně, které poté vyřešil pomocí již ustálených postupů.

5. Závěr

Úlohy, které bychom dnes zapsali soustavou polynomiálních rovnic, nalezneme na území Evropy již začátkem 1. století. Zprvu se jedná o soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, kde alespoň jedna rovnice je druhého stupně. Na počátku 14. stol. se u Mazzinghiho setkáváme již s úlohami vedoucími na soustavy tří rovnic o třech neznámých, kde je opět alespoň jedna rovnice druhého stupně. Úlohami vedoucími na soustavy rovnic s větším počtem neznámých, se zabýval až Tartaglia v 16. století. Se složitějšími úlohami se setkáváme tedy až u renesančních matematiků nejen v Itálii, ale i v Německu a Francii.

Je třeba zmínit, že většina úloh řešených ve středověké Evropě byla převzata od arabských matematiků. Jako příklad můžeme uvést Fibonacciho práci *Liber abaci*. Právě v této knize řeší Leonardo úlohy, kterými se dříve zabýval například Abu Kamil.

Pro úlohy, které vedou na soustavy polynomiálních rovnic, byly motivem geometrické útvary. Nejen v Gerbertově *Geometrii* se setkáváme s úlohami, které můžeme graficky znázornit. Jedná se například o výpočet výšky v heronském trojúhelníku, nebo výpočtů odvěsen v pythagorejském trojúhelníku. Např. Savasorda řešil úlohy, které můžeme graficky znázornit pomocí obdélníku. Dalším typem úloh je rozdělení nějakého celku na části. Většinou se jedná o rozdělení čísla 10 na dvě a více části.

Způsoby řešení výše uvedených úloh nejsou jednoznačně dané, ale opakují se zde určité postupy, které lze považovat za jednoduché algoritmy. Takovým postupem je například pomocí ekvivalentních úprav vést soustavu rovnic na kvadratickou rovnici, kterou již dokážeme vypočítat. Podobný postup je i u soustav, kde se nachází tři rovnice a tři neznámé. Takovéto úlohy ovšem mohly vést na kubické rovnice. S řešením kubických rovnic se setkáváme až v 16. století u Gerolama Cardana. Další možností řešení bylo, že se neznámé vyjádří v závislosti na pomocné neznámé či pomocných neznámých např. v podobě dvojčlenu $p \pm \sqrt{q}$. Substitucí vedl řešitel úlohu na jednodušší tvar soustavy, který dokázal vyřešit. Tento postup nalezneme např. u Mazzinghiho.

Přestože úlohy, které dnes můžeme zapsat jako soustavu algebraických rovnic, najdeme již ve starých civilizacích jako Egypt nebo Mezopotámie, ustálené postupy eliminace neznámých v Evropě nalezneme až v 2. polovině 17. století.

Významným zlomem v dějinách matematiky bylo období novověku. Již počátek 16. století můžeme nazývat obdobím moderní algebry. François Viète (1540 – 1603) jako první užívá označení konstanty a proměnných pomocí písmen. Dále se setkáváme s velikány jako Pierre de Fermat (1601 – 1665) nebo René Descartes (1596 – 1650), kteří položili základy analytické geometrii.

5.1. Metody eliminace neznámých

První známou metodu eliminace neznámé ze dvou rovnic vyššího stupně rozpracoval někdy před rokem 1638 Pierre de Fermat v práci *Novus secundarum et ulterioris radicum in analyticis usus.* Na rovnice o dvou, resp. *n* neznámých nahlížel jako na rovnice o jedné neznámé, např. *y*:

$$a_0y^m + a_1y^{m-1} + \cdots + a_{m-1}y + a_m = 0,$$
$$b_0y^n + b_1y^{n-1} + \cdots + b_{n-1}y + b_n = 0.$$

Odečtením separoval absolutní členy, které následně vydělil druhou stranou rovnice obsahující polynom aspoň prvního stupně. Vzniklé podíly jsou pro obě rovnice rovny 1, proto jsou si rovny i podíly:

$$\frac{-a_m}{a_0y^m + a_1y^{m-1} + \cdots + a_{m-1}y} = \frac{-b_n}{b_0y^n + b_1y^{n-1} + \cdots + b_{n-1}y}$$

Tím se dostane rovnice, která má v neznámé *y* stupeň o jedna menší, než je větší ze stupňů výchozích dvou rovnic. V dalším kroku se pro snížení stupně použije získaná rovnice a ta z daných rovnic, která má nižší stupeň. Opakováním postupu lze dojít k rovnici, která už neznámou *y* neobsahuje, je tedy rovnicí pouze o jedné neznámé, resp. o *n* – 1 neznámých. Rovnice, ve které je neznámá *y* eliminována, udává podmínku na koeficienty výchozích rovnic, při jejímž splnění může mít daná soustava řešení. Tato podmínka se později nazývala *rezultant*.

Podobný postup aplikovaný ovšem na nejvyšší mocniny neznámé použil v druhé části prvního dílu *Obecné aritmetiky* (Arithmetica univeralis) Isaac Newton (1643 – 1727). Stejnou metodu publikoval ve druhém vydání Descartesovy *Geometrie* Johann Hudde (cca 1640 – 1704) a v roce 1748 Euler v *Introduction in analysin infinitorum*.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) byl dalším z matematiků, kteří přispěli k problematice eliminace. Jeho postup, který odpovídá Sylvesterem roku 1840 uveřejněné tzv. dialytické metodě, nebyl publikován, zůstal v rukopisné podobě pod názvem *De tollendis incognitis*. Uvažuje rovnice

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \ldots = 0,$$
$$l + mx + nx^2 + px^3 + qx^4 \ldots = 0.$$

Bez dalšího vysvětlení píše, že „stačí násobit *x* a bude“

$$\begin{array}{l}
0 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \\
\quad + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 \\
\qquad +ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + ex^6 \\
\qquad\quad +ax^3 + bx^4 + cx^5 + dx^6 + ex^7 \\
l + mx + nx^2 + px^3 + qx^4 \\
\quad +lx + mx^2 + nx^3 + px^4 + qx^5 \\
\qquad +lx^2 + mx^3 + nx^4 + dx^5 + qx^6 \\
\qquad\quad +lx^3 + mx^4 + nx^5 + px^6 + qx^7
\end{array}$$

Dnes víme, že rezultant, tj. podmínka pro existenci společných kořenů daných rovnic čtvrtého stupně je dána vztahem

$$\begin{vmatrix}
a & b & c & d & e & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & b & c & d & e & 0 & 0 \\
0 & 0 & a & b & c & d & e & 0 \\
0 & 0 & 0 & a & b & c & d & e \\
l & m & n & p & q & 0 & 0 & 0 \\
0 & l & m & n & p & q & 0 & 0 \\
0 & 0 & l & m & n & p & q & 0 \\
0 & 0 & 0 & l & m & n & p & q
\end{vmatrix} = 0.$$

Postup se snadno zobecní pro rovnice jiných stupňů.

Dle [Kno74] používal Leibniz ještě metodu eliminace neznámé násobením pomocným polynomem $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$. Tento postup je předchůdcem v roce 1764 publikované metody v pojednání E. Bézouta *Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues*. Další vývoj směřoval k rezultantům více než dvou rovnic.

5.2. Užití polynomiálních rovnic na ZŠ a SŠ

Na závěr práce bych chtěla zmínit možnosti využití úloh vedoucích na soustavy polynomiálních rovnic ve výuce na ZŠ a SŠ. Podle Rámcově vzdělávacího programu pro základní vzdělávání nalezneme ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace na 2. stupni pouze lineární rovnice a soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Rovnice druhého nebo dokonce vyššího stupně bychom mohli do výuky zařadit pouze výjimečně jako rozšířené učivo pro nadané žáky. Žáci na SŠ podle RVP pro SŠ analyzují a řeší problémy, v nichž se aplikuje řešení lineárních a kvadratických rovnic a jejich soustav. Vybrané úlohy z této diplomové práce by bylo tedy možné využít k rozvoji logického myšlení a procvičení soustav dvou rovnic o dvou neznámých, kde alespoň jedna rovnice je rovnicí druhého řádu. Myslím si, že tyto úlohy nelze zařadit do základního učiva. Se soustavami n rovnic vyšších řádů o n neznámých se můžeme setkat na matematických středních školách nebo na gymnáziích či jako s rozšířeným učivem na SŠ bez matematického zaměření. Řešení takovýchto úloh se plně věnuje až na vybraných vysokých školách spíše technického směru.

Resumé

This thesis is devoted to problems solved in Europe from the 5^{th} century to the 16^{th} century, which we could write today as a system of polynomial equations. The methods of elimination of unknown quantities and their marking are described.

The thesis is divided into four parts in chronological sequence according to years when works, which contain these problems, were created. There is general summary of mediaeval mathematics in the first chapter. The second chapter deals with problems which were solved by mathematicians from the first half of 13^{th} century (e.g. Fibonacci, Gerbert, Nemore). The remaining chapters are divided according to origin of authors and include period from 14^{th} to 16^{th} century (e.g. Italy - Dardi, Tartaglia, Germany - Regiomontanus, France - Chuquet).

Seznam použité literatury

[Bal60] Ball, W. W., The Mathematics of the Renaissance. In: *A Short Account of the History of Mathematics*. New York : Dober Publishions, 1960, s. 165 – 200. ISBN 0-486-20630-0.

[Beč01] Bečvář, J. Leonardo Pisánský – Fibonacci. In: *Matematika ve středověké Evropě*. Praha : Prometheus, 2001, s. 264–339. ISBN 80-7196-232-5. Dějiny matematiky, sv. 19.

[Beč02] Bečvář, J., Algebra v 16 – 17 stol. In: *Matematika v 16. a 17. století.*, Praha: Prometheus, 1999, s. 161 – 235. ISBN 80-7196-150-7. Dějiny matematiky, sv. 12.

[Beč03] Bečvář, J., Gerbert z Aurillacu – Silvestr II. In: *Matematika ve středověké Evropě*. Praha : Prometheus, 2001, s. 184 - 229. ISBN 80-7196-232-5.

[Bub99] Bubnov, N., *Gerberti, postea Silvestri II, papae, Opera mathematica (972–1003).* Berolini : R. Friedländer & Son, 1899.
Dostupné z: http://voluwww.archive.org/stream/abv8574.0001.001.umich.edu

[Car45] Cardano, H., *Ars magna*. Norimberk, 1545. Dostupné z: <http://www.filosofia.unimi.it/cardano/testi/operaomnia/vol_4_s_4.pdf>

[Chuq81] Problèmes numériques faisant suite et servant d'application au Triparty en la science des nombres. *Bulletino di biblografia e storia delle scienze mathematiche e fisiche di Boncompagni*, 1881, **14**, s. 417 – 460.

[Cur02] Curtze, M., *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance*. Leipzig : B. G. Teubner, 1902.

[Coo97] Cooke, R., *The history of Mathematics: A Brief Course*, Wiley–Interscience, New York, 1997. ISBN 0-471-18082-3.

[Edw74] Edward, G., Algebraic Propositions from the Treatise On Given Numbers. In: *A Source Book in Medieval Science*, Cambridge : Harvard University Press, 1974, s. 111 – 114.

[Ern05] Ernestová, M. Soustavy algebraických rovnic a jejich řešení ve starověku a středověku : disertační práce. Praha : Univerzita Karlova, Fakulta Matematicko-fyzikální, 2005.

[Fra10] Franci, R., *The History of Algebra in Italy in the 14th and 15th Centuries. Some Remarks on Recent Historiography*. Actes d'historia de la ciencia i de la tecnica. 2010, **3**(2), 175 – 194.

[Fra88] Franci, R., *Antonio de´Mazzinghi: An Algebraist of the 14th Century*, Historia mathematica 15 (1988), ISSN 0315-0860.

[God67] Godofredus, F., *Anicii Manlii Torquati Severini Boetii De institutione arithmetica libri duo, De institutione musica libri quinque*. Lipsiae : B. G. Teubner, 1867.

[Høy98] Høyrup, J., Jacopo de Florentia, *Tractatus algorismi* (1307), the chapter on algebra. Filosofi og videnskabsteoripå Roskilde universitetscenter. 3. Række : Preprints og repritns 1998, Nr. 1.

[Høy96] Høyrup, J., The Four Sides and the Area. Oblique Light on the Prehistory of Algebra. In: *Vita mathematica. Historical Research and Integration with Teaching.* Washington: Mathematical Association of America, 1996, s. 45 –65. Dostupné z:<http:// akira.ruc.dk/~jensh/Publications/4sides_manuscript.pdf >

[Hee10] Heeffer, A., Algebraic partitioning problems from Luca Paccioli's Perugia manuscript (Vat. Lat. 3129). In: *Sources and Commentaries in Exact Sciences*. (2010), **11**, 3–52.
Dostupné z: <http://logica.ugent.be/albrecht/thesis/Pacioli.pdf>

[Hei12] Heiberg, J.L., Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia, vol. IV. Heronis definitiones cum variis collectionibus Heronis quae feruntur Geometrica, B. G. Teubneri, Lipsko, 1912. Dostupné z <http://gallica.bnf.fr/>

[Juš78] Juškevič, A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, vyd. 1, Praha: Academia, 1978.

[Kat01] Katscher, F., *Die kubischen Gleichungen bei Nicolo Tartaglia*. Die relevanten Textstellen aus seinen „Quesiti et inventioni diverse“ auf deutsch übersetzt und kommentiert. Wien : Verlag der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, 2001.

[Kat98] Katz, V. J., *A History of Mathematics*. Amsterdam : Addison Wesley Higher, 1998

[Kno74] Knobloch, E., Unbekannte Studien von Leibniz zur Eliminations- und Explikationstheorie, *Archive for History of Exact Sciences,* 1974, **12**, s. 142 – 173.

[Rad95] Radford, L., Before the Ohter Unknowns Were Invented: Didactic Inquiries on the Methods ond Problems od Mediaeval Italian Algebra, For the Learning of Mathematics 15 (1995), ISSN 0228-0671.
Dostupné z <http://www.luisradford.ca/pub/109_FLM95final_version.pdf >.

[RVP1] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. 126 s. [cit. 28. 3. 2013].Dostupné z: <http://www.vuppraha.cz/wpcontent/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf>

[RVP2] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. [cit. 28. 3. 2013]. Dostupné z: <http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPG-2007-07_final.pdf >

[Sig02] Sigler, L. E. *Fibonacci's Liber Abaci: A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York : Springer, 2002. 636 s. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. ISBN 978-0-387-40737-1

[Vyš62] Vyšín, J.,*Metodika řešení matematických úlohy*. vyd.1., Matematická knižnice, sv. 1. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1962;

[Wae85] Waerden, B., *A History of Algebra*. Berlin : Springer Verlag, 1985.

[wwwIt] Algebra ed equazioni algebriche nel Rinascimento [online]. [cit. 31. 7. 2002] Dostupné z: <http://webscuola.tin.it/risorse/divinaprop/opera/algebra.shtml>

[wwwMac] The History of Mathematics archive [online], [cit. 3. 1. 2013]., Dostupné z :<http://www-history.mcs.st-and.*ac*.uk/>

[wwwHee] Heeffer, A., Sources in the history of algebra: arithmetical and recreational problems [online]. 2004. [cit. 17. 2. 2013]. Dostupné z: <http://logica.ugent.be/albrecht/problems.php?code=ATF>

[wwwHM] John J. O'Conor, Edmund F. Robertson. *The MacTutor History of Mathematics archive* [on line]. St Andrews : Mathematical Institute. Poslední změna červenec 2012 [cit. 7. 2. 2013] Dostupné z : <http://www-history.mcs.st-and.*ac*.uk/>

[wiki] The Free Encyclopedia, [online],[cit. 3.1. 2013]., Dostupné z :<http://en.wikipedia.org/wiki/Boethius>

Seznam tabulek

Seznam obrázků