

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky
Obor: Matematika

NURBS objemové parametrizace
NURBS volume parameterizations

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vypracoval: Bc. Petr Anděl
Vedoucí práce: Ing. Bohumír Bastl, Ph.D.
Rok: 2013

:::ZADÁNÍ:::

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím literatury uvedené v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

V Plzni dne

.....

Petr Anděl

Poděkování

Velmi rád bych poděkoval vedoucímu diplomové práce Ing. Bohumíru Bastlovi, Ph.D. za odborné vedení práce, trpělivost, ochotu a za hodnotné rady, které mi poskytl.

Petr Anděl

Název práce: **NURBS objemové parametrizace**

Autor: Bc. Petr Anděl

Obor: Matematika

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: Ing. Bohumír Bastl, Ph.D.

Abstrakt: Tato diplomová práce se zabývá NURBS objemovými parametrizacemi a souvisejícími algoritmy. Obsahuje shrnutí základních definic a vlastností NURBS objektů. Především pak možnostmi řešení popisu NURBS objemů a optimalizací řídicí sítě. Stěžejní částí je konstrukce rotačních NURBS objemů určených vstupní křivkou a osou rotace a konstrukce zobecněných rotačních objemů určených uzavřenou NURBS oblastí. Jsou zde uvedeny nové algoritmy, které jsou demonstrovány na příkladech. V závěru je popsán balíček NURBSobjem, který obsahuje funkce používající algoritmy ze stěžejní části implementované v programu Mathematica.

Klíčová slova: NURBS objekty, B-spline objekty, Sweep objem, Optimalizace řídicí sítě, Rotační tělesa, Řídicí křivka, Injektivní parametrizace, Transverzální kužele, Kotransverzální kužele

Title: **NURBS volume parameterizations**

Author: Bc. Petr Anděl

Supervisor: Ing. Bohumír Bastl, Ph.D.

Abstract: This diploma thesis deals with NURBS volume parameterizations and related algorithms. It reviews fundamental definitions and features of NURBS objects, especially the various solutions of description of NURBS volumes and the optimization of the control net. The main part focuses on the construction of NURBS volume of revolution given by an initial curve and axis of rotation and on the construction of a generalized NURBS volume of revolution given by a closed NURBS domain. The new algorithms are presented in several examples. The package NURBSobjem, which contains functions using algorithms from the main part, which were processed by the program Mathematica, is described at the end of the thesis.

Key words: NURBS object, B-spline object, Swept volume, Optimization of control net, Volume of revolution, Guiding curve, Injectivity of parameterization, Transverse cones, Cotransverse cones

Obsah

| | |
|--|-----------|
| Úvod | 8 |
| 1 Objekty geometrického modelování - NURBS | 10 |
| 1.1 NURBS křivky | 10 |
| 1.2 NURBS plochy | 13 |
| 1.3 NURBS objemy | 15 |
| 2 NURBS objemy vzniklé „tažením“ ploch | 19 |
| 2.1 Vstupní data | 19 |
| 2.2 Řídící křivky a vlivové funkce | 20 |
| 2.2.1 Řídící křivka | 20 |
| 2.2.2 Vlivová funkce | 21 |
| 2.3 Řízení tvaru „tažené“ plochy a optimalizační podmínky | 23 |
| 2.3.1 Ortogonální podmínka a minimalizace rotace | 23 |
| 2.3.2 Možnosti řízení tvaru „tažené“ plochy | 24 |
| 2.3.3 Regularita | 26 |
| 2.3.4 Shrnutí – cílová funkce | 27 |
| 3 Optimalizace řídicí sítě | 29 |
| 3.1 Optimalizace 2D řídicí sítě | 29 |
| 3.1.1 Postačující podmínka pro injektivní B-spline parametrizaci | 30 |
| 3.1.2 Optimalizační metoda | 33 |
| 3.2 Optimalizace 3D řídicí sítě | 37 |
| 3.2.1 Postačující podmínka pro injektivní B-spline parametrizaci | 37 |
| 3.2.2 Optimalizační metoda | 40 |
| 3.2.3 Výsledný optimalizační algoritmus | 43 |
| 4 Rotační tělesa a využití rotace okolo osy | 44 |
| 4.1 Rotační tělesa | 44 |
| 4.1.1 NURBS objem vzniklý rotací NURBS oblasti | 46 |
| 4.1.2 Rotační objem konstruovaný z jednotlivých rovnoběžkových NURBS oblastí | 53 |
| 4.1.3 Srovnání | 58 |
| 4.2 Zobecněné rotační NURBS objemy | 60 |
| 4.2.1 Konstrukce s využitím rotace | 61 |
| 4.2.2 Konstrukce objemu po jednotlivých NURBS oblastech | 65 |
| 4.2.3 Srovnání | 67 |

| | |
|-----------------------------|-----------|
| 5 Balíček NURBSobjem | 68 |
| Závěr | 70 |
| Literatura | 71 |

Úvod

Vývoj NURBS započal v 60. letech 20. století, kdy konstruktéři a designéři dopravních společností potřebovali přesně reprezentovat volné tvary jako trupy lodí, vnější povrchy letadel a karoserie automobilů. K průkopníkům tohoto vývoje patřili páni P. Bézier, P. de Casteljau a S. A. Coons, kteří se významně podíleli na vzniku Bézierových křivek a ploch a Coonsových plátů. Jelikož jsou NURBS objekty zobecněné Bézierovy objekty, určili tito pánové nový směr v geometrickém modelování. NURBS objekty se v dnešní době používají především v designovém a počítačovém modelování a také v isogeometrické analýze. Jelikož jsou možnosti využití NURBS objektů rozsáhlé a již v bakalářské práci jsem se věnoval NURBS křivkám a oblastem, zvolil jsem si pro diplomovou práci téma NURBS objemové parametrizace. Zaměřil jsem se především na využitelnost a praktičnost dané problematiky.

V první kapitole se zaměřím především na základní pojmy, vlastnosti a chování NURBS křivek, ploch a objemů. Bude se jednat pouze o základní informace, které jsou hlouběji vysvětleny v mé bakalářské práci. Ve druhé kapitole se budu věnovat speciální třídě NURBS objemů, které vzniknou tažením NURBS oblasti do prostoru. Stanovím několik základních podmínek a kritérií pro konstrukci tohoto NURBS objemu. Ve třetí kapitole se budu věnovat problematice optimalizace řídicí sítě a její konstrukce. Půjde stejně jako v předchozí kapitole o prezentaci již fungujících metod a algoritmů. Předposlední kapitola je stěžejní, kde navrhnu metody pro konstrukci NURBS objemů. Půjde o nalezení NURBS objemové parametrizace za předpokladu, že vstupem bude NURBS křivka rotující okolo osy otáčení. Druhá část této kapitoly bude věnována nalezení parametrizace NURBS objemů, kde vstupními daty bude NURBS oblast ohraničující tento objem. Pro každou část navrhnu konstrukční algoritmus těchto NURBS objemů, který bude prezentován na příslušném příkladu. V poslední kapitole popíši balíček funkcí založených na algoritmech popsanych ve čtvrté kapitole.

Hlavním cílem mé diplomové práce bude najít a zkonstruovat algoritmy, které pomocí vstupní NURBS křivky a osy rotace naleznou danou parametrizaci NURBS objemu, jehož plášť vznikl právě danou rotací křivky okolo osy a dále pak parametrizaci NURBS objemu, kde vstupem bude jeho uzavřená NURBS oblast. Půjde především o popis daného problému (vstupu), jeho analýzu, teoretické a praktické řešení, které prakticky demonstrujeme na příkladech a grafických výstupech, a eventuální optimalizaci. Nalezené algoritmy budou zaimplementovány do programu Mathematica, jejichž shrnutím získám balíček obsahující metody k vytvoření popisu NURBS objemu z určených vstupních dat. Dalšími cíli této práce je seznámení čtenářů se základy NURBS objektů, které jsou nezbytné pro další kapitoly zabývající se konstrukcí NURBS objektů, především objemů. Dále pak prezentace již známých metod

pro vytváření NURBS objemů a možnosti optimalizace řídicí sítě a jejich analýza.

Kapitola 1

Objekty geometrického modelování - NURBS

Pro práci s objekty geometrického modelování si definujeme několik základních pojmů, které jsou úzce spjaty s prací v následujících kapitolách. Klíčový pojem, který se zde bude hojně vyskytovat a na kterém bude tato práce stát, je NURBS = Non-Uniform Rational B-Spline. V jednotlivých sekcích si zdefinujeme NURBS křivku, plochu a objem. Uvedeme si jejich několik základních vlastností a chování pro určité situace doplněné názornými ukázkami.

1.1 NURBS křivky

Definice 1. *Mějme dány polohové vektory vrcholů řídicího polygonu $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_p$, jejich příslušné váhy w_0, \dots, w_p , kde $w_i > 0$, a vektor parametrizace $\mathbf{U} = (u_0, \dots, u_m)$. NURBS křivku stupně n definujeme vztahem*

$$\mathbf{Q}(u) = \frac{\sum_{i=0}^p w_i \mathbf{P}_i N_i^n(u)}{\sum_{i=0}^p w_i N_i^n(u)}, \quad (1.1)$$

kde N_0^n, \dots, N_p^n jsou B-spline bázové funkce stupně n pro vektor parametrizace \mathbf{U} .

Vektor parametrizace (nebo také vektor uzlů) je posloupnost parametrů u_i zapsaná obvykle ve tvaru

$$\mathbf{U} = (a, \dots, a, u_{n+1}, \dots, u_{m-n-1}, b, \dots, b),$$

kde uzly a bývají většinou nulové (záleží na volbě) a jejich počet je shodný s počtem uzlů b , a to $n + 1$. Pro jednotlivé uzly platí nerovnost

$$a < u_i \leq u_{i+1} < b.$$

Takto zapsaný vektor parametrizace nazýváme *neperiodickým* a jeho bázové funkce budou interpolovat okraje intervalu parametru. Pokud bude navíc platit $u_{i+1} - u_i =$

konst, kde $n \leq i \leq m - n - 1$, pak budeme hovořit o *uniformní* parametrizaci. V opačném případě o *neuniformní* parametrizaci.

B-spline bázové funkce jsou po částech polynommické funkce, které mají co možná nejvyšší řád spojitě derivate a jsou definovány rekurentním vztahem

$$n = 0 : N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{pro } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$n > 0 : N_i^n(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+n} - u_i} N_i^{n-1}(u) + \frac{u_{i+n+1} - u}{u_{i+n+1} - u_{i+1}} N_{i+1}^{n-1}(u),$$

kde $u \in \langle u_0, u_m \rangle$. Jestliže bude nějaká část z (1.2) obsahovat nulový jmenovatel, pak celý tento zlomek považujeme za nulový.

Poznámka 2.

- Počet bázových funkcí je $p+1$, proto parametr i může nabývat pouze maximální hodnoty p . Z (1.2) lze odvodit rovnost $p + 1 + n + 1 = m + 1$, což nám udává vztah mezi stupněm polynomu, počtem bázových funkcí a počtu uzlů ve vektoru parametrizace.

Poznámka 3. Vlastnosti bázových funkcí:

- Nezáporná hodnota: $N_i^n(u) \geq 0$ pro $\forall u, i, n$,
- Jednotkový součet: $\sum_{i=0}^p N_i^n(u) = 1$ pro $u \in \langle u_0, u_m \rangle$,
- Lokální support: $N_i^n(u) \neq 0$ pro $u \in \langle u_i, u_{i+n+1} \rangle$.

Bázové funkce patří obecně do třídy C^{n-1} , což znamená, že jsou spojitě až do $(n - 1)$ -ní derivate. To ale platí pouze za předpokladu, že vektor parametrizace neobsahuje násobné uzly, které snižují v daném místě řád derivate. Pro q -násobný uzel bude třída spojitosti daných bázových funkcí C^{n-q} .

Jak již vidno z názvu NURBS, jedná se o B-spline křivku (popř. plochu nebo objem) v projektivním rozšíření Euklidovského prostoru. Pro řídicí body $\mathbf{P}_i = (x_i, y_i, z_i)$ a příslušné váhy w_i zavádíme tzv. *projektivní řídicí body* $\mathbf{P}_i^w = (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i)$, pro které lze najít B-spline křivku v tomto projektivním rozšíření \mathbb{E}_3 v následujícím tvaru

$$\mathbf{B}(u) = \sum_{i=0}^p N_i^n(u) (w_i x_i, w_i y_i, w_i z_i, w_i).$$

Odhomogenizací vzhledem k poslední souřadnici dostaneme vztah (1.1).

Pro NURBS křivku lze použít i zjednodušený zápis

$$\mathbf{Q}(u) = \sum_{i=0}^p R_i^n(u) \mathbf{P}_i,$$

kde

$$R_i^n(u) = \frac{w_i N_i^n(u)}{\sum_{j=0}^p w_j N_j^n(u)}$$

jsou *bázovými funkcemi NURBS*.

Poznámka 4. Vlastnosti báзовých funkcí NURBS jsou shodné s vlastnostmi B-spline báзовých funkcí – nezáporná hodnota, jednotkový součet a lokální support. Navíc platí $R_i^n(u) = N_i^n(u)$, jestliže je váha w_i pro všechna i stejná a zároveň nenulová.

Poznámka 5. Vlastnosti NURBS křivek:

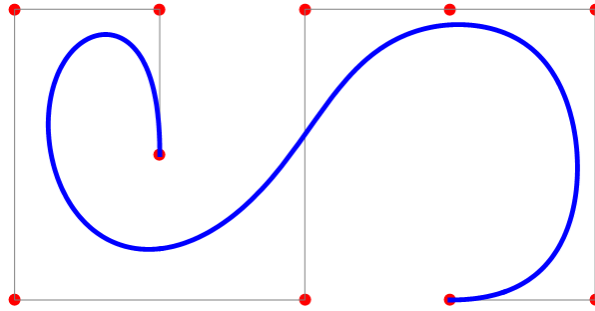
- NURBS křivka prochází prvním a posledním bodem svého řídicího polygonu.
- Body NURBS křivky leží v konvexním obalu množiny bodů řídicího polygonu $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_p$. Oblouk B-spline křivky $\mathbf{Q}(u)$ pro $u \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle$, $n \leq i \leq m - n - 1$, leží v konvexním obalu bodů $\mathbf{P}_{i-n}, \dots, \mathbf{P}_i$. Vlastnost konvexního obalu ovšem platí pouze za předpokladu, že váhy řídicích bodů budou kladné.
- Řídicí bod \mathbf{P}_i řídicího polygonu ovlivňuje tvar křivky pro daný parametr u jen na intervalu $\langle u_i, u_{i+n+1} \rangle$, což má za následek neměnnost tvaru celé křivky. Obdobně lze formulovat ovlivnění tvaru křivky pomocí váhy daného bodu.
- NURBS křivka je invariantní vůči projektivní transformaci – transformovaný řídicí polygon dá stejný výsledek jako transformovaná NURBS křivka vytvořená z původního řídicího polygonu.
- Žádná přímka nebo rovina nemá s NURBS křivkou více průsečíků než s řídicím polygonem příslušné NURBS křivky.
- NURBS křivka patří obecně do třídy spojitosti C^{n-k} , jejíž vektor parametrizace obsahuje k -násobný uzel, a zachovává spojitost při změnách polohy různých řídicích bodů nebo změně jejich váhy.

Poznámka 6. Mějme NURBS křivku danou řídicím polygonem, vektorem parametrizace a váhami řídicích bodů, pak:

- budou-li váhy všech řídicích bodů stejné, tak výsledná NURBS křivka bude totožná s B-spline křivkou danou stejným řídicím polygonem a vektorem parametrizace.
- Pro vektor parametrizace ve tvaru $\mathbf{U} = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ a libovolné váhy se NURBS křivka ztotožní s racionální Bézierovou křivkou.
- Pokud budou platit obě předchozí vlastnosti dostaneme NURBS křivku shodnou s Bézierovou křivkou.

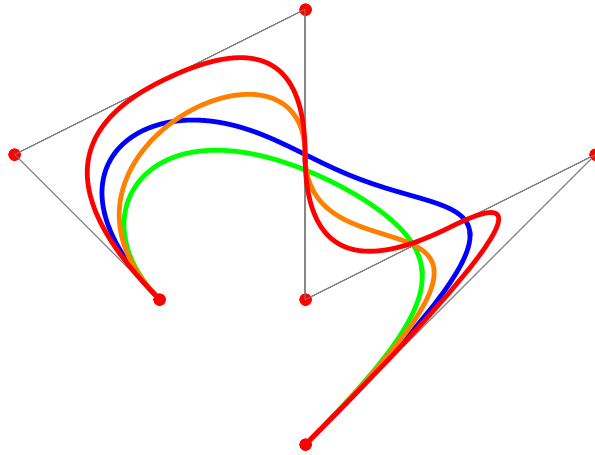
K výhodám těchto křivek patří především rychlost a stabilita algoritmu k jejich vytváření. Z hlediska konstrukce máme spoustu možností, jak danou křivku měnit a jinak modifikovat – poloha řídicích bodů s danými váhami, vektor parametrizace nebo její stupeň. Příkladem může být konstrukce oblouků kuželoseček díky racionalizaci.

Pro názornost si ukážeme několik případů, jak se bude daná křivka měnit v závislosti na vektoru parametrizace (stupeň křivky a počet jednotlivých oblouků, ze kterých se křivka skládá), poloze řídicího bodu nebo hodnotě jeho váhy. Na obr. 1.2 můžeme vidět, jak se křivka mění při změně stupně. Na dalším obr. 1.3 si můžeme



Obrázek 1.1: NURBS křivka a její řídicí polygon

povšimnout, že jednotlivé NURBS křivky jsou složeny z několika jednotlivých oblouků. Je to ovlivněno volbou vektoru parametrizace, která nám říká, že křivka se skládá z tolika oblouků, kolikrát se dva sousední uzly liší.

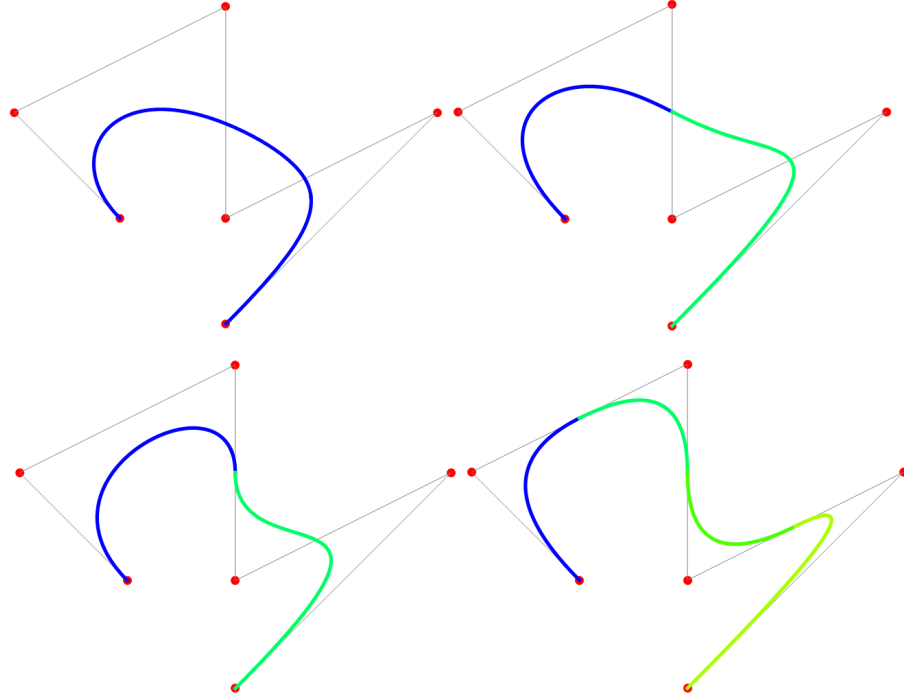


Obrázek 1.2: Tvar NURBS křivky v závislosti na změně vektoru parametrizace – přesněji v závislosti na stupni n . (Zelená: $n = 5$; modrá: $n = 4$; oranžová: $n = 3$; červená: $n = 2$.)

Nejjednodušší možností jak měnit tvar křivky je posouvání řídicích bodů daného polygonu, kterou vidíme na obr. 1.4 vlevo. Všimněme si také, že změna polohy bodu má vliv pouze na část křivky, jak již bylo řečeno ve vlastnostech NURBS křivek. Podobně lze pracovat i s váhou řídicích bodů, jejíž vliv na tvar křivky lze shodně definovat jako v případě ovlivnění tvaru křivky změnou polohy řídicího bodu – ovlivnění na určité části křivky, obr. 1.4 vpravo.

1.2 NURBS plochy

Definice 7. *Mějme dánu řídicí síť tvořenou $(p + 1) \times (r + 1)$ polohovými vektory $\mathbf{P}_{i,j}$ s příslušnými váhami $w_{i,j}$, pro které platí $w_{i,j} > 0$, a vektory parametrizace*



Obrázek 1.3: Počet oblouků jednotlivých NURBS křivek

$\mathbf{U} = (u_0, \dots, u_e)$, $\mathbf{V} = (v_0, \dots, v_f)$. NURBS plochu *stupně* (m, n) definujeme vztahem

$$\mathbf{Q}(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r w_{i,j} \mathbf{P}_{i,j} N_i^m(u) N_j^n(v)}{\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r w_{i,j} N_i^m(u) N_j^n(v)}, \quad (1.3)$$

kde m je stupeň B-spline bázových funkcí $N_i^m(u)$ a n stupeň B-spline bázových funkcí $N_j^n(v)$.

Vektory parametrizace \mathbf{U} a \mathbf{V} jsou ve tvaru

$$\mathbf{U} = (a, \dots, a, u_{m+1}, \dots, u_{e-m-1}, b, \dots, b), \mathbf{V} = (c, \dots, c, v_{n+1}, \dots, v_{f-n-1}, d, \dots, d)$$

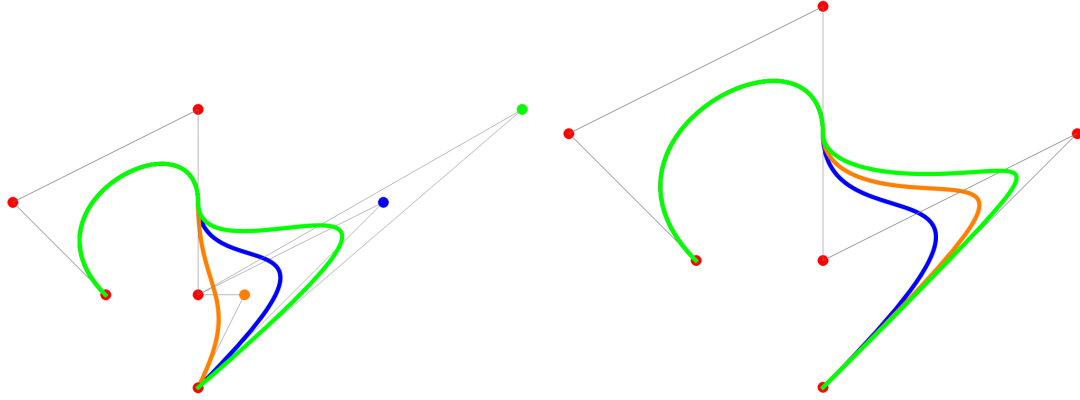
a pro jednotlivé uzly potom platí nerovnost

$$a < u_i \leq u_{i+1} < b, \quad c < v_j \leq v_{j+1} < d.$$

Stejně jakou u NURBS křivek lze předpis (1.3) napsat ve zjednodušeném tvaru

$$\mathbf{Q}(u, v) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^r \mathbf{P}_{i,j} R_i^m(u) R_j^n(v).$$

Vlastnosti NURBS křivek lze převést do vlastností NURBS ploch, jelikož vycházíme ze stejných B-spline bázových funkcí jako jsme používali u křivek. Proto se zmíníme jen o těch, které platí navíc oproti NURBS křivkám.



Obrázek 1.4: Vlevo: Posunovaný řídicí bod je barevně sladěn s příslušnou křivkou; Vpravo: Křivka se přibližuje k řídicímu bodu se zvyšující se vahou: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$.

Poznámka 8. Další vlastnosti NURBS ploch:

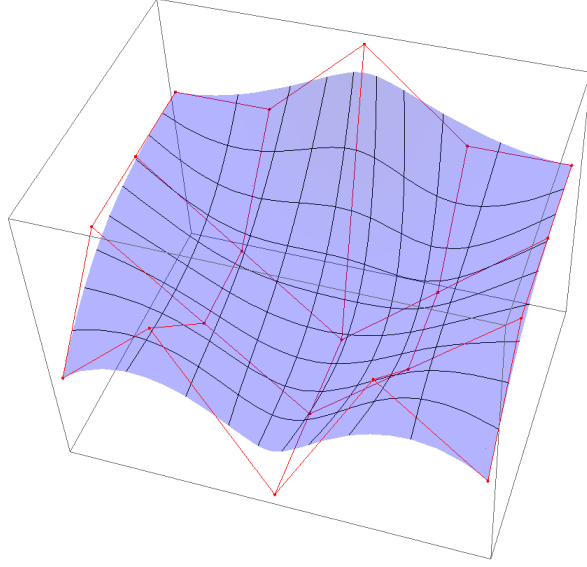
- Okrajové křivky NURBS plochy tvoří NURBS křivky vytvořené z okrajového řídicího polygonu dané řídicí sítě.
- NURBS plocha leží v konvexním obalu řídicí sítě. Část NURBS plochy pro $\mathbf{Q}(u, v)$ pro $(u, v) \in \langle u_i, u_{i+1} \rangle \times \langle v_j, v_{j+1} \rangle$, $m \leq i \leq e - m - 1$ a $n \leq j \leq f - n - 1$ leží v konvexním obalu vrcholů

$$\begin{pmatrix} \mathbf{P}_{i-m, j-n} & \dots & \mathbf{P}_{i-m, j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{i, j-n} & \dots & \mathbf{P}_{i, j} \end{pmatrix}.$$

- Řídicí bod i váha příslušného řídicího bodu $\mathbf{P}_{i, j}$ ovlivňuje tvar plochy pro dané parametry $(u, v) \in \langle u_i, u_{i+m+1} \rangle \times \langle v_j, v_{j+n+1} \rangle$.
- NURBS plocha je obecně třídy $C^{m-1, n-1}$, opět za předpokladu jednoduchých (nenásobných) uzlů. Obecně pro g -násobný uzel v parametru u a h -násobný uzel v parametru v platí, že NURBS plocha $\mathbf{Q}(u, v)$ bude mít spojitost třídy $C^{m-g, n-h}$.

1.3 NURBS objemy

Definice 9. Mějme dánu řídicí síť tvořenou $(l + 1) \times (m + 1) \times (n + 1)$ polohovými vektory $\mathbf{P}_{i, j, k}$ s příslušnými vahami $w_{i, j, k}$, pro které platí $w_{i, j, k} > 0$, a vektory parametrizace $\mathbf{R} = (r_0, \dots, r_c)$, $\mathbf{S} = (s_0, \dots, s_d)$, $\mathbf{T} = (t_0, \dots, t_e)$. NURBS objem stupně



Obrázek 1.5: NURBS oblast - červeně je vyznačena řídicí síť; - černě jednotlivé parametrické NURBS křivky plochy

(f, g, h) definujeme vztahem

$$\mathbf{Q}(r, s, t) = \frac{\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n w_{i,j,k} \mathbf{P}_{i,j,k} N_i^f(r) N_j^g(s) N_k^h(t)}{\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n w_{i,j,k} N_i^f(r) N_j^g(s) N_k^h(t)}, \quad (1.4)$$

kde f je stupeň B-spline bázových funkcí $N_i^f(r)$, g stupeň B-spline bázových funkcí $N_j^g(s)$ a h stupeň B-spline bázových funkcí $N_k^h(t)$.

Předpis (1.4) lze přepsat jako

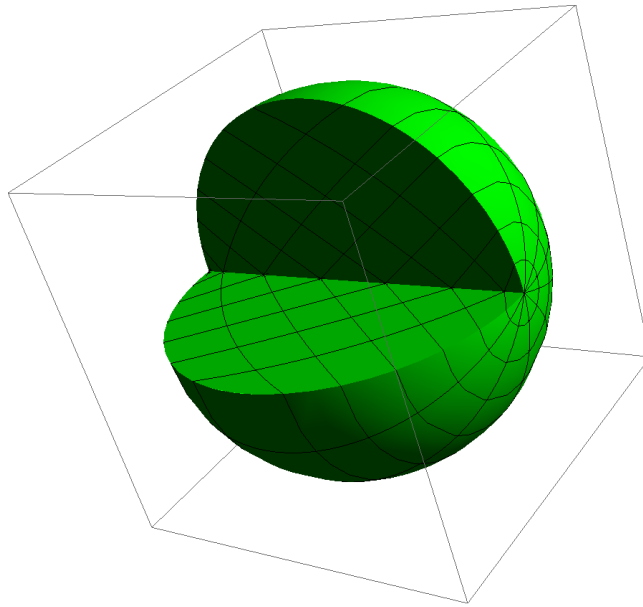
$$\mathbf{Q}(r, s, t) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n R_{i,j,k}(r, s, t) \mathbf{P}_{i,j,k}, \quad (1.5)$$

kde

$$R_{i,j,k}(r, s, t) = \frac{w_{i,j,k} N_i^f(r) N_j^g(s) N_k^h(t)}{\sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n w_{i,j,k} N_i^f(r) N_j^g(s) N_k^h(t)}.$$

Definice 10. Necht' $\bar{\mathbf{q}}(r, s)$ je parametrizace NURBS plochy, $r \in [0, 1]$, $s \in [0, 1]$, pak pro $r = r_{konst}$ nazveme křivku $\bar{\mathbf{q}}(r_{konst}, s)$ na ploše $\bar{\mathbf{q}}(r, s)$ r-křivkou. Analogicky definujeme s-křivku. Souhrnně tyto křivky nazýváme parametrickými křivkami plochy $\bar{\mathbf{q}}(r, s)$. Pro parametrizaci NURBS objemu $\hat{\mathbf{q}}(r, s, t)$, $r \in [0, 1]$, $s \in [0, 1]$, $t \in [0, 1]$ budeme parametrickou křivku na $\hat{\mathbf{q}}(r, s, t)$ chápat jako $\hat{\mathbf{q}}(r, s_{konst}, t_{konst})$, $\hat{\mathbf{q}}(r_{konst}, s, t_{konst})$ a $\hat{\mathbf{q}}(r_{konst}, s_{konst}, t)$.

Stejně jako u vlastností NURBS ploch, kde jsme přebírali vlastnosti z NURBS křivek, můžeme převzít vlastnosti z NURBS ploch pro objem. Bázové B-spline funkce jsou shodné s bázemi používanými u křivek a ploch. U vlastností konvexního obalu, třídy spojitosti, ovlivnění tvaru křivky změnou řídicího bodu či jeho váhy lze odvodit z předchozích částí.



Obrázek 1.6: NURBS objem

Poznámka 11. Vlastnosti NURBS objemů:

- Okrajové plochy NURBS objemu tvoří NURBS plochy vytvořené z okrajové řídicí sítě.
- NURBS objem leží v konvexním obalu řídicí sítě. Část NURBS objemu pro $\mathbf{Q}(r, s, t)$ pro $(r, s, t) \in \langle r_i, r_{i+1} \rangle \times \langle s_j, s_{j+1} \rangle \times \langle t_k, t_{k+1} \rangle$, $f \leq i \leq c - f - 1$, $g \leq j \leq d - g - 1$ a $h \leq k \leq e - h - 1$ leží v konvexním obalu vrcholů

$$\left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_{i-f, j-g, k-h} & \cdots & \mathbf{P}_{i-f, j, k-h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{i, j-g, k-h} & \cdots & \mathbf{P}_{i, j, k-h} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc} \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_{i-f, j-g, k} & \cdots & \mathbf{P}_{i-f, j, k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{i, j-g, k} & \cdots & \mathbf{P}_{i, j, k} \end{array} \right) \end{array} \right) \cdot$$

- Řídící bod i váha řídicího bodu $\mathbf{P}_{i,j,k}$ ovlivňuje tvar objemu pro parametry $(r, s, t) \in \langle r_i, r_{i+f+1} \rangle \times \langle s_j, s_{j+g+1} \rangle \times \langle t_k, t_{k+h+1} \rangle$.
- NURBS objem je obecně třídy $C^{f-1, g-1, h-1}$ za předpokladu jednoduchých uzlů. Pro b -, p -, q -násobné uzly v parametrech r, s, t je spojitost objemu třídy $C^{f-b, g-p, h-q}$.

Kapitola 2

NURBS objemy vzniklé „tažením“ ploch

V této části se zaměříme na přehled existujících metod pro nalezení NURBS objemové parametrizace objektů vytvořených speciálním pohybem daných NURBS ploch.

Třída těchto objemů obsahuje velké množství objektů, které jsou významné v průmyslových aplikacích. Příkladem mohou být modely turbínových lopatek, válců, trupy lodí nebo křídla letadel. Principem vytváření tohoto druhu NURBS objemu je tzv. vytahování vstupní plochy do prostoru, kde třetí parametr objemu dostaneme jako parametr trajektorie této „tažené“ plochy. Metody popsané v této kapitole vycházejí z článku [1].

Naším cílem je najít parametrizaci NURBS objemu ve tvaru

$$\mathbf{Q}(r, s, t) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n R_{i,j,k}(r, s, t) \mathbf{P}_{i,j,k}. \quad (2.1)$$

Vstupní data se ovšem mohou lišit v závislosti na modifikaci této metody. Primárně bude zadána vstupní NURBS plocha ve tvaru $\mathbf{Q}(r, s, 0)$, jejímž „tažením“ získáme hledaný NURBS objem. V následujících sekcích se budeme zabývat především konstrukcí a optimalizačními podmínkami tohoto NURBS objemu.

2.1 Vstupní data

V této sekci se zaměříme na možné vstupní data, pomocí kterých lze zkonstruovat hledaný NURBS objem. Základní nutnou vstupní informací je počáteční plocha definovaná jako $\mathbf{Q}(r, s, 0)$ s řídicími body $\mathbf{P}_{i,j,0}$. Z geometrického tvaru počáteční plochy se bude odvíjet výsledný tvar NURBS objemu vzniklý „tažením“ této plochy. Celkový tvar bude záviset nejen z počátečních dat, ale také z dalších optimalizací popsaných v následujících sekcích. Variabilita vstupních dat je velice obsáhlá, a proto si zmíníme pouze ty základní, které spolu s počáteční plochou budou tvořit vstupní data pro konstrukci výsledného objemu:

1. Koncová NURBS plocha $\mathbf{Q}(r, s, 1)$ s řídicími body $\mathbf{P}_{i,j,n}$.

2. Směr, kterým se bude „tažení“ provádět.
3. Vzdálenosti mezi množinami řídicích bodů $\mathbf{P}_{i,j,k}$ a $\mathbf{P}_{i,j,k+1}$, kde k je pevně dané.
4. Řídicí křivka.

Často se některé možnosti spolu kombinují. K počáteční a koncové ploše se často přidává informace o směru, kterým se bude „tažení“ provádět. Tento vstup můžeme rozšířit ještě o dalších $k - 2$ směrů pro každou odpovídající plochu řídicích bodů $\mathbf{P}_{i,j,k}$, kde k je pro každou plochu pevně dané. Stejně tak lze kombinovat možnost 1 a 3 nebo 1, 2, 3, kde vzdálenost mezi řídicími body můžeme volit buď konstantní nebo proměnou v průběhu „tažení“.

Nejvýhodnější nástroj z hlediska tvaru výsledného NURBS objemu je tzv. řídicí křivka, kterou si popíšeme v následující části. Kombinace řídicí křivky s ostatními možnostmi je velice omezená a nejčastěji se používá pouze s počáteční plochou. Některé kombinace s ní nejsou totiž ani možné, jelikož by finální konstrukce NURBS objemu nemusela odpovídat buď některých kritériím ohledně získaného tvaru, nebo by se jednoduše jednotlivé kombinace vylučovaly.

V této kapitole se soustředíme na konstrukci NURBS objemu, jehož vstupní data budou počáteční NURBS plocha a jedna nebo dvě řídicí křivky.

2.2 Řídicí křivky a vlivové funkce

2.2.1 Řídicí křivka

Definice 12. *Nechť je dána řídicí křivka $\mathbf{c}_\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \rightarrow \mathbf{c}_\gamma(t)$, $\gamma = 1, \dots, p$, která specifikuje pohyb dvou-dimenzionální plochy $\mathbf{Q}(r, s, t')$, kde $(r, s) \in [0, 1]^2$ a $t' \in [0, 1]$ je konstantní hodnota.*

Řídicí křivku lze vyjádřit také ve tvaru $\mathbf{Q}(r', s', t)$, kde $t \in [0, 1]$ a $(r', s') \in [0, 1]^2$ jsou konstantní. Pohyb vstupní plochy je řízen jednou nebo více řídicími křivkami. Parametr t nazýváme „parametrem tažení“, který je spojený s pohybem dvou-dimenzionální plochy.

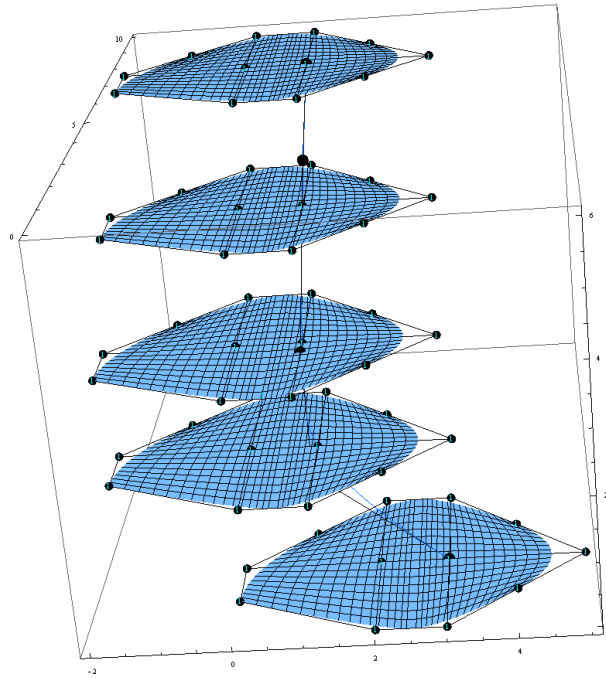
Abychom mohli provést tuto konstrukci NURBS objemu pomocí řídicích křivek, je nutné zvolit pro každou řídicí křivku příslušné parametry $(\hat{r}_\gamma, \hat{s}_\gamma)$ z dvou-dimenzionální „pohybové“ plochy tak, že vzdálenost mezi body $\mathbf{Q}(\hat{r}_\gamma, \hat{s}_\gamma, t)$ a $\mathbf{c}_\gamma(t)$ pro pevné t , bude co možná nejmenší. Tím docílíme toho, že plocha $\mathbf{Q}(r, s, t')$ bude následovat pohyb bodů řídicí křivky $\mathbf{c}_\gamma(t)$. Zvolené parametry si lze představit jako parametry bodů dané plochy pro řídicí křivku. Tyto body budeme nazývat *kotevní*. Funkce charakterizující tuto podmínku bude ve tvaru

$$f_A(\mathbf{P}) = \min \sum_{\gamma=1}^p \int_0^1 \|\mathbf{Q}(\hat{r}_\gamma, \hat{s}_\gamma, t) - \mathbf{c}_\gamma(t)\|^2 dt.$$

Obecně lze použít jakékoliv body „tažené“ plochy, ale vhodnější jsou samozřejmě speciální body jako jsou některé řídicí body, které leží přímo na této ploše. Další možnosti jsou těžiště nebo body ležící na hranici plochy. Pro volené body na hranici se pak dodatečně definuje tzv. *vlivová funkce*, která ovlivňuje tvar řídicí křivky

během trajektorie (je možno použít více řídicích křivek pro lepší kontrolu změny tvaru výsledného objektu). Tu si popíšeme v následující části.

Na obr. 2.1 si lze prohlédnout „tažení“ vstupní plochy pomocí řídicí křivky, resp. nalezení řídicích bodů výsledného NURBS objemu vzniklého „tažením“ této plochy. Jedná se o nejjednodušší možnou metodu pro konstrukci NURBS objemu, kde vstupní data jsou počáteční plocha a jedna řídicí křivka a kde nemáme zvoleny žádné optimalizační podmínky.



Obrázek 2.1: „Tažená“ plocha s jednou řídicí křivkou, které je ukotvena v řídicím bodě dané plochy.

2.2.2 Vlivová funkce

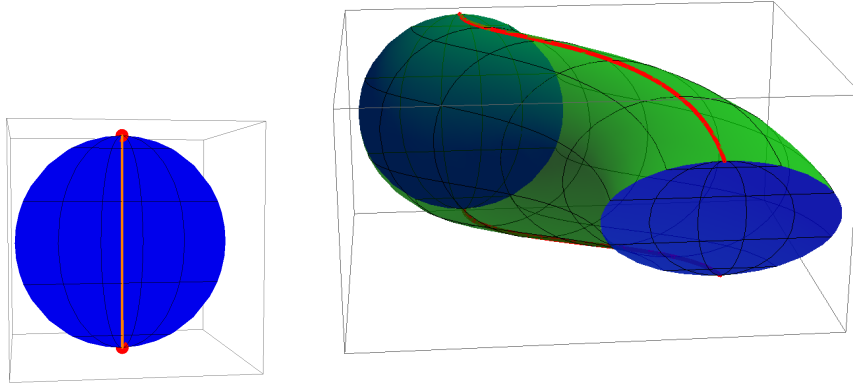
Pro dvě a více řídicích křivek si zavedeme tzv. vlivové funkce, které korigují pohyb a vytváření objemu podél „tažení“.

Definice 13. *Definujme pro každou řídicí křivku \mathbf{c}_γ funkci*

$$\alpha_\gamma(r, s) : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$$

takovou, že váha $\alpha_\gamma(r, s)$ ovlivňuje chování řídicí křivky \mathbf{c}_γ , resp. její trajektorii. Pro tyto váhy platí rovnost

$$\sum_{\gamma=1}^p \alpha_\gamma(r, s) \equiv 1.$$



Obrázek 2.2: NURBS objem vzniklý vytažením vstupní NURBS plochy (kruhu) pomocí dvou řídicích křivek.

Definice 14. Každému bodu objemu $\mathbf{Q}(r, s, t)$ přiřadíme váhový průměr $\hat{\mathbf{c}}(r, s, t)$, pro který platí

$$\hat{\mathbf{c}}(r, s, t) = \sum_{\gamma=1}^p \alpha_{\gamma}(r, s) \mathbf{c}_{\gamma}(t).$$

Hodnoty vlivových funkcí jsou závislé na počtu řídicích křivek:

- Pro jednu řídicí křivku volíme $\alpha_1(r, s) \equiv 1$.
- Pro dvě řídicí křivky $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ zvolíme kotevní body $\mathbf{Q}(r_1, s_1, t_{konst})$, $\mathbf{Q}(r_2, s_2, t_{konst})$ na ploše $\mathbf{Q}(r, s, t_{konst})$. Na obr. 2.2 vlevo jsou tyto body znázorněny červeně. Váhy $\alpha_1(r, s)$ a $\alpha_2(r, s)$ jsou vypočítány pomocí ortogonální projekce bodů plochy $\mathbf{Q}(r, s, t_{konst})$ do úseku tvořeného $\mathbf{Q}(r_1, s_1, t_{konst})$ a $\mathbf{Q}(r_2, s_2, t_{konst})$, který je na obr. 2.2 vlevo znázorněn oranžově. Váhový průměr $\hat{\mathbf{c}}(r, s, t)$ je roven

$$\alpha_1(r, s) \mathbf{c}_1(t) + \alpha_2(r, s) \mathbf{c}_2(t).$$

- Pro tři a více řídicích křivek se používají hodnoty barycentrických souřadnic. Postup a vysvětlení nalezneme v [1] a [24].

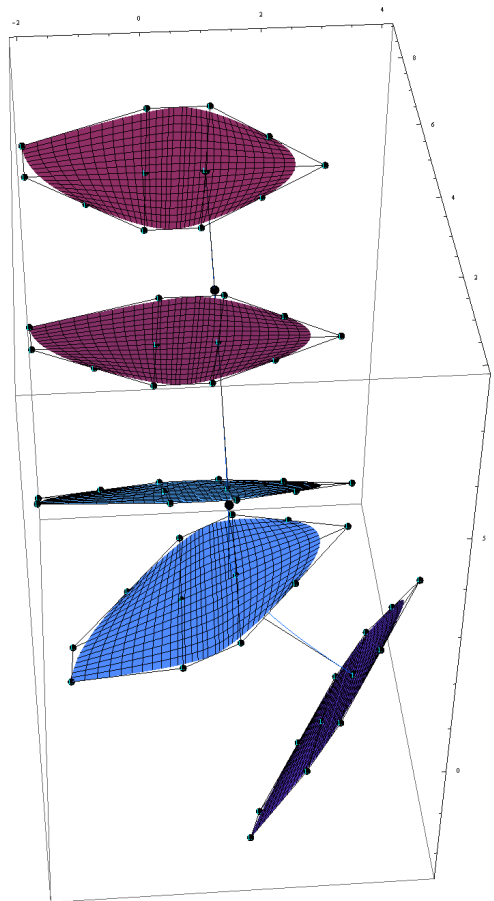
Na obr. 2.2 vidíme ukázkou NURBS objemu zkonstruovaného „tažením“ vstupní plochy pomocí dvou řídicích křivek. Všimněme si, že počáteční a koncová plocha se tvarem neshoduje. Důvodem je změna vzdálenosti řídicích křivek během „tažení“. Abychom zamezili tomuto nechtěnému jevu, stanovíme si v následující části podmínky, které nám tento problém nejen odstraní, ale dají nám možnost ovlivnit tvar podle naší potřeby.

2.3 Řízení tvaru „tažené“ plochy a optimalizační podmínky

2.3.1 Ortogonální podmínka a minimalizace rotace

Na obr. 2.1 vidíme, jak jednotlivé plochy mají stejný směr normálového vektoru i přesto, že řídicí křivka má zcela obecný tvar. To nám může zapříčinit zúžení v některých místech výsledného objemu, což nám v praxi může činit nemalé problémy (např. potrubí, tunely apod.).

Chceme tedy, aby „tažená“ plocha byla v průběhu „tažení“ kolmá na řídicí křivku. Toho docílíme tak, že budeme požadovat shodný směr normálového vektoru plochy a tečného vektoru řídicí křivky.



Obrázek 2.3: „Tažená“ plocha s jednou řídicí křivkou s využitím vztahů (2.2) a (2.3).

V případě více řídicích křivek požadujeme kolmost plochy na vektor vzniklý složením (sečtením) tečných vektorů řídicích křivek v závislosti na vahách $\alpha_\gamma(r, s)$. K tomu využijeme váhového průměru $\hat{\mathbf{c}}(r, s, t)$ (viz Definice 14) a jeho parciální derivaci $\partial_t \hat{\mathbf{c}}(r, s, t)$ vyjadřující směr hledané přímky reprezentující složené tečné vektory

řídících křivek. Dostaneme tak funkci

$$f_O(\mathbf{P}) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left((\mathbf{Q}(r, s, t) - \widehat{\mathbf{c}}(r, s, t)) \cdot \frac{\partial_t \widehat{\mathbf{c}}(r, s, t)}{\|\partial_t \widehat{\mathbf{c}}(r, s, t)\|} \right)^2 dr ds dt, \quad (2.2)$$

jejíž minimalizací zajistíme maximální možnou ortogonalitu řídících křivek na „taženou“ plochu.

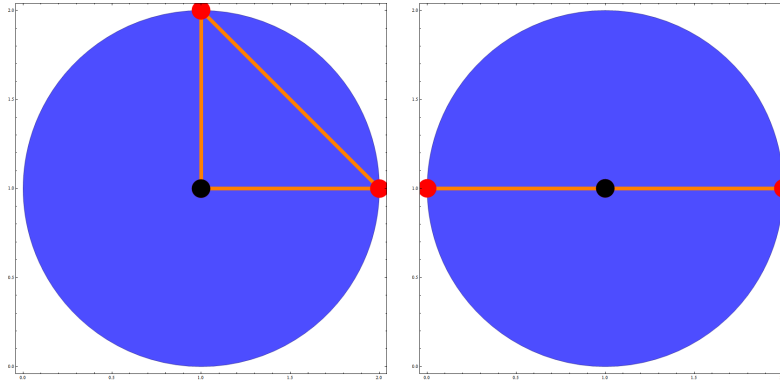
Pokud je zadána jedna řídící křivka, výsledkem minimalizace (2.2) budou řídící body popisující rovinu $\mathbf{Q}(r, s, t')$, jejíž normálový vektor je shodný s tečným vektorem řídící křivky v bodě vzniklém jako průnik této roviny s řídící křivkou.

Druhou podmínku, kterou si definujeme, je minimalizace rotace „tažené“ plochy okolo tečen řídících křivek. Tato podmínka je založená na tom, že dráha bodu $\mathbf{Q}(r_{konst}, s_{konst}, t)$ protíná jednotlivé „tažené“ plochy ortogonálně, díky čemuž se rotace v průběhu tažení redukuje. Požadujeme tedy, aby normálový vektor „tažené“ plochy byl co nejvíce shodný s vektorem $\partial_t \widehat{\mathbf{c}}(r, s, t)$.

Dostáváme tak podmínku ve tvaru

$$f_{RM}(\mathbf{P}) = \min \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\| \partial_t \mathbf{Q}(r, s, t) \times \frac{\partial_t \widehat{\mathbf{c}}(r, s, t)}{\|\partial_t \widehat{\mathbf{c}}(r, s, t)\|} \right\|^2 dr ds dt. \quad (2.3)$$

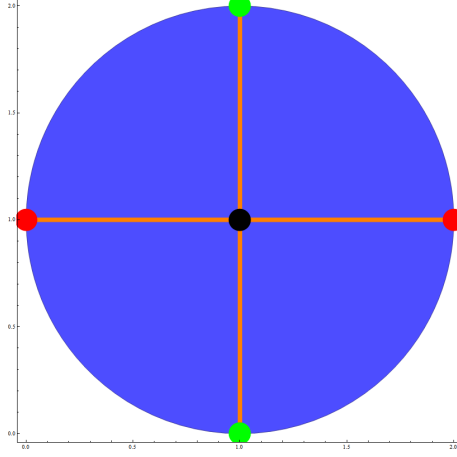
Podrobný rozbor této podmínky nalezneme v [26]. Na obr. 2.3 můžeme vidět rozdíl v konstrukci řídících bodů oproti konstrukci na obr. 2.1.



Obrázek 2.4: Znázornění zvolených bodů na ploše $\mathbf{Q}(r, s, t_{konst}) - \mathbf{Q}(\widehat{r}_1, \widehat{s}_1, t_{konst})$, $\mathbf{Q}(\widehat{r}_2, \widehat{s}_2, t_{konst})$ červeně a $\mathbf{Q}(\widehat{r}_3, \widehat{s}_3, t_{konst})$ černě. Vlevo: Konstrukce pro poměr mezi šířkou a výškou. Vpravo: Konstrukce pro poměr tří kolineárních bodů.

2.3.2 Možnosti řízení tvaru „tažené“ plochy

V průběhu „tažení“ podél řídících křivek chceme zachovat tvar dané plochy. To jde ale pouze v případě, pokud se vzdálenost těchto křivek v průběhu „tažení“ nemění. Pokud ano, tak naopak vyžadujeme určitou změnu tvaru, např. celkové zmenšení



Obrázek 2.5: Rozmístění bodů popsaných v části Regulace výšky – Kotevní body řídicích křivek $\mathbf{Q}(\tilde{r}_1, \tilde{s}_1, t_{konst})$, $\mathbf{Q}(\tilde{r}_2, \tilde{s}_2, t_{konst})$ jsou znázorněny zeleně. Červeně pak volené body $\mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t_{konst})$, $\mathbf{Q}(\hat{r}_2, \hat{s}_2, t_{konst})$. Průnik jejich spojnic černě.

apod. Možností, jak mít nad tvarem plochy určitou kontrolu, je několik. Ukážeme si proto pouze nástin daných metod. Podrobnější informace nalezneme v [1].

- *Poměr mezi šířkou a výškou:*

Volíme tři body $\mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t_{konst})$, $\mathbf{Q}(\hat{r}_2, \hat{s}_2, t_{konst})$, $\mathbf{Q}(\hat{r}_3, \hat{s}_3, t_{konst})$ na „tažené“ ploše tak, že tvoří pravoúhlý trojúhelník (odvěsny znázorňují šířku a výšku) znázorněný na obr. 2.4 vlevo. Tyto body splňují rovnost

$$(\mathbf{Q}(\hat{r}_2, \hat{s}_2, t_{konst}) - \mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t_{konst})) \times \mathbf{N} = \rho(\mathbf{Q}(\hat{r}_3, \hat{s}_3, t_{konst}) - \mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t_{konst})),$$

kde \mathbf{N} je vektor normály „tažené“ plochy a $\rho \in \mathbb{R}$. Výsledná optimalizační funkce bude mít tvar

$$f_S^{(1)}(\mathbf{P}) = \int_0^1 \left\| (\mathbf{Q}(\hat{r}_2, \hat{s}_2, t) - \mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t)) \times \frac{\partial_t \hat{\mathbf{c}}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t)}{\|\partial_t \hat{\mathbf{c}}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t)\|} - \rho(\mathbf{Q}(\hat{r}_3, \hat{s}_3, t) - \mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t)) \right\|^2 dt, \quad (2.4)$$

kde normálový vektor \mathbf{N} je vyjádřen jako jednotkový tečný vektor řídicí křivky $\hat{\mathbf{c}}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t)$, viz Definice 14.

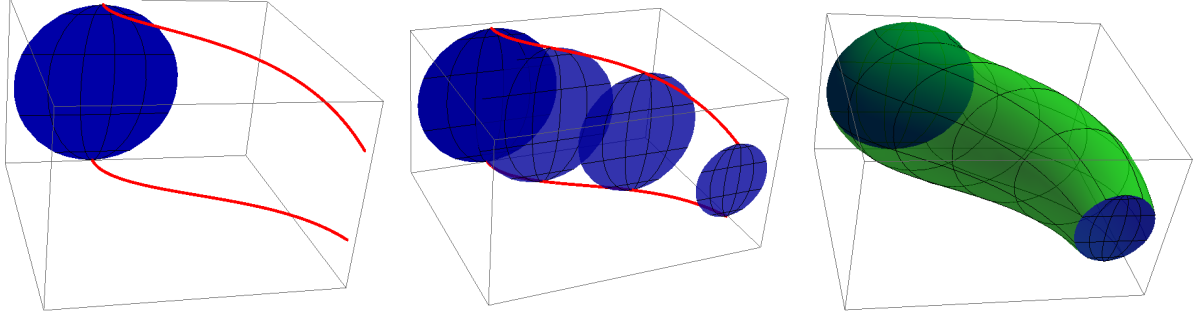
- *Poměr tří kolineárních bodů:*

Uvažujeme tři kolineární body $\mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t_{konst})$, $\mathbf{Q}(\hat{r}_2, \hat{s}_2, t_{konst})$, $\mathbf{Q}(\hat{r}_3, \hat{s}_3, t_{konst})$ splňující rovnost

$$\mathbf{Q}(\hat{r}_3, \hat{s}_3, t_{konst}) = \lambda \mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t_{konst}) + (1 - \lambda) \mathbf{Q}(\hat{r}_2, \hat{s}_2, t_{konst}),$$

viz obr. 2.4 vpravo, kde bod $\mathbf{Q}(\hat{r}_3, \hat{s}_3, t_{konst})$ leží mezi body $\mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t_{konst})$, $\mathbf{Q}(\hat{r}_2, \hat{s}_2, t_{konst})$. Optimalizační výraz založený na konstrukci kolineárních bodů bude mít podobu

$$f_S^{(2)}(\mathbf{P}) = \int_0^1 \left\| \lambda \mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t) + (1 - \lambda) \mathbf{Q}(\hat{r}_2, \hat{s}_2, t) - \mathbf{Q}(\hat{r}_3, \hat{s}_3, t) \right\|^2 dt. \quad (2.5)$$



Obrázek 2.6: NURBS objem konstruovaný pomocí podmínky pro zachování poměru výšky a šířky.

- *Regulace výšky:*

Pro jednu řídicí křivku se používá závislost hodnoty ρ a λ z předchozích dvou podmínek pro změnu poměru vzdálenosti během „tažení“. Pro dvě řídicí křivky použijeme následující postup.

Uvažujeme dva body $\mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t_{konst})$, $\mathbf{Q}(\hat{r}_2, \hat{s}_2, t_{konst})$ v „tažené“ oblasti. Nechť je jejich spojnice kolmá na spojnici kotevních bodů $\mathbf{Q}(\tilde{r}_1, \tilde{s}_1, t_{konst})$, $\mathbf{Q}(\tilde{r}_2, \tilde{s}_2, t_{konst})$ (průniky řídicích křivek $\mathbf{c}_1(t)$, $\mathbf{c}_2(t)$ a „tažené“ oblasti). Průnik těchto spojnic bude

$$(1 - \beta)\mathbf{Q}(\tilde{r}_1, \tilde{s}_1, t_{konst}) + \beta\mathbf{Q}(\tilde{r}_2, \tilde{s}_2, t_{konst}).$$

Na obr. 2.5 vidíme konstrukci těchto bodů.

Nechť ν je požadovaná vzdálenost mezi body $\mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t)$ a $\mathbf{Q}(\hat{r}_2, \hat{s}_2, t)$. Tato vzdálenost ν může být kontrolována pomocí vztahu

$$f_S^{(3)}(\mathbf{P}) = \int_0^1 ((\mathbf{Q}(\hat{r}_1, \hat{s}_1, t) - \mathbf{Q}(\hat{r}_2, \hat{s}_2, t)) \cdot \mathbf{N}(t) - \nu)^2 dt, \quad (2.6)$$

kde $\mathbf{N}(t)$ je normálový vektor „tažené“ plochy generované pomocí řídicích křivek $\mathbf{c}_1(t)$, $\mathbf{c}_2(t)$.

Velikost ν lze volit konstantní nebo závislou na vzdálenosti průniků řídicích křivek s „taženou“ plochou. Podrobnosti nalezneme v [1].

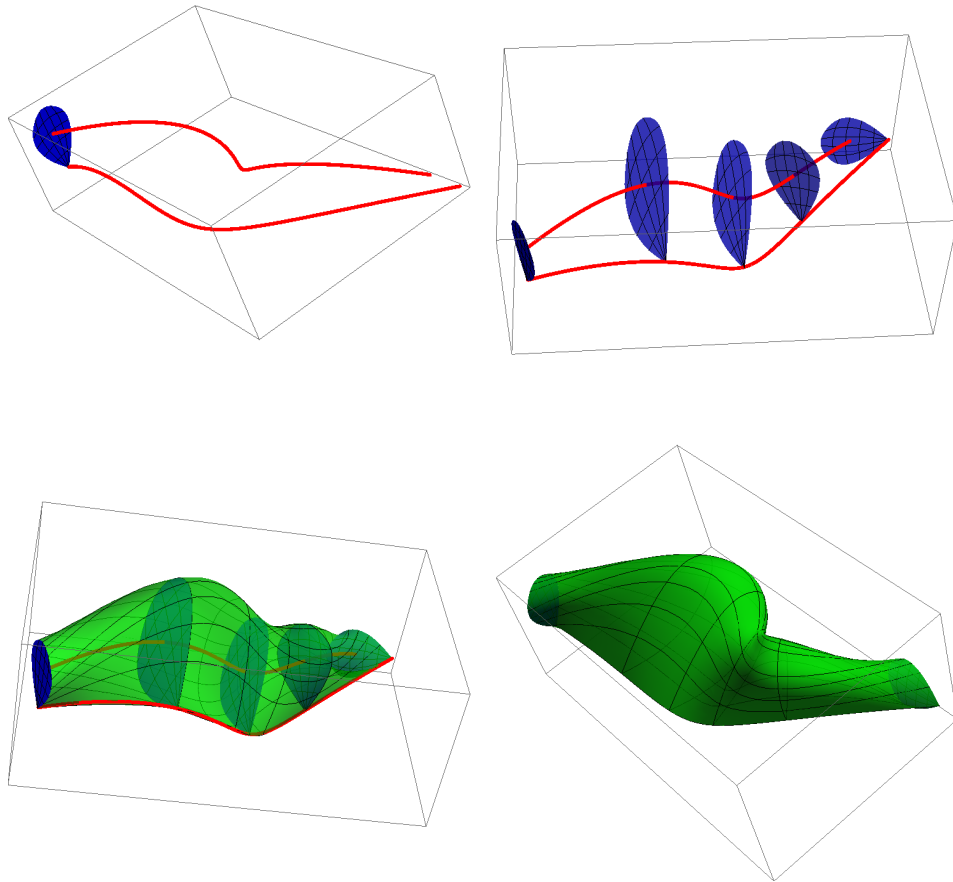
Na obr. 2.6 vidíme použití podmínky pro zachování poměru výšky a šířky během „tažení“.

2.3.3 Regularita

Abychom se vyhnuli překrývání některých částí NURBS objemu, použijeme následující funkci, která má zabránit nadměrnému prodlužování délky trajektorie „tažené“ plochy v důsledku použití předchozích podmínek. Tato funkce má tvar

$$f_R(\mathbf{P}) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \|\partial_t \mathbf{Q}(r, s, t)\|^2 dr ds dt, \quad (2.7)$$

jejíž minimalizací získáme podmínku pro řídicí body hledaného NURBS objemu.



Obrázek 2.7: NURBS objem – Vlevo nahoře: Vstupní NURBS plocha s dvěma řídicími křivkami; Vpravo nahoře: Řezy NURBS objemu; Dole: Výsledný NURBS objem.

2.3.4 Shrnutí – cílová funkce

Složením předchozích podmínek získáme cílovou funkci

$$f(\mathbf{P}) = \omega_A f_A(\mathbf{P}) + \omega_O f_O(\mathbf{P}) + \omega_{RM} f_{RM}(\mathbf{P}) + \omega_s^{(i)} f_s^{(i)}(\mathbf{P}) + \omega_R f_R(\mathbf{P}),$$

kde ω_A , ω_O , ω_{RM} , ω_s , ω_R jsou nezáporné váhy a i označuje počet použitých podmínek z části 2.3.2 (třetí z těchto podmínek lze použít za předpokladu, že počet řídicích

křivek bude aspoň dvě). Při výpočtu cílové funkce se z důvodu náročnosti provádí numerická integrace.

Minimalizací cílové funkce získáme hledané řídicí body. K vyřešení této funkce můžeme postupovat tak, že nejprve zderivujeme cílovou funkci $f(\mathbf{P})$ vůči všem neznámým. Získáme tak systém lineárních rovnic obsahující řídicí body $\mathbf{P}_{i,j,k}$. Řešením tohoto lineárního systému získáme hledané body řídicí sítě daného objemu.

Na obr. 2.7 můžeme vidět takto řešený NURBS objem, kde vstupními daty jsou počáteční NURBS plocha a dvě řídicí křivky.

Kapitola 3

Optimalizace řídicí sítě

V této kapitole se budeme věnovat konstrukci a optimalizaci řídicí sítě B-spline oblastí a objemů, které jsou popsány ve článku [3] a [18]. Některé poznatky z B-spline objektů pak přeneseme na konstrukci řídicí sítě NURBS objemů a oblastí. Důvodem je korektní a kvalitní parametrizace dané oblasti (objemu). Chceme tak předejít překrývání některých částí B-spline plochy, resp. jednotlivých parametrických křivek v určitém parametru, viz obr. 3.1.

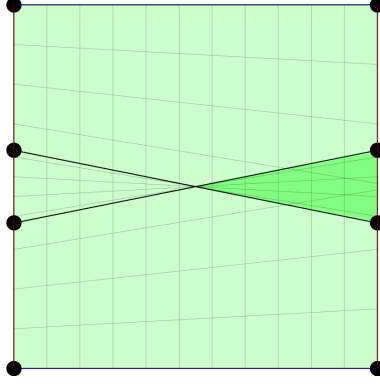
K dalším nežádoucím jevům řadíme také samoprůniky jednotlivých parametrických křivek. Abychom mohli tyto problémy eliminovat, popř. minimalizovat, musíme řídicí síť vhodným způsobem optimalizovat. Přesněji řečeno půjde o nalezení vhodných umístění daných řídicích bodů dané oblasti (objemu). Ve většině případů budeme chtít zachovat polohu hraničních řídicích bodů (hraničních křivek), proto se soustředíme na vnitřní řídicí body, které nám pomohou kontrolovat rozmístění parametrických křivek dané oblasti (objemu).

Hlavním požadavkem, který si popíšeme v následující části, na řídicí síť bude, že zobrazení z parametrické oblasti do výpočetní oblasti bude injektivní. Stanovíme si dvě základní podmínky, které nám tak zaručí injektivitu daného zobrazení. Abychom dosáhli co možná nejpřesnějšího výsledku, budeme taktéž požadovat, aby výsledná parametrická síť byla co nejvíce uniformní a ortogonální. Složením všech podmínek dostaneme ve výsledku kvadratickou energetickou funkci, jejíž minimalizací dosáhneme optimalizace sítě z hlediska injektivity, uniformity a ortogonality.

Nejprve budeme tento problém řešit pro B-spline oblasti a dále pak uplatníme některé poznatky i u B-spline objemů.

3.1 Optimalizace 2D řídicí sítě

Nejprve si zadefinujeme dva druhy podmínek pro zachování injektivity parametrizace. Ve druhé části pak uvedeme samotnou optimalizační metodu pro nalezení hledané B-spline oblasti.



Obrázek 3.1: Tmavě zelený trojúhelník znázorňuje překrytí B-spline plochy.

3.1.1 Postačující podmínka pro injektivní B-spline parametrizaci

Mějme kompaktní parametrickou oblast $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ a nechť parametrizace \mathbf{q} zobrazuje z \mathcal{P} do výpočetní oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, resp. pro každý bod B-spline plochy $\mathbf{x} = \mathbf{q}(r, s) \in \Omega$ je $(r, s) \in \mathcal{P}$.

Definice 15. *Hraniční křivky pro parametrizaci $\mathbf{q}(r, s)$ z $\mathcal{P} = \{(x, y) : a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ do $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definujeme jako $\mathbf{q}(a, s)$, $\mathbf{q}(b, s)$, $\mathbf{q}(r, c)$ a $\mathbf{q}(r, d)$, $r \in [a, b]$, $s \in [c, d]$.*

Regulární hraniční křivky nazveme takové hraniční křivky $\mathbf{q}(a, s)$, $\mathbf{q}(b, s)$, $\mathbf{q}(r, c)$, $\mathbf{q}(r, d)$, které se navzájem neprotínají, kromě počátečních a koncových bodů (napojení jednotlivých hraničních křivek) a nemají body samoprůniků.

Tvrzení 16. *Mějme C^1 spojitou parametrizaci $\mathbf{q} : \mathcal{P} \rightarrow \Omega$. Jestliže je \mathbf{q} injektivní na hranici $\partial\mathcal{P}$ oblasti \mathcal{P} a Jacobiho determinant $J_{\mathbf{q}}$ parametrizace \mathbf{q} je nenulový na \mathcal{P} , pak je \mathbf{q} injektivní na celém $\overline{\mathcal{P}}$.*

Toto tvrzení použijeme ke stanovení hledaného testu injektivnosti B-spline parametrizace pomocí Jacobiho determinantu, viz Tvrzení 17.

Tvrzení 17. *Mějme C^1 spojitou parametrizaci \mathbf{q} z $\mathcal{P} = \{(x, y) : a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$ do $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, která definuje regulární hranice. Jestliže je její Jacobiho determinant na \mathcal{P} nenulový, potom je daná parametrizace injektivní.*

Předchozí Tvrzení 17 si detailně rozepíšeme a na základě toho zavedeme podmínku pro zachování injektivnosti, která je založena na výpočtu Jacobiho determinantu dané parametrizace.

Nelineární postačující podmínka založená na výpočtu Jacobiho determinantu

Mějme parametrizaci

$$\mathbf{q} : (r, s) \in \mathcal{P} = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbf{q}(r, s) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j} N_i^f(r) N_j^g(s),$$

kde $\mathbf{P}_{i,j}$ jsou řídicí body, f a g jsou stupně B-spline bázových funkcí $N_i^f(r)$ a $N_j^g(s)$.
Nyní vypočítáme jednotlivé parciální derivace parametrizace $\partial_r \mathbf{q}(r, s)$, $\partial_s \mathbf{q}(r, s)$,

$$\begin{aligned}\partial_r \mathbf{q}(r, s) &= \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m \omega_{i,j}^1 \Delta_{i,j}^1 N_i^{f-1}(r) N_j^g(s), \\ \partial_s \mathbf{q}(r, s) &= \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{m-1} \omega_{i,j}^2 \Delta_{i,j}^2 N_i^f(r) N_j^{g-1}(s),\end{aligned}$$

kde $\omega_{i,j}^1$, $\omega_{i,j}^2$ jsou kladné faktory a $\Delta_{i,j}^1 = (\Delta_{i,j}^{1,x}, \Delta_{i,j}^{1,y}) = \mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}$, $\Delta_{i,j}^2 = (\Delta_{i,j}^{2,x}, \Delta_{i,j}^{2,y}) = \mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{i,j}$.

Výsledný Jacobiho determinant bude tedy ve tvaru

$$\begin{aligned}J(\mathbf{q}(r, s)) &= \begin{vmatrix} q_r^x & q_s^x \\ q_r^y & q_s^y \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m \sum_{i'=0}^l \sum_{j'=0}^{m-1} N_i^{f-1}(r) N_j^g(s) N_{i'}^f(r) N_{j'}^{g-1}(s) \omega_{i,j}^1 \omega_{i',j'}^2 \begin{vmatrix} \Delta_{i,j}^{1,x} & \Delta_{i,j}^{2,x} \\ \Delta_{i,j}^{1,y} & \Delta_{i',j'}^{2,y} \end{vmatrix} \quad (3.1) \\ &= \sum_{i=0}^{2l-1} \sum_{j=0}^{2m-1} G_{i,j} N_i^{2f-1}(r) N_j^{2g-1}(s).\end{aligned}$$

Z této rovnosti a vlastnosti konvexního obalu B-spline oblasti dostáváme následující větu, která nám dává nelineární postačující podmínku pro parametrizaci bez samoprůniků. Tento poznatek využijeme ve výsledné optimalizační metodě při konstrukci a omezení vnitřních řídicích bodů dané B-spline oblasti.

Věta 18. *Jestliže je $G_{i,j} > 0$, pak i $J(\mathbf{q}(r, s)) > 0$ a tudíž nemá parametrizace $\mathbf{q}(r, s)$ žádné samoprůniky.*

Poznamenejme, že tato věta nám neudává, kdy je Jacobiho determinant nenulový a tudíž máme zaručenu injektivitu, ale kdy je pouze kladný. Je to v důsledku toho, že v rovnosti (3.1) je část $N_i^{2f-1}(r) N_j^{2g-1}(s)$ kladná, proto je formulace předchozí věty založena na kladnosti Jacobiho determinantu. Obecně je tedy podmínka $G_{i,j} > 0$ slabší než podmínka $J(\mathbf{q}(r, s)) > 0$.

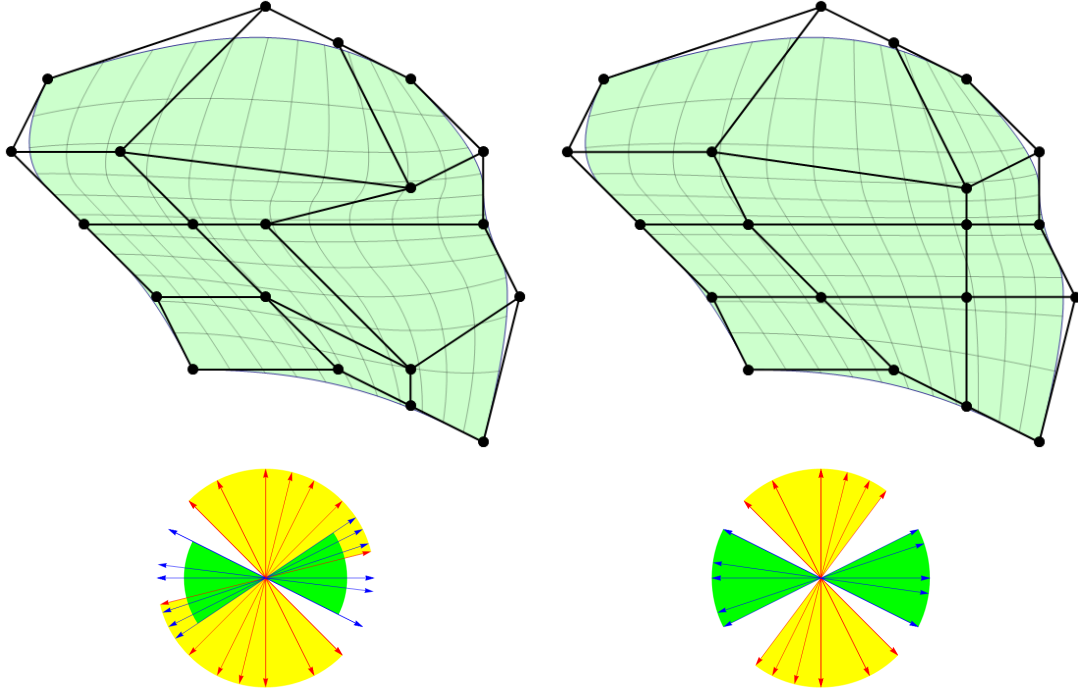
Lineární postačující podmínka založená na injektivitě kuželů

Druhou možností ověření injektivit B-spline parametrizace je podmínka využívající injektivit kuželů.

Definice 19. *Nechť $K_1(\mathbf{P})$ je konvexní kužel v \mathbb{R}^2 tvořený polopřímkami $\frac{\Delta_{i,j}^1}{\|\Delta_{i,j}^1\|}$. Analogicky definujeme kužel $K_2(\mathbf{P})$ tvořen polopřímkami $\frac{\Delta_{i,j}^2}{\|\Delta_{i,j}^2\|}$.*

Označením $K_1 \cdot \mathbb{R}$ rozumíme kužel, který je tvořený polopřímkami $\frac{\Delta_{i,j}^1}{\|\Delta_{i,j}^1\|}$, $-\frac{\Delta_{i,j}^1}{\|\Delta_{i,j}^1\|}$. Kužel $K_2 \cdot \mathbb{R}$ definujeme analogicky.

Definice 20. *Řekneme, že kužele K_1 a K_2 jsou transversální, jestliže $K_1 \cdot \mathbb{R}$ a $K_2 \cdot \mathbb{R}$ mají průnik pouze v bodě $\{0\}$.*



Obrázek 3.2: Test injektivní parametrizace pomocí injektivních kuželů: B-spline oblasti s příslušnými kuželi – Vlevo: Netransverzální; Vpravo: Transverzální.

Na obr. 3.2 můžeme vidět rozdíl mezi transversálními a netransverzálními kuželi.

Tvrzení 21. *Nechť $\mathbf{q} : \mathcal{P} = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{R}^2$ je C^1 spojitá B-spline parametrizace daná řídicími body \mathbf{P} . Jestliže se hraniční křivky neprotínají (kromě míst vzájemného napojení) a nemají žádné samoprůniky a kužele $K_1 \cdot \mathbb{R}$ a $K_2 \cdot \mathbb{R}$ jsou transversální, pak je parametrizace \mathbf{q} injektivní na \mathcal{P} .*

Definice 22. *Nechť je $K_1^0(\mathbf{P})$ hraniční kužel generovaný vektory $\Delta_{i,0}^1$ a $\Delta_{i,m}^1$, pro $i = 0, \dots, l - 1$. Analogicky definujeme hraniční kužel $K_2^0(\mathbf{P})$.*

Nyní můžeme použít všechny předcházející poznatky k tomu, abychom byli schopni zajistit, že parametrizace dané B-spline oblasti bude injektivní. K tomu použijeme Tvrzení 21, kde injektivitu dosáhneme pomocí transversálních kuželů, resp. vhodnou volbou řídicích bodů dané parametrizace.

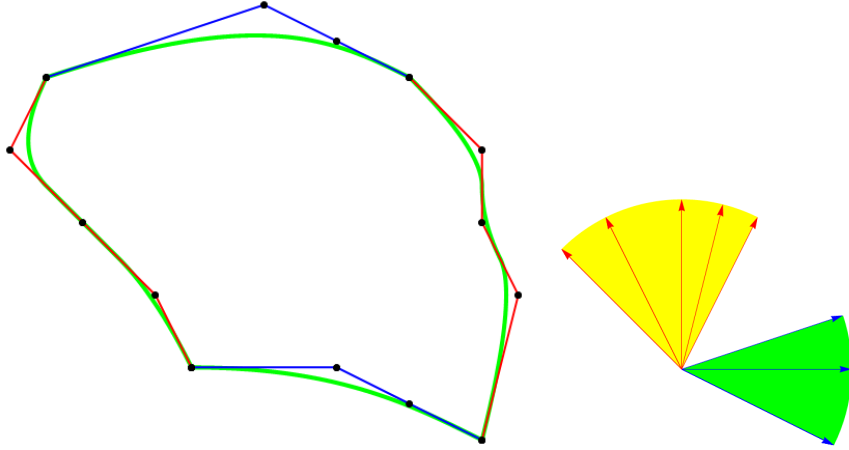
Předpokladem je, že máme zadány čtyři hraniční B-spline křivky, jejichž řídicí polygony jsou tvořeny řídicími body $\mathbf{P}_{i,0}$, $\mathbf{P}_{i,m}$, $\mathbf{P}_{0,j}$ a $\mathbf{P}_{l,j}$, kde $i = 0, \dots, l$, $j = 0, \dots, m$. Těmto hraničním křivkám odpovídají hraniční kužele $K_1^0(\mathbf{P}) \cdot \mathbb{R}$ a $K_2^0(\mathbf{P}) \cdot \mathbb{R}$, které jsou transversální, viz obr. 3.3.

K oběma těmto kuželům nalezneme hranice

$$F_1^+(K_1^0(\mathbf{P})) \leq 0, F_1^-(K_1^0(\mathbf{P})) \leq 0$$

pro kužel $K_1^0(\mathbf{P})$, kde F_1^+ a F_1^- jsou lineární rovnice hranice $K_1^0(\mathbf{P}) \cdot \mathbb{R}$. Analogicky najdeme

$$F_2^+(K_2^0(\mathbf{P})) \leq 0, F_2^-(K_2^0(\mathbf{P})) \leq 0$$



Obrázek 3.3: Hraniční křivky a jim odpovídající hraniční kužele.

pro kužel $K_2^0(\mathbf{P})$, kde F_2^+ a F_2^- jsou pak lineární rovnice hranice $K_2^0(\mathbf{P}) \cdot \mathbb{R}$.

Tyto hranice nyní využijeme ke konstrukci vnitřních řídicích bodů. Necht' jsou kužele $\tilde{K}_1^0(\mathbf{P})$, $\tilde{K}_2^0(\mathbf{P})$ sestavené z vnitřních řídicích bodů dané plochy. Abychom docílili injektivitu parametrizace, volíme vnitřní řídicí body tak, aby jejich odpovídající kužele $\tilde{K}_1^0(\mathbf{P}) \cdot \mathbb{R}$, $\tilde{K}_2^0(\mathbf{P}) \cdot \mathbb{R}$ byly uvnitř kuželů $K_1^0(\mathbf{P}) \cdot \mathbb{R}$ a $K_2^0(\mathbf{P}) \cdot \mathbb{R}$, resp. hranice těchto hraničních kuželů musí být současně hranice kuželů odpovídající vnitřním řídicím bodům. Získáme tak lineární podmínku pro injektivitu parametrizace ve tvaru:

$$\begin{aligned}
 F_2^+(\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}) + F_1^-(\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}) &\leq 0, \\
 F_2^-(\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}) + F_1^+(\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}) &\leq 0, \\
 F_2^+(\mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{i,j}) + F_1^-(\mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{i,j}) &\leq 0, \\
 F_2^-(\mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{i,j}) + F_1^+(\mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{i,j}) &\leq 0.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Tu použijeme v optimalizační metodě pro volbu řídicích bodů, kterou popíšeme na konci této sekce.

3.1.2 Optimalizační metoda

V této sekci se budeme věnovat hledání vnitřních řídicích bodů a zadefinujeme si podmínky pro ortogonální a uniformní parametrickou síť.

Počáteční konstrukce vnitřních řídicích bodů

Již v [2] jsme se okrajově věnovali volbě vnitřních řídicích bodů. Na vstupu jsme měli zadány čtyři okrajové křivky, jejichž příslušné řídicí polygony byly tvořeny řídicími body $\mathbf{P}_{0,j}$, $\mathbf{P}_{l,j}$, $\mathbf{P}_{i,0}$ a $\mathbf{P}_{i,m}$, kde $i = 0, \dots, l$, $j = 0, \dots, m$. Vnitřní řídicí body jsme pak určili jako ekvidistantní rozdělení úseček $\mathbf{P}_{0,j}\mathbf{P}_{l,j}$ a $\mathbf{P}_{i,0}\mathbf{P}_{i,m}$. Obě rozdělení jsme

sloučili zprůměrováním a dostali jsme vztah

$$\mathbf{P}_{i,j} = \frac{(1 - \frac{i}{l})\mathbf{P}_{0,j} + (\frac{i}{l})\mathbf{P}_{l,j} + (1 - \frac{j}{m})\mathbf{P}_{i,0} + (\frac{j}{m})\mathbf{P}_{i,m}}{2}. \quad (3.3)$$

Druhou možností je zkonstruovat vnitřní řídicí síť diskretní Coonsovou metodou popsanou v [14] a [15]. Tato konstrukce je založena na konstrukci bilineárního Coonsova plátu ve tvaru

$$\mathbf{P}(r, s) = \mathbf{R}_1(r, s) + \mathbf{R}_2(r, s) - \mathbf{T}(r, s),$$

kde \mathbf{R}_1 a \mathbf{R}_2 jsou přechodové plochy určené protějšními okrajovými křivkami, což je v podstatě vyjádření v čitateli (3.3). $\mathbf{T}(r, s)$ je hyperbolický paraboloid určený rohovými body $\mathbf{P}_{0,0}$, $\mathbf{P}_{0,m}$, $\mathbf{P}_{l,0}$ a $\mathbf{P}_{l,m}$. To si lze představit jako

$$\left[1 - \frac{i}{l} \quad \frac{i}{l}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,m} \\ \mathbf{P}_{l,0} & \mathbf{P}_{l,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j}{m} \\ \frac{j}{m} \end{bmatrix},$$

čímž získáme finální podobu diskretní Coonsovy metody na generování vnitřních řídicích bodů ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,j} &= (1 - \frac{i}{l})\mathbf{P}_{0,j} + (\frac{i}{l})\mathbf{P}_{l,j} + (1 - \frac{j}{m})\mathbf{P}_{i,0} + (\frac{j}{m})\mathbf{P}_{i,m} \\ &\quad - \left[1 - \frac{i}{l} \quad \frac{i}{l}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \mathbf{P}_{0,m} \\ \mathbf{P}_{l,0} & \mathbf{P}_{l,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j}{m} \\ \frac{j}{m} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Coonsova metoda je založena na znalosti řídicích bodů hraničních křivek. Jelikož nekladáme žádné speciální požadavky na řídicí body $\mathbf{P}_{0,j}$, $\mathbf{P}_{l,j}$, $\mathbf{P}_{i,0}$, $\mathbf{P}_{i,m}$, není vyloučené, že vzniklá počáteční konstrukce řídicích bodů nebude nejen optimální, ale může dojít i k samoprůnikům jednotlivých parametrických křivek dané oblasti.

Podmínky pro uniformní a ortogonální síť

Podmínka pro to, aby výsledná síť parametrických křivek B-spline oblasti byla co nejvíce ortogonální, bude vycházet z předpokladu, že chceme aby parametrické křivky $\mathbf{q}(r, s_{konst})$ a $\mathbf{q}(r_{konst}, s)$ byly navzájem kolmé. To bude splněno, pokud $\partial_r \mathbf{q}(r, s) \cdot \partial_s \mathbf{q}(r, s) = 0$. Abychom se vyhnuli problémům při výpočtu integrálu součinu parciálních derivací, použijeme úpravu

$$\begin{aligned} |\partial_r \mathbf{q}(r, s) \cdot \partial_s \mathbf{q}(r, s)| &\leq \|\partial_r \mathbf{q}(r, s)\| \cdot \|\partial_s \mathbf{q}(r, s)\| \leq \\ \frac{\|\partial_r \mathbf{q}(r, s)\|^2 + \|\partial_s \mathbf{q}(r, s)\|^2}{2} &\leq \|\partial_r \mathbf{q}(r, s)\|^2 + \|\partial_s \mathbf{q}(r, s)\|^2, \end{aligned} \quad (3.5)$$

která je odvozena z rovností v [16].

Dostaneme tak optimalizační funkci pro ortogonalitu ve tvaru

$$\min \iint_{\mathcal{P}} \|\partial_r \mathbf{q}(r, s)\|^2 + \|\partial_s \mathbf{q}(r, s)\|^2 dr ds. \quad (3.6)$$

Druhou podmínkou je uniformita, která nám zaručuje konstantní rozestupy mezi jednotlivými parametrickými křivkami. Tuto podmínku je možné odvodit z 1. základní formy plochy popsané v [5], podrobnější vysvětlení nalezneme v [17]. Následující rovnice popisuje podmínku uniformity

Algorithm 1: Optimalizace řídicí sítě.

vstup : Čtyři hraniční B-spline křivky

výstup: B-spline oblast ohraničená čtyřmi vstupními křivkami.

begin

1: Konstrukce vnitřních řídicích bodů \mathbf{P} Coonsovou konstrukcí, viz (3.4);

2: Sestavení podmínky z hraničních křivek:

$$F_1^+(K_1^0(\mathbf{P})) \leq 0, F_1^-(K_1^0(\mathbf{P})) \leq 0,$$

$$F_2^+(K_2^0(\mathbf{P})) \leq 0, F_2^-(K_2^0(\mathbf{P})) \leq 0;$$

3: Řešení optimalizačního problému složeného z funkce

$$\min_{\mathcal{P}} \iint \alpha(\|\partial_r \mathbf{q}(r, s)\|^2 + \|\partial_s \mathbf{q}(r, s)\|^2) \\ + (\|\partial_r \partial_r \mathbf{q}(r, s)\|^2 + \|\partial_s \partial_s \mathbf{q}(r, s)\|^2 + 2\|\partial_s \partial_r \mathbf{q}(r, s)\|) dr ds$$

a zvolené podmínky injektivit:

a: Sekvenční kvadratickou metodou:

$$G_{i,j} > 0.$$

b: Kvadratickou metodou:

$$F_2^+(\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}) + F_1^-(\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}) \leq 0,$$

$$F_2^-(\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}) + F_1^+(\mathbf{P}_{i+1,j} - \mathbf{P}_{i,j}) \leq 0,$$

$$F_2^+(\mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{i,j}) + F_1^-(\mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{i,j}) \leq 0,$$

$$F_2^-(\mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{i,j}) + F_1^+(\mathbf{P}_{i,j+1} - \mathbf{P}_{i,j}) \leq 0;$$

return B-spline oblast s parametrizací $\mathbf{q}(r, s)$.

$$\min \iint_{\mathcal{P}} (\|\partial_r \partial_r \mathbf{q}(r, s)\|^2 + \|\partial_s \partial_s \mathbf{q}(r, s)\|^2 + 2\|\partial_s \partial_r \mathbf{q}(r, s)\|) dr ds. \quad (3.7)$$

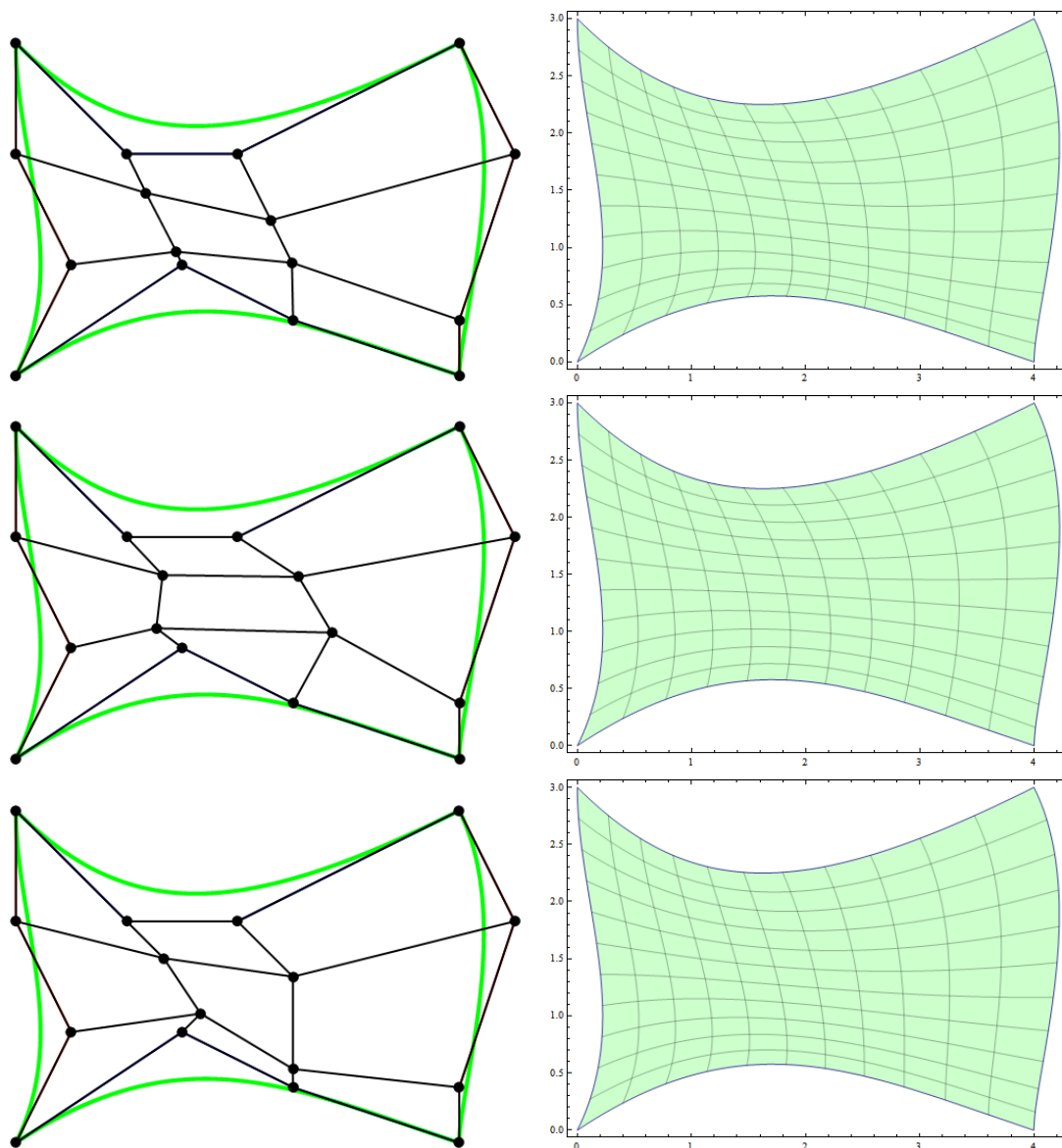
Výslednou optimalizační funkci získáme spojením obou podmínek (3.6) a (3.7):

$$\min \iint_{\mathcal{P}} \alpha(\|\partial_r \mathbf{q}(r, s)\|^2 + \|\partial_s \mathbf{q}(r, s)\|^2) \\ + (\|\partial_r \partial_r \mathbf{q}(r, s)\|^2 + \|\partial_s \partial_s \mathbf{q}(r, s)\|^2 + 2\|\partial_s \partial_r \mathbf{q}(r, s)\|) dr ds, \quad (3.8)$$

kde α je kladná konstanta.

Výsledný optimalizační algoritmus

Výsledný Algoritmus 1 má díky dvěma podmínkám injektivit dvě možné podoby. Při zvolení nelineární podmínky injektivit dostáváme oproti podmínce druhé značnou výhodu především v tom, že vstupní hraniční kužele nemusí být transversální, a přesto lze získat injektivní parametrizaci výsledné B-spline oblasti. Druhou možností



Obrázek 3.4: B-spline oblast v závislosti na vnitřních řídicích bodech – Nahoře: Počáteční Coonsova konstrukce; Uprostřed: Metoda založená na výpočtu Jacobiánu; Dole: Metoda transverzálních kuželů.

použijeme v případě, že hraniční kužele budou transversální. Její výhodou je linearity podmíněk (3.2), díky čemuž je výpočet jednodušší a rychlejší než u předchozí možnosti.

Obě metody můžeme porovnat na obr. 3.4, kde nahoře máme zkonstruovanou B-spline oblast bez použití optimalizace, uprostřed je použita metoda založená na výpočtu Jacobiho determinantu a dole je prezentována metoda transversálních kuželů.

3.2 Optimalizace 3D řídicí sítě

V této části se budeme věnovat optimalizaci řídicí sítě B-spline objemu. K tomu využijeme většinu poznatků z předchozí sekce, kde jsme stanovili podmínky pro nalezení výsledné parametrizace. Popíšeme optimalizační metodu, která nalezne vnitřní řídicí body B-spline oblasti tak, aby byly splněny námi dané podmínky – injektivní parametrizace, co nejvíce ortogonální a uniformní síť. Kompletní rozbor této optimalizace je popsán v [18].

3.2.1 Postačující podmínka pro injektivní B-spline parametrizaci

Definice 23. *Mějme parametrizaci $\mathbf{q}(r, s, t)$ zobrazující z $\mathcal{P} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ do $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Pak hraniční oblasti definujeme jako $\mathbf{q}(a, s, t)$, $\mathbf{q}(b, s, t)$, $\mathbf{q}(r, c, t)$, $\mathbf{q}(r, d, t)$, $\mathbf{q}(r, s, e)$ a $\mathbf{q}(r, s, f)$, $r \in [a, b]$, $s \in [c, d]$, $t \in [e, f]$.*

Regulární hraniční oblasti jsou analogií k regulárním hraničním křivkách z předchozí části. Jsou to takové oblasti $\mathbf{q}(a, s, t)$, $\mathbf{q}(b, s, t)$, $\mathbf{q}(r, c, t)$, $\mathbf{q}(r, d, t)$, $\mathbf{q}(r, s, e)$, $\mathbf{q}(r, s, f)$, které nemají žádné body samoprůniků a navzájem se neprotínají. Výjimkou jsou hraniční křivky těchto oblastí, které propojují jednotlivé sousední oblasti.

Jelikož je myšlenkový postup shodný s postupem z předchozí sekce, přistoupíme rovnou k Tvzení 24, které nám umožňuje posoudit, kdy je daná parametrizace injektivní. Dále si ukážeme dvě možné podmínky pro posouzení injektivní zvolené parametrizace.

Tvrzení 24. *Mějme C^1 spojitou parametrizaci $\mathbf{q} : \mathcal{P} \rightarrow \Omega$, která definuje regulární hraniční oblasti. Jestliže je Jacobiho determinant parametrizace \mathbf{q} nenulový, pak je tato parametrizace injektivní.*

Nelineární postačující podmínka

Tato postačující podmínka je založena na výpočtu Jacobiho determinantu dané parametrizace. Postupujeme analogicky jako u případu parametrizace B-spline oblasti.

Mějme

$$\mathbf{q} : (r, s, t) \in \mathcal{P} = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \rightarrow$$

$$\mathbf{q}(r, s, t) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \mathbf{P}_{i,j,k} N_i^f(r) N_j^g(s) N_k^h(t),$$

kde $\mathbf{P}_{i,j,k}$ jsou řídicí body a f, g, h stupně B-spline bázových funkcí $N_i^f(r)$, $N_j^g(s)$, $N_k^h(t)$.

Jednotlivé parciální derivace parametrizace \mathbf{q} jsou

$$\begin{aligned}\partial_r \mathbf{q}(r, s, t) &= \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \omega_{i,j,k}^1 \Delta_{i,j,k}^1 N_i^{f-1}(r) N_j^g(s) N_k^h(t), \\ \partial_s \mathbf{q}(r, s, t) &= \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^n \omega_{i,j,k}^2 \Delta_{i,j,k}^2 N_i^f(r) N_j^{g-1}(s) N_k^h(t), \\ \partial_t \mathbf{q}(r, s, t) &= \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^{n-1} \omega_{i,j,k}^3 \Delta_{i,j,k}^3 N_i^f(r) N_j^g(s) N_k^{h-1}(t),\end{aligned}$$

kde $\omega_{i,j,k}^1$, $\omega_{i,j,k}^2$, $\omega_{i,j,k}^3$ jsou kladné faktory a pro $\Delta_{i,j,k}^1$, $\Delta_{i,j,k}^2$, $\Delta_{i,j,k}^3$ platí

$$\begin{aligned}\Delta_{i,j,k}^1 &= (\Delta_{i,j,k}^{1,x}, \Delta_{i,j,k}^{1,y}, \Delta_{i,j,k}^{1,z}) = \mathbf{P}_{i+1,j,k} - \mathbf{P}_{i,j,k}, \\ \Delta_{i,j,k}^2 &= (\Delta_{i,j,k}^{2,x}, \Delta_{i,j,k}^{2,y}, \Delta_{i,j,k}^{2,z}) = \mathbf{P}_{i,j+1,k} - \mathbf{P}_{i,j,k}, \\ \Delta_{i,j,k}^3 &= (\Delta_{i,j,k}^{3,x}, \Delta_{i,j,k}^{3,y}, \Delta_{i,j,k}^{3,z}) = \mathbf{P}_{i,j,k+1} - \mathbf{P}_{i,j,k}.\end{aligned}$$

Zmíněné parciální derivace použijeme pro výpočet Jacobiho determinantu $J(\mathbf{q}(r, s, t))$, jehož výpočtem ověříme injektivitu. Pokud bude $J(\mathbf{q}(r, s, t)) > 0$ pak nebude mít parametrizace $\mathbf{q}(r, s, t)$ žádné samoprůniky. K výpočtu Jacobiho determinantu použijeme následující úpravu

$$\begin{aligned}J(\mathbf{q}(r, s, t)) &= \begin{vmatrix} q_r^x & q_s^x & q_t^x \\ q_r^y & q_s^y & q_t^y \\ q_r^z & q_s^z & q_t^z \end{vmatrix} \\ &= \sum_L N_i^{f-1}(r) N_j^g(s) N_k^h(t) N_{i'}^f(r) N_{j'}^{g-1}(s) N_{k'}^h(t) N_{i''}^f(r) N_{j''}^g(s) N_{k''}^{h-1}(t) \\ &\quad \omega_{i,j,k}^1 \omega_{i',j',k'}^2 \omega_{i'',j'',k''}^3 \begin{vmatrix} \Delta_{i,j,k}^{1,x} & \Delta_{i,j,k}^{2,x} & \Delta_{i,j,k}^{3,x} \\ \Delta_{i',j',k'}^{1,y} & \Delta_{i',j',k'}^{2,y} & \Delta_{i',j',k'}^{3,y} \\ \Delta_{i'',j'',k''}^{1,z} & \Delta_{i'',j'',k''}^{2,z} & \Delta_{i'',j'',k''}^{3,z} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=0}^{3l-1} \sum_{j=0}^{3m-1} \sum_{k=0}^{3n-1} G_{i,j,k} N_i^{3f-1}(r) N_j^{3g-1}(s) N_k^{3h-1}(t),\end{aligned}\tag{3.9}$$

kde L je $i = 0, \dots, l-1$, $j = 0, \dots, m$, $k = 0, \dots, n$, $i' = 0, \dots, l$, $j' = 0, \dots, m-1$, $k' = 0, \dots, n$, $i'' = 0, \dots, l$, $j'' = 0, \dots, m$, $k'' = 0, \dots, n-1$.

Rozepsáním Jacobiho determinantu s pomocí Tvrzení 24 získáme podmínku pro injektivní parametrizaci v podobě následující věty, kterou použijeme pro konstrukci vnitřních řídicích bodů ve výsledném optimalizačním algoritmu.

Věta 25. *Jestliže je $G_{i,j,k} > 0$, pak i $J(\mathbf{q}(r, s, t)) > 0$, z toho vyplývá, že parametrizace $\mathbf{q}(r, s, t)$ nemá žádné samoprůniky.*

Lineární postačující podmínka

Druhá podmínka, kterou si popíšeme, je založená na transverzálnosti kuželů, resp. kotransverzálnosti kuželů. Principiálně funguje stejně jako u B-spline oblastí. Konstrukcí kuželů příslušných jednotlivým vektorům sestaveným z řídicích bodů zjistíme, zda-li se jedná o injektivní parametrizaci. Dále pak námi popsaným algoritmem upravíme řídicí body tak, aby výsledná parametrizace byla injektivní.

Definice 26. *Nechť $K_1(\mathbf{P})$ je konvexní kužel v \mathbb{R}^3 tvořený polopřímkami $\frac{\Delta_{i,j,k}^1}{\|\Delta_{i,j,k}^1\|}$.*

Analogicky pak definujeme kužele $K_2(\mathbf{P})$, $K_3(\mathbf{P})$ tvořené $\frac{\Delta_{i,j,k}^2}{\|\Delta_{i,j,k}^2\|}$, $\frac{\Delta_{i,j,k}^3}{\|\Delta_{i,j,k}^3\|}$.

Označením $K_1 \cdot \mathbb{R}$ ($K_2 \cdot \mathbb{R}$ a $K_3 \cdot \mathbb{R}$) rozumíme kužel, který je tvořený přímkami procházejícími počátkem se směrovými vektory $\frac{\Delta_{i,j,k}^1}{\|\Delta_{i,j,k}^1\|}$ ($\frac{\Delta_{i,j,k}^2}{\|\Delta_{i,j,k}^2\|}$ a $\frac{\Delta_{i,j,k}^3}{\|\Delta_{i,j,k}^3\|}$).

Víme, že dva kužele K_1 , K_2 jsou transverzální, jestliže $K_1 \cdot \mathbb{R}$ a $K_2 \cdot \mathbb{R}$ mají průnik pouze v bodě $\{0\}$. Pro tři kužele definujeme pojem *kotransverzálnost* v následující definici.

Definice 27. *K_1 , K_2 , K_3 jsou kotransverzální, jestliže platí následující dvě podmínky:*

- *konvexní obaly kuželů K_1 , K_2 , K_3 mají průnik pouze v bodě $\{0\}$,*
- *konvexní obaly každé dvojice kuželů a kuželu zbývajících musí být transverzální.*

Definice 28. *Mějme šest hraničních oblastí, které ohraničují daný B-spline objem. Řídicí body těchto hraničních oblastí jsou $\mathbf{P}_{0,j,k}$, $\mathbf{P}_{l,j,k}$, $\mathbf{P}_{i,0,k}$, $\mathbf{P}_{i,m,k}$, $\mathbf{P}_{i,j,0}$ a $\mathbf{P}_{i,j,n}$. Definujeme hraniční kužel $K_1^0(\mathbf{P})$ generovaný vektory $\Delta_{i,j,0}^1$ a $\Delta_{i,j,n}^1$. Analogicky pak kužele $K_2^0(\mathbf{P})$ a $K_3^0(\mathbf{P})$ generované vektory $\Delta_{0,j,k}^2$, $\Delta_{l,j,k}^2$ a $\Delta_{i,0,k}^3$, $\Delta_{i,m,k}^3$.*

Lemma 29. *Jestliže jsou konvexní kužele K_1^0 , K_2^0 a K_3^0 , které neobsahují nulový vektor, kotransverzální, pak má determinant $|\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3|$ konstantní hodnotu pro všechny $\mathbf{v}_1 \in K_1^0$, $\mathbf{v}_2 \in K_2^0$ a $\mathbf{v}_3 \in K_3^0$.*

Důkaz Lemmatu 29 nalezneme v [25].

Nyní přistoupíme k samotné konstrukci vnitřních řídicích bodů. Mějme šest hraničních oblastí, které ohraničují daný objem B-spline objem. Z těchto hraničních oblastí vytvoříme hraniční kužele K_1^0 , K_2^0 a K_3^0 podle Definice 28. Nezbytnou podmínkou pro následující konstrukci je ověření, že hraniční kužele K_1^0 , K_2^0 a K_3^0 jsou kotransverzální. K tomu použijeme předchozí Lemma 29. Stejně jako v předchozí části i zde stanovíme hranice těchto kuželů. V tomto případě půjde o hraniční roviny \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 a \mathbf{R}_3 .

Myšlenka konstrukce těchto rovin je taková, že nejprve sestrojíme hraniční rovinu \mathbf{R}_0 , pro níž platí, že pro každý vektor \mathbf{w} z hraničního kuželu K_1^0 , K_2^0 nebo K_3^0 platí $\mathbf{R}_0(\mathbf{w}) > 0$.

Hraniční rovinu \mathbf{R}_1 konstruuujeme tak, že pro každý vektor \mathbf{w} z $K_2^0 \cup K_3^0$ platí $\mathbf{R}_1(\mathbf{w}) > 0$ a zároveň pro každý vektor \mathbf{v} z K_1^0 platí $\mathbf{R}_1(\mathbf{v}) < 0$. Analogicky pro roviny \mathbf{R}_2 , \mathbf{R}_3 :

- \mathbf{R}_2 : $\forall \mathbf{w} \in K_1^0 \cup K_3^0$ platí $\mathbf{R}_2(\mathbf{w}) > 0$ a $\forall \mathbf{v} \in K_2^0$ platí $\mathbf{R}_2(\mathbf{v}) < 0$,

- \mathbf{R}_3 : $\forall \mathbf{w} \in K_1^0 \cup K_2^0$ platí $\mathbf{R}_3(\mathbf{w}) > 0$ a $\forall \mathbf{v} \in K_3^0$ platí $\mathbf{R}_3(\mathbf{v}) < 0$.

Nyní přichází na řadu nalezení vnitřních řídicích bodů. Jelikož máme sestrojeny hraniční roviny, můžeme stanovit podmínky pro jejich volbu. Pro vnitřní řídicí body $\mathbf{P}_{i,j,k}$ daného B-spline objemu musí platit následující rovnosti:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0(\Delta_{i,j,k}^1) &> 0, \mathbf{R}_1(\Delta_{i,j,k}^1) < 0, \mathbf{R}_2(\Delta_{i,j,k}^1) > 0, \mathbf{R}_3(\Delta_{i,j,k}^1) > 0, \\ \mathbf{R}_0(\Delta_{i,j,k}^2) &> 0, \mathbf{R}_1(\Delta_{i,j,k}^2) > 0, \mathbf{R}_2(\Delta_{i,j,k}^2) < 0, \mathbf{R}_3(\Delta_{i,j,k}^2) > 0, \\ \mathbf{R}_0(\Delta_{i,j,k}^3) &> 0, \mathbf{R}_1(\Delta_{i,j,k}^3) > 0, \mathbf{R}_2(\Delta_{i,j,k}^3) > 0, \mathbf{R}_3(\Delta_{i,j,k}^3) < 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde $\Delta_{i,j,k}^1 = \mathbf{P}_{i+1,j,k} - \mathbf{P}_{i,j,k}$, $\Delta_{i,j,k}^2 = \mathbf{P}_{i,j+1,k} - \mathbf{P}_{i,j,k}$ a $\Delta_{i,j,k}^3 = \mathbf{P}_{i,j,k+1} - \mathbf{P}_{i,j,k}$.

Výše zmíněné rovnice (3.10) nám stanovují podmínku pro injektivní parametrizaci, kterou použijeme ve výsledné optimalizační metodě pro hledání vnitřních řídicích bodů. Podotkněme, že předchozí dvě podmínky nám zaručují pouze lokální injektivitu a pro globální injektivní parametrizaci je nutné, aby byla splněna regularita všech šesti hraničních oblastí daného B-spline objemu.

3.2.2 Optimalizační metoda

V této části se zaměříme na hledání počátečních vnitřních řídicích bodů diskrétní Coonsovou metodou, dále také na podmínky ortogonality a uniformity parametrické sítě. Na konci pak zmíníme výsledný optimalizační algoritmus, který budeme prezentovat na grafickém výstupu.

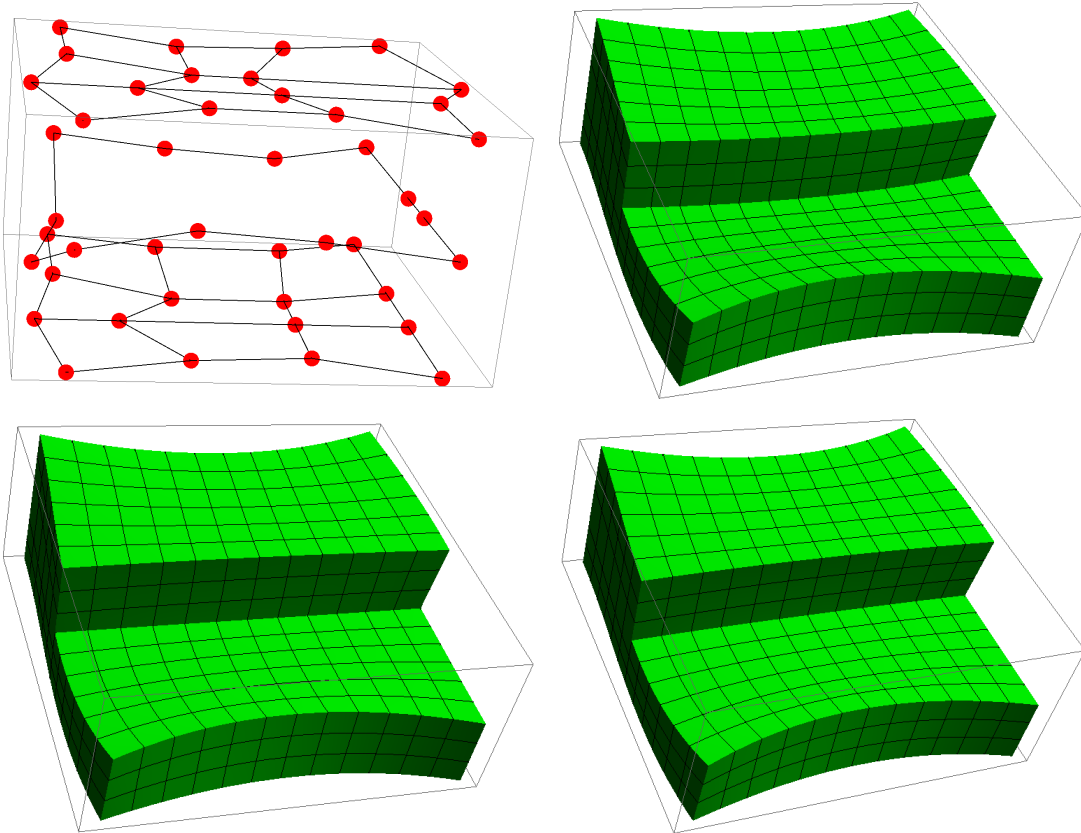
Počáteční konstrukce vnitřních řídicích bodů

K sestrojení vnitřních řídicích bodů použijeme zobecněnou diskrétní Coonsovu metodu pro 3D objekty. Vycházíme z diskrétní Coonsovy metody popsané v [14], jejíž tvar se skládá ze dvou přechodových ploch a hyperbolického paraboloidu. Pro 3D objekty použijeme Coonsovu metodu z [18, 3].

Nechť jsou zadány hraniční oblasti s řídicími body $\mathbf{P}_{0,j,k}$, $\mathbf{P}_{l,j,k}$, $\mathbf{P}_{i,0,k}$, $\mathbf{P}_{i,m,k}$, $\mathbf{P}_{i,j,0}$, $\mathbf{P}_{i,j,n}$, pak vnitřní řídicí body zkonstruujeme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{i,j,k} &= (1 - \frac{i}{l})\mathbf{P}_{0,j,k} + (\frac{i}{l})\mathbf{P}_{l,j,k} + (1 - \frac{j}{m})\mathbf{P}_{i,0,k} + (\frac{j}{m})\mathbf{P}_{i,m,k} + (1 - \frac{k}{n})\mathbf{P}_{i,j,0} + (\frac{k}{n})\mathbf{P}_{i,j,n} \\ &- [1 - \frac{i}{l} \quad \frac{i}{l}] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0,k} & \mathbf{P}_{0,m,k} \\ \mathbf{P}_{l,0,k} & \mathbf{P}_{l,m,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j}{m} \\ \frac{j}{m} \end{bmatrix} - [1 - \frac{j}{m} \quad \frac{j}{m}] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{i,0,0} & \mathbf{P}_{i,0,n} \\ \mathbf{P}_{i,m,0} & \mathbf{P}_{i,m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{k}{n} \\ \frac{k}{n} \end{bmatrix} \\ &- [1 - \frac{k}{n} \quad \frac{k}{n}] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,j,0} & \mathbf{P}_{l,j,0} \\ \mathbf{P}_{0,j,n} & \mathbf{P}_{l,j,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{i}{l} \\ \frac{i}{l} \end{bmatrix} \\ &+ (1 - \frac{k}{n}) \left[[1 - \frac{i}{l} \quad \frac{i}{l}] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0,0} & \mathbf{P}_{0,m,0} \\ \mathbf{P}_{l,0,0} & \mathbf{P}_{l,m,0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j}{m} \\ \frac{j}{m} \end{bmatrix} \right] \\ &+ \frac{k}{n} \left[[1 - \frac{i}{l} \quad \frac{i}{l}] \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{0,0,n} & \mathbf{P}_{0,m,n} \\ \mathbf{P}_{l,0,n} & \mathbf{P}_{l,m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{j}{m} \\ \frac{j}{m} \end{bmatrix} \right], \end{aligned} \quad (3.11)$$

kde první řádek obsahuje přechodové plochy, resp. oblasti a druhý až čtvrtý řádek systém hyperbolických paraboloidů. Podotkněme, že tato konstrukce může vést k samoprůnikům parametrických křivek, které budou v cílové optimalizační metodě odstraněny.



Obrázek 3.5: Vlevo nahoře: Vstupní řídicí síť; Vpravo nahoře: Část objemu, jehož řídicí body nejsou optimalizovány; Vlevo dole: Konstrukce pomocí metody založené na výpočtu Jacobiánu; Vpravo dole: Konstrukce pomocí metody kotransverzálních kuželů.

Ortogonalita a uniformita

Nejprve si stanovíme podmínku pro ortogonalitu výsledné sítě daného B-spline objektu. Abychom docílili toho, že výsledná síť bude co nejvíce ortogonální, budeme požadovat, aby jednotlivé parametrické křivky $\mathbf{q}(r, s_{konst}, t_{konst})$, $\mathbf{q}(r_{konst}, s, t_{konst})$, $\mathbf{q}(r_{konst}, s_{konst}, t)$ byly na sebe kolmé. Parametrické křivky jsou na sebe navzájem kolmé právě tehdy, když jsou na sebe kolmé jejich tečné vektory. Dostaneme tak rovnosti

$$\partial_r \mathbf{q}(r, s, t) \cdot \partial_s \mathbf{q}(r, s, t) = 0, \quad \partial_r \mathbf{q}(r, s, t) \cdot \partial_t \mathbf{q}(r, s, t) = 0, \quad \partial_s \mathbf{q}(r, s, t) \cdot \partial_t \mathbf{q}(r, s, t) = 0.$$

Algorithm 2: Optimalizace řídicí sítě.

vstup : Šest hraničních B-spline oblastí

výstup: B-spline objem ohraničený šesti vstupními oblastmi.

begin

1: Konstrukce vnitřních řídicích bodů \mathbf{P} zobecněnou Coonsovou konstrukcí, viz (3.11);

2: Sestavení podmínky (3.10) z hraničních křivek;

3: Řešení optimalizačního problému složeného z funkce

$$\begin{aligned} & \min \iiint_{\mathcal{P}} \|\partial_r \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_s \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 \\ & + \alpha (\|\partial_r \partial_r \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_s \partial_s \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_t \partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 \\ & + 2\|\partial_r \partial_s \mathbf{q}(r, s, t)\| + 2\|\partial_r \partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\| + 2\|\partial_s \partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\|) dr ds dt, \end{aligned}$$

a jedné z podmínek injektivit:

a: Sekvenční kvadratickou metodou:

$$G_{i,j,k} > 0.$$

b: Kvadratickou metodou:

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_0(\Delta_{i,j,k}^1) > 0, \mathbf{R}_1(\Delta_{i,j,k}^1) < 0, \mathbf{R}_2(\Delta_{i,j,k}^1) > 0, \mathbf{R}_3(\Delta_{i,j,k}^1) > 0, \\ & \mathbf{R}_0(\Delta_{i,j,k}^2) > 0, \mathbf{R}_1(\Delta_{i,j,k}^2) > 0, \mathbf{R}_2(\Delta_{i,j,k}^2) < 0, \mathbf{R}_3(\Delta_{i,j,k}^2) > 0, \\ & \mathbf{R}_0(\Delta_{i,j,k}^3) > 0, \mathbf{R}_1(\Delta_{i,j,k}^3) > 0, \mathbf{R}_2(\Delta_{i,j,k}^3) > 0, \mathbf{R}_3(\Delta_{i,j,k}^3) < 0; \end{aligned}$$

return B-spline objem s parametrizací $\mathbf{q}(r, s, t)$.

Pro konstrukci výsledné podmínky použijeme nerovnost (3.5) ve tvaru

$$|\partial_r \mathbf{q}(r, s) \cdot \partial_s \mathbf{q}(r, s)| \leq \|\partial_r \mathbf{q}(r, s)\|^2 + \|\partial_s \mathbf{q}(r, s)\|^2 \quad (3.12)$$

a aplikujeme na předchozí rovnosti:

$$\begin{aligned} & |\partial_r \mathbf{q}(r, s, t) \cdot \partial_s \mathbf{q}(r, s, t)| + |\partial_r \mathbf{q}(r, s, t) \cdot \partial_t \mathbf{q}(r, s, t)| + |\partial_s \mathbf{q}(r, s, t) \cdot \partial_t \mathbf{q}(r, s, t)| \\ & \leq \frac{\|\partial_r \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_s \mathbf{q}(r, s, t)\|^2}{2} + \frac{\|\partial_r \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\|^2}{2} \\ & \quad + \frac{\|\partial_s \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\|^2}{2}, \end{aligned}$$

získáme tak optimalizační funkci pro ortogonální síť ve tvaru

$$\iiint_{\mathcal{P}} \|\partial_r \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_s \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 dr ds dt. \quad (3.13)$$

Pro podmínku uniformní sítě použijeme již známý vztah (3.7), který rozšíříme pro 3D síť do výsledného tvaru

$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{P}} (\|\partial_r \partial_r \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_s \partial_s \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_t \partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 \\ & + 2\|\partial_r \partial_s \mathbf{q}(r, s, t)\| + 2\|\partial_r \partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\| + 2\|\partial_s \partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\|) dr ds dt. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Složením a minimalizováním obou podmínek (3.13), (3.14) získáme optimalizační funkci

$$\begin{aligned} \min \int \int \int_{\mathcal{P}} & \|\partial_r \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_s \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 \\ & + \alpha (\|\partial_r \partial_r \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_s \partial_s \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 + \|\partial_t \partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\|^2 \\ & + 2\|\partial_r \partial_s \mathbf{q}(r, s, t)\| + 2\|\partial_r \partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\| + 2\|\partial_s \partial_t \mathbf{q}(r, s, t)\|) dr ds dt, \end{aligned} \quad (3.15)$$

kde α je kladná konstanta.

3.2.3 Výsledný optimalizační algoritmus

Shrneme-li obě varianty optimalizační metody, získáme shodné klady a zápory jako u metod pro B-spline oblasti. První metoda není závislá na kotransverzálnosti hraničních oblastí oproti druhé, ale její výpočet je pomalejší a složitější. Navíc pro první metodu, která používá sekvenční kvadratickou metodu (iterativně řeší optimalizační problém, kde posloupnosti iterací konvergují k minimu), můžeme získat pouze lokální minimum. Globální minimum je v tomto případě závislé na poloze vnitřních počátečních řídicích bodů.

Na obr. 3.5 vidíme srovnání těchto metod, které jsou použity ve výsledném Algoritmu 2. Vlevo nahoře je vstupní řídicí síť hraničních oblastí, vpravo pak výřez B-spline objemu, jehož řídicí body jsme našli zobecněnou Coonsovou metodou. Vlevo dole vidíme tento B-spline objem s optimalizovanými řídicími body pomocí metody využívající výpočet Jacobiho determinantu, vpravo je demonstrace metody kotransverzálních kuželů.

Kapitola 4

Rotační tělesa a využití rotace okolo osy

V této kapitole navrhne dvě metody pro nalezení parametrizace NURBS objemu, tj. parametrizace oblasti ohraničené speciálními třídami NURBS ploch. Konkrétně se budeme zabývat:

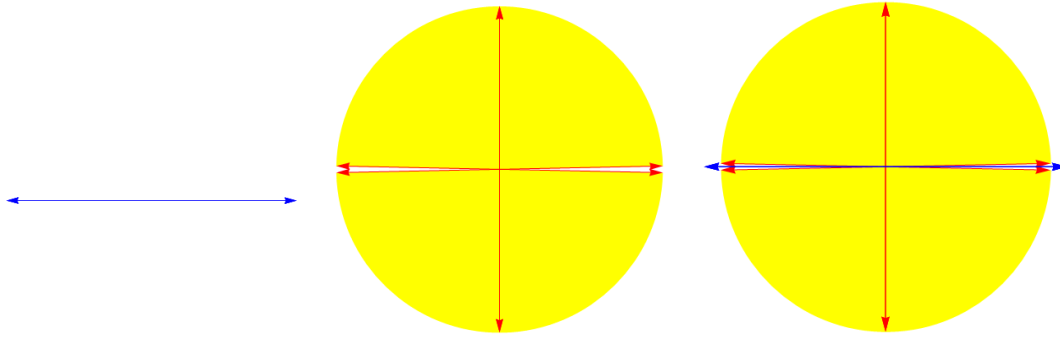
- vytvářením rotačních objemů, jejíž hraniční plocha je určena rotací NURBS křivky okolo zvolené osy,
- popisem objemu ohraničeného NURBS plochou určenou řídicí sítí splňující speciální podmínky – taková tělesa budeme dále nazývat zobecněné rotační objemy.

Podrobně si vysvětlíme konstrukce obou zmíněných objemů – popíšeme jednotlivé kroky našeho postupu, kde kromě nových poznatků využijeme již známých konstrukcí NURBS ploch (viz [2]). Pro názornost budeme prezentovat postup na příkladu a to jak početně, tak graficky. Na konci každé sekce shrneme danou metodu do výsledného algoritmu.

4.1 Rotační tělesa

V této sekci se budeme zabývat konstrukcí rotačních NURBS objemů. Ukážeme si dvě možné metody pro získání hledaného popisu, pro který budeme požadovat vstupní data v podobě vstupní NURBS křivky, která je určena řídicím polygonem $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_l\}$, příslušnými váhami $\mathbf{W} = \{W_0, \dots, W_l\}$ a vektorem parametrizace \mathbf{R} . Pro jednoduchost zvolíme zkrácené značení ve tvaru $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$. Druhým možným (ne nutným) požadavkem je osa rotace ω , okolo které bude tato vstupní NURBS křivka rotovat. V případě, že tato osa není zvolena, je automaticky nastavena jako spojnice prvního a posledního řídicí bodu vstupní řídicí křivky. Rotací vstupní NURBS křivky okolo této osy získáme hranici – hraniční NURBS plochu hledaného NURBS objemu. Z těchto dat za použití určitých pravidel, která si popíšeme dále, zkonstruujeme výsledný NURBS objem určený sítí řídicích bodů \mathbf{GS} , váhami řídicích bodů \mathbf{WS} a třemi vektory parametrizace $\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$.

Při vytváření řídicí sítě se můžeme setkat s nežádoucími průniky jednotlivých parametrických křivek ve stejném parametru, resp. průniky jednotlivých *r-křivek*,



Obrázek 4.1: Hraniční kužele – Vlevo: $K_1^0(\bar{\mathbf{P}})$; Uprostřed: $K_2^0(\bar{\mathbf{P}})$; Vpravo: Transverzální $K_1^0(\bar{\mathbf{P}})$, $K_2^0(\bar{\mathbf{P}})$.

s-křivka, t-křivka. Budeme proto požadovat pro řídicí body vstupní NURBS křivky splnění následující podmínky, abychom se těmito problémy vyhnuli.

Věta 30. *Mějme osu rotace ω , vstupní otevřenou NURBS křivku $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$ a necht' $\mathbf{P}'_0, \mathbf{P}'_1, \dots, \mathbf{P}'_l$ jsou ortogonální průměty řídicích bodů $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_l$ NURBS křivky do osy rotace ω . Jestliže bude pro řídicí body v Algoritmech 3, 4 splněna nerovnost*

$$\|\mathbf{P}'_0 \mathbf{P}'_i\| < \|\mathbf{P}'_0 \mathbf{P}'_{i+1}\|,$$

kde $i = 0, 1, \dots, l - 1$, tak se parametrické křivky ve stejném parametru (jednotlivé *r-křivky, s-křivky nebo t-křivky*) nebudou ve výsledném NURBS objemu protínat.

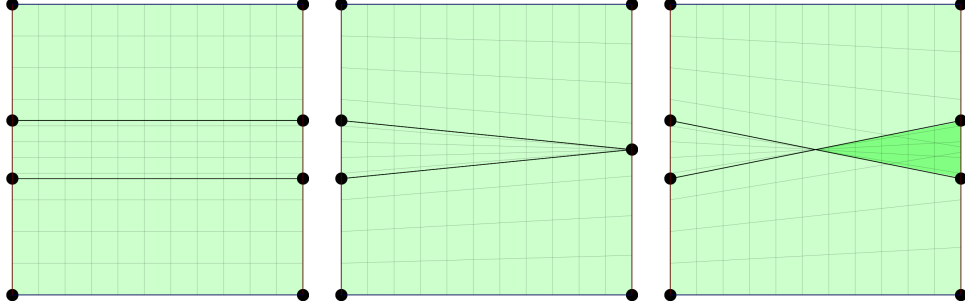
Důkaz:

K důkazu Věty 30 využijeme znalostí o injektivních kuželech z předchozí kapitoly, který si rozdělíme na dvě části:

1. Necht' \mathbf{P}_0 nebo \mathbf{P}_l není na ose rotace ω . Potom má řídicí síť tvar

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_0 & \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}'_1 & \mathbf{P}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{P}'_l & \mathbf{P}_l \end{pmatrix}$$

a $\mathbf{P}'_0 \neq \mathbf{P}_0$ nebo $\mathbf{P}'_l \neq \mathbf{P}_l$. Dále sestrojíme hraniční kužele $K_1^0(\bar{\mathbf{P}})$, $K_2^0(\bar{\mathbf{P}})$. Kužel $K_1^0(\bar{\mathbf{P}})$ vznikne z vektorů $\mathbf{P}'_0 \mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}'_l \mathbf{P}_l$. Jelikož jsme předpokládali, že alespoň jeden řídicí bod z $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_l$ neleží na ose rotace ω , tak výsledný kužel (úsečka) bude ve tvaru na obr. 4.1 vlevo. Kužel $K_2^0(\bar{\mathbf{P}})$ bude složen z vektorů $\mathbf{P}'_i \mathbf{P}'_{i+1}$, které leží na ose rotace ω , a z vektorů $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}$. Jelikož tyto vektory musí splňovat Větu 30, nebude žádný z těchto vektorů nikdy kolmý na osu rotace ω . Hraniční kužel $K_2^0(\bar{\mathbf{P}})$ si můžeme prohlédnout na obr. 4.1 uprostřed. Spojením obou hraničních kuželů na obr. 4.1 vpravo vidíme, že není možné, aby se protínaly (pouze v bodě $\{0\}$), proto jsou transverzální a tudíž bude parametrizace dané oblasti injektivní.



Obrázek 4.2: Vlevo: Řídící body splňující Větu 30; Uprostřed: Posunutí dvou řídicích bodů na sebe; Vpravo: Následné překřížení těchto dvou vybraných řídicích bodů. Tmavě zelený trojúhelník této plochy znázorňuje překrytí této plochy – překřížení jednotlivých parametrických křivek v určitém parametru.

2. Nechtě $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_l$ jsou na ose rotace ω . Pak hraniční kužel $K_1^0(\bar{\mathbf{P}})$ neobsahuje žádný vektor, resp. pouze bod $\{0\}$. Výsledný tvar obou hraničních kuželů je tedy shodný s obr. 4.1 uprostřed, tudíž jde o transversální případ a parametrizace je opět injektivní. \square

Princip si můžeme demonstrovat na obr. 4.2. Ve druhém a třetím případě vidíme nesplnění Věty 30 a tudíž se nám některé parametrické křivky nechtěně kříží. Důvodem je prohození pořadí řídicích bodů, které jsou pro názornost propojeny černou úsečkou.

Nyní již podrobně popíšeme dvě zmíněné metody, u kterých je nutné podotknout, že hlavní myšlenkou je použití NURBS popisu kruhové oblasti, viz [2].

4.1.1 NURBS objem vzniklý rotací NURBS oblasti

Mějme dánu NURBS křivku $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$ a osu rotace ω . Abychom mohli sestavit NURBS objem, musíme nejprve sestavit NURBS oblast rotující kolem zadané osy ω

$$\bar{\mathbf{Q}} := [\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{W}}, \mathbf{R}, \mathbf{S}],$$

určenou řídicí sítí $\bar{\mathbf{P}}$, váhami řídicích bodů $\bar{\mathbf{W}}$ této řídicí sítě a druhým vektorem parametrizace \mathbf{S} .

Konstrukci oblasti $\bar{\mathbf{Q}}$ rozlišíme na tři případy:

1. vstupní NURBS křivka je uzavřená a bude tak tvořit hranici oblasti $\bar{\mathbf{Q}}$,
2. vstupní NURBS křivka není uzavřená a $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_l$ jsou na ose rotace ω ,
3. vstupní NURBS křivka není uzavřená a $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_l$ nejsou na ose rotace ω .

První případ je od druhého a třetího odlišný, proto jej popíšeme později. Postup u druhého a třetího je shodný, pouze s tím rozdílem, že ve druhém případě je oblast $\bar{\mathbf{Q}}$ ohraničena pouze vstupní NURBS křivkou a osou ω . Pokud \mathbf{P}_0 nebo \mathbf{P}_l neleží na

ose ω , vytvoříme umělou hranici jako spojnicí řídicího bodu \mathbf{P}_0 (\mathbf{P}_l) s ortogonálním průmětem tohoto bodu do osy ω . Jelikož následující postup (Algoritmus 3) bude založen právě na ortogonálních průmětech řídicích bodů \mathbf{P}_i , kde $i = 0, 1, \dots, l$, do osy rotace ω , můžeme tak řešení případu 2 a 3 sdružit do jednoho.

Nechť oblast $\bar{\mathbf{Q}}$ je ohraničena křivkou \mathbf{Q} , osou ω a dvěma úsečkami tvořenými řídicími body $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}'_0$ a $\mathbf{P}_l, \mathbf{P}'_l$, kde \mathbf{P}'_0 a \mathbf{P}'_l jsou ortogonální průměty řídicích bodů \mathbf{P}_0 a \mathbf{P}_l do osy ω , pak řídicí síť $\bar{\mathbf{P}}$ oblasti $\bar{\mathbf{Q}}$ můžeme zapsat ve tvaru

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_0 & \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}'_1 & \mathbf{P}_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{P}'_l & \mathbf{P}_l \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_l$ jsou řídicí body křivky \mathbf{Q} a $\mathbf{P}'_0, \dots, \mathbf{P}'_l$ jsou ortogonální průměty řídicích bodů \mathbf{P}_i , kde $i = 0, \dots, l$, do osy rotace ω , pro které platí Věta 30. V tomto případě má vektor parametrizace \mathbf{S} tvar $(0, 0, 1, 1)$.

Pokud bychom si ovšem chtěli vektor parametrizace \mathbf{S} zvolit, anebo bychom požadovali, aby řídicí síť měla více řídicích bodů, resp. měla další vnitřní řídicí body, pak by síť $\bar{\mathbf{P}}$ byla ve tvaru

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{0,0} = \mathbf{P}'_0 & \mathbf{G}_{0,1} & \dots & \mathbf{G}_{0,m-1} & \mathbf{G}_{0,m} = \mathbf{P}_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{G}_{l,0} = \mathbf{P}'_l & \mathbf{G}_{l,1} & \dots & \mathbf{G}_{l,m-1} & \mathbf{G}_{l,m} = \mathbf{P}_l \end{pmatrix},$$

kde body $\mathbf{G}_{i,j}$ pro $i = 1, \dots, l-1$ a $j = 1, \dots, m-1$ jsou volitelné vnitřní řídicí body. $\mathbf{G}_{0,j}, \mathbf{G}_{l,j}$ pro $j = 0, \dots, m$ jsou řídicí body na hranici tvořené body $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}'_0$ a $\mathbf{P}_l, \mathbf{P}'_l$. V případě, že \mathbf{P}_0 (\mathbf{P}_l) leží na ose ω , platí $\mathbf{P}'_0 = \mathbf{G}_{0,1} = \dots = \mathbf{G}_{0,m-1} = \mathbf{P}_0$ ($\mathbf{P}'_l = \mathbf{G}_{l,1} = \dots = \mathbf{G}_{l,m-1} = \mathbf{P}_l$). Volba vektoru parametrizace \mathbf{S} je závislá na počtu řídicích bodů, resp. jelikož pracujeme s neperiodickými vektory parametrizace, bude počet nenulových parametrů s ve vektoru parametrizace \mathbf{S} roven právě $m+1$.

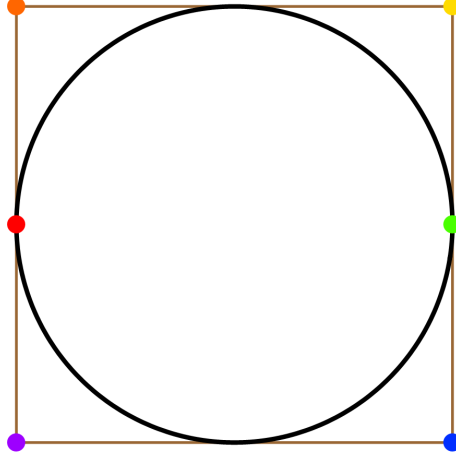
Pro danou řídicí síť $\bar{\mathbf{P}}$ volíme matici vah

$$\bar{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} \bar{W}_{0,0} & \bar{W}_{0,1} & \dots & \bar{W}_{0,m-1} & \bar{W}_{0,m} = W_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \bar{W}_l & \bar{W}_{l,1} & \dots & \bar{W}_{l,m-1} & \bar{W}_{l,m} = W_l \end{pmatrix},$$

kde W_0, \dots, W_l jsou váhy řídicích bodů vstupní křivky. $\bar{W}_{i,j}$ jsou pro $i = 0, \dots, l$ a $j = 0, \dots, m-1$ volitelné.

Nyní máme hledanou NURBS oblast $\bar{\mathbf{Q}} := [\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{W}}, \mathbf{R}, \mathbf{S}]$, kterou necháme rotovat okolo osy ω . Toho docílíme tak, že využijeme NURBS popisu kružnice k tomu, aby každý bod plochy $\bar{\mathbf{Q}}$ rotoval na kružnici se středem na ose ω , resp. najdeme pro každý řídicí bod $\bar{\mathbf{P}}_{i,j}$ a váhu $\bar{W}_{i,j}$ popis NURBS kružnice tak, aby tento řídicí bod s příslušnou váhou byl počátečním (koncovým) bodem této kružnice.

Poznámka 31 (NURBS popis kružnice). Mějme řídicí body $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_6$, kde $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_6$. Tyto řídicí body leží v rovině $\beta_{i,j}$ a tvoří čtverec s vrcholy $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_4, \mathbf{K}_5$ a zároveň řídicí body \mathbf{K}_0 a \mathbf{K}_3 jsou středy stran $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_5$ a $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_4$, resp. $\|\mathbf{K}_1\mathbf{K}_0\| =$



Obrázek 4.3: NURBS popis kružnice: červeně $\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_6$, oranžově \mathbf{K}_1 , žlutě \mathbf{K}_2 , zeleně \mathbf{K}_3 , modře \mathbf{K}_4 , fialově \mathbf{K}_5 .

$\|\mathbf{K}_5\mathbf{K}_0\| = \|\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3\| = \|\mathbf{K}_3\mathbf{K}_4\|$ a $\|\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1\| = \|\mathbf{K}_4\mathbf{K}_5\| = 2\|\mathbf{K}_1\mathbf{K}_0\|$. Rozmístění těchto řídicích bodů vidíme na obr. 4.3. Nechť $\bar{W}_{i,j,0}$ je váha řídicího bodu \mathbf{K}_0 , pak pro váhy ostatních řídicích bodů \mathbf{K}_k platí

$$\bar{W}_{i,j,0} = 2\bar{W}_{i,j,1} = 2\bar{W}_{i,j,2} = \bar{W}_{i,j,3} = 2\bar{W}_{i,j,4} = 2\bar{W}_{i,j,5} = \bar{W}_{i,j,6}.$$

Vektor parametrizace pro NURBS kružnici je pak ve tvaru

$$\mathbf{T} = (0, 0, 0, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 1, 1, 1).$$

Následnou konstrukci všech řídicích bodů NURBS objemu si ukážeme na jednom řídicím bodu, jelikož pro ostatní bude postup analogický.

Zvolíme si tedy pro řídicí bod $\bar{\mathbf{P}}_{i,j}$ rovinu $\beta_{i,j}$, která je kolmá na osu ω a zároveň v ní leží tento bod $\bar{\mathbf{P}}_{i,j}$. Pro náš zvolený bod provedeme konstrukci popsanou v Poznámce 31, kde bod $\bar{\mathbf{P}}_{i,j}$ (s příslušnou váhou $\bar{W}_{i,j}$) odpovídá bodu \mathbf{K}_0 (s příslušnou váhou $\bar{W}_{i,j,0}$). Tímto způsobem dostaneme kompletní řídicí síť tvořenou řídicími body $\mathbf{GS}_{i,j,k}$ s jejich váhami $WS_{i,j,k}$ hledaného NURBS objemu. Jelikož máme také vektor parametrizace \mathbf{T} , tak známe všechna data k popisu našeho hledaného objemu.

Pokud označíme $\bar{\mathbf{Q}}_0 = \bar{\mathbf{Q}}$ a provedeme danou rotaci této plochy, získáme tak plochy $\bar{\mathbf{Q}}_k$, kde $k = 1, \dots, 6$. Hledaná síť NURBS objemu \mathbf{GS} pak vznikne složením jednotlivých řídicích sítí popisující plochy $\bar{\mathbf{Q}}_k$.

V následujícím Příkladu 1 si ukážeme postup konstrukce, který je taktéž shrnut v Algoritmu 3.

Příklad 1. Nechť $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$ je vstupní NURBS křivka, jejíž řídicí body jsou

$$\mathbf{P} = \{(1, 0, 7), (0, 3, 6), (0, 2, 4), (1, 3, 2), (1, 1, 3/2), (1, 6, -1), (1, 2, -2), (1, 0, -3)\},$$

váhy těchto bodů jsou

$$\mathbf{W} = \{1, 1, 2, 2, 2, 2, 1/2, 1/2\}$$

Algorithm 3: Rotační NURBS objem (1. metoda)

vstup : NURBS křivka $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$; Osa $\omega = \overrightarrow{\mathbf{D}_0\mathbf{D}_1}$.

výstup: Řídící síť \mathbf{GS} , váhy bodů řídicí sítě \mathbf{WS} , příslušné vektory parametrizací \mathbf{S} a \mathbf{T} .

begin

1: \mathbf{S} je volitelný nebo $\mathbf{S} = (0, 0, 1, 1)$;

2: $\mathbf{T} = (0, 0, 0, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 1, 1, 1)$;

3: $\mathbf{P}' :=$ ortogonální průmět řídicích bodů \mathbf{P} do osy ω za splnění podmínky z Věty 30;

for $i = 0, \dots, l$ **do**

4: $d_i := \|\mathbf{P}_i\mathbf{P}'_i\|$;

5: $\mathbf{q} = d_i \frac{\mathbf{D}_0\mathbf{P}_i \times \mathbf{P}_i\mathbf{P}'_i}{\|\mathbf{D}_0\mathbf{P}_i \times \mathbf{P}_i\mathbf{P}'_i\|}$;

6: $\mathbf{K}_{i,1} := \mathbf{P}_i + \mathbf{q}$, $\mathbf{K}_{i,5} := \mathbf{P}_i - \mathbf{q}$, $\mathbf{K}_{i,3} := \mathbf{P}_i + 2\mathbf{P}_i\mathbf{P}'_i$,
 $\mathbf{K}_{i,2} := \mathbf{K}_{i,3} + \mathbf{q}$, $\mathbf{K}_{i,4} := \mathbf{K}_{i,3} - \mathbf{q}$;

7: Řídící síť \mathbf{GS} a vektor parametrizace \mathbf{S} :

$$\mathbf{GS}_{i,j,k} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_0 & \mathbf{G}_{0,1,k} & \cdots & \mathbf{G}_{0,m-1,k} & \mathbf{K}_{0,k} \\ \mathbf{P}'_1 & \mathbf{G}_{1,1,k} & \ddots & \mathbf{G}_{1,m-1,k} & \mathbf{K}_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{P}'_l & \mathbf{G}_{l,1,k} & \cdots & \mathbf{G}_{l,m-1,k} & \mathbf{K}_{l,k} \end{pmatrix},$$

pro $k = 1, \dots, 5$, kde $i = 0, \dots, l$, $j = 0, \dots, m$,

$$\mathbf{GS}_{i,j,k} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_0 & \mathbf{G}_{0,1,k} & \cdots & \mathbf{G}_{0,m-1,k} & \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}'_1 & \mathbf{G}_{1,1,k} & \ddots & \mathbf{G}_{1,m-1,k} & \mathbf{P}_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{P}'_l & \mathbf{G}_{l,1,k} & \cdots & \mathbf{G}_{l,m-1,k} & \mathbf{P}_l \end{pmatrix},$$

pro $k = 0, 6$, kde $i = 0, \dots, l$, $j = 0, \dots, m$.

Počet řídicích bodů $\mathbf{G}_{i,j,k}$ (jejichž váhy mohou být jednotkové – podle volby) je závislý na volbě vektoru parametrizace \mathbf{S} ;

8: \mathbf{WS} : pro váhy $WS_{i,m,k}$ řídicích bodů $\mathbf{K}_{i,k}$ platí pro $k = 1, 2, 4, 5$

$WS_{i,m,k} = \frac{W_i}{2}$ a $WS_{i,m,3} = W_i$ pro $i = 0, \dots, l$;

return $\mathbf{GS}, \mathbf{WS}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$

a vektor parametrizace je

$$\mathbf{R} = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4).$$

Jelikož osa rotace ω není určena, zvolíme ji tak, že je dána počátečním a koncovým řídicím bodem $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_7$ a jedná se tudíž o možnost 2 – neuzavřená vstupní NURBS křivka s počátečním a koncovým řídicím bodem na ose ω . Zadání si lze prohlédnout na obr. 4.4 vlevo nahoře.

Druhý vektor parametrizace si zvolíme pro jednoduchost ve tvaru $\mathbf{S} = (0, 0, 1, 1)$, a proto nemusíme volit žádné vnitřní body hledané NURBS oblasti $\bar{\mathbf{Q}}$. Dále najdeme ortogonální průměty $\mathbf{P}'_0, \mathbf{P}'_1, \dots, \mathbf{P}'_7$ řídicích bodů $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_7$ do osy rotace ω a tím získáme řídicí síť $\bar{\mathbf{P}}$ oblasti $\bar{\mathbf{Q}}$ ve tvaru

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} (1, 0, 7) & (1, 0, 7) \\ (1, 0, 6) & (0, 3, 6) \\ (1, 0, 4) & (0, 2, 4) \\ (1, 0, 2) & (1, 3, 2) \\ (1, 0, 3/2) & (1, 1, 3/2) \\ (1, 0, -1) & (1, 6, -1) \\ (1, 0, -2) & (1, 2, -2) \\ (1, 0, -3) & (1, 0, -3) \end{pmatrix}.$$

Váhy řídicích bodů $\mathbf{P}'_0, \mathbf{P}'_1, \dots, \mathbf{P}'_7$ volíme jednotkové.

Ve druhém kroku necháme NURBS oblast $\bar{\mathbf{Q}}$ rotovat okolo osy ω tak, že pro konstrukci řídicích bodů $\bar{\mathbf{P}}_{i,j}$ a jejich příslušných vah použijeme Poznámku 31. Jelikož řídicí body $\bar{\mathbf{P}}_{i,0}$ pro $i = 0, \dots, 7$ leží na ose ω , budou hledané řídicí body kružnice $\mathbf{K}_{i,k}$ pro každý tento bod $\bar{\mathbf{P}}_{i,0}$ totožné právě s tímto bodem. Pro názornost si ukážeme výpočet řídicích bodů pro jeden daný řídicí bod křivky \mathbf{Q} . Zvolme $\mathbf{P}_2 = (0, 2, 4)$ a jeho váhu $W_2 = 2$, pak k nalezení takových řídicích bodů (vah), které budou společně s \mathbf{P}_2 a vektorem parametrizace \mathbf{T} popisovat kružnici použijeme postup z poznámky 31. Dostaneme řídicí body

$$\mathbf{K} = \{(0, 2, 4), (-2, 1, 4), (0, -3, 4), (2, -2, 4), (4, -1, 4), (2, 3, 4), (0, 2, 4)\}$$

a jejich váhy $\{2, 1, 1, 2, 1, 1, 2\}$. Stejně postupujeme pro všechny řídicí body \mathbf{P}_i křivky \mathbf{Q} .

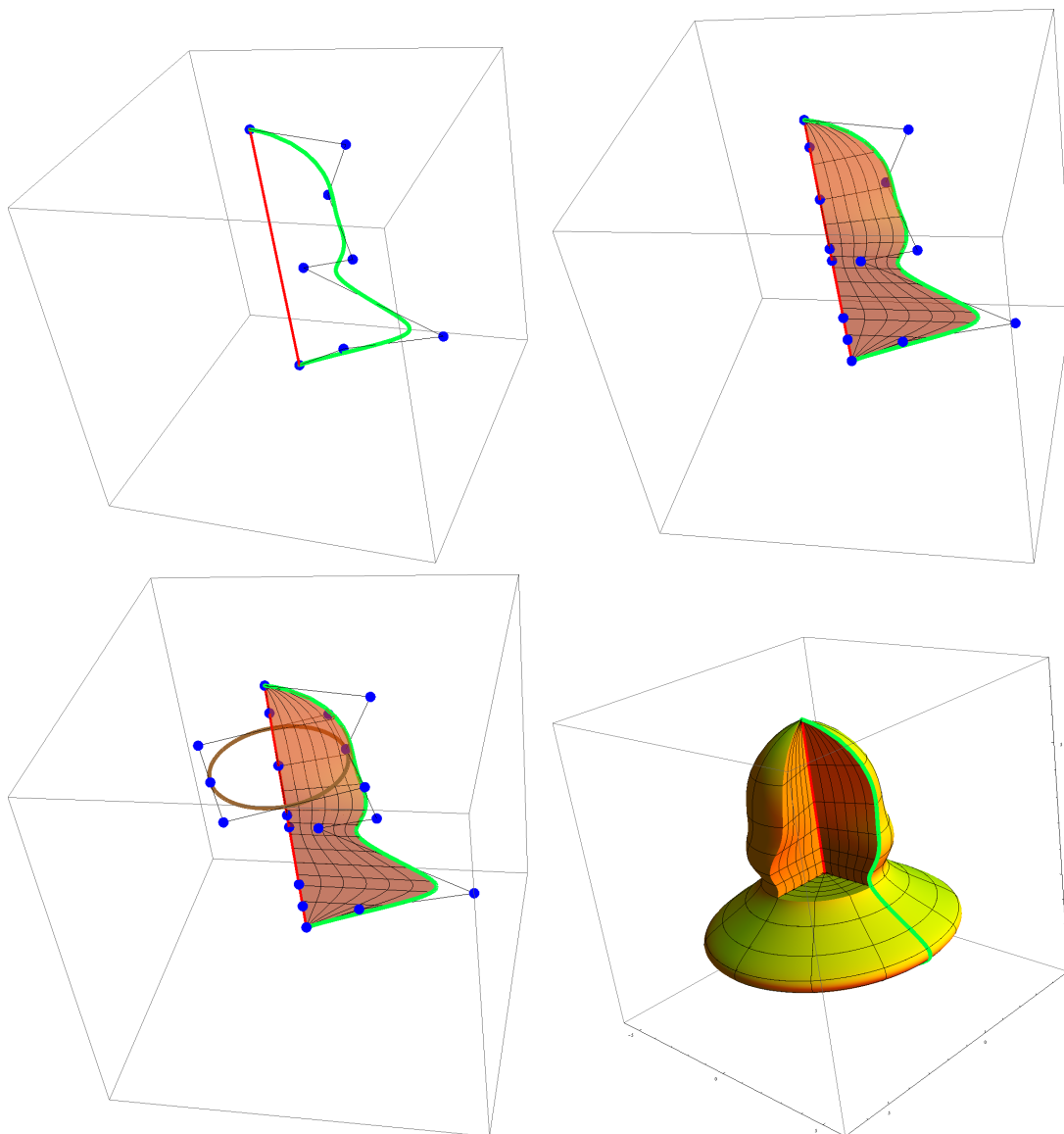
Výsledný NURBS objem konstruovaný pomocí Algoritmu 3 vidíme na obr. 4.4.

■

Na začátku jsme se zmínili o variantě, že vstupní NURBS křivka může být uzavřená, resp. tvoří hranici plochy $\bar{\mathbf{Q}}$, která díky rotaci okolo osy ω vytvoří NURBS objem. V tomto případě se druhá část postupu (rotace plochy okolo osy) shoduje a liší se pouze v první části (konstrukce plochy $\bar{\mathbf{Q}}$). Konstrukce zde spočívá v tom, že využijeme pouze vstupní NURBS křivku a algoritmy (*NURBS14*, *NURBS12*) pro vytváření popisu ohraničených NURBS oblastí z [2]. Tyto algoritmy stručně fungují následovně.

Mějme vstupní uzavřenou NURBS křivku $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$.

- Zvolíme, na kolik částí křivku \mathbf{Q} rozdělíme – dvě nebo čtyři.



Obrázek 4.4: Konstrukce NURBS objemu – Vlevo nahoře: Vstupní NURBS křivka \mathbf{Q} s osou rotace ω ; Vpravo nahoře: NURBS oblast $\bar{\mathbf{Q}}$ ohraničená křivkou \mathbf{Q} a osou ω ; Vlevo dole: NURBS oblast $\bar{\mathbf{Q}}$ a znázornění principu rotace na řídicím bodu \mathbf{P}_2 ; Vpravo dole: Výsledný NURBS objem (1. metoda).

- Pomocí algoritmu pro vkládání uzlů do vektoru parametrizace zajistíme, abychom mohli danou křivku rozdělit na zvolený počet částí. Tento algoritmus funguje na principu rozdělení vektoru parametrizace (křivky) v místě, kde je násobnost daného vnitřního uzlu roven stupni této křivky. Vkládáním zvoleného uzlu do násobnosti odpovídající stupni křivky určíme místo rozdělení křivky. Nutno podotknout, že tento algoritmus při vkládání uzlů zachovává původní tvar křivky. Tímto postupem získáme dvě nebo čtyři NURBS křivky.
- Sjednocení vektorů parametrizací – protilehlé nově vzniklé NURBS křivky musí mít stejný počet řídicích bodů (s příslušnými váhami) a totožný nový vektor parametrizace. Toho docílíme opět využitím algoritmu pro vkládání uzlů.
- Nalezené dvojice protilehlých hraničních křivek \mathbf{Q}^1 , \mathbf{Q}^3 s vektorem parametrizace \mathbf{R}^1 a \mathbf{Q}^2 , \mathbf{Q}^4 s vektorem parametrizace \mathbf{R}^2 nám ohraničují hledanou NURBS oblast. \mathbf{R}^1 a \mathbf{R}^2 získáme z předchozího kroku z vektoru parametrizace \mathbf{R} . (U volby pro rozdělení na dvě části máme pouze hraniční křivky \mathbf{Q}^1 a \mathbf{Q}^2).
- Volba vnitřních řídicích bodů a závěrečné složení všech řídicích bodů do výsledné řídicí sítě $\bar{\mathbf{Q}}$ (podrobněji viz [2]).

Příklad 2. Mějme vstupní uzavřenou NURBS křivku (kružnici) $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$, kde

$$\mathbf{P} = \{(4, 0, 2), (4, 0, 1), (2, 0, 1), (2, 0, 2), (2, 0, 3), (4, 0, 3), (4, 0, 2)\}$$

jsou řídicí body,

$$\mathbf{W} = \{1, 1/2, 1/2, 1, 1/2, 1/2, 1\}$$

jsou váhy těchto řídicích bodů a vektor parametrizace

$$\mathbf{R} = (0, 0, 0, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 1, 1, 1).$$

Osa rotace je určena body $\mathbf{D}_0 = (0, 0, 0)$ a $\mathbf{D}_1 = (0, 0, 1)$.

Volíme rozdělení křivky na čtyři části. Pomocí algoritmu pro vkládání uzlů získáme čtyři NURBS křivky \mathbf{Q}^1 , \mathbf{Q}^2 , \mathbf{Q}^3 a \mathbf{Q}^4 . Jejich řídicí body jsou

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^1 &= \{(4, 0, 2), (4, 0, 1), (3, 0, 1)\}, & \mathbf{P}^2 &= \{(3, 0, 1), (2, 0, 1), (2, 0, 2)\}, \\ \mathbf{P}^3 &= \{(2, 0, 2), (2, 0, 3), (3, 0, 3)\}, & \mathbf{P}^4 &= \{(3, 0, 3), (4, 0, 3), (4, 0, 2)\}, \end{aligned}$$

příslušné váhy

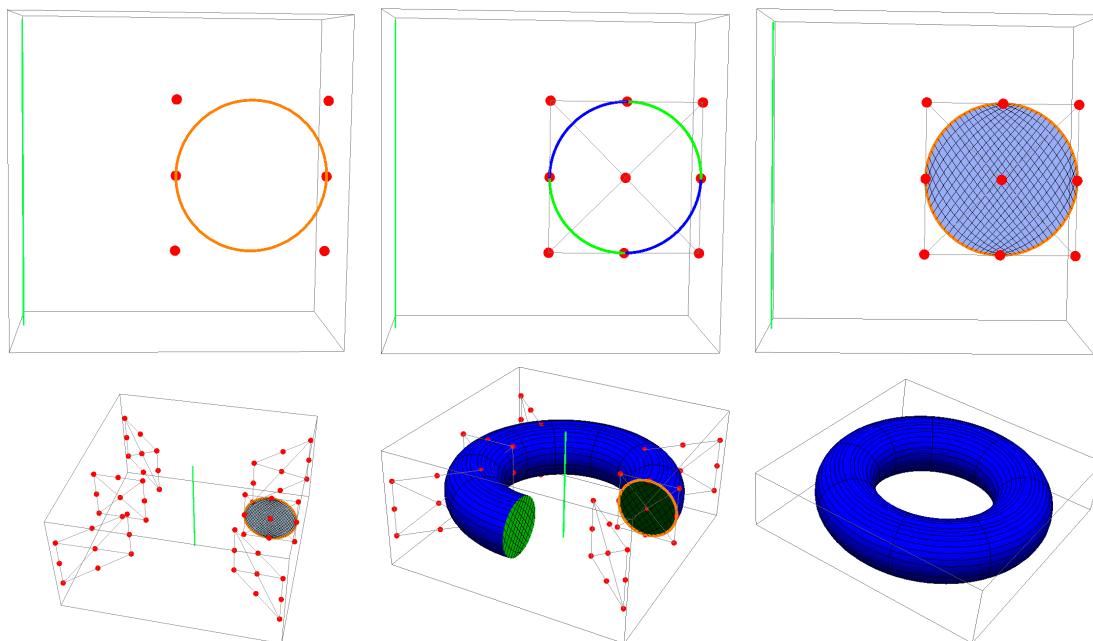
$$\mathbf{W}^1 = \{1, 1/2, 1/2\}, \mathbf{W}^2 = \{1/2, 1/2, 1\}, \mathbf{W}^3 = \{1, 1/2, 1/2\}, \mathbf{W}^4 = \{1/2, 1/2, 1\}$$

a vektory parametrizace $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}^2 = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$. Výsledná NURBS oblast bude mít tedy řídicí síť ve tvaru

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} (3, 0, 1) & (2, 0, 1) & (2, 0, 2) \\ (4, 0, 1) & (3, 0, 2) & (2, 0, 3) \\ (4, 0, 2) & (4, 0, 3) & (3, 0, 3) \end{pmatrix},$$

váhy těchto řídicích bodů sítě jsou

$$\bar{\mathbf{W}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$



Obrázek 4.5: Nahoře vlevo: Vstupní NURBS křivka (oranžová) s osou rotace (zelená); Nahoře uprostřed: Rozdělení NURBS křivky na 4 části (křivky); Nahoře vpravo: NURBS oblast ohraničená vstupní NURBS křivkou; Dole vlevo: Řídící síť NURBS objemu a jeho řezy; Dole uprostřed a vpravo: Výsledný NURBS objem.

Vektory parametrizace přeznačíme $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$, $\mathbf{S} = \mathbf{R}^2$.

Nyní se dostáváme ke druhé části konstrukce – rotace dané NURBS oblasti okolo osy. Postup je totožný z předchozího příkladu. Konstrukce NURBS objemu vychází z Poznámky 31.

Výsledný NURBS objem s jednotlivými kroky vidíme na obr. 4.5. ■

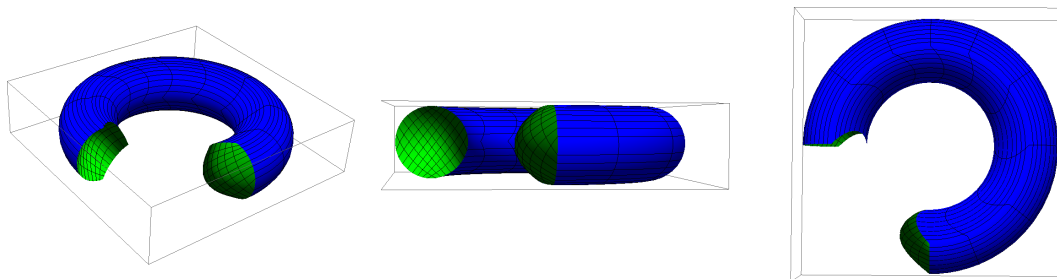
V předchozím Příkladu 2 jsme ze vstupní NURBS křivky získali popis NURBS objemu anuloidu. Pro zajímavost si na obr. 4.6 můžeme prohlédnout taktéž NURBS objem anuloidu, jehož vstupní NURBS křivka nebyla kružnicí, dokonce ani rovinnou křivkou.

4.1.2 Rotační objem konstruovaný z jednotlivých rovnoběžkových NURBS oblastí

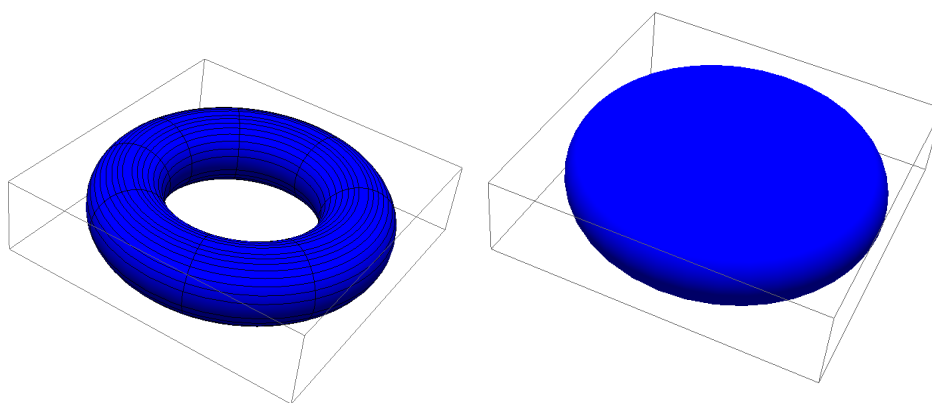
Stejně jako u předchozí metody uvažujeme vstupní NURBS křivku $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$ a osu rotace ω . Myšlenka konstrukce NURBS objemu je podobná jako v předchozím případě. Rozdíl je v tom, že nejprve zkonstruujeme pro každý řídicí bod vstupní NURBS křivky příslušné řídicí body tak, abychom získali NURBS popis kruhu

$$\bar{\mathbf{Q}} = [\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{W}}, \mathbf{S}, \mathbf{T}]$$

se středem v ose rotace ω . Výsledný objem pak získáme složením těchto NURBS kruhů podél křivky \mathbf{Q} , které s ní mají dotyk.



Obrázek 4.6: Anuloid s rozdílnou řídicí sítí oproti anuloidu z Příkladu 2.



Obrázek 4.7: Vlevo: Anuloid z Příkladu 2 (1. metoda); Vpravo: Chybná konstrukce anuloidu pomocí 2. metody.

Konstrukci NURBS objemu lze tímto způsobem provést pro vstupní data ve tvaru:

2. vstupní NURBS křivka není uzavřená a $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_l$ jsou na ose rotace ω ,
3. vstupní NURBS křivka není uzavřená a $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_l$ nejsou na ose rotace ω .

Stejně jako u předchozí metody se obě možnosti liší v tom, že u druhé možnosti bude NURBS kruh $\bar{\mathbf{Q}}$ pro koncové body $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_l$ křivky \mathbf{Q} obsahovat bod z osy ω (bude středem tohoto NURBS kruhu).

Odpadla nám zde možnost pro uzavřenou křivku \mathbf{Q} . Důvod je ten, že tento způsob popisu obecně počítá s tím, že osa ω bude součástí výsledného NURBS popisu, což pro uzavřenou křivku \mathbf{Q} a osu ω nemusí být splněno. Příkladem může být anuloid na obr. 4.5. Pokud bychom totiž postupovali tak, že ke každému řídicímu bodu (váze) najdeme popis NURBS kruhu, dostali bychom NURBS objem zobrazený na obr. 4.7 vpravo.

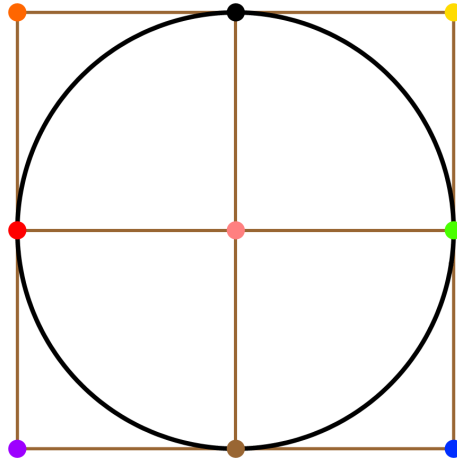
Poznámka 32 (NURBS popis kruhu). Mějme sít' řídicích bodů

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{0,0} & \mathbf{K}_{0,1} & \mathbf{K}_{0,2} \\ \mathbf{K}_{1,0} & \mathbf{K}_{1,1} & \mathbf{K}_{1,2} \\ \mathbf{K}_{2,0} & \mathbf{K}_{2,1} & \mathbf{K}_{2,2} \end{pmatrix}$$

tak, že všechny řídicí body leží v dané rovině β a tvoří čtverec, kde $\mathbf{K}_{0,1}$, $\mathbf{K}_{1,2}$, $\mathbf{K}_{2,1}$ a $\mathbf{K}_{1,0}$ jsou jeho vrcholy, přičemž body $\mathbf{K}_{0,0}$, $\mathbf{K}_{0,2}$, $\mathbf{K}_{2,2}$ a $\mathbf{K}_{2,0}$ jsou středy stran $\mathbf{K}_{1,0}\mathbf{K}_{0,1}$, $\mathbf{K}_{0,1}\mathbf{K}_{1,2}$, $\mathbf{K}_{1,2}\mathbf{K}_{2,1}$ a $\mathbf{K}_{2,1}\mathbf{K}_{1,0}$. Bod $\mathbf{K}_{1,1}$ je středem všech protilehlých řídicích bodů. Tato konstrukce je zobrazena na obr. 4.8. Váhy řídicích bodů $\mathbf{K}_{j,k}$ jsou ve tvaru

$$\bar{\mathbf{W}}_i = \begin{pmatrix} \bar{W}_{0,0} & \frac{\bar{W}_{0,0}}{2} & \frac{\bar{W}_{0,0}}{2} \\ \frac{\bar{W}_{0,0}}{2} & \bar{W}_{0,0} & \frac{\bar{W}_{0,0}}{2} \\ \frac{\bar{W}_{0,0}}{2} & \frac{\bar{W}_{0,0}}{2} & \bar{W}_{0,0} \end{pmatrix},$$

kde $\bar{W}_{0,0}$ je váha řídicího bodu $\mathbf{K}_{0,0}$. Vektory parametrizace mají tvar $\mathbf{S} = \mathbf{T} = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$. Dostáváme tak NURBS popis kruhu $\bar{\mathbf{Q}} := [\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{W}}, \mathbf{S}, \mathbf{T}]$.



Obrázek 4.8: NURBS popis kruhu z Poznámky 32: černá kružnice určuje hranici NURBS kruhu, jednotlivé body znázorňují řídicí body – červený $\mathbf{K}_{0,0}$, oranžový $\mathbf{K}_{0,1}$, černý $\mathbf{K}_{0,2}$, fialový $\mathbf{K}_{1,0}$, růžový $\mathbf{K}_{1,1}$, žlutý $\mathbf{K}_{1,2}$, hnědý $\mathbf{K}_{2,0}$, modrý $\mathbf{K}_{2,1}$ a zelený $\mathbf{K}_{2,2}$.

Postup pro konstrukci NURBS objemu si popíšeme ve dvou krocích. Prvním krokem bude nalezení řídicích bodů a vah řídicí sítě popisující společně s dvěma vektory parametrizace NURBS oblast (kruh) $\bar{\mathbf{Q}} := [\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{W}}, \mathbf{S}, \mathbf{T}]$. Ve druhém kroku zkonstruujeme NURBS objem pomocí nalezené NURBS oblasti $\bar{\mathbf{Q}}$ z prvního kroku a osy rotace ω .

Nechť $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$ je vstupní neuzavřená NURBS křivka a ω je osa rotace. Na sestavení NURBS oblasti $\bar{\mathbf{Q}}$ použijeme konstrukci z Poznámky 32, kde nejprve pro každý řídicí bod \mathbf{P}_i křivky \mathbf{Q} nalezneme ortogonální průmět \mathbf{P}'_i na osu ω . Dále nalezneme rovinu β_i , která je kolmá na osu ω a zároveň obsahuje \mathbf{P}_i a \mathbf{P}'_i .

Nyní se stačí řídit postupem popsáním v Poznámce 32 tak, že pro každý řídicí bod \mathbf{P}_i nalezneme popis kruhu $\bar{\mathbf{Q}}_i$, kde bod \mathbf{P}_i a \mathbf{P}'_i ztotožníme s bodem $\mathbf{K}_{0,0}$ a $\mathbf{K}_{1,1}$.

Algorithm 4: Rotační NURBS objem (2. metoda)

vstup : NURBS křivka $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$; Osa $\omega = \overrightarrow{\mathbf{D}_0\mathbf{D}_1}$.
výstup: Řídící síť \mathbf{GS} , váhy bodů řídicí sítě \mathbf{WS} , příslušné vektory parametrizací \mathbf{S} a \mathbf{T} .

begin

1: $\mathbf{S} = \mathbf{T} = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$;
2: $\mathbf{P}' :=$ ortogonální průmět řídicích bodů \mathbf{P} do osy ω za splnění podmínky z Věty 30;
for $i = 0, \dots, l$ **do**

3: $d_i := \|\mathbf{P}_i\mathbf{P}'_i\|$;
4: $\mathbf{q} = d_i \frac{\mathbf{D}_0\mathbf{P}_i \times \mathbf{P}_i\mathbf{P}'_i}{\|\mathbf{D}_0\mathbf{P}_i \times \mathbf{P}_i\mathbf{P}'_i\|}$;
5: $\mathbf{K}_{i,0,0} := \mathbf{P}_i$, $\mathbf{K}_{i,1,1} := \mathbf{P}'_i$, $\mathbf{K}_{i,1,0} := \mathbf{P}_i + \mathbf{q}$,
 $\mathbf{K}_{i,0,1} := \mathbf{P}_i - \mathbf{q}$, $\mathbf{K}_{i,2,0} := \mathbf{P}'_i + \mathbf{q}$, $\mathbf{K}_{i,0,2} := \mathbf{P}'_i - \mathbf{q}$,
 $\mathbf{K}_{i,2,2} := \mathbf{P}_i + 2\mathbf{P}_i\mathbf{P}'_i$, $\mathbf{K}_{i,2,1} := \mathbf{K}_{i,2,2} + \mathbf{q}$, $\mathbf{K}_{i,1,2} := \mathbf{K}_{i,2,2} - \mathbf{q}$;

6: Řídící síť \mathbf{GS} :

$$\mathbf{GS}_{i,j,k} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{i,0,0} & \mathbf{K}_{i,0,1} & \mathbf{K}_{i,0,2} \\ \mathbf{K}_{i,1,0} & \mathbf{K}_{i,1,1} & \mathbf{K}_{i,1,2} \\ \mathbf{K}_{i,2,0} & \mathbf{K}_{i,2,1} & \mathbf{K}_{i,2,2} \end{pmatrix},$$

pro $i = 0, \dots, l$;

7: Váhy \mathbf{WS} :

$$\mathbf{WS}_{i,j,k} = \begin{pmatrix} 2W_i & W_i & W_i \\ W_i & 2W_i & W_i \\ W_i & W_i & 2W_i \end{pmatrix},$$

pro $i = 0, \dots, l$;

return \mathbf{GS} , \mathbf{WS} , \mathbf{S} , \mathbf{T}

Ve druhém kroku dostaneme výsledný popis NURBS objemu, který vznikne složením všech NURBS oblastí $\bar{\mathbf{Q}}_i$ následujícím způsobem :

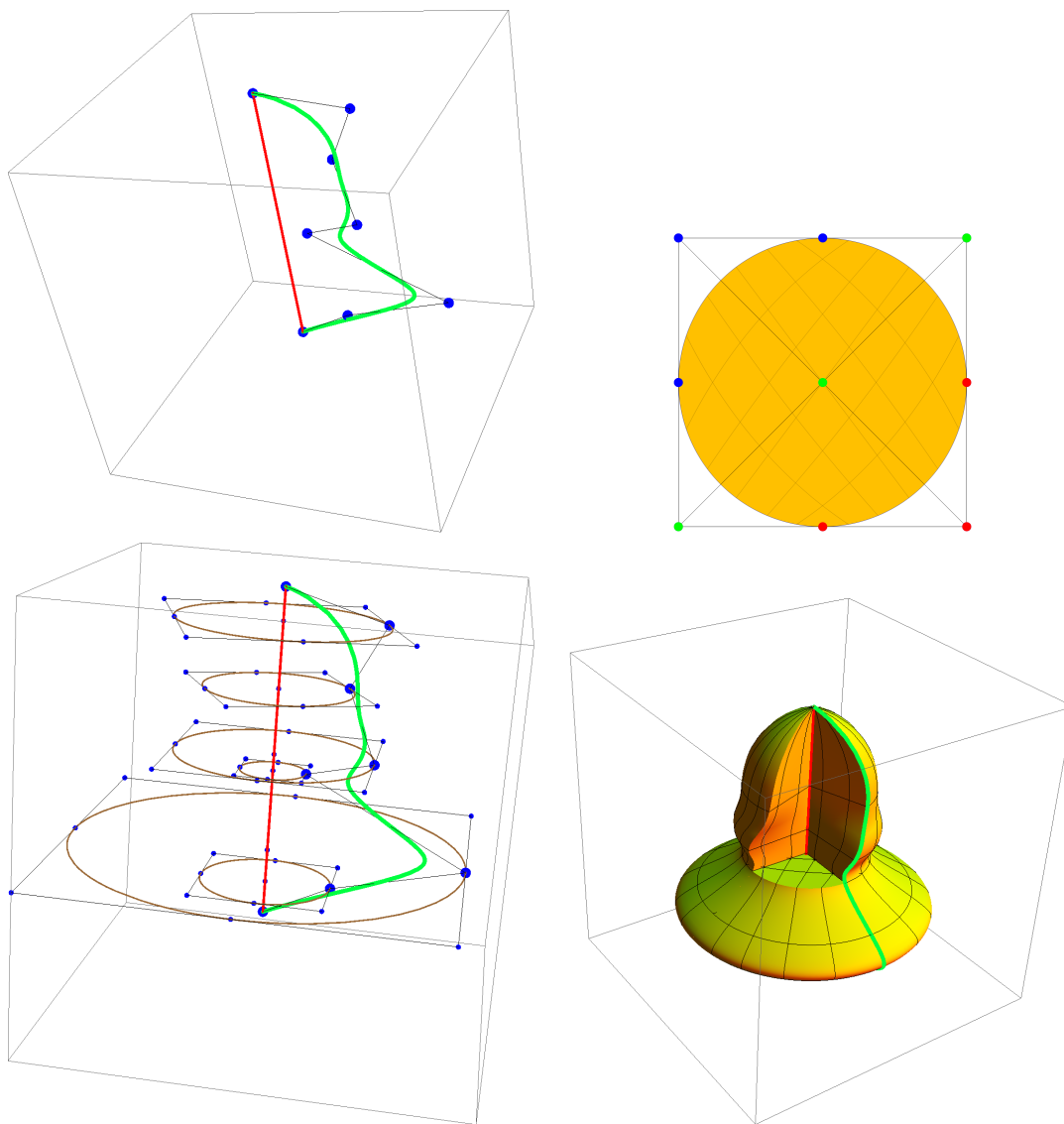
- Řídící síť $\mathbf{GS} = \{\bar{\mathbf{P}}_0, \bar{\mathbf{P}}_1, \dots, \bar{\mathbf{P}}_l\}$.
- Váhy řídicích bodů $\mathbf{WS} = \{\bar{\mathbf{W}}_0, \bar{\mathbf{W}}_1, \dots, \bar{\mathbf{W}}_l\}$.
- Všechny tři vektory parametrizace \mathbf{R} , \mathbf{S} a \mathbf{T} jsou již známé, jelikož pro každou oblast $\bar{\mathbf{Q}}_i$ jsou \mathbf{S} a \mathbf{T} shodné.

Aplikaci tohoto postupu, který je obsažen v Algoritmu 4, si ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 3. Mějme stejnou vstupní řídicí křivku $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$ jako v předchozím příkladu, kde

$$\mathbf{P} = \{(1, 0, 7), (0, 3, 6), (0, 2, 4), (1, 3, 2), (1, 1, 3/2), (1, 6, -1), (1, 2, -2), (1, 0, -3)\},$$

$$\mathbf{W} = \{1, 1, 2, 2, 2, 2, 1/2, 1/2\}$$



Obrázek 4.9: NURBS objem – Vlevo nahoře: Vstupní NURBS křivka \mathbf{Q} s osou rotace ω ; Vpravo nahoře: NURBS oblast $\bar{\mathbf{Q}}_i$ pro řídicí bod $\bar{\mathbf{P}}_i$ (modře $\mathbf{K}_{0,k}$, zeleně $\mathbf{K}_{1,k}$, červeně $\mathbf{K}_{2,k}$); Vlevo dole: Řídicí síť \mathbf{GS} ; Vpravo dole: Výsledný NURBS objem (2. metoda).

a

$$\mathbf{R} = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4).$$

Osa ω je opět určena počátečním a koncovým bodem vstupní NURBS křivky.

Ukážeme si výpočet na jednom řídicím bodu, jelikož postup pro ostatní řídicí body bude stejný. Zvolme proto opět $\mathbf{P}_2 = (0, 2, 4)$ s váhou $W_2 = 2$. Postupem z Poznámky 32 získáme síť řídicích bodů

$$\bar{\mathbf{P}}_2 = \begin{pmatrix} (0, 2, 4) & (-2, 1, 4) & (-1, -1, 4) \\ (2, 3, 4) & (1, 0, 4) & (0, -3, 4) \\ (3, 1, 4) & (4, -1, 4) & (2, -2, 4) \end{pmatrix}$$

a jejich vah

$$\bar{\mathbf{W}}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Výsledný NURBS objem vidíme na obr. 4.9. ■

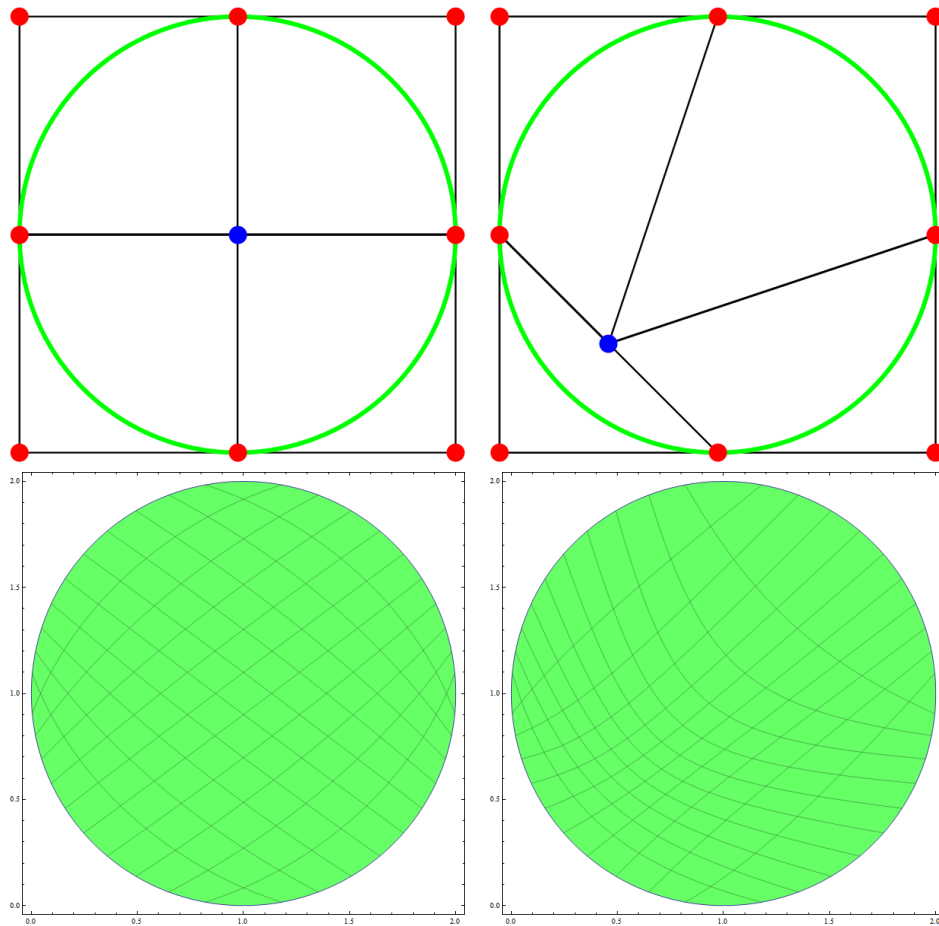
Stejně jako u předchozí metody lze i zde volit vnitřní řídicí body NURBS oblasti (NURBS objemu). Volba těchto bodů a jejich počet je závislý na NURBS popisu kruhu $\bar{\mathbf{Q}}$. Pro názornost jsme volili v této části ten nejjednodušší možný popis – viz Poznámka 32, kde NURBS oblast $\bar{\mathbf{Q}}$ má pouze jeden vnitřní řídicí bod. Ten je sice v Poznámce 32 pevně zvolen, ale můžeme ho zvolit i jinak. Na obr. 4.10 si můžeme prohlédnout vliv umístění tohoto řídicího bodu na parametrické křivky NURBS oblasti. Za předpokladu, že bychom chtěli mít těchto vnitřních řídicích bodů více, museli bychom nalézt popis kruhu takový, aby obsahoval více hraničních řídicích bodů. Toho lze dosáhnout přes již výše zmíněný algoritmus na vkládání uzlů a následného nalezení popisu dané NURBS oblasti algoritmem *NURBS14* z [2]. Příkladem pro složitější popis NURBS kruhu, který lze využít pro tuto metodu, vidíme na obr. 4.11, kde máme 6 vnitřních řídicích bodů. Nicméně konstrukce a nalezení řídicích bodů $\bar{\mathbf{P}}_{j,k}$ pro každý řídicí bod vstupní křivky bude z hlediska času náročnější.

4.1.3 Srovnání

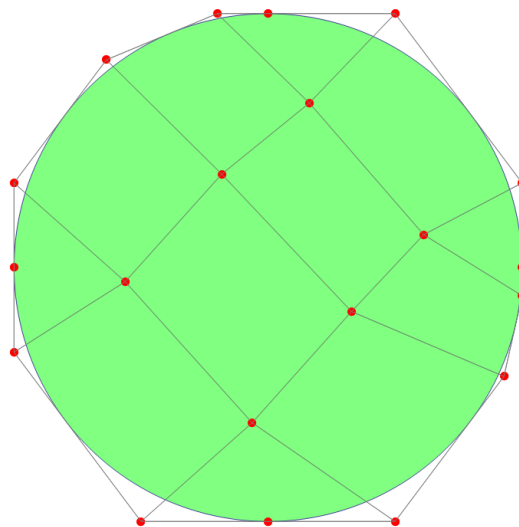
V této části krátce shrneme a zhodnotíme předchozí dvě metody.

1. metoda

- Vstupní křivka může být jak otevřená, tak uzavřená.
- Při vytváření NURBS oblasti, která bude rotovat okolo dané osy, můžeme zvolit její vnitřní řídicí body, aniž by se mechanismus algoritmu nějak výrazněji změnil.
- V případě otevřené vstupní NURBS křivky je singulární osa rotace součástí NURBS objemu.



Obrázek 4.10: NURBS oblast s příslušnou řídicí sítí – Nahoře: Jednotlivé řídicí sítě; Dole: Vliv polohy vnitřního řídicího bodu na rozmístění parametrických křivek.



Obrázek 4.11: Příklad NURBS kruhu s více vnitřními řídicími body.

2. metoda

- Omezení na otevřené vstupní křivky.
- Volba vnitřních řídicích bodů NURBS oblasti je omezená. Pro větší počet vnitřních řídicích bodů bychom museli změnit počet a rozestavení řídicích bodů v Poznámce 32.
- Nevzniká singulární osa rotace.

První metoda má větší škálu možností než metoda druhá, ať už jde o vstupní řídicí NURBS křivku nebo volbu vnitřních řídicích bodů a vah NURBS oblasti (objemu). Z hlediska kvality NURBS popisu je vhodnější ale metoda druhá, kde nevzniká singularita v podobě osy rotace. Na druhou stranu je zde problém s volbou vnitřních řídicích bodů. Pro volbu těchto bodů bychom museli zimplementovat do Algoritmu 4 metody z algoritmu *NURBS14* z [2], který by nám našel NURBS popis kruhu pro libovolnou NURBS kružnici.

4.2 Zobecněné rotační NURBS objemy

V této části budeme konstruovat NURBS objemy s využitím poznatků o rotaci z předcházející sekce. Půjde o třídu NURBS objemů, pro které budeme znát jejich NURBS popis pláště (uzavřené hraniční oblasti) v námi předepsaném tvaru a s využitím již známých algoritmů najdeme hledaný popis NURBS objemu.

Na vstupu uvažujeme uzavřenou NURBS plochu $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{S}]$, pro jejíž řídicí body $\mathbf{P}_{i,j}$ platí

$$\mathbf{P}_{0,0} = \mathbf{P}_{0,1} = \dots = \mathbf{P}_{0,m}, \quad \mathbf{P}_{l,0} = \mathbf{P}_{l,1} = \dots = \mathbf{P}_{l,m}, \quad \mathbf{P}_{i,0} = \mathbf{P}_{i,m}$$

pro všechna i , obdobně i pro váhy $W_{i,j}$ těchto řídicích bodů. \mathbf{R} a \mathbf{S} jsou vektory parametrizace této plochy.

Naším cílem je najít NURBS objem $\mathbf{QS} := [\mathbf{GS}, \mathbf{WS}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}]$, který je ohraničen touto NURBS plochou \mathbf{Q} . \mathbf{GS} je řídicí síť řídicích bodů, \mathbf{WS} jsou váhy těchto bodů a \mathbf{T} je třetí vektor parametrizace.

Ukážeme si dvě metody pro nalezení hledaného popisu NURBS objemu. Myšlenka vychází z předchozí konstrukce rotačních objemů, kde v prvním kroku jsme ke každému řídicímu bodu vstupní NURBS křivky našli příslušnou NURBS oblast a ve druhém kroku jsme zkonstruovali výsledný NURBS objem.

První metoda bude založená na tom, že pokud přeskočíme první krok ze sekce 4.1.1, tak ve druhém kroku aplikujeme rotaci okolo osy ω pouze na řídicí body vstupní NURBS křivky. Tím získáme hraniční NURBS plochu hledaného NURBS objemu. Tato hraniční NURBS plocha je totožná se vstupní plochou $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{S}]$. Naším úkolem je tedy nalézt vnitřní řídicí body, jejich váhy a vektor parametrizace \mathbf{T} tohoto ohraničeného NURBS objemu. K tomu použijeme modifikaci právě vynechaného prvního kroku ze sekce 4.1.1.

Druhá metoda bude taktéž založena na hledání vnitřních řídicích bodů NURBS objemu. Pro názornost si představme obal $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{S}]$ NURBS objemu \mathbf{QS} . Řídicí body $\mathbf{P}_{i,j}$ pro pevné i budou spolu s příslušnými váhami a vektorem

parametrizace popisovat uzavřenou křivku. Naším úkolem bude najít NURBS oblast ohraničenou touto křivkou (jedná se vlastně o algoritmus *NURBS14* z [2]). Obě metody si podrobněji a přesněji popíšeme v jednotlivých podsekcích.

V předchozí sekci jsme si uvedli Větu 30 na omezení polohy řídicích bodů vstupní křivky, proto i zde si uvedeme podmínku pro řídicí body řídicí sítě NURBS plochy \mathbf{Q} .

Věta 33. Mějme NURBS plochu $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{S}]$, kde pro řídicí sít'

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \dots & \mathbf{P}_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{l,0} & \dots & \mathbf{P}_{l,m} \end{pmatrix}$$

platí $\mathbf{P}_{0,0} = \mathbf{P}_{0,1} = \dots = \mathbf{P}_{0,m}$, $\mathbf{P}_{l,0} = \mathbf{P}_{l,1} = \dots = \mathbf{P}_{l,m}$ a $\mathbf{P}_{i,0} = \mathbf{P}_{i,m}$, $\forall i$. Rovnosti platí analogicky pro váhy $W_{i,j}$ příslušných řídicích bodů. \mathbf{R} a \mathbf{S} jsou vektory parametrizace této plochy. Dále uvažujme osu ω určenou řídicími body $\mathbf{P}_{0,0}$ a $\mathbf{P}_{l,0}$. Nechť $\mathbf{P}'_{i,j}$ jsou ortogonální průměty bodů $\mathbf{P}_{i,j}$ do osy ω . Jestliže bude pro řídicí body NURBS objemu splněna nerovnost

$$\|\mathbf{P}_{0,0}\mathbf{P}'_{i,j}\| < \|\mathbf{P}_{0,0}\mathbf{P}'_{i+1,j}\|,$$

pro každé $i = 0, 1, \dots, l-1$ a pro pevně zvolené j , kde $j = 0, 1, \dots, m$, tak se parametrické křivky ve stejném parametru (jednotlivé r-křivky, s-křivky nebo t-křivky) nebudou protínat.

Důkaz: Analogický k důkazu Věty 30. □

4.2.1 Konstrukce s využitím rotace

Uvažujme uzavřenou NURBS plochu $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{S}]$, kde $\mathbf{P}_{0,0} = \mathbf{P}_{0,1} = \dots = \mathbf{P}_{0,m}$, $\mathbf{P}_{l,0} = \mathbf{P}_{l,1} = \dots = \mathbf{P}_{l,m}$ a $\mathbf{P}_{i,0} = \mathbf{P}_{i,m}$ pro každé i . Pro váhy $W_{i,j}$ těchto řídicích bodů platí stejné rovnosti.

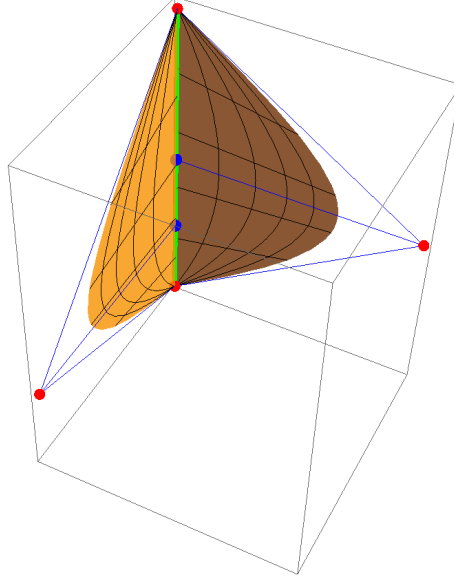
Pro popis NURBS objemu, který je ohraničen touto plochou, musíme najít řídicí sít' \mathbf{GS} s příslušnými váhami \mathbf{WS} a třetí vektor parametrizace \mathbf{T} . Jelikož vycházíme z předchozí sekce, můžeme volit osu rotace $\omega : \mathbf{x} = \mathbf{P}_{0,0} + u(\mathbf{P}_{l,0} - \mathbf{P}_{0,0})$, pokud není zadána.

V prvním kroku najdeme pro každý řídicí bod $\mathbf{P}_{i,j}$, kde $i = 0, \dots, l$, $j = 0, \dots, m$, ortogonální průmět $\mathbf{P}'_{i,j}$ do osy ω . Pro řídicí body $\mathbf{P}'_{i,j}$ požadujeme splnění podmínky z Věty 33. Potom můžeme zkonstruovat jednotlivé NURBS plochy, jejichž řídicí sítě budou ve tvaru

$$\mathbf{GS}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_{0,j} & \mathbf{P}_{0,j} \\ \mathbf{P}'_{1,j} & \mathbf{P}_{1,j} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{P}'_{l,j} & \mathbf{P}_{l,j} \end{pmatrix},$$

pro zvolené j . Obdobně to lze udělat i s jejich váhami. Volbou $\mathbf{T} = (0, 0, 1, 1)$ získáme NURBS popis oblastí

$$\mathbf{QS}_j := [\mathbf{GS}_j, \mathbf{WS}_j, \mathbf{S}, \mathbf{T}].$$



Obrázek 4.12: Dvě NURBS plochy, které jsou součástí výsledného NURBS objemu s problematickým napojením jednotlivých NURBS ploch u osy rotace (viz parametrické křivky).

Zde vidíme podobnost s popisem NURBS oblasti z předchozí sekce o rotačních objemech, díky které jsme následnou rotací získali výsledný NURBS objem, resp. našli jsme takové NURBS oblasti, které popisovaly onu rotaci této plochy okolo osy ω . Jelikož ale známe všechny \mathbf{QS}_j , pak máme potřebné údaje na to, abychom zkonstruovali popis NURBS objemu $\mathbf{QS} := [\mathbf{GS}, \mathbf{WS}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}]$, kde

$$\mathbf{GS} = [\mathbf{GS}_0, \mathbf{GS}_1, \dots, \mathbf{GS}_m], \quad \mathbf{WS} = [\mathbf{WS}_0, \mathbf{WS}_1, \dots, \mathbf{WS}_m].$$

Pokud bychom nyní sestavili výslednou řídicí síť, s největší pravděpodobností bychom se setkali s nechtěným jevem, kdy jednotlivé části objemu na sebe spojitě nenavazují v místě osy ω . Víme, že řídicí body $\mathbf{P}'_{i,j}$ vznikají jako ortogonální průměty řídicích bodů $\mathbf{P}_{i,j}$ do osy rotace ω . Může tedy nastat situace, že pro některé řídicí body $\mathbf{P}_{i,j}$, kde i je pevně dané, nebudou odpovídající ortogonální průměty $\mathbf{P}'_{i,j}$ totožné, a tudíž bude docházet mezi jednotlivými částmi objemu ke skokům ve směru osy ω . Jednoduchý příklad tohoto problému vidíme na obr. 4.12.

Abychom tento problém odstranili, sjednotíme řídicí body $\mathbf{P}'_{i,j}$ následujícím způsobem:

$$\mathbf{P}'_i = \mathbf{P}'_{i,0} = \mathbf{P}'_{i,1} = \dots = \mathbf{P}'_{i,m} = \frac{\sum_{j=0}^m \mathbf{P}'_{i,j}}{m+1},$$

kde $i = 0, \dots, l$.

Nyní můžeme již zkompletovat řídicí síť \mathbf{GS} , která bude ve tvaru

$$\mathbf{GS}_{i,j,k} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_0 & \mathbf{G}_{0,j,1} & \dots & \mathbf{G}_{0,j,n-1} & \mathbf{P}_{0,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{P}'_l & \mathbf{G}_{l,j,1} & \dots & \mathbf{G}_{l,j,n-1} & \mathbf{P}_{l,j} \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

Algorithm 5: Zobecněný NURBS objem (pomocí rotace)

vstup : Obal NURBS objemu $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{S}]$,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \dots & \mathbf{P}_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{l,0} & \dots & \mathbf{P}_{l,m} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{P}_{0,0} = \mathbf{P}_{0,1} = \dots = \mathbf{P}_{0,m}$, $\mathbf{P}_{l,0} = \mathbf{P}_{l,1} = \dots = \mathbf{P}_{l,m}$ a $\mathbf{P}_{i,0} = \mathbf{P}_{i,m}$, $\forall i$.
Tytéž rovnosti platí i pro příslušné váhy $W_{i,j}$.

výstup: Řídící síť \mathbf{GS} , váhy bodů řídicí sítě \mathbf{WS} , vektor parametrizace \mathbf{T} .

begin

1: \mathbf{T} je volitelný nebo $\mathbf{T} = (0, 0, 1, 1)$;

2: Osa $\omega = \overrightarrow{\mathbf{P}_{0,0}\mathbf{P}_{l,0}}$;

3: Řídící body $\mathbf{K}_{i,j}$ na ose ω : pro $\mathbf{P}_{i,j}$, $\forall i$, najdeme ortogonální průmět $\mathbf{K}_{i,j}$ do osy ω (jejich váhy – volba) za splnění podmínky z Věty 33;

4: $\mathbf{P}'_i := \frac{\sum_{j=0}^m \mathbf{K}_{i,j}}{m+1}$, $\forall i$;

5: V závislosti na volbě \mathbf{T} lze volit vnitřní body $\mathbf{G}_{i,j,k}$ a jejich váhy $W_{i,j,k}$ tak, že výstupní síť $\mathbf{GS}_{i,j,k}$ je ve tvaru

$$\mathbf{GS}_{i,j,k} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}'_0 & \mathbf{G}_{0,j,1} & \dots & \mathbf{G}_{0,j,n-1} & \mathbf{P}_{0,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{P}'_l & \mathbf{G}_{l,j,1} & \dots & \mathbf{G}_{l,j,n-1} & \mathbf{P}_{l,j} \end{pmatrix},$$

pro $j = 0, \dots, m$. Platí $\mathbf{P}'_0 = \mathbf{G}_{0,j,1} = \dots = \mathbf{G}_{0,j,n-1} = \mathbf{P}_{0,j}$,

$\mathbf{P}'_l = \mathbf{G}_{l,j,1} = \dots = \mathbf{G}_{l,j,n-1} = \mathbf{P}_{l,j}$;

6: Váhy \mathbf{WS} : Váhy řídicích bodů $\mathbf{G}_{i,j,k}$ a \mathbf{P}'_i jsou volitelné;

return $\mathbf{GS}, \mathbf{WS}, \mathbf{T}$

pro $j = 0, \dots, m$, kde pro $j = 0$ a $j = m$ je řídicí síť $\mathbf{GS}_{i,0,k}$ a $\mathbf{GS}_{i,m,k}$ shodná – uzavřenost objemu.

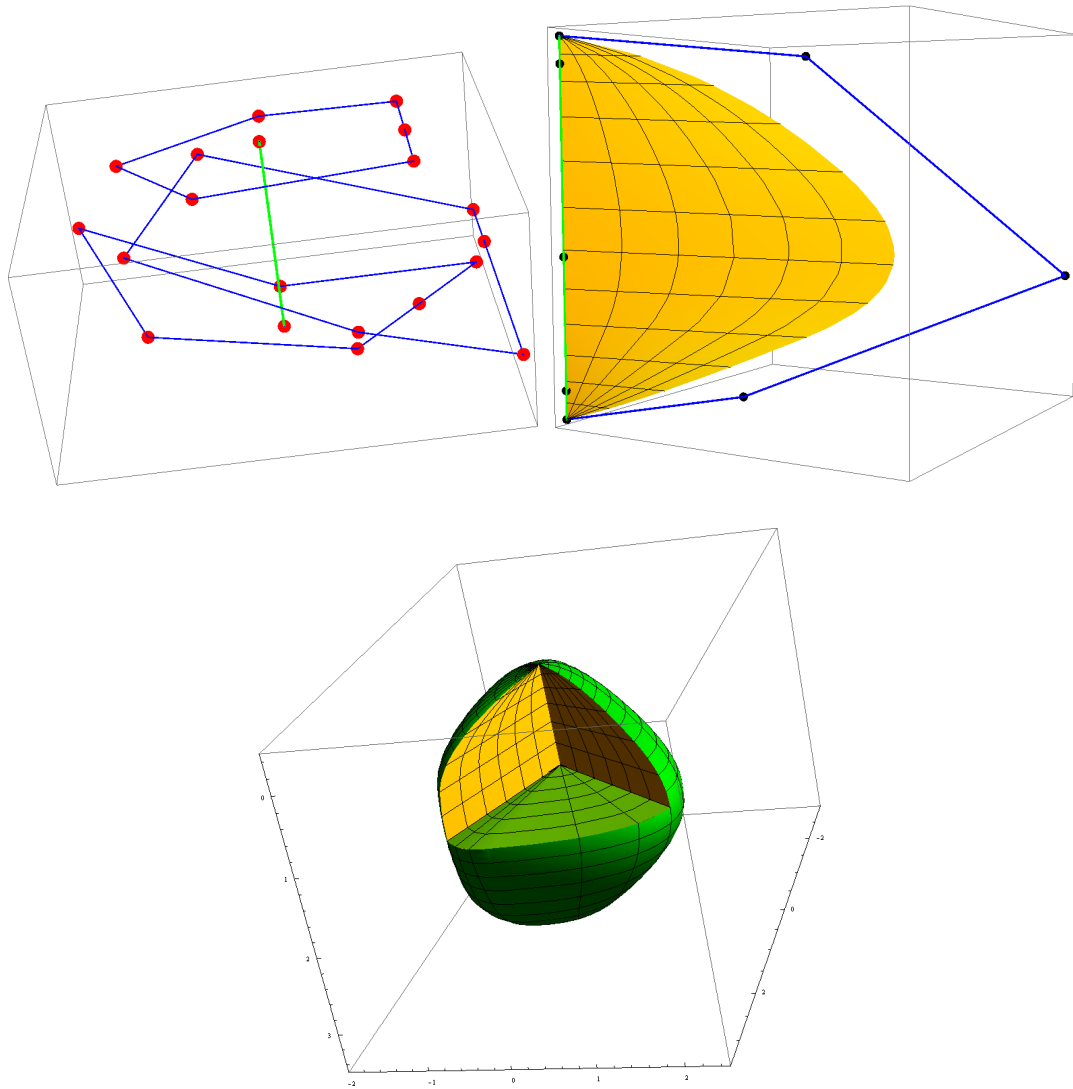
Řídící body $\mathbf{G}_{i,j,k}$ jsou volitelné vnitřní řídicí body, jejichž počet závisí na vektoru parametrizace \mathbf{T} . Výjimkou jsou $\mathbf{G}_{i,j,k}$ pro $i = 0, l$, pro něž platí rovnost

$$\mathbf{P}'_0 = \mathbf{G}_{0,j,1} = \dots = \mathbf{G}_{0,j,n-1} = \mathbf{P}_{0,j}, \quad \mathbf{P}'_l = \mathbf{G}_{l,j,1} = \dots = \mathbf{G}_{l,j,n-1} = \mathbf{P}_{l,j}$$

z důvodu uzavřenosti NURBS objemu. Tato rovnost platí samozřejmě i pro příslušné váhy těchto řídicích bodů. Váhy ostatních nových řídicích bodů jsou volitelné.

Vektor parametrizace \mathbf{T} je libovolný. V případě, že výsledná síť neobsahuje žádné body $\mathbf{G}_{i,j,k}$, volíme $\mathbf{T} = (0, 0, 1, 1)$. Pro názornost si postup, který je shrnut v Algoritmu 5, ukážeme na následujícím příkladu.

Příklad 4. Mějme vstupní hraniční NURBS plochu $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{S}]$, kde \mathbf{P} je řídicí síť o velikosti 5×7 řídicích bodů, \mathbf{W} je matice vah řídicích bodů řídicí sítě a \mathbf{R}, \mathbf{S} jsou vektory parametrizace. Záměrně zde neudáváme konkrétní hodnoty, jelikož



Obrázek 4.13: NURBS objem – Vlevo nahoře: Řídící síť NURBS oblasti (obalu);
 Vpravo nahoře: Ukázková NURBS oblast QS_j pro konkrétní řídicí body řídicí sítě;
 Dole: Výsledný NURBS objem.

nejsou tak podstatné jako samotná konstrukce části řídicí sítě hledaného NURBS objemu.

Pro každý řídicí bod $\mathbf{P}_{i,j}$ řídicí sítě najdeme ortogonální průmět $\mathbf{P}'_{i,j}$ bodu $\mathbf{P}_{i,j}$ do osy rotace ω . Tu nám určují řídicí body $\mathbf{P}_{0,0}$ a $\mathbf{P}_{l,m}$. Vektor parametrizace \mathbf{T} volíme pro jednoduchost $\mathbf{T} = (0, 0, 1, 1)$.

Na obr. 4.13 vlevo nahoře vidíme strukturu řídicích bodů hraniční NURBS plochy, vpravo nahoře pak vybranou část řídicí sítě $\mathbf{P}_{i,2}$ s $\mathbf{P}'_{i,2}$, kde

$$\mathbf{P}_{i,2} = \left\{ (0, 0, 3), \left(1, 2, \frac{29}{10}\right), (3, 3, 1), \left(1, 1, \frac{1}{10}\right), (0, 0, 0) \right\}.$$

Ortogonální průměty těchto řídicích bodů do osy ω jsou

$$\mathbf{P}'_{i,2} = \left\{ (0, 0, 3), \left(0, 0, \frac{29}{10}\right), (0, 0, 1), \left(0, 0, \frac{1}{10}\right), (0, 0, 0) \right\}.$$

To provedeme pro každé j řídicí sítě $\mathbf{P}_{i,j}$, kde $i = 0, \dots, 6$, a získáme tím všechny hledané ortogonální průměty $\mathbf{P}'_{i,j}$. V dalším kroku tyto průměty sjednotíme. Názorně si to ukážeme pro řídicí body

$$\mathbf{P}'_{2,j} = \left\{ \left(0, 0, \frac{29}{10}\right), \left(0, 0, \frac{29}{10}\right), \left(0, 0, \frac{5}{2}\right), \left(0, 0, \frac{29}{10}\right), \left(0, 0, \frac{5}{2}\right), \left(0, 0, \frac{29}{10}\right), \left(0, 0, \frac{29}{10}\right) \right\}.$$

Ty nahradíme sjednoceným řídicím bodem

$$\mathbf{P}'_{2,0} = \mathbf{P}'_{2,1} = \dots = \mathbf{P}'_{2,m} = \frac{\sum_{j=0}^6 \mathbf{P}'_{2,j}}{7} = \left(0, 0, \frac{39}{14}\right).$$

Tento postup aplikujeme na všechny body $\mathbf{P}'_{i,j}$, kde i je pevně zvolené. Dostaneme tak hledanou řídicí síť \mathbf{GS}_2 , kde výsledná řídicí síť NURBS objemu bude ve tvaru $\mathbf{GS} = [\mathbf{GS}_0, \mathbf{GS}_1, \mathbf{GS}_2, \dots, \mathbf{GS}_6]$. Váhy nalezených řídicích bodů jsou libovolné (obvykle jednotkové). Tímto postupem získáme \mathbf{GS}_j a \mathbf{WS}_j pro $j = 0, \dots, 6$. Výsledný NURBS objem vidíme na obr. 4.13 dole. ■

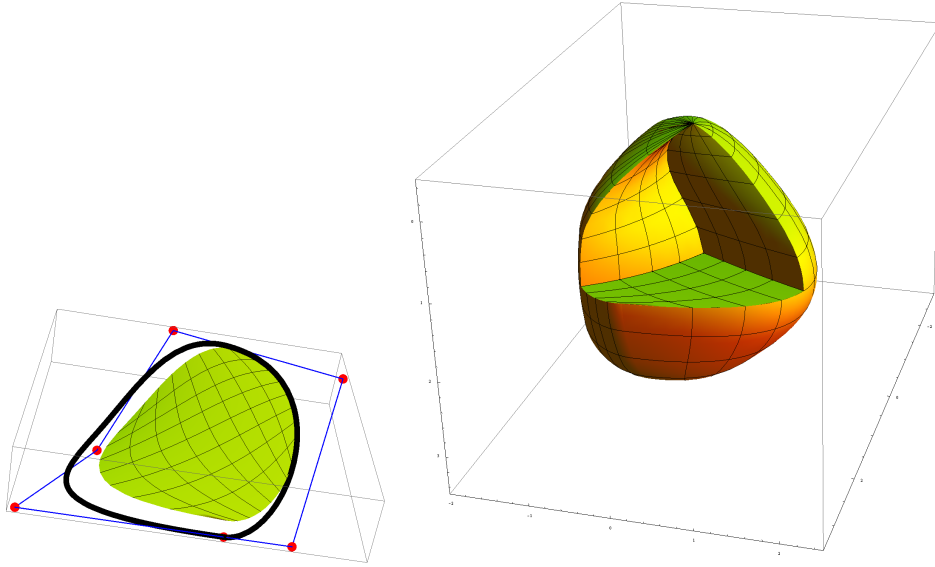
4.2.2 Konstrukce objemu po jednotlivých NURBS oblastech

U rotačních NURBS objemů jsme popsali dvě metody, jak zkonstruovat NURBS objem. Modifikací první metody jsme pak vyřešili konstrukci zobecněného objemu. Přirozeně se nám tak nabízí i modifikace druhé metody.

Uvažujme vstupní NURBS plochu $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}', \mathbf{T}]$, kde pro řídicí body platí $\mathbf{P}_{0,0} = \mathbf{P}_{0,1} = \dots = \mathbf{P}_{0,m}$, $\mathbf{P}_{l,0} = \mathbf{P}_{l,1} = \dots = \mathbf{P}_{l,m}$ a $\mathbf{P}_{i,0} = \mathbf{P}_{i,m}$ pro každé i . Shodně tak pro příslušné váhy $W_{i,j}$. \mathbf{R}' , \mathbf{T} jsou vektory parametrizace.

Hledáme popis NURBS objemu $\mathbf{QS} := [\mathbf{GS}, \mathbf{WS}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}]$, kde \mathbf{GS} je řídicí síť, \mathbf{WS} váhy řídicích bodů sítě a vektory parametrizace $\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$.

Myšlenka konstrukce je založena na stejném principu jako předchozí metoda. Tam jsme v prvním kroku hledali řídicí body $\mathbf{P}'_{i,j}$ (ortogonální průměty řídicí bodů pláště) na ose rotace. Řídicí body pláště $\mathbf{P}_{i,j}$ s příslušnými průměty $\mathbf{P}'_{i,j}$ nám vytvořily řídicí síť \mathbf{GS}_j jednotlivých NURBS oblastí. Následným složením těchto řídicích sítí jsme získali řídicí síť celého NURBS objemu.



Obrázek 4.14: Vlevo: Černě je znázorněna uzavřená NURBS křivka a zeleně pak příslušná NURBS oblast ovlivněná celkovou strukturou řídicí sítě NURBS objemu; Vpravo: Výsledný NURBS objem.

V této části budeme taktéž nejprve hledat jednotlivé řídicí sítě NURBS oblastí. Mějme vstupní řídicí síť NURBS obalu

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \dots & \mathbf{P}_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{l,0} & \dots & \mathbf{P}_{l,m} \end{pmatrix},$$

kde řídicí body $\mathbf{P}_{i,0}, \mathbf{P}_{i,1}, \dots, \mathbf{P}_{i,m}$ pro pevné i jsou řídicí body uzavřené NURBS křivky $\bar{\mathbf{Q}}_i$.

Pro každé i nyní hledáme NURBS oblast, která je ohraničena její příslušnou NURBS křivkou $\bar{\mathbf{Q}}_i$. Ohraničení zde chápeme pouze z hlediska výpočtu hledané řídicí sítě.

K vyřešení použijeme známý algoritmus *NURBS14* (viz [2]) (opět lze použít i *NURBS12*).

Hledaný popis NURBS oblasti je ve tvaru

$$\mathbf{QS}_i := [\mathbf{GS}_i, \mathbf{WS}_i, \mathbf{R}, \mathbf{S}],$$

kde \mathbf{GS}_i je řídicí síť s váhami \mathbf{WS}_i a dvěma vektory parametrizace \mathbf{R} a \mathbf{S} .

Tento postup aplikujeme na všechny křivky $\bar{\mathbf{Q}}_i$. Získáme tak NURBS oblasti \mathbf{QS}_i , které nám tvoří dohromady NURBS popis objemu:

$$\mathbf{QS} := [\mathbf{GS}, \mathbf{WS}, \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}],$$

kde $\mathbf{GS} = [\mathbf{GS}_0, \mathbf{GS}_1, \dots, \mathbf{GS}_l]$ a $\mathbf{WS} = [\mathbf{WS}_0, \mathbf{WS}_1, \dots, \mathbf{WS}_l]$.

Celý postup jsem shrnul v Algoritmu 6. Na obr. 4.14 si můžeme prohlédnout NURBS objem, jehož vstupní data byla shodná s daty z předchozího Příkladu 4. Vlevo vidíme část řídicích bodů, které určují společně s váhami a vektorem parametrizace uzavřenou křivku (černě) a zeleně výslednou NURBS oblast \mathbf{QS}_i . Zřetelně vidíme, že křivka přesně neohraničuje danou oblast. Je to způsobené tím, že na tvar výsledné oblasti (řezu NURBS objemu) má vliv celá řídicí síť NURBS objemu a ne jen řídicí body této hraniční křivky. Vpravo máme pak výsledný NURBS objem.

Algorithm 6: Konstrukce objemu po jednotlivých NURBS oblastech

vstup : Obal NURBS objemu $\mathbf{Q} := [\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}', \mathbf{T}]$,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{0,0} & \dots & \mathbf{P}_{0,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{P}_{l,0} & \dots & \mathbf{P}_{l,m} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{P}_{0,0} = \mathbf{P}_{0,1} = \dots = \mathbf{P}_{0,m}$ a $\mathbf{P}_{l,0} = \mathbf{P}_{l,1} = \dots = \mathbf{P}_{l,m}$.

výstup: Řídicí síť \mathbf{GS} , váhy bodů řídicí sítě \mathbf{WS} , vektor parametrizace \mathbf{R} a \mathbf{S} .

begin

1: $[\mathbf{GS}_i, \mathbf{WS}_i, \mathbf{R}, \mathbf{S}] := \text{NURBS14}[\mathbf{P}_{i,0}, \dots, \mathbf{P}_{i,m}, \mathbf{W}_{i,0}, \dots, \mathbf{W}_{i,m}, \mathbf{R}']$ pro

$i = 0, \dots, l$;

2: $\mathbf{GS} := [\mathbf{GS}_0, \dots, \mathbf{GS}_l]$;

3: $\mathbf{WS} := [\mathbf{WS}_0, \dots, \mathbf{WS}_l]$;

return $\mathbf{GS}, \mathbf{WS}, \mathbf{R}, \mathbf{S}$

4.2.3 Srovnání

Stejně jako v předchozí části si nyní obě metody zhodnotíme a řekneme jejich výhody a nevýhody.

První metoda je oproti druhé jednodušší z hlediska konstrukce a navíc není zapotřebí zmíněného algoritmu *NURBS14*, který může mít v případě složité vstupní řídicí sítě za následek delší dobu výpočtu výsledné řídicí sítě. Ta může mít v konečném tvaru mnoho vnitřních řídicích bodů, které nejsou v daném případě tolik potřebné. Jelikož u první metody vycházíme z konstrukce, kterou jsme používali pro rotační tělesa, vzniká i v tomto případě singulární osa.

Z hlediska kvality popisu NURBS objemu je tedy druhá metoda vhodnější než první, ale z hlediska rychlosti a možnosti volby některých vnitřních řídicích bodů je vhodnější metoda první.

Kapitola 5

Balíček NURBSobjem

Balíček NURBSobjem je vytvořen v programu Mathematica 7.0. Načtení do programu zajistíme příkazem <<NURBSobjem', který aktivuje funkce používající metody popsané v Kapitole 4.

Zadávaní vstupů v Mathematice musí být v následujícím tvaru:

- Řídící body $\mathbf{P} = \{\{x_0, y_0, z_0\}, \dots, \{x_1, y_1, z_1\}\}$.
- Vektory vah $\mathbf{W} = \{w_0, \dots, w_1\}$.
- Vektory parametrizací $\mathbf{R} = \{r_0, \dots, r_{1+f+1}\}$.
- Řídící síť $\mathbf{P}' = \{\{\{x_{0,0}, y_{0,0}, z_{0,0}\}, \dots, \{x_{0,m}, y_{0,m}, z_{0,m}\}\}, \dots, \{\{x_{1,0}, y_{1,0}, z_{1,0}\}, \dots, \{x_{1,m}, y_{1,m}, z_{1,m}\}\}\}$.
- Váhy řídicí sítě $\mathbf{W}' = \{\{w_{0,0}, \dots, w_{0,m}\}, \dots, \{w_{1,0}, \dots, w_{1,m}\}\}$.
- Osa rotace $\mathbf{D} = \{\{x_0, y_0, z_0\}, \{x_1, y_1, z_1\}\}$.

U všech vstupních křivek a ploch se předpokládá, že se nebudou navzájem protínat a že nebudou obsahovat samoprůnik.

Balíček NURBSobjem obsahuje celkem 5 funkcí, z toho 3 funkce jsou založeny na algoritmech rotačních těles a další 2 využívají algoritmy ze zobecněných rotačních těles. Předpokladem k tomu, abychom mohli následující funkce použít, je načtení balíčku NURBSoblast z [2].

První funkce je ROTAT1, která používá Algoritmus 3. Vstupem je otevřená NURBS křivka $[\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$, osa rotace \mathbf{D} a volitelný vektor parametrizace \mathbf{S} . Volání této funkce bude vypadat

$$\text{ROTAT1}[\{\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{D}, \mathbf{S}\}],$$

kde výstupem bude řídicí síť \mathbf{GS} , její matice vah \mathbf{WS} a tři vektory parametrizace $\mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}$.

Druhá funkce je ROTAT1U, které využívá kombinaci funkce ROTAT1 a NURBS14, která je obsažena v balíčku NURBSoblast. Vstupní data funkce ROTAT1U jsou uzavřená NURBS křivka $[\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$ a osa rotace \mathbf{D} . Volání funkce má podobu

$$\text{ROTAT1U}[\{\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{D}\}].$$

Výstupem je opět řídicí síť **GS**, její matice vah **WS** a tři vektory parametrizace **R**, **S** a **T**.

Třetí funkce je ROTA2, která je založená na Algoritmu 4. Potřebná vstupní data jsou otevřená NURBS křivka $[\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}]$ a osa rotace **D**. Funkci voláme příkazem

$$\text{ROTA2}[\{\mathbf{P}, \mathbf{W}, \mathbf{R}, \mathbf{D}\}].$$

Výstupem je řídicí síť **GS** s maticí vah **WS** a vektory parametrizace **R**, **S**, **T**.

Čtvrtá a pátá funkce používají Algoritmy 5 a 6. Oproti předchozím funkcím požadujeme jako vstupní data uzavřenou NURBS plochu. Pro funkci BRAM1 bude vstupem NURBS oblast $[\mathbf{P}', \mathbf{W}', \mathbf{R}, \mathbf{S}]$ a volitelný vektor parametrizace **T**. Volání této metody bude ve tvaru

$$\text{BRAM1}[\{\mathbf{P}', \mathbf{W}', \mathbf{R}, \mathbf{S}, \mathbf{T}\}].$$

Výstupem bude řídicí síť NURBS objemu **GS** s maticí vah **WS** a vektory parametrizace **R**, **S**, **T**.

Poslední funkcí je BRAM2, která používá ke svému výpočtu funkci NURBS14. Vstupem je pouze NURBS plocha $[\mathbf{P}', \mathbf{W}', \mathbf{R}', \mathbf{T}]$. Zavolání funkce provedeme příkazem

$$\text{BRAM2}[\{\mathbf{P}', \mathbf{W}', \mathbf{R}', \mathbf{T}\}].$$

Výstupní data jsou řídicí síť **GS**, matice vah **WS** a vektory parametrizace **R**, **S**, **T**.

Závěr

Cílem mé diplomové práce bylo navrhnout vlastní metody pro vytvoření NURBS objemové parametrizace pro speciální třídy hraničních NURBS křivek a ploch. Přesněji šlo o nalezení parametrizace NURBS objemu, jehož plášť vznikne rotací vstupní NURBS křivky okolo dané osy rotace. Dále pak parametrizaci NURBS objemu, který je ohraničen vstupní uzavřenou NURBS plochou. Úkolem bylo analyzování daného problému, nalezení teoretického i praktického řešení demonstrovaného na příkladech a grafických výstupech a eventuálně nalézt alternativní možnosti řešení a další optimalizace. Nalezené metody, resp. algoritmy pak implementovat do programu Mathematica, jejichž shrnutím vznikne uživatelský balíček. Mezi další cíle této práce patřilo shrnutí základních informací NURBS objektů a prezentace již známých metod pro vytváření NURBS objemů a optimalizace jejich sítě.

Hlavním výsledkem této diplomové práce jsou algoritmy pro vytvoření popisu NURBS objemu pomocí vstupní NURBS křivky rotující kolem osy rotace a popisu NURBS objemu ohraničeného vstupní uzavřenou NURBS plochou. Tyto metody jsou popsány v kapitole 4, resp. část 4.1. se zabývá první možností a část 4.2. druhou možností. Pro obě možnosti jsme zkonstruovali dvě možné metody, které jsou zde analyzovány a v závěru kapitoly zhodnoceny. Postupy konstrukcí jsou znázorněny na příkladech a grafických výstupech. U první možnosti jsme pak ještě zařadili jednu možnou metodu pro uzavřenou vstupní křivku, kterou jsme demonstrovali opět na příkladu a grafickém výstupu. Pro řídicí body vstupní NURBS křivky a vstupní NURBS uzavřené oblasti jsme navíc zavedli a dokázali podmínku pro injektivní parametrizaci výsledného NURBS objektu. Tyto algoritmy byly implementovány v programu Mathematica, jejichž výsledkem je balíček funkcí popsaných v kapitole 5.

Mezi další výsledky patří také shrnutí základních definic a vlastností NURBS objektů, které jsou v kapitole 1. V kapitole 2 se zabýváme prezentací metody pro vytvoření NURBS objemů speciálním pohybem daných NURBS ploch. Jsou zde popsány postupy a podmínky pro konstrukci tohoto druhu NURBS objemu. Pro názornost je vše doplněno o grafické výstupy. Posledním cílem byla prezentace a analýza optimalizace sítě NURBS objektu, kterou nalezneme v kapitole 3. Jelikož se tato optimalizace týká především řídicích bodů daného NURBS objektu, řešila se daná problematika na B-spline objektech. Tato kapitola je rozdělena na dvě části, kde se nejprve zabýváme možnostmi optimalizace sítě B-spline plochy a jejími metodami. Ve druhé části se pak dostáváme k optimalizaci sítě B-spline objemu. V obou částech jde o prezentaci dvou metod, které se používají jak pro B-spline plochy, tak pro B-spline objemy.

Literatura

- [1] M. Aigner, C. Heinrich, B. Jüttler, E. Pilgerstorfer, B. Simeon, and A.-V. Vuong: *Swept volume parameterization for isogeometric analysis*. In E. Hancock and R. Martin (eds.), *The Mathematics of Surfaces (MoS XIII 2009)*, LNCS 5654, pp. 19 - 44, Springer, 2009.
- [2] P. Anděl: *NURBS reprezentace rovinných oblastí*. Bakalářská práce, ZČU, 2010.
- [3] X. Gang, B. Mourrain, R. Duvigneau, A. Galligo: *Parametrization of computational domain in isogeometric analysis: method and comparison*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200, 2011.
- [4] L. Piegl, W. Tiller: *The NURBS Book*. Springer, New York, 1997.
- [5] F. Ježek: *Geometrické a počítačové modelování*. Pomocný učební text. ZČU, 2009.
(zdroj: <http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/view/full/1023/>)
- [6] Y. Bazilevs, L. Beirao da Veiga, J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, G. Sangalli, *Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes*, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, Vol. 16 (7), pp. 1031-1090, 2006.
- [7] J. Gravesen, A. Evgrafov, A. R. Gersborg, N. D. Manh, P. N. Nielsen: *Isogeometric analysis and shape optimisation*. In: *Proceedings of 23rd Nordic Seminar on Computational Mechanics*, (A. Erikson and G. Tibert eds.), pp. 14-17, Stockholm 2010.
- [8] T. Martin, E. Cohen, R. M. Kirby: *Volumetric parametrization and trivariate B-spline fitting using harmonic functions*. *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 26, pp. 648-664. Elsevier, 2009.
- [9] I. Linkeová: *NURBS křivky: NeUniformní Racionální B-Spline křivky*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2007.
- [10] V. Skytt, X. Gang, B. Mourrain: *First definition of isogeometric framework, cases, data structures and methods*. EXCITING project report, NO. 6.1, 2009.
- [11] X. Gang, B. Mourrain, R. Duvigneau, A. Galligo: *Optimal analysis-aware parameterization of computational domain in isogeometric analysis*. INRIA Research Report-00440130, 2009.

- [12] *Isogeometrická analýza: KMA/APG1 - Aplikace geometrie 1* Pomocný učební text, ZČU.
(zdroj: <http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/view/full/279/>)
- [13] V. Milěř: *Editor NURBS*: Diplomová práce. Praha, 2000.
- [14] G. Farin, D. Hansford: *Discrete coons patches*. Computer Aided Geometric Design, Vol. 16, pp. 691-700, Elsevier, 1999.
- [15] B. Bastl: *Plochy volného tvaru 2*. Pomocný učební text. ZČU.
(zdroj: <http://geometrie.kma.zcu.cz/index.php/www/content/view/full/187/>)
- [16] E. Kreyszig: *Introductory functional analysis with applications*. John Wiley & sons, pp. 136-138, 1989.
- [17] G. Celniker, D. Gossard: *Deformable curve and surface finite-elements for free-form shape design*. Computer Graphics, Vol. 25, NO. 4, 1991.
- [18] X. Gang, B. Mourrain, R. Duvigneau, A. Galligo: *Analysis-suitable volume parameterization of multi-block computational domain in isogeometric applications*. Computer-Aided Design 45, pp. 395-404, 2012.
- [19] X. Gang, B. Mourrain, R. Duvigneau, A. Galligo: *Optimal Analysis-Aware Parameterization of Computational Domain in Isogeometric Analysis*. Advances in Geometric Modeling and Processing: LNCS 6130, pp. 236-254. Springer, 2010.
- [20] M. R. Dörfel, B. Jüttler, B. Simeon: *Adaptive isogeometric analysis by local h-refinement with T-splines*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 199, pp. 264–275. Elsevier, 2010.
- [21] H. Grandin: *Fundamentals of the Finite Element Method*. Macmillan Pub. Co., 1986.
- [22] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, Y. Bazilevs: *Isogeometric analysis: CAD, finite-elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 194, pp. 4135–4195. Elsevier 2005.
- [23] N. D. Manh, A. Evgrafov, A. R. Gersborg, J. Gravesen: *Isogeometric shape optimization of vibrating membranes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 200, pp. 1343–1353. Elsevier 2011.
- [24] M. S. Floater: *Mean value coordinates*. Computer Aided Geometric Design, Vol. 20, pp. 19–27. Elsevier 2003.
- [25] X. Gang, B. Mourrain, R. Duvigneau, A. Galligo: *Optimal analysis-aware parameterization of computational domain in 3D isogeometric analysis*. INRIA Research Report-00539616, 2011.
- [26] W. Wang, B. Jüttler, D. Zheng, and Y. Liu: *Computation of rotation minimizing frames*. ACM Trans. on Graphics, 27(1):article no. 2, 2008.