

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD  
Katedra matematiky

## DIPLOMOVÁ PRÁCE

Analytické metody evoluční  
teorie her

Plzeň 2013

Stanislav KOCOUR

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd

Akademický rok: 2012/2013

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení: **Bc. Stanislav KOCOUR**  
Osobní číslo: **A10N0161P**  
Studijní program: **N3918 Aplikované vědy a informatika**  
Studijní obor: **Finanční informatika a statistika**  
Název tématu: **Analytické metody evoluční teorie her**  
Zadávací katedra: **Katedra matematiky**

### Z á s a d y p r o v y p r a c o v á n í :

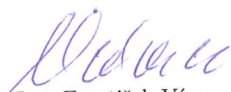
Startovním bodem diplomové práce je pochopení a přehledné zpracování základních matematických modelů z evoluční teorie her. Důraz bude kladen zejména na objasnění současné prevalence simulačního přístupu. Cílem práce je pak vytvoření analytického modelu pro menší populaci a jeho analýza z vybraného úhlu pohledu (hodnota parametrů, stabilita, schopnost měnit rozhodnutí či generující grafová struktura).

Rozsah grafických prací: **dle potřeby**  
Rozsah pracovní zprávy: **cca 45 stran**  
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**  
Seznam odborné literatury:


- Nowak M. (2006). Five rules for the evolution of cooperation. Science 314 (5805): 1560–1563.
- Ohtsuki, H., Nowak, M.A. (2008). Evolutionary stability on graphs. J. Theor. Biol. 273, 2249–2256.
- Szabo, G., Fath, G. (2007). Evolutionary games on graphs. Phys. Rep. 446, 97–216.
- Traulsen A., Nowak M. (2006). Evolution of cooperation by multilevel selection. Proc Natl Acad Sci USA 103 (29): 10952–10955.
- Webb J. N. (2007) Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution, Springer.

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Petr Stehlík, Ph.D.**  
Katedra matematiky

Datum zadání diplomové práce: **1. října 2012**  
Termín odevzdání diplomové práce: **22. května 2013**

  
Doc. Ing. František Vávra, CSc.  
děkan



  
Prof. RNDr. Pavel Drábek, DrSc.  
vedoucí katedry

V Plzni dne 1. října 2012

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně a s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

V Plzni dne 21. května 2013

Kocour Stanislav

# Poděkování

Touto cestou bych chtěl poděkovat RNDr. Petru Stehlíkovi, Ph.D., vedoucímu diplomové práce, za jeho odborné vedení, vstřícné jednání a podnětné připomínky během vytváření práce.

**Název práce:** Analytické metody evoluční teorie her

**Autor:** Bc. Stanislav Kocour

**Katedra:** Katedra matematiky

**Vedoucí práce:** RNDr. Petr Stehlík, Ph.D.

## Abstrakt

Jedním z cílů této práce je popis evoluční teorie her a zavedení pojmu dynamický evoluční graf, jako modelu pro vývoj kooperativního chování. Při popisu evolučního grafu vycházíme z teorie náhodných grafů, konkrétně scale - free grafů, které slouží jako vhodný prostředek pro popis interakcí v modelech vývoje kooperativního chování. Scale - free grafy jsou i vhodnými modely využívající se k popisu mnoha reálných sítí. Z důvodu absence ucelené matematické teorie pro popis vývoje kooperativního chování na komplexních evolučních grafech je v této práci kladen důraz na simulační přístup při analýze výsledků. Hlavním cílem této práce je, jak rigidita může změnit a obohatit obraz dlouhodobého kooperativního chování na modelech simulace. Zvažujeme dva typy rigidity. Prvním typem rigidity rozumíme fixaci strategie na vrcholu s nejvyšším stupněm. Pak jsou definovány různé rigidity pro každou strategii zvlášť (ne jen pro vrcholy modelu). Důležitým výstupem této práce je zjištění významného vlivu rigidity na vývoj kooperativního chování.

**Klíčová slova:** Náhodný graf, scale - free graf, evoluční teorie her, dynamický evoluční graf, užítková matice, aktualizací pravidlo - imitace.

**Title:** Analytical methods of evolutionary game theory

**Author:** Bc. Stanislav Kocour

**Department:** Department of Mathematics

**Supervisor:** RNDr. Petr Stehlík, Ph.D.

## Abstract

One of the goals of this thesis is the description of evolutionary game theory and the introduction of the concept of a dynamic evolutionary graph as a model for the evolution of cooperation. We use the theory of random graphs, specifically scale - free graphs, and describe the evolutionary graph. Scale - free graphs are used as suitable tools for analyzing interactions in models for evolution of cooperation. Scale - free graphs are used to describe many real networks. Because of the absence of a formal mathematical theory to describe the evolution of cooperation in complex evolutionary graphs emphasis lies on the simulation approach. The major question of this thesis is how rigidity can modify and enrich the picture of long-term behavioral patterns. We consider two types of rigidities. First, the hub's strategy is fixed infinitely. Then, the different rigidities are defined for each strategy (rather than for vertices). An important result of this thesis is the finding of a significant effect of rigidity on the evolution of cooperation.

**Key words:** Random graph, Scale - free graph, evolutionary game theory, dynamic evolutionary graph, payoff matrix, update rule - imitation.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Základní pojmy</b>	<b>3</b>
2.1	Základní pojmy teorie grafů . . . . .	3
2.2	Teorie náhodných grafů . . . . .	4
2.2.1	Rozdělení stupňů vrcholů grafu . . . . .	7
2.2.2	Souvislost grafu a průměr grafu . . . . .	8
2.3	Scale - free graf . . . . .	9
2.3.1	Průměr scale - free grafu . . . . .	12
2.4	Základní pojmy teorie her . . . . .	14
2.5	Maticové hry . . . . .	16
2.6	Shrnutí . . . . .	17
2.7	Parametry užitékové matice . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Evoluční teorie her</b>	<b>19</b>
3.1	Historický vývoj . . . . .	19
3.2	Evoluční hra . . . . .	20
3.2.1	Aktualizační pravidlo - Imitace okolí . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Model a průběh simulace</b>	<b>23</b>
4.1	Výchozí model simulace . . . . .	23
4.2	Architektura modelu a metodologie . . . . .	24
4.2.1	Konstrukce modelu . . . . .	24
4.2.2	Průběh simulace . . . . .	26
4.2.3	Sběr dat . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Analýza a interpretace výsledků simulací</b>	<b>27</b>
5.1	Vliv počtu vrcholů modelu na vývoj kooperativní strategie . . . . .	28
5.1.1	Agregovaná užitéková funkce . . . . .	29
5.1.2	Průměrná užitéková funkce . . . . .	30
5.2	Vliv rigidity vrcholu v modelu na vývoj kooperativní strategie . . . . .	31



5.2.1	Agregovaná užitková funkce . . . . .	32
5.2.2	Průměrná užitková funkce . . . . .	35
5.3	Agregovaná užitková funkce vs. průměrná užitková funkce . .	38
5.3.1	Základní model . . . . .	39
5.3.2	Model s rigiditou - 1 . . . . .	40
5.3.3	Model s rigiditou - 0 . . . . .	41
5.4	Vliv rigidity strategie v modelu na vývoj kooperativní strategie	42
5.4.1	Agregovaná užitková funkce . . . . .	43
5.4.2	Průměrná užitková funkce . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>46</b>
<b>A</b>	<b>Příloha</b>	<b>53</b>
<b>B</b>	<b>Příloha</b>	<b>55</b>
<b>C</b>	<b>Příloha</b>	<b>57</b>

# 1 Úvod

Jednou z oblastí matematiky, která se zabývá analýzou konfliktních rozhodovacích situací, je teorie her. Prostřednictvím jejího aparátu lze nalézt rovnovážné řešení modelované situace, případně určit, které vlivy způsobí vychýlení ze stavu rovnováhy apod. Teorie her je využívána v mnoha oborech a velmi významnou roli hraje především v ekonomii a biologii. Jedním z odvětví teorie her je evoluční teorie her, kde hlavní motivací byla potřeba umět analyzovat a popisovat chování různých biologických modelů. V principu jde o propojení teorie grafů, reprezentující model interakcí mezi jednotlivými vrcholy, teorie her, jako rozhodovacího aparátu, a teorie dynamických systémů. Z důvodu absence ucelené matematické teorie využíváme simulační přístup k popisu vývoje kooperativního, resp. nekooperativního chování na rozsáhlých evolučních grafech. Simulace jsou dominantním postupem při popisu jejich vlastností a hrají zásadní roli při popisu nových jevů v této oblasti.

Model vývoje kooperativní strategie, který je prezentován v této práci, má podobu scale - free grafu, konkrétně Barabási - Albert modelu. Scale - free grafy jsou na základě svých specifických vlastností velmi vhodnými modely, které se využívají k popisu mnoha reálných sítí. Z tohoto důvodu propojení reálných sítí s teoretickým modelem jsou častým objektem při zkoumání vývoje kooperativní resp. nekooperativní strategie.

V práci je modelována, za pomoci počítačové simulace, interakce mezi jednotlivými vrcholy modelu, které vykazují dvě základní schopnosti. Jde o schopnost sehrát hru a schopnost zvolit jednu ze dvou možných strategií (v našem případě kooperativní nebo nekooperativní strategii) a to podle znalosti vlastního užitku a užitku svého okolí (imitace okolí). Podstatou simulace je ukázat:

- Jaký vliv má topologie grafu a počet vrcholů modelu na vývoj kooperativní, resp. nekooperativní strategie v modelu?
- Jaký vliv má prvek imitace na rozvoj kooperativní, resp. nekooperativní strategie v modelu? Je zde několik variant modelu lišící se v imitačních schopnostech vrcholů modelu.
- Jaký vliv má rigidita vrcholu s největším stupněm a rigidita strategie na vývoj kooperativní resp. nekooperativní strategie na vrcholech modelu?

Práce je strukturována následovně.

Navazující Kapitola 2 se zabývá jednotlivými stavebními bloky modelu. První část (Kapitola 2.1) je věnována základním pojmům z teorie grafů a naší motivací volby scale - free grafu jako základního modelu v simulačním procesu. Druhá část (Kapitola 2.4) se zabývá teorií her. Jsou zde popsány základní pojmy z teorie her, zadefinována užítková matice a doplňující podmínky, které vedou ke čtyřem scénářům her: Plná spolupráce (Full cooperation), Jestřáb a hrdlička (Hawk and Dove), Lov jelena (Stag hunt) a Vězňovo dilema (Prisoner's dilemma).

Kapitola 3 se zabývá evoluční teorií her. Jsou zde zadefinovány základní pojmy, které vedou k dynamickému evolučnímu grafu. Evoluční graf je pojem, který propojuje teorii grafů a teorii her. V poslední části (Kapitola 3.2.1) je popsán prvek imitace jako aktualizací pravidlo simulace.

V Kapitole 4 lze nalézt popis výchozího modelu simulace a popis vlastní architektury modelu a zapojení jednotlivých částí do celku.

Cílem Kapitoly 5 je interpretovat výsledky počítačových simulací. Pozornost je věnována odlišnostem mezi jednotlivými modely simulace a různými imitačními pravidly. Dále je zohledněn i prvek rigidity vrcholu s nejvyšším stupněm a rigidity strategie na vrcholech modelu.

## 2 Základní pojmy

### 2.1 Základní pojmy teorie grafů

Teorie grafů je poměrně mladá matematická disciplína, která je součástí diskrétní matematiky. Začátky teorie grafů klademe do 30. let 18. století, kdy v roce 1736 švýcarský a později pruský matematik Leonhard Euler vyřešil, ve své práci *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* [8], problém sedmi mostů města Královec. Po uvedení Eulerova výsledku se grafová problematika v matematice neobjevila více než sto let. Až v polovině 19. století je teorie grafů spojena se jmény jako byl Gustav Kirchhoff, sir William Rowan Hamilton a s mnoha dalšími významnými matematiky. První monografií zcela věnovanou teorii grafů je kniha maďarského matematika Dénesa Königa *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* [10], která byla vydána v roce 1936 [9].

V našem případě budou grafy sloužit jako vhodný prostředek pro popis interakcí v modelech vývoje kooperativního, resp. nekooperativního chování.

Při popisu základních pojmů z oblasti teorie grafů budeme vycházet z následující literatury [9].

**Definice 2.1.1** *Neorientovaný graf je dvojice  $G = \{V(G), H(G)\}$ , kde  $V$  je konečná množina a  $H \subseteq \binom{V}{2}$ , přičemž*

$$\binom{V}{2} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$$

*je množina všech neuspořádaných dvojic prvků množiny  $V$ . Prvky množiny  $V$  nazýváme vrcholy, prvky množiny  $H$  pak hrany grafu  $G$ . Vrcholy  $u, v \in V$  jsou sousední, pokud  $\{u, v\} \in H$ .*

Tato definice grafu neumožňuje, aby mezi dvěma vrcholy vedla více než jedna hrana (tzv. násobné hrany). Nepovoluje ani tzv. smyčky, tj. hrany, které spojují vrchol se sebou samým.

Budeme také uvažovat především o konečných grafech, tedy takových grafech, jejichž množina vrcholů je konečná.

**Definice 2.1.2** Okolím vrcholu v grafu  $G$  označíme všechny sousední vrcholy vrcholu  $v$ . Značíme  $N(v)$ .

**Definice 2.1.3** Sled z vrcholu  $v$  do vrcholu  $u$  grafu  $G$  je libovolná posloupnost

$$v = v_0, v_1, \dots, v_k = u,$$

kde  $v_i$  jsou vrcholy grafu  $G$  a pro každé  $i = 1, 2, \dots, k$  je  $v_{i-1}v_i$  hranou grafu  $G$ .

Sled je tedy jakási „procházka“ po grafu, při které v každém kroku přecházíme po hraně mezi sousedními vrcholy. V rámci této „procházky“ můžeme libovolný vrchol navštívit vícekrát, můžeme dokonce i projít vícekrát po téže hraně.

**Definice 2.1.4** Graf  $G$  je souvislý, jestliže pro každé dva vrcholy  $u, v \in V(G)$  existuje v grafu  $G$  sled z  $u$  do  $v$ . V opačném případě je graf nesouvislý.

Označme  $n = |V(G)|$  počet vrcholů a  $m = |H(G)|$  počet hran v grafu  $G$ .

**Definice 2.1.5** Úplný graf je neorientovaný graf, v němž jsou všechny možné dvojice vrcholů spojeny hranou. Označuje se  $K_n$ , kde  $n$  je počet vrcholů.

**Věta 2.1.1** Počet hran  $m$  úplného grafu  $K_n$  je roven

$$m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (2.1)$$

Důkaz: ([11], str. 49).

## 2.2 Teorie náhodných grafů

Kooperativní chování je nezbytnou podmínkou pro existenci moderních komplexních společenství a ekonomik, jak je známe dnes. Mnohé z nich tvoří složité systémy, kde vrcholy jsou prvky těchto systémů a hrany reprezentují interakce a vztahy mezi nimi. Mezi takové systémy například patří:

- World-Wide Web (WWW), který představuje neustále rozrůstající síť, kde vrcholy jsou reprezentovány webovými stránkami (webpages) a hrany tvoří hypertextové odkazy (URLs) na jiné webové stránky.
- Internet, který tvoří síť mezi počítači a dalšími telekomunikačními zařízeními.
- Elektrické rozvodné sítě, kde vrcholy jsou reprezentovány generátory, transformátory a rozvodnami, a hrany jsou vedení vysokého napětí.
- Systémy, které tvoří obrovské genetické grafy, kde vrcholy jsou proteiny a geny, a hrany tvoří chemické interakce mezi nimi.

Příkladem takového grafu může být nervový systém, kde vrcholy jsou nervové buňky spojeny nervovými vlákny.

- Složité grafy vyskytující se například v sociální nebo ekonomické oblasti, kde vrcholy jsou jedinci nebo organizace ve společnosti a hrany reprezentují sociální resp. ekonomické interakce mezi nimi.

Příkladem sociálních systémů může být síť herců, kde herci představují vrcholy a hrany reprezentují jejich společné obsazení ve filmu, nebo síť sexuálních partnerů apod. V případě ekonomických systémů můžeme uvažovat síť společností daného odvětví a jejich interakce mohou být v podobě spolupráce resp. konkurenčního boje mezi nimi apod.

- Biologické systémy, kde vrcholy tvoří jedinci dané populace a hrany reprezentují interakce mezi nimi.

**Poznámka 2.2.1** *Uvedené systémy v mnoha případech tvoří orientované grafy (sítě). V naší práci však budeme pracovat s neorientovanými grafy.*

Při popisu takových systémů vystávají obtíže a to zejména ve složitosti a komplexnosti jejich topologií.

Základy, na kterých bylo možné začít budovat teorii při popisu těchto složitých systémů, položili koncem 50. let minulého století dva významní maďarští matematici Paul Erdős a Alfréd Rényi [7].

Teorie náhodných grafů, kterou popsali, poskytuje široký aparát v této oblasti, ale z důvodů absence dat na velkých grafech, předpovědi a závěry této teorie byly jen zřídkakdy testovány na výše uvedených reálných systémech. Až postupem času s rozvojem informačních technologií a získáváním rozsáhlých dat,

a to hlavně topologie reálných systémů, přináší mnoho možností pochopení této teorie.

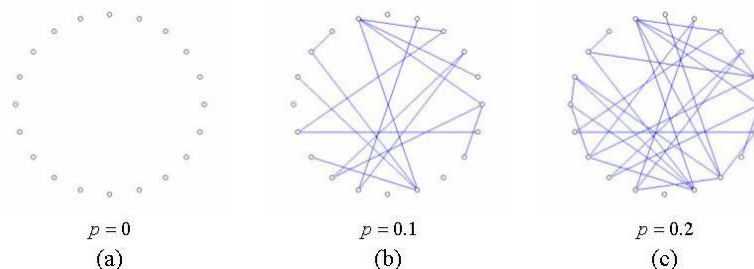
**Poznámka 2.2.2** *Bylo například ukázáno u World-Wide Webu (WWW), Internetu, síť herců atd., nezávisle na systému a jejich složitosti, že pravděpodobnost  $P(k)$  (náhodně vybraný vrchol v grafu je spojen s přesně  $k$  vrcholy) se řídí tzv. mocninným zákonem (power - law) [3]*

$$P(k) \sim k^{-\gamma}.$$

*Grafy, které se řídí tímto zákonem, označujeme jako scale - free grafy (bezškálové grafy). Tento výsledek znamená, že velké sítě se samy organizují do škálového stavu. Viz. Kapitola 2.3.*

Paul Erdős a Alfréd Rényi [7] definovali náhodný graf následujícím způsobem.

**Definice 2.2.1** *Náhodný graf  $G$  je graf, který vznikl náhodným procesem.*



Obrázek 2.1: Vliv parametru  $p$  na strukturu vazeb v náhodném grafu.

Definici 2.2.1 si můžeme představit tak, že vezmeme  $n$  vrcholů grafu  $G$  a projdeme všechny dvojice vrcholů, které mohou existovat. Každou dvojici vrcholů spojíme hranou s předem danou pravděpodobností  $p \in (0, 1)$ , která je pro všechny dvojice stejná. Jak můžeme vidět na Obrázku 2.1. Pokud by byla tato pravděpodobnost 0, znamenalo by to, že v grafu  $G$  neexistuje žádná hrana, pouze množina izolovaných vrcholů. Pravděpodobnost 1 naopak znamená, že jsou všechny vrcholy spojeny se všemi a vznikne úplný graf.

Důsledkem toho a Věty 2.1.1 je celkový počet hran náhodná proměnná se střední hodnotou

$$E(m) = p \frac{n(n-1)}{2}. \quad (2.2)$$

### 2.2.1 Rozdělení stupňů vrcholů grafu

U náhodných grafů lze zkoumat mnoho zajímavých vlastností. Jednou z nich je rozdělení stupňů jednotlivých vrcholů.

**Definice 2.2.2** *Stupeň vrcholu v grafu  $G$  označuje počet hran grafu  $G$ , které obsahují vrchol  $v$ . Značíme  $d_G(v)$ . Tzn.  $d_G(v) = |N(v)|$ .*

Označme  $P(k)$  pravděpodobnost, že náhodně vybraný vrchol  $v$  grafu  $G$  je spojen právě s  $k$  vrcholy.  $d_G(v) = k$ .

Nyní vezmeme graf  $G$  o  $n$  vrcholech a začneme je mezi sebou spojovat podle čistě náhodného kritéria. Pravděpodobnost, že vrchol získá další hranu, bude pro všechny vrcholy stejná a rovna  $p$ , pak dobrou aproximací rozdělení stupňů vrcholů v grafu  $G$  je binomické rozdělení  $Bi(n-1, p)$  [3] s pravděpodobnostní funkcí

$$P(k) = \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}. \quad (2.3)$$

Pro dostatečně velké  $n$  může být binomické rozdělení  $Bi(n-1, p)$  aproximováno Poissonovým rozdělením  $Po(np)$  [3] s pravděpodobnostní funkcí

$$P(k) \simeq e^{-np} \frac{(np)^k}{k!} = e^{\langle k \rangle} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}, \quad (2.4)$$

kde  $\langle k \rangle = p(n-1) \simeq pn$  je průměrný stupeň vrcholů.

**Poznámka 2.2.3** *Porovnáme-li rozdělení stupňů vrcholů pro náhodný graf definovaný podle Paula Erdöse a Alfréda Rényiho a rozdělení stupňů vrcholů pro scale - free grafy (Kapitola 2.3), tak pravděpodobnost nalezení vrcholu s vysokým stupněm u náhodného grafu klesá exponenciálně s  $k$ , a tak vrcholy s vysokým stupněm prakticky chybí, oproti rozdělení stupňů pro scale - free grafy, kde vrcholy s vysokým stupněm mají vyšší pravděpodobnost výskytu oproti náhodným grafům.*



## 2.2.2 Souvislost grafu a průměr grafu

Další zajímavou vlastností náhodných grafů je průměr grafu a průměrná nejkratší cesta v grafu.

**Definice 2.2.3** *Cesta z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$  v grafu  $G$  je sled*

$$u = v_0, v_1, \dots, v_k = v,$$

*ve kterém se každý vrchol  $v_i, i = 1, \dots, k$  objevuje pouze jednou.*

**Definice 2.2.4** *Průměr  $d$  grafu  $G$  je maximální vzdálenost mezi libovolnými dvěma vrcholy  $u$  a  $v$  v grafu  $G$ .*

Náhodné grafy mají obvykle malý průměr grafu a to za předpokladu, že  $p$  není příliš malé. Důvodem je, že u náhodného grafu s velkou pravděpodobností počet vrcholů na vzdálenost  $l$  z daného vrcholu je mnohem menší než  $\langle k \rangle^l$  [3]. Dáme-li dohromady  $\langle k \rangle^l$  s počtem vrcholů  $n$ , tak zjistíme, že průměr grafu  $G$  je úměrný

$$\frac{\ln(n)}{\ln(\langle k \rangle)},$$

tzv., že existuje pouze logaritmická závislost na počtu vrcholů.

Obecným závěrem tedy je, že u většiny hodnot  $p$  mají téměř všechny grafy stejný průměr. Vezmeme-li v úvahu všechny grafy s  $n$  vrcholy a spojíme vrcholy s pravděpodobností  $p$ , rozsah hodnot, ve kterých se průměr těchto grafů může pohybovat, je malý a je obvykle asymptoticky soustředěn kolem hodnoty

$$d = \frac{\ln(n)}{\ln(np)} = \frac{\ln(n)}{\ln(\langle k \rangle)}. \quad (2.5)$$

Tato charakteristika nabývá i pro velmi velké  $n$  poměrně malých hodnot, hovoříme v souvislosti s náhodnými grafy o tzv. „small world“ efektu.

Nyní uvedeme několik důležitých výsledků [3]:

- Pro  $\langle k \rangle < 1$  se graf skládá z izolovaných částí a jeho průměr je roven průměru dané izolované části.

- Pro  $\langle k \rangle > 1$  se graf skládá z izolovaných částí, avšak jedna z nich je větší než ostatní a nazýváme ji hlavní shluk.
- Pro  $\langle k \rangle \geq \ln(n)$  je graf souvislý. Průměr grafu je soustředěn kolem hodnoty:

$$d = \frac{\ln(n)}{\ln(\langle k \rangle)}.$$

Další způsob, jak charakterizovat šíření v náhodných grafech, je výpočet průměrné vzdálenosti mezi libovolnými dvěma vrcholy grafu  $G$ .

Dá se předpokládat, že průměrná vzdálenost je v tomto případě to samé jako průměr grafu [3], tzn.:

$$\bar{l} \sim \frac{\ln(n)}{\ln(\langle k \rangle)}. \quad (2.6)$$

## 2.3 Scale - free graf

Existují dva hlavní aspekty reálných systémů (grafů) [2], které nejsou začleněny do teorie náhodných grafů, která byla popsána v Kapitole 2.2.

### 1. Aspekt růstu

Předpokládáme, že začneme s pevným počtem  $n$  vrcholů, které jsou s předem danou pravděpodobností  $p$  náhodně spojeny. (Definice 2.2.1). Avšak mnoho reálných grafů je otevřeno, tzn., že se tvoří průběžným přidáváním nových vrcholů do systému v průběhu času, tak se počet vrcholů zvyšuje po celou dobu života systému.

Tento aspekt si můžeme představit na následujících příkladech. Může to být sociální síť herců, která se zvětšuje vychováváním nových herců, nebo World-Wide Web (WWW), který roste exponenciálně v čase přidáváním nových webových stránek apod.

V důsledku toho je společným znakem těchto systémů, že se neustále rozšiřují přidáváním nových vrcholů, které jsou spojeny s již existujícími vrcholy.

## 2. Aspekt preferenčního připojování

Náhodný graf předpokládá, že pravděpodobnost toho, že dva vrcholy jsou spojeny je náhodná a jednotná. Na rozdíl od reálných grafů, kde se vykazuje určité preferenční připojování.

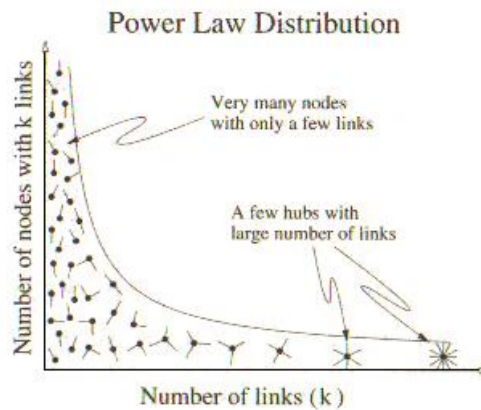
Lze si to představit tak, že noví herci jsou nejčastěji obsazováni do vedlejších rolí s již více zavedenými, dobře známými herci. V důsledku toho pravděpodobnost, že nový herec je obsazen se zavedeným hercem je vyšší než, když by hrál s hercem novým. Podobně nově vytvořené webové stránky se s větší pravděpodobností odkazují na internetové stránky, které jsou již zavedené.

Tyto příklady ukazují, že pravděpodobnost s níž se nový vrchol připojí ke stávajícímu vrcholu, není jednotná. Je větší pravděpodobnost toho, že vrcholy jsou spojeny se stávajícími vrcholy.

Tyto závěry jsou hlavní motivací, proč budeme pracovat s grafy, které jsou založeny na těchto dvou aspektech.

**Poznámka 2.3.1** *Motivací pro tento typ grafů byl vznik sítě World-Wide Web (WWW) a na základě mapování a sbírání informací o této síti se začali objevovat odlišnosti, které nezapadaly ani do jednoho z předchozích již prozkoumaných modelů. Například již dříve zmiňované rozdělení stupňů vrcholů se neřídilo Poissonovým rozdělením (2.4). Na World-Wide Web (WWW) se začalo objevovat malé množství stránek, které svým stupněm mnohonásobně přesahovaly všechny ostatní. A na druhé straně drtivá většina ostatních získávala podprůměrný počet odkazů.*

Těmto grafům se začalo říkat scale - free grafy, protože v nich neexistuje typická hodnota vrcholu (škála). Bylo zjištěno, že rozdělení v těchto sítích je řízeno pomocí tzv. mocninného zákona (Obrázek 2.2).



Obrázek 2.2: Mocninný zákon [1]

**Definice 2.3.1** *Scale - free graf je souvislý graf, jehož vrcholy vykazují distribuci stupňů vrcholů podle mocninného zákona*

$$P(k) \sim ck^{-\gamma}, \quad (2.7)$$

kde  $P(k)$  je pravděpodobnost, že vrchol sousedí s  $k$  jinými vrcholy,  $c$  je normalizační konstanta a  $\gamma > 1$  je koeficient distribuce.

Příklady systémů, které se řídí mocninným zákonem [2], [3]:

- World-Wide Web (WWW), který si lze představit jako orientovaný graf charakterizovaný výstupním a vstupním rozdělení stupňů grafů

$$P(k)_{out} \sim k^{-\gamma_{out}} \quad \text{a} \quad P(k)_{in} \sim k^{-\gamma_{in}},$$

kde  $\gamma_{out} = 2,45$  a  $\gamma_{in} = 2,1$ .

- Síť herců, která byla zkoumána na on-line databázi<sup>1</sup> informací o filmech, televizních pořadech, filmových hercích, apod., se řídí mocninným rozdělením

$$P(k) \sim k^{-\gamma_{actor}},$$

kde  $\gamma_{actor} = 2,3$ .

<sup>1</sup>Internet Movies Database [online]. IMDb.com, Inc. c1990-2013. [cit. 2013-05-15]. Dostupné z: <<http://www.imdb.com/>>

- Síť sexuálních partnerů, která byla zkoumána na základě rozsáhlého šetření v roce 1996 ve Švédsku, kdy byla vytvořena síť sexuálních jednoročních vztahů 2810 jedinců, se řídí mocninným rozdělením

$$P(k)_{female} \sim k^{-\gamma_{female}} \quad \text{a} \quad P(k)_{male} \sim k^{-\gamma_{male}},$$

kde  $\gamma_{female} = 3,5$  a  $\gamma_{male} = 3,3$ .

- Síť citací ve vědeckých publikacích, kde jsou vrcholy reprezentovány vědeckými články a orientované hrany referencemi na ně, se řídí mocninným rozdělením

$$P(k) \sim k^{-\gamma_{cite}},$$

kde  $\gamma_{cite} = 3$ .

- a mnoho dalších.

### 2.3.1 Průměr scale - free grafu

Jednou ze zásadních vlastností zkoumaných u těchto typů grafů je průměr grafu nebo průměrná cesta v grafu. Tato vlastnost je důležitá v mnoha oblastech týkající se komunikace a počítačových sítí, jako je vyhledávání a přenos dat. Všechny tyto procesy pracují rychleji a efektivněji za předpokladu, že průměr grafu je malý.

U náhodných grafů, které popsali Paul Erdős a Alfréd Rényi, a také u částečně náhodných grafů, jako jsou small - world grafy, je průměrná cesta mezi vrcholy grafu velmi malá. Je velmi malá i s ohledem na rostoucí počet vrcholů v grafu. Tyto grafy se často označují jako „small world“ sítě. Takové chování bylo prokázáno u mnoha přírodních, ale i člověkem vytvořených sítí, které byly uvedeny v předchozí kapitole.

U scale - free grafů je průměrná cesta grafu výrazně menší než jak bylo řečeno u grafů typu „small world“. Průměrná cesta v scale - free grafu je závislá na parametru  $\gamma$  rozdělení stupňů vrcholů [5]:

1. Pro  $2 < \gamma < 3$  je průměrná cesta odhadnuta

$$\bar{l} \sim \ln(\ln(n)).$$

2. V případě Barabasi - Albert modelu, tzn. pro  $\gamma = 3$ , je průměrná cesta odhadnuta

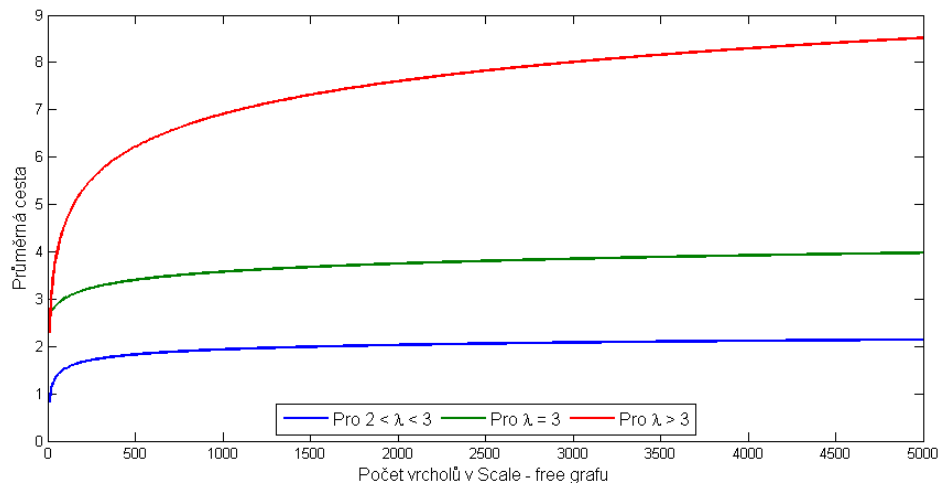
$$\bar{l} \sim \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}.$$

S tímto modelem budeme později pracovat (viz. Kapitola 4.1).

3. Pro  $\gamma > 3$  je průměrná cesta odhadnuta

$$\bar{l} \sim \ln(n).$$

Na následujícím Obrázku 2.3 lze vidět porovnání průměrné cesty v scale - free grafu pro předchozí tři odhady.



Obrázek 2.3: Vliv počtu vrcholů grafu na hodnotu průměrné cesty v scale - free grafu v závislosti na parametru  $\gamma$  rozdělení stupňů vrcholů.

Scale - free grafy mají tedy průměrnou cestu mnohem menší, proto se scale - free grafy označují jako „ultra small world“ sítě [5].

Pomocí mocninného zákona lze u reálných sítí popsat systémy dosti různých velikostí a v různých fázích jejich vývoje. Je očekáváno, že model by měl poskytnout rozdělení, jehož hlavní rysy jsou nezávislé na čase a na velikosti systému (částečně ověříme v Kapitole 5.1), což znamená, že i přes stálý růst, systém se organizuje sám do bezškálového stavu.

Další velmi zajímavou vlastností scale - free grafů je relativní běžnost vrcholů, jejichž stupeň vysoce převyšuje průměr. Vrcholy s nejvyššími stupni se často

nazývají huby. Tyto huby jsou obklopeny vrcholy s nižšími stupni a tyto vrcholy ještě s nižšími atd.

**Poznámka 2.3.2** *Topologie scale - free grafů je velmi odolná vůči náhodnému (při rovnoměrném rozdělení pravděpodobnosti) odstraňování některých vrcholů. Pravděpodobnost, že bude odstraněn hub, je zanedbatelná, protože hubů je málo. Pokud je přesto některý odstraněn, s velkou pravděpodobností zůstane graf souvislý. Na druhou stranu, když odstraníme několik hlavních hubů, graf se rozpadne na několik izolovaných částí. Z tohoto pozorování vyplývá, že huby jsou tedy jak silnou stránkou, tak i Achillovou patou scale - free grafů [4].*

## 2.4 Základní pojmy teorie her

Vznik teorie her se datuje od roku 1944, kdy John von Neumann a Oskar Morgenstern vydali publikaci *Theory of Games and Economic Behavior* [18]. Tato teorie se ukázala být vhodná nejen pro řešení ekonomických problémů, ale v té době i pro řešení vojenských otázek apod. Dalším důležitým mezníkem pro rozvoj teorie her byla práce John F. Nasha, ve které definoval Nashovo ekvilibrium. Za tuto práci získal v roce 1994 Nobelovu cenu za ekonomii.

V následujících kapitolách budou definovány základní pojmy z teorie her a bude uvedeno několik příkladů týkajících se této problematiky [19]. Tyto příklady budou pro nás důležité v praktické části této práce.

**Definice 2.4.1** *Nechť  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  je počet všech hráčů z dané množiny  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ , necht'  $S_i$  je neprázdná množina (všech) strategií  $i$ -tého hráče,  $i \in I$  a funkce  $u_i : S^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$  udává užitekovou funkci každého hráče  $i \in I$ , pak uspořádanou trojici*

$$\mathcal{G} = \{I, \{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}\} \quad (2.8)$$

*nazýváme hrou  $n$  hráčů v normální formě nebo také strategickou hrou.*

**Definice 2.4.2** *Čistou strategií označíme akci, kterou bude  $i$ -tý hráč používat v každém kroku hry, tzn. nedochází k náhodnému výběru strategie.*

**Definice 2.4.3** *Smíšená strategie  $i$ -tého hráče*

$$\sigma_i = (p_1, p_2, \dots, p_i)$$

je vektor pravděpodobností, jehož každý prvek určuje pravděpodobnost použití příslušné strategie z množiny čistých strategií. Množinu smíšených strategií označujeme  $\Sigma_i$ .

V další části textu budeme uvažovat hru o dvou hráčích s konečným počtem strategií a budeme předpokládat obecné předpoklady teorie her:

1. Hráči jsou racionální.
2. Všichni účastníci hry znají pravidla a ta se v průběhu jedné hry nemění.
3. Hráči mají přehled o hodnotách ve hře a znají výši zisků a ztrát.

**Definice 2.4.4** *Budeme uvažovat hru dvou hráčů, ve které první hráč vybírá ze dvou strategií  $\sigma_1, \sigma'_1$ . Strategii  $\sigma_1$  nazýváme striktně resp. slabě dominantní pokud platí*

$$\forall \sigma_2 \in \Sigma_2 : u_1(\sigma_1, \sigma_2) > u_1(\sigma'_1, \sigma_2), \quad (2.9)$$

resp.

$$\forall \sigma_2 \in \Sigma_2 : u_1(\sigma_1, \sigma_2) \geq u_1(\sigma'_1, \sigma_2), \quad (2.10)$$

tzn., at' druhý hráč zvolí jakoukoliv strategii, první hráč by měl vždy použít strategii  $\sigma_1$  než strategii  $\sigma'_1$ .

**Definice 2.4.5** *Necht' máme dánu hru dvou hráčů. Nashovým ekvilibriem (Nashovým rovnovážným stavem) označíme dvojici strategií  $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$ , pro které platí:*

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq u_1(\sigma_1, \sigma_2^*) \quad \forall \sigma_1 \in \Sigma_1$$

a současně

$$u_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) \geq u_2(\sigma_1^*, \sigma_2) \quad \forall \sigma_2 \in \Sigma_2,$$

tzn., že žádný hráč si nemůže svojí vlastní akcí vylepšit užitek.

Užitek je výsledek hry jednotlivých hráčů, který je závislý na strategii, kterou zvolili. Cílem každého hráče je vybrat strategii, která jim zajistí co nejvyšší užitek při hře s ostatními hráči.



## 2.5 Maticové hry

V našem případě zvážíme symetrickou hru o dvou hráčích, kde si budou moci vybrat dvě strategie - spolupracovat (kooperovat) nebo nespolupracovat (nekooperovat) [6]. V takovém případě má užítková matice následující tvar:

	Cooperator - <b>C</b>	Defector - <b>D</b>	
Cooperator - <b>C</b>	a	b	
Defector - <b>D</b>	c	d	(2.11)

Nyní zavedeme doplňující podmínky [6]:

- Pro jednoduchost budeme předpokládat, že žádné dva parametry nejsou stejné.
- Bude vždy lepší, když první a druhý hráč budou spolupracovat, než když by oba nespolupracovali, tzn.  $a > d$ .
- Jestliže jeden z hráčů spolupracuje, je výhodnější, když první hráč nespolupracuje, tzn.  $c > b$ .
- Bez ohledu na to jakou hráč zvolí strategii, je pro něj vždy lepší, když oponent spolupracuje, tzn.  $a > b$  a  $c > d$ .
- Předpokládáme, že užitky  $a, c$  jsou vždy kladné a užitky  $b, d$  mohou být i záporné.

Na základě předchozích podmínek a závislosti na hodnotách  $a, b, c, d$  existují čtyři různé scénáře:

1. **Vězňovo dilema** (Prisoner's dilemma):  $c > a > d > b$ ,
2. **Jestřáb a hrdlička** (Hawk and Dove):  $c > a > b > d$ ,
3. **Lov jelena** (Stag hunt):  $a > c > d > b$ ,
4. **Plná spolupráce** (Full cooperation):  $a > c > b > d$ .

## 2.6 Shrnutí

Shrneme-li předchozí jednotlivé scénáře a spojíme je s užitkovou maticí (2.11) a strategií kooperovat (C) nebo nekooperovat (D), dostaneme následující čtyři možnosti:

1. **Věžňovo dilema.** Příklad, kdy  $c > a$  a  $d > b$ .

Strategie D dominuje strategii C. Při tomto scénáři volte vždy strategii D, nehledě na to, co zvolí protistrana.

Pokud uvažujeme populaci hráčů, kteří hrají strategii C a D, ohodnocení D vždy převyšuje nad ohodnocením C. Výběr tedy vede ke stavu, kdy celá populace bude tvořena D.

2. **Jestřáb a hrdlička.** Příklad, kdy  $a < c$  a  $b > d$ .

V tomto scénáři je třeba se snažit vždy volit opačnou strategii než soupeř. Strategie C je nejlepší odezvou pro strategii D, resp. strategie D pro strategii C.

3. **Lov jelena.** Příklad, kdy  $a > c$  a  $b < d$ .

Při tomto scénáři je výhodné volit stejnou strategii jako spoluhráč. Strategie C je nejlepší odezva pro strategii C, resp. strategie D pro strategii D. Pokud uvažujeme selektivní dynamiku v populaci, výsledek závisí na počátečních podmínkách.

4. **Plná spolupráce.** Příklad, kdy  $a > c$  a  $b > d$ .

Strategie C dominuje strategii D. Pokud hrajete tento scénář s jiným hráčem, pak volte strategii C, nehledě na to, co si zvolí protistrana.

Pro populaci hráčů, kteří hrají strategii C a D znamená tento případ, že průměrné ohodnocení C bude vždy převyšovat ohodnocení D. Tedy výběr upřednostňuje C pro jakékoli složení populace. Výběr povede ke stavu, kdy se celá populace bude skládat z C.

Předchozí poznatky můžeme shrnout do přehledové Tabulky 2.1 [6]:

Zkratka	Scénář	Nashovo ekvilibrium (rovnovážný stav)
FC	Plná spolupráce	(C,C)
HD	Jestřáb a hrdlička	(C,D),(D,C) a smíšené ekvilibrium
SH	Lov jelena	(C,C),(D,D) a smíšené ekvilibrium
PD	Vězňovo dilema	(D,D)

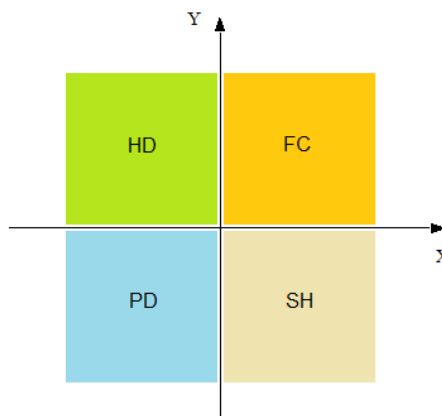
Tabulka 2.1: Nashovo ekvilibrium pro čtyři různé scénáře

## 2.7 Parametry užtkové matice

Necht' označíme parametry užtkové matice (2.11):

$$X = a - c \quad \text{a} \quad Y = b - d,$$

pak v závislosti na hodnotě  $X$  a  $Y$  pro různé scénáře dostaneme následující Obrázek 2.4.



Obrázek 2.4: Jednotlivé scénáře v závislosti na hodnotě  $X$  a  $Y$ . I. kvadrant - Plná spolupráce (FC), II. kvadrant - Jestřáb a hrdlička (HD), III. kvadrant - Vězňovo dilema (PD) a IV. kvadrant - Lov jelena (SH).

Toto zobrazení jednotlivých scénářů v závislosti na hodnotách  $X$  a  $Y$  využijeme v praktické části (viz. Kapitola 4.2.1).

## 3 Evoluční teorie her

Hlavní motivací pro studium evoluční teorie her byla potřeba umět analyzovat a popisovat chování různých biologických modelů. Avšak v poslední době je evoluční teorie her aplikována i pro některé ekonomické modely.

Základem evoluční teorie her je pochopení pojmu strategie v kontextu evoluce.

V Kapitole 2.4 byla strategie chápána jako jedna z možných akcí, které hráč ve hře může provést a problémem hry bylo hráčovo strategické rozhodnutí o volbě jeho akce ve hře.

V opakovaných hrách je odlišována strategie hráče v elementární hře, která se v opakované hře opakuje, a pak je zavedena strategie v opakované hře jako hráčova koncepce chování v rámci celé existence opakované hry, např.: „Budu vždy hrát C...“ nebo „Budu hrát C dokud hráč bude hrát C, potom přejdu na strategii D...“. Se strategií v evolučních hrách je to podobné.

V dalších částech této kapitoly budeme vycházet z [12], [13] a [19].

### 3.1 Historický vývoj

Základy evoluční teorie her položili John Maynard Smith a George R. Price definováním staticky rovnovážného konceptu nazvaného **evolučně stabilní strategie** [16] jako strategii, kterou když přijme většina populace, pak neexistuje mutantská strategie, která by byla reprodukčně úspěšnější.

**Poznámka 3.1.1** *Ve svém článku *The Logic of Animal Conflict* [16], uveřejněném v roce 1973, pomocí počítačových simulací ukázali, že vnitrodruhové souboje zvířat o samičku, kořist, výhodné teritorium apod., mívají v přírodě spíše charakter „simulace války“, tj. bojující jedinci málokdy využívají nebezpečné nebo smrtelné nástroje k vážnému zranění soupeře, a nejsou přínosem pouze pro druh jako takový, nýbrž přinášejí prospěch také samotným jedincům zúčastněných v soubojích.*

Evolučně stabilní strategie (ESS) je úzce spjatá s Nashovou rovnováhou (Definice 2.4.5), neboť již sama definice evolučně stabilní strategie představuje

zjemnění Nashovy rovnováhy. Bylo ukázáno, že strategický profil tvořený hraním ESS je zpřesněním Nashova ekvilibria a tím i bodem rovnováhy v populaci [15]. Opačná implikace však neplatí, tzn., že ne každé Nashovo ekvilibrium je ESS profil.

Dalším důležitým dílem v oblasti evoluční teorie her byla práce Johna Maynarda Smitha *Evolution and the Theory of Games* [15] vydána v roce 1982, kde byl pojem evolučně stabilní strategie dále rozpracován.

Později v roce 1999 byla J. M. Smithovi udělena Crafoordova cena<sup>1</sup> za vývoj evolučně stabilní strategie a celkově za uplatnění teorie her v evoluční biologii.

## 3.2 Evoluční hra

Evoluční hra je model vzájemných strategických interakcí v průběhu času, přičemž strategie s vyšším užitekem nahrazuje strategii s užitekem nižším. V rámci tohoto modelu může být hrána jakákoliv evoluční hra [17].

Nyní na základě pojmů z teorie grafů (Kapitola 2.1) a teorie her (Kapitola 2.4) zavedeme základní pojmy z evoluční teorie her a zdefinujeme evoluční dynamický graf [6].

**Definice 3.2.1** *Bud'  $G$  spojitý graf a  $\Sigma$  množina možných strategií. Funkce  $s : V(G) \rightarrow \Sigma$  se nazývá strategické ohodnocení grafu  $G$ . Strategický graf  $\mathfrak{G}$  je graf se strategickým ohodnocením.*

**Definice 3.2.2** *Užitkový strategický graf  $\mathfrak{U}$  je strategický graf s užitkovou funkcí  $u_i : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$ .*

V našem případě uvažujeme agregovanou užitkovou funkce v čase  $t$  pro vrchol  $i$ :

$$u_i(t) = a \sum_{j \in N(i)} s_i s_j + b \sum_{j \in N(i)} s_i (1 - s_j) + c \sum_{j \in N(i)} (1 - s_i) s_j + d \sum_{j \in N(i)} (1 - s_i) (1 - s_j), \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>Je cena udělována švédskou Královskou akademií věd v některých odvětvích vědy, které nejsou pokryty Nobelovou cenou. Byla založena švédským průmyslníkem a mecenášem Holgerem Crafoordem. Naleznete na: <<http://www.crafoordprize.se/>>.

resp. průměrnou užítkovou funkci v čase  $t$  pro vrchol  $i$ :

$$\bar{u}_i(t) = \frac{u_i(t)}{d_G(i)}. \quad (3.2)$$

**Definice 3.2.3** *Dynamický graf  $\mathfrak{D}$  je užítkový strategický graf s*

- časově závislou aktualizací množinou  $\tau : \mathbb{N} \rightarrow 2^{V(G)}$ , která přidělí v každém čase  $t \in \mathbb{N}$  množinu všech vrcholů  $\tau(t)$ , jejichž strategie se bude aktualizovat v čase  $t$ .
- aktualizacím pravidlem  $\rho_i : \Sigma^n \rightarrow \Sigma$ , který přiřadí každému vrcholu  $i$  novou strategii v čase  $t + 1$ .

**Definice 3.2.4** *Řekneme, že dynamický graf  $\mathfrak{D}$  je evoluční graf  $\mathfrak{E}$ , jestliže:*

- $\Sigma = \{0, 1\}$ ,
- užitek každého vrcholu závisí jenom na zvolené strategii jeho samotného a strategii jeho sousedů,
- aktualizacím pravidlem  $\rho_i$  budeme rozumět imitace z Kapitoly 3.2.1.

**Poznámka 3.2.1** *Množinou možných strategií  $\Sigma = \{0, 1\}$ , představuje dvě strategie chování vrcholů:*

- 0 - nekooperující strategii, vrcholy budeme označovat jako defectors,
- 1 - kooperující strategii, vrcholy budeme označovat jako cooperators.

### 3.2.1 Aktualizační pravidlo - Imitace okolí

Základním aktualizacím pravidlem  $\rho_i$  v evolučních dynamických grafech  $\mathfrak{E}$  je imitace okolí. Imitace je tak zároveň i jediným prostředkem šíření kooperativních a nekooperativních strategií. Každý vrchol zná strategie a celkové agregované (3.1), resp. průměrné užitky (3.2) svých sousedů. Rozhoduje se podle chování všech jeho sousedů v posledním hracím kole a neví jakou strategii zaujmou tito jeho protihráči (případně spoluhráči) v nadcházejícím kole.

Nedisponuje ani žádným algoritmem predikce pro její odhad (např. na základě znalosti historie posledních hracích kol apod.).

Některé základní imitační chování (aktualizační pravidla):

1. Imitace strategie sousedního vrcholu podle agregovaného užitku (3.1), pokud je agregovaný užitek sousedního vrcholu vyšší než vlastní

$$\rho_i = s_{\text{argmax}_{j \in N(i) \cup i} u_j(s)}.$$

2. Imitace strategie sousedního vrcholu podle průměrného užitku (3.2), pokud je průměrný užitek sousedního vrcholu vyšší než vlastní

$$\rho_i = s_{\text{argmax}_{j \in N(i) \cup i} \bar{u}_j(s)}.$$

3. Imitace strategie sousedního vrcholu podle agregovaného užitku (3.1), bez ohledu na vlastní agregovaný užitek

$$\rho_i = s_{\text{argmax}_{j \in N(i)} u_j(s)}.$$

4. Imitace strategie sousedního vrcholu podle průměrného užitku (3.2), bez ohledu na vlastní průměrný užitek

$$\rho_i = s_{\text{argmax}_{j \in N(i)} \bar{u}_j(s)}.$$

5. a mnoho dalších.

V případě, kdy existuje více sousedních vrcholů se stejným agregovaným, resp. průměrným užitekem, aktualizační pravidlo zvolí strategii vrcholu s nejnižším indexem při prohledávání sousedních vrcholů.

## 4 Model a průběh simulace

Z důvodu absence ucelené matematické teorie pro popis vývoje kooperativního, resp. nekooperativního chování na rozsáhlých evolučních grafech je simulační přístup dominantním postupem při popisu jejich vlastností a hraje zásadní roli při popisu nových jevů v oblasti evoluční teorie her [3], [14] a [16].

### 4.1 Výchozí model simulace

V našem případě budeme uvažovat model, který bude založen na aspektech, které byly uvedeny v Kapitole 2.3. Vrátime se tedy ke dvěma aspektům, které nebyly splněny u náhodného grafu (Definice 2.2.1):

1. aspekt růstu,
2. aspekt preferenčního připojování.

Pokusíme se nyní do našeho modelu tyto aspekty začlenit. Vytvoříme scale-free graf podle Barabási - Albert modelu [3]:

1. Aspekt růstu.

Chceme-li začlenit rostoucí charakter modelu, začneme s malým počtem  $m_0 (\geq 2)$  vrcholů a v každém časovém kroku přidáme vrchol s  $m (\leq m_0)$  hrany, tak aby se nový vrchol odkazoval na  $m$  různých vrcholů, které jsou již v modelu.

2. Aspekt preferenčního připojování.

Chceme-li začlenit preferenční připojování v modelu, je nutné, aby pravděpodobnost, že nový vrchol byl připojen k již existujícímu  $i$ -tému vrcholu je

$$\Pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_j k_j},$$

kde  $k_i$  je stupeň vrcholu  $i$  a suma je dána součtem stupňů všech již existujících vrcholů v modelu, tzn., že nové vrcholy mají větší pravděpodobnost se připojit k vrcholům s vyšším stupněm.



Vzniklý model po  $t$  krocích vede k náhodnému grafu s  $t + m_0$  vrcholy a  $m \cdot t$  hrany. Tento model se vyvine do škálově invariantního stavu s pravděpodobností, že vrchol má  $k$  hran danou mocninou funkcí s exponentem  $\gamma_{SF} = 3$ .

Pro  $t \rightarrow \infty$  potom [3]

$$P(k) \sim 2m^\beta k^{-\gamma_{SF}},$$

kde  $\beta = \frac{1}{2}$ .

Odhad průměrné nejkratší cesty Barabási - Albert modelu (Kapitola 2.3.1) je

$$\bar{l} \sim \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}.$$

## 4.2 Architektura modelu a metodologie

### 4.2.1 Konstrukce modelu

V inicializační fázi simulace<sup>1</sup> vytvoříme model. Pod tímto modelem budeme rozumět evoluční graf  $\mathfrak{E}$ , který bude založen na principu Barabási - Albert modelu (Kapitola 4.1). Vrcholy a hrany grafu  $\mathfrak{E}$  se během simulačního cyklu nemohou nijak měnit.

Poté každému vrcholu grafu  $\mathfrak{E}$  přiřadíme počáteční strategie z množiny možných strategií  $\Sigma = \{0, 1\}$ :

- 0 - nekooperující strategie, vrcholy budeme označovat jako defectors,
- 1 - kooperující strategie, vrcholy budeme označovat jako cooperators.

Podrobný popis počátečního přiřazení strategie objasníme v Kapitole 5.1 a Kapitole 5.2.

---

<sup>1</sup>Pro programové prostředí simulací bude zvolen program MATLAB. MATLAB je komerční programové prostředí a skriptovací programovací jazyk, který slouží pro vědeckotechnické numerické výpočty, modelování, návrhy algoritmů, počítačové simulace, analýzu a prezentaci dat, měření a zpracování signálu, návrhy řídicích a komunikačních systémů. Naleznete na: <http://www.mathworks.com/>.

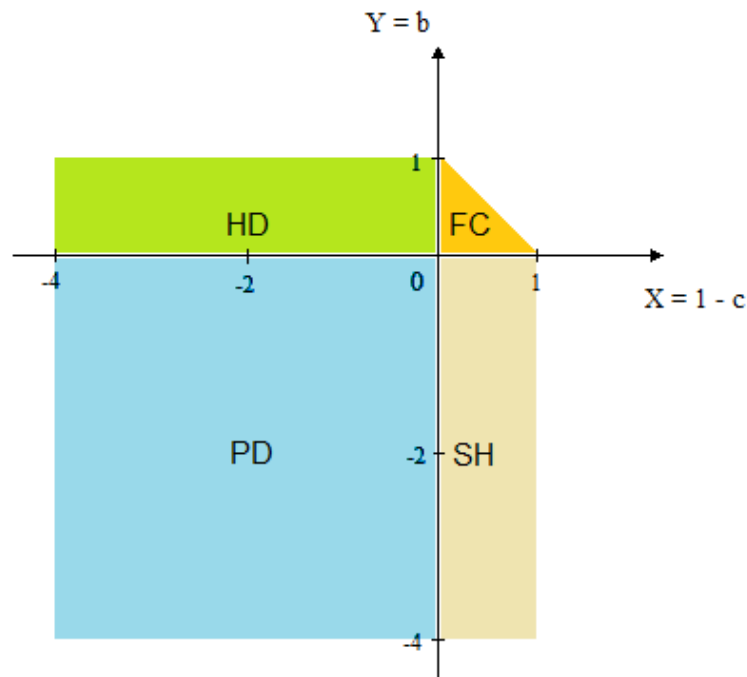
Nyní se zaměříme na parametry užitkové matice (2.11), pomocí nichž budeme počítat užitek jednotlivých vrcholů evolučního grafu  $\mathcal{E}$ . Vycházíme z Kapitoly 2.7, kde byly označeny parametry užitkové matice (2.11):

$$X = a - c \quad \text{a} \quad Y = b - d.$$

Nyní bez újmu na obecnosti přiřadíme parametrům  $a$  (oba kooperují) a  $d$  (oba nekooperují) užitkové matice (2.11) hodnotu

$$a = 1 \quad \text{a} \quad d = 0,$$

potom Obrázek 2.4 přejde do následujícího tvaru:



Obrázek 4.1: Jednotlivé scénáře v závislosti na hodnotách  $X = 1 - c$  a  $Y = b$ . FC - Plná spolupráce, HD - Jestřáb a hrdlička, PD - Věžňovo dilema a SH - Lov jelena.

### 4.2.2 Průběh simulace

V každém kroku simulace sehrají všechny vrcholy grafu  $\mathfrak{E}$ , pro různé parametry  $b$  a  $c$  (Obrázek 4.1) užitkové matice (2.11), se svými sousedy jednu z možných variant her:

1. Vězňovo dilema - PD,
2. Jestřáb a hrdlička - HD,
3. Lov jelena - SH a
4. Plná spolupráce - FC.

V dalším kroku simulace obdrží vrcholy znalost vlastního agregovaného užitku a agregovaného užitku svého okolí (3.1), resp. průměrného užitku a průměrného užitku svého okolí (3.2).

Na základě této znalosti a určeného aktualizacího pravidla  $\rho_i$  (Kapitola 3.2.1) může každý vrchol přehodnotit svou strategii (kooperovat, resp. nekooperovat) z posledního odehraného kola.

Tento proces se pak opakuje.

### 4.2.3 Sběr dat

Na konci každého kroku simulace vypočteme poměr počtu kooperujících vrcholů proti počtu všech vrcholů grafu  $\mathfrak{E}$ .

Tento údaj zaznamenáme pro každou jednotlivou simulaci (simulací vždy provedeme 30) při stejných počátečních parametrech a z takto získaných kooperačních poměrů pro jednotlivé simulace je na konci simulace zaznamenána průměrná (stabilní) hodnota kooperačního poměru (dále jen **kooperační poměr**). Je patrné, že hodnota kooperačního poměru leží v intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

**Poznámka 4.2.1** *Hodnota 1 odpovídá situaci, kdy všechny vrcholy grafu  $\mathfrak{E}$  mají kooperativní strategii, tzn., že hodnota 0 odpovídá situaci, kdy všechny vrcholy grafu  $\mathfrak{E}$  mají nekooperativní strategii.*

## 5 Analýza a interpretace výsledků simulací

Při analýze a interpretaci výsledků se zaměříme na následující otázky:

1. Jaký vliv má topologie grafu a počet vrcholů modelu na vývoj kooperativní strategie v modelu v případě, kdy aktualizací pravidlo je založené na:
  - (a) agregované uživatkové funkci (Kapitola 5.1.1)?
  - (b) průměrné uživatkové funkci (Kapitola 5.1.2)?
2. Jaký vliv má rigidita vrcholu s nejvyšším stupněm na vývoj kooperativní strategie v modelu v případě, kdy aktualizací pravidlo je založené na:
  - (a) agregované uživatkové funkci (Kapitola 5.2.1)?
  - (b) průměrné uživatkové funkci (Kapitola 5.2.2)?
3. Jaký je rozdíl hodnot kooperativního poměru u aktualizací pravidla založeného na agregované a průměrné uživatkové funkci u:
  - (a) základního modelu (Kapitola 5.3.1)?
  - (b) modelu s rigiditou - 1 (Kapitola 5.3.2)?
  - (c) modelu s rigiditou - 0 (Kapitola 5.3.3)?
4. Jaký je vliv rigidity samotné strategie v modelu na vývoj kooperativní strategie v případě, kdy aktualizací pravidlo je založené na:
  - (a) agregované uživatkové funkci (Kapitola 5.4.1)?
  - (b) průměrné uživatkové funkci (Kapitola 5.4.2)?

## 5.1 Vliv počtu vrcholů modelu na vývoj kooperativní strategie

Jednou ze zajímavých a důležitých vlastností Barabási - Albert modelu (obecně scale - free grafů) je, že tento model se vyvine do škálově invariantního stavu a odhad průměrné nejkratší cesty (Kapitola 2.3.1) je

$$\bar{l} \sim \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))},$$

tzn., že i pro velké grafy je tato hodnota poměrně malá a příliš se neliší pro různě velké grafy (Obrázek 2.3).

Proto se scale - free grafy často označují jako „ultra small world“ sítě. Z důvodu, že hodnota průměrné nejkratší cesty je „stejná“ pro různě velké grafy, lze předpokládat, že počet vrcholů modelu by neměl mít vliv na vývoj kooperativní strategie v modelu.

Tento předpoklad ověříme pro:

- **Základní model (ZM):** kooperativní a nekooperativní strategie je rovnoměrně rozdělená na vrcholech modelu.

A aktualizační pravidla (Kapitola 3.2.1):

- **Aktualizační pravidlo č. 1 (AP1):** imitace celkově nejúspěšnějšího souseda podle agregované užitkové funkce (3.1), pokud je jeho užitek vyšší než vlastní.
- **Aktualizační pravidlo č. 2 (AP2):** imitace souseda s nejlepším průměrným užitekem (3.2), pokud je jeho užitek vyšší než vlastní.

Simulace proběhne pro velikost základního modelu:

$$n_1 = 100, n_2 = 150, n_3 = 200, n_4 = 250 \text{ a } n_5 = 300.$$

### 5.1.1 Agregovaná užitková funkce

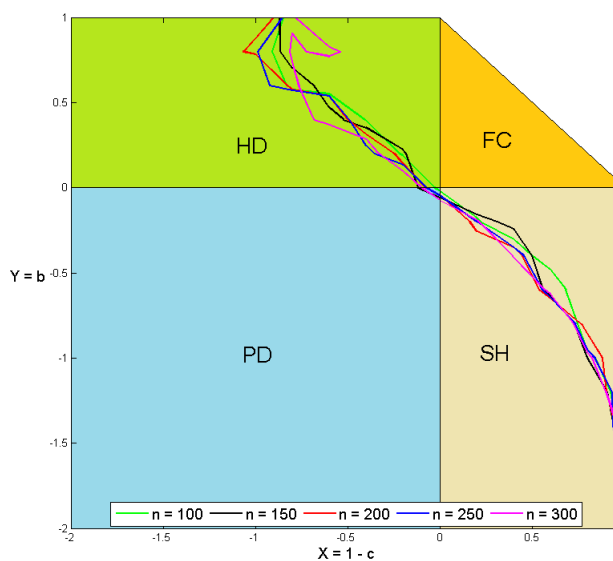
V této kapitole nás bude zajímat, jakým způsobem se bude vyvíjet hodnota kooperačního poměru pro **Základní model (ZM)** v případě **Aktualizačního pravidla č. 1 (AP1)**.

Pro názorné zobrazení a snazší porovnání vývoje kooperativní strategie pro různý počet vrcholů modelu a v závislosti na parametrech užitkové matice (2.11)

$$X = 1 - c \quad \text{a} \quad Y = b,$$

vykreslíme vrstevnici, která rozděluje získané hodnoty kooperačního poměru v poměru 80 : 20, tzn., že

- větší oblast obsahuje hodnoty kooperačního poměru v intervalu  $\langle 0, 0.8 \rangle$ ,
- menší oblast obsahuje hodnoty kooperačního poměru v intervalu  $\langle 0.8, 1 \rangle$ .



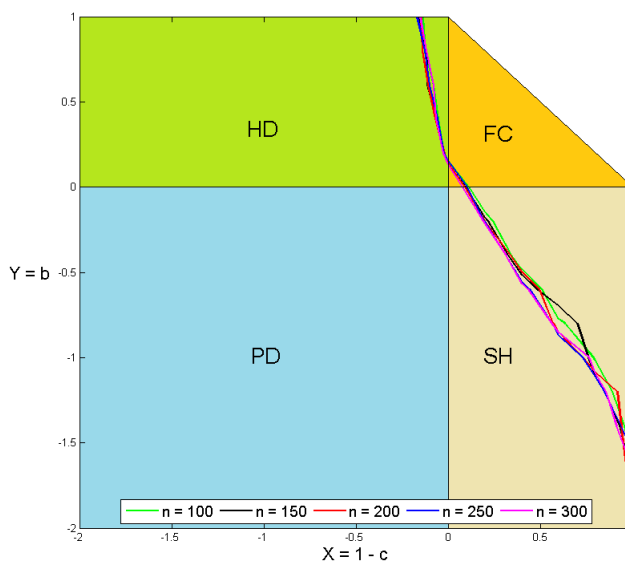
Obrázek 5.1: Agregovaná užitková funkce. Vrstevnice rozdělující hodnoty kooperačního poměru v poměru 80 : 20 pro různé velikosti základního modelu.

Předchozí Obrázek 5.1 naznačuje, že v případě modelu **ZM** a pravidla **AP1** se jednotlivé vrstevnice pro různý počet vrcholů modelu překrývají. Lze tedy předpokládat, že počet vrcholů nemá vliv na vývoj kooperativní strategie v modelu.

## 5.1.2 Průměrná užitková funkce

Nyní se zaměříme na **Aktualizační pravidlo č. 2 (AP2)**, založené na průměrné užitkové funkci (3.2), u **Základního modelu (ZM)**.

V případě pravidla **AP2** jsme získali stejný výsledek jako v případě pravidla **AP1**. Na následujícím Obrázku 5.2 lze vidět, že stejně jako v případě Obrázku 5.1, se jednotlivé vrstevnice pro různý počet vrcholů modelu překrývají. Lze předpokládat, že i v tomto případě počet vrcholů modelu nemá vliv na vývoj kooperativní strategie.



Obrázek 5.2: Průměrná užitková funkce. Vrstevnice rozdělující hodnoty kooperačního poměru v poměru 80 : 20 pro různé velikosti základního modelu.

Předpokládali jsme, že v případě scale - free grafů počet vrcholů modelu nemá vliv na vývoj kooperativní strategie. Na základě předchozích dvou příkladů (Kapitola 5.1.1 a 5.1.2) nemůžeme tento předpoklad zamítnout, proto budeme předpokládat nezávislost modelu na počtu vrcholů a v další části práce budeme pracovat s konstantním počtem vrcholů modelu  $n = 100$ . Hlavní důvod, proč bude zvoleno  $n = 100$ , je časová náročnost počítačových simulací.

## 5.2 Vliv rigidity vrcholu v modelu na vývoj kooperativní strategie

Obecně se pod pojmem rigidita vyjadřuje přísnost, strohost v jednání, neúprosné vymáhání pravidel, případně i neschopnost přizpůsobit se změnám.

V našem případě budeme pod pojmem rigidita rozumět fixování kooperativní resp. nekooperativní strategie na vrcholech **Základního modelu (ZM)**, konkrétně budeme fixovat strategii vrcholu s nejvyšším stupněm.

Na základě této úvahy, kdy budeme fixovat kooperativní, resp. nekooperativní strategii na vrcholu s nejvyšším stupněm, budeme pracovat se dvěma modely, které srovnáme se **Základním modelem (ZM)**:

### Model s rigiditou - 1 (MR1):

Vrchol s nejvyšším stupněm bude označen jako neměnný a bude mu přiřazena kooperativní strategie. Zbylé vrcholy budou mít náhodné rozdělení kooperativní a nekooperativní strategie.

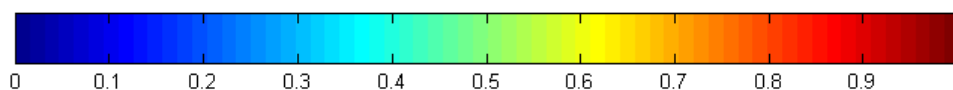
### Model s rigiditou - 0 (MR0):

Vrchol s nejvyšším stupněm bude označen jako neměnný a bude mu přiřazena nekooperativní strategie. Zbylé vrcholy budou mít náhodné rozdělení kooperativní a nekooperativní strategie.

Při porovnání hodnot kooperačního poměru pro tyto jednotlivé modely využijeme dva grafický prostředky:

1. již použité *zobrazení vrstevnic*, které rozdělují hodnoty kooperačního poměru v poměru 80 : 20, pro jednotlivé modely (podrobný popis viz. Kapitola 5.1.1).
2. nově *zobrazení teplotních map*, kde se jedná o barevné zobrazení hodnot kooperačního poměru v závislosti na jejich hodnotě, jak lze vidět na následujícím Obrázku 5.3.





Obrázek 5.3: Barevný odstín v závislosti na hodnotě kooperačního poměru.

Obdobně jako v předchozí kapitole budeme uvažovat dvě aktualizací pravidla, která jsou založena na agregované uživatkové funkci (3.1), resp. průměrné uživatkové funkci (3.2).

### 5.2.1 Agregovaná uživatková funkce

V této kapitole se zaměříme na **Aktualizační pravidla č. 1 (AP1)**, které je založené na agregované uživatkové funkci (3.1).

Budeme porovnávat hodnoty kooperačního poměru u **Základního modelu (ZM)** s:

**Modelem s rigiditou - 1 (MR1)**,

**Modelem s rigiditou - 0 (MR0)**.

Na následujícím Obrázku 5.4 jsme znázornili pomocí teplotních map (podrobný popis viz. Kapitola 5.2) rozložení kooperačního poměru v závislosti na parametrech uživatkové matice (2.11)

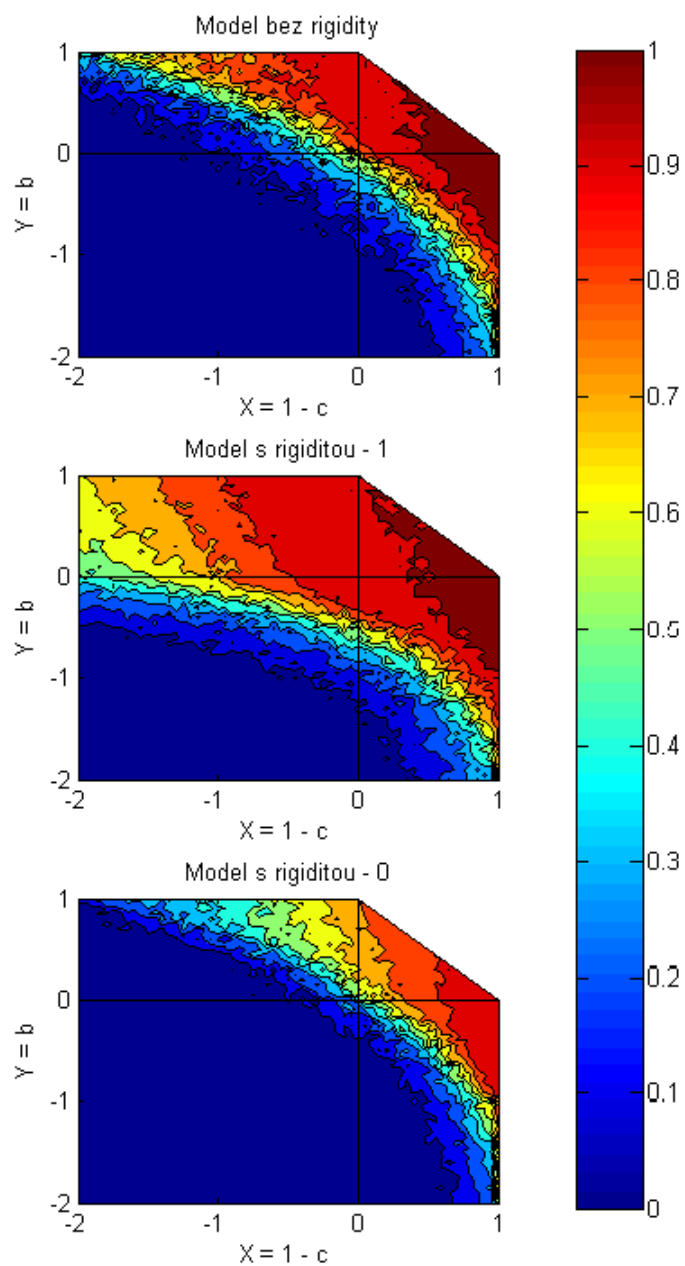
$$X = 1 - c \quad \text{a} \quad Y = b$$

pro model **MR1**, **MR0** a **ZM**.

Porovnáme-li model **MR1** s modelem **ZM**<sup>1</sup>, tak oblast s vyšší hodnotou kooperačního poměru se rozšířila a to zejména do scénáře **Jestřáb a hrdlička (HD)**.

Porovnáme-li model **MR0** s modelem **ZM**, tak naopak oblast s vyšší hodnotou kooperačního poměru se zmenšila.

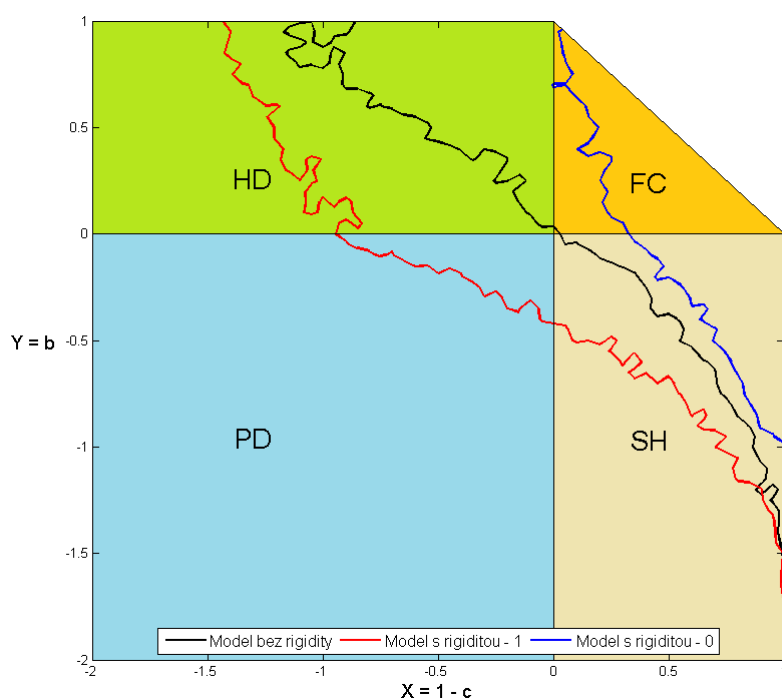
<sup>1</sup>Na následujících obrázcích je Základní model označován jako Model bez rigidity.



Obrázek 5.4: Agregovaná užitková funkce. Rozložení kooperačního poměru v závislosti na parametrech užitkové matice  $X = 1 - c$  a  $Y = b$  s krokem 0,05 pro základní model (model bez rigidity), model s rigiditou - 1 a model s rigiditou - 0.

Pro názornější porovnání modelů s rigiditou a základního modelu využijeme vykreslení vrstevnice, která rozděluje výsledné hodnoty kooperačního poměru v poměru 80 : 20. Na Obrázku 5.5 si lze všimnout, že v případě modelu **MR1** se vrstevnice posune více doleva a oblast se zvětší, tzn., že se rozšíří oblast kooperativní strategie, a v případě modelu **MR0** se vrstevnice naopak posune více doprava a oblast se zmenší, tzn., že se zmenší oblast kooperativní strategie.

Dalším zajímavým zjištěním je, že v scénáři **Jestřáb a hrdlička (HD)** jsou tyto rozdíly mnohem patrnější než v scénáři **Lov jelena (SH)**.



Obrázek 5.5: Agregovaná uživatelská funkce. Vrstevnice rozděluje hodnoty kooperačního poměru v poměru 80 : 20 pro základní model (model bez rigidity), model s rigiditou - 1 a model s rigiditou - 0.

Vliv rigidity vrcholu s nejvyšším stupněm je daná tím, že vrchol s nejvyšším stupněm má díky pravidlu **AP1**, které je založeno na agregované uživatelské funkci, nezanedbatelný vliv na ostatní vrcholy a díky tomuto vlivu „přesvědčí“ ostatní vrcholy ke své strategii.

V Příloze A na Obrázku A.1 a A.2 jsme znázornili pomocí teplotních map rozložení kooperačního poměru pro různé typy modelů: **ZM**, **MR1** a **MR0** a pro různé počty vrcholů modelu.

I zde si můžeme všimnout, že obdobně jako v případě **ZM** a **AP1** (Kapitola 5.1.1), tak i v případě modelů **MR1** a **MR2** grafy naznačují nezávislost vývoje kooperačního poměru na počtu vrcholů modelu.

## 5.2.2 Průměrná užitková funkce

V této kapitole se zaměříme na **Aktualizační pravidlo č. 2 (AP2)**, které je založené na průměrné užitkové funkci (3.2).

Nyní budeme porovnávat hodnoty kooperačního poměru **Základního modelu (ZM)** s:

**Modelem s rigiditou - 1 (MR1),**

**Modelem s rigiditou - 0 (MR0).**

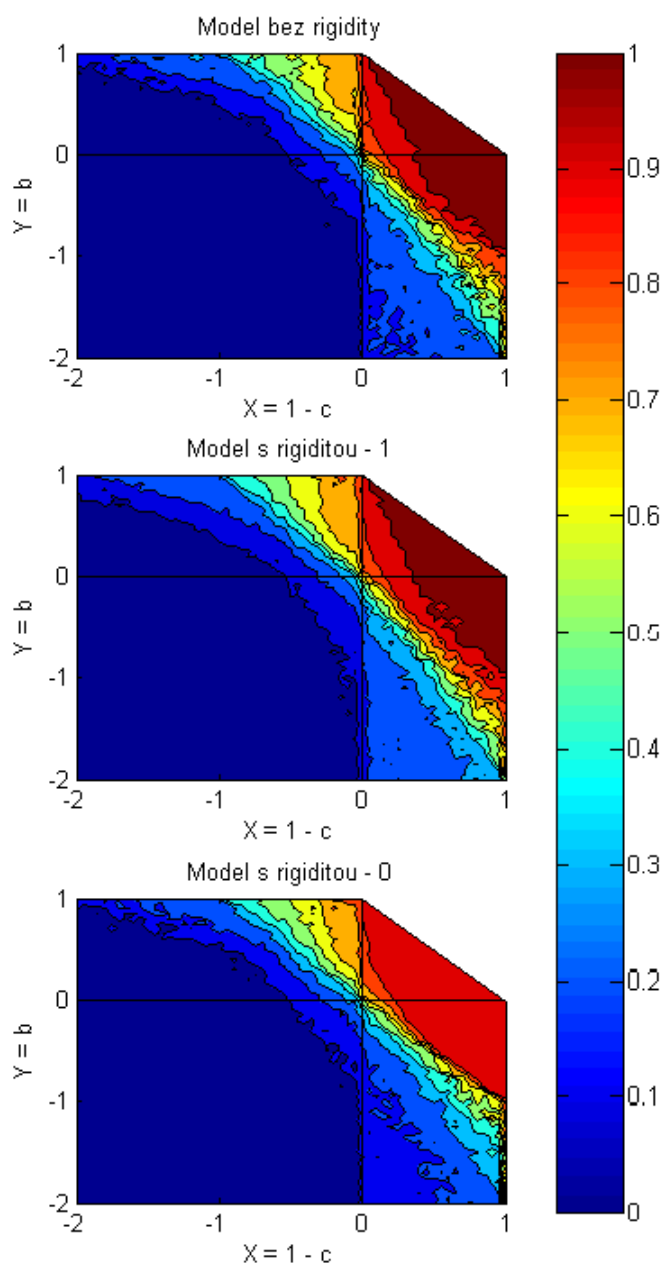
Na následujícím Obrázku 5.6 jsme znázornili pomocí teplotních map (podrobný popis viz. Kapitola 5.2) rozložení kooperačního poměru v závislosti na parametrech užitkové matice (2.11)

$$X = 1 - c \quad \text{a} \quad Y = b$$

pro model **MR1**, **MR0** a **ZM**.

Na rozdíl od předchozí Kapitoly 5.2.1, porovnáme-li model **MR1**, resp. **MR0** s modelem **ZM**, tak oblasti hodnot kooperačního poměru zobrazené na Obrázku 5.6 zůstávají pro všechny tři modely prakticky stejné.

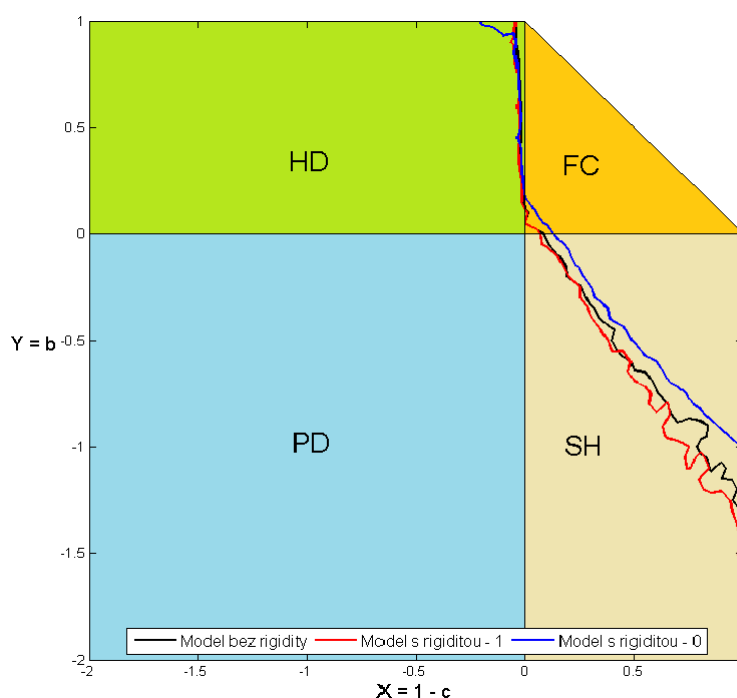
Pro názornější porovnání modelů s rigiditou a základního modelu využijeme znovu vykreslení vrstevnic, které rozdělují výsledné hodnoty kooperačního poměru v poměru 80 : 20.



Obrázek 5.6: Průměrná užitková funkce. Rozložení kooperačního poměru v závislosti na parametrech užitkové matice  $X = 1 - c$  a  $Y = b$  s krokem 0,05 pro základní model (model bez rigidity), model s rigidity - 1 a model s rigidity - 0.

V případě pravidla **AP2**, založeného na průměrné užtkové funkci, lze vidět na Obrázku 5.7, že jednotlivé vrstevnice pro všechny tři modely se překrývají.

V tomto případě vrchol s nejvyšším stupněm ztrácí svůj vliv na ostatní vrcholy a v případě srovnání modelů **MR1** a **MR0** s modelem **ZM** nenacházíme zásadní rozdíly, jako tomu bylo v předchozím případě viz. Kapitola 5.2.1.



Obrázek 5.7: Průměrná užtková funkce. Vrstevnice rozdělující hodnoty kooperačního poměru v poměru 80 : 20 pro základní model (model bez rigidity), model s rigidity - 1 a model s rigidity - 0.

Všimněme si vrstevnic v scénáři **Lov jelena (SH)**, které naznačují malý vliv modelů s rigidity i v případě průměrné užtkové funkce. Vezmeme-li modely **MR1** a **MR0** a porovnáme-li je s **ZM**, najdeme malé rozdíly. Avšak vliv není tak patrný jako v případě agregované užtkové funkce, viz. Kapitola 5.2.1.

**Poznámka 5.2.1** *Stejně závěry jsme získali i v případech, kdy jsme nepatrně pozměnili aktualizační pravidla **AP1** a **AP2**.*

*Imitace nyní probíhala na základě volby nejlepšího agregovaného, resp. průměrného užítku sousedních vrcholů bez ohledu na vlastní užitek, viz. aktualizační pravidla č.3 a č.4 v Kapitole 3.2.1.*

- *Imitace strategie sousedního vrcholu podle agregovaného užítku (3.1), bez ohledu na vlastní agregovaný užitek.*
- *Imitace strategie sousedního vrcholu podle průměrného užítku (3.2), bez ohledu na vlastní průměrný užitek.*

*V Příloze B je znázorněno pomocí teplotních map rozložení kooperačního poměru pro model **MR1**, **MR0** a **ZM**.*

*Na Obrázku B.1 můžeme vidět hodnoty kooperačního poměru pro agregovanou užítkovou funkci. Můžeme si všimnout, že stejně jako v Kapitole 5.2.1 je naznačen vliv modelů s rigiditou, kde v případě modelu **MR1** se oblast kooperačního poměru rozšířila a v případě modelu **MR0** zmenšila.*

*Na Obrázku B.2 můžeme vidět hodnoty kooperačního poměru pro průměrnou užítkovou funkci. Obdobně jako v Kapitole 5.2.2 nevidíme zásadní vliv modelů s rigiditou a porovnáme-li model **MR1**, resp. **MR0** s modelem **ZM**, tak oblasti kooperačního poměru zůstávají prakticky stejné.*

### 5.3 Agregovaná užítková funkce vs. průměrná užítková funkce

V této kapitole se zaměříme na porovnání hodnot kooperačního poměru u Aktualizačního pravidla č.1 (**AP1**) a Aktualizačního pravidla č. 2 (**AP2**).

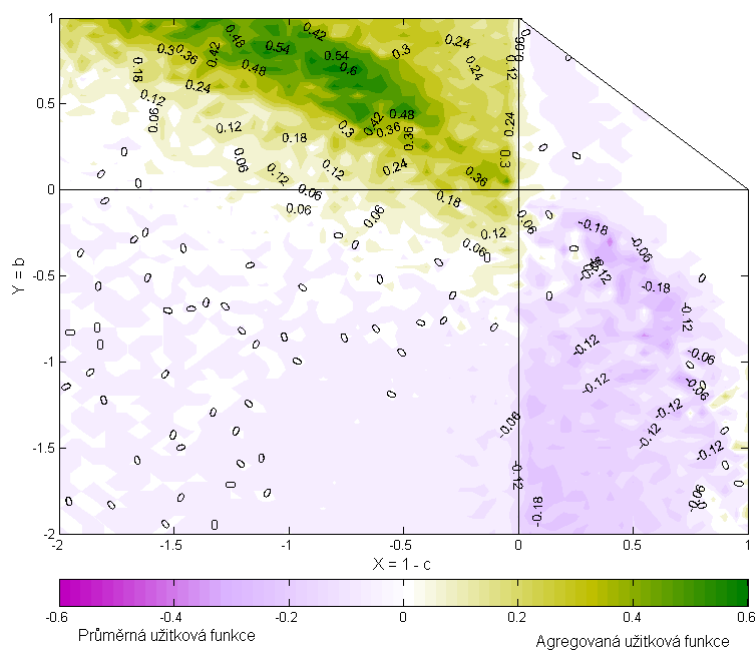
Hodnoty kooperačního poměru, které budeme srovnávat, jsme získali z Kapitoly 5.2.1 a Kapitoly 5.2.2.

### 5.3.1 Základní model

Nyní se zaměříme na hodnoty kooperačního poměru u **Základního modelu**.

Porovnáme-li hodnoty kooperačního poměru pro pravidlo **AP1** a **AP2**, tak na Obrázku 5.8 je naznačeno, že v případě pravidla **AP1** získáváme vyšší hodnoty kooperačního poměru v oblasti scénáře **Jestráb a hrdlička (HD)**, oproti tomu v případě pravidla **AP2** získáváme vyšší hodnoty v oblasti scénáře **Lov jelena (SH)**.

V oblasti scénáře **Věžňova dilematu (PD)** a **Plné spolupráce (FC)** jsou hodnoty kooperačního poměru pro pravidlo **AP1** a **AP2** prakticky totožné.



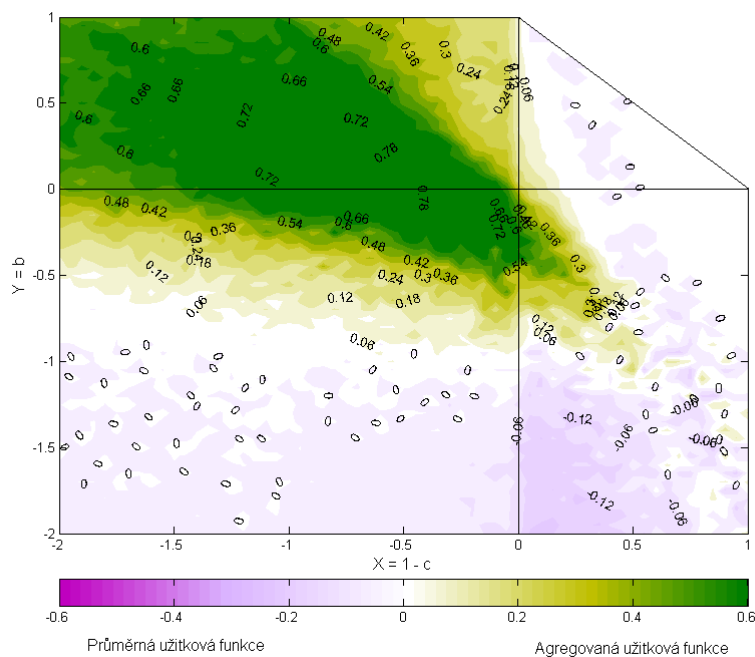
Obrázek 5.8: Porovnání hodnot kooperačního poměru pro agregovanou a průměrnou uživatelskou funkci u základního modelu.



### 5.3.2 Model s rigiditou - 1

Nyní se zaměříme na hodnoty kooperačního poměru u **Modelu s rigiditou - 1 (MR1)**.

Porovnáme-li hodnoty kooperačního poměru pro pravidlo **AP1** a **AP2**, tak na Obrázku 5.9 je naznačeno, že v případě pravidla **AP1** získáváme vyšší hodnoty kooperačního poměru v oblasti scénáře **Jestřáb a hrdlička (HD)** a oproti předchozímu příkladu v Kapitole 5.3.1 se tato oblast zásadně rozšířila, a v případě pravidla **AP2** ztratila převahu v oblasti scénáře **Lov jele- na (SH)**.

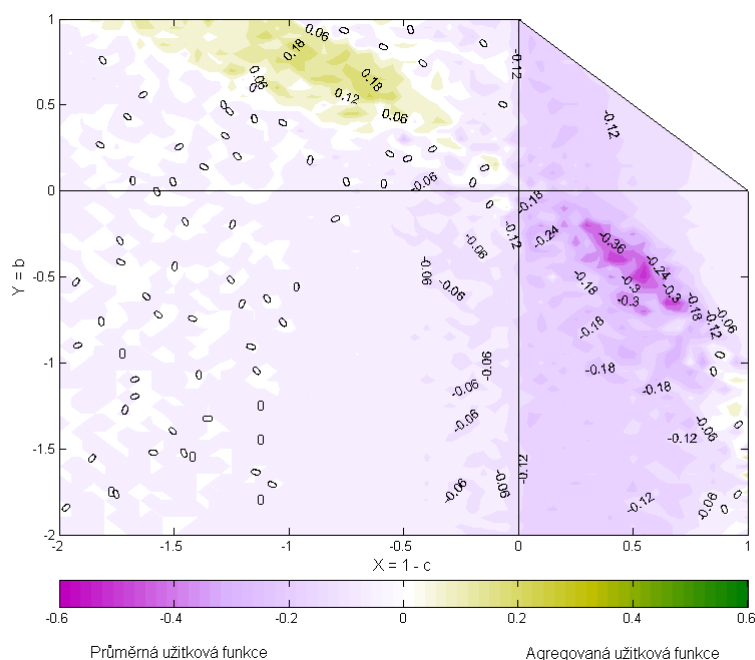


Obrázek 5.9: Porovnání hodnot kooperačního poměru pro agregovanou a průměrnou užítkovou funkci u modelu s rigiditou - 1.

### 5.3.3 Model s rigiditou - 0

Nyní se zaměříme na hodnoty kooperačního poměru u **Modelu s rigiditou - 0 (MR0)**.

V posledním případě na Obrázku 5.10 je naznačeno, že rozdíl hodnot kooperačního poměru se v případě pravidla **AP1** a **AP2** zmenšil a je prakticky totožný. Výjimku tvoří oblasti scénáře **Lov jelena (SH)**, kde pravidlo **AP2** má menší převahu. Tento výsledek je opačný, když ho srovnáme s Kapitoulou 5.3.2, kde pravidlo **AP1** má převahu ve scénáři **Jestřáb a hrdlička (HD)**.



Obrázek 5.10: Porovnání hodnot kooperačního poměru pro agregovanou a průměrnou užítkovou funkci u modelu s rigiditou - 0.

## 5.4 Vliv rigidity strategie v modelu na vývoj kooperativní strategie

Nyní se oproti Kapitole 5.2, kde jsme fixovali vrchol s nejvyšším stupněm a jeho strategii, zaměříme na fixaci strategie obecně na vrcholech modelu. V našem případě uvažujeme množinou možných strategií  $\Sigma = \{0, 1\}$ , tj.:

- 0 - nekooperující strategie, vrcholy budeme označovat jako defectors,
- 1 - kooperující strategie, vrcholy budeme označovat jako cooperators.

V reálných situacích často dochází k tomu, že zvolíme-li nějakou strategii, tak rozhodnutí ke změně strategie nemusí docházet ihned, ale můžeme se rozhodnout tuto strategii si ponechat a změnit ji až po určitém počtu kroků.

Dosud jsme uvažovali modely, kde docházelo ke změně strategie na základě aktualizačního pravidla v každém kole simulace, viz. Kapitola 4.2.2. Tento model můžeme označit následujícím způsobem:

$$1D : C1,$$

kde písmeno D označuje nekooperující strategii (**D**efectors), C kooperující strategii (**C**ooperators) a číslo 1 počet kol fixace strategie.

Nyní se zaměříme na modely, které jsou znázorněny v Tabulce 5.1.

			1D : C1		
			2D : C1	1D : C2	
		3D : C1			1D : C3
5D : C1					1D : C5

Tabulka 5.1: Modely simulace pro různě fixace strategií

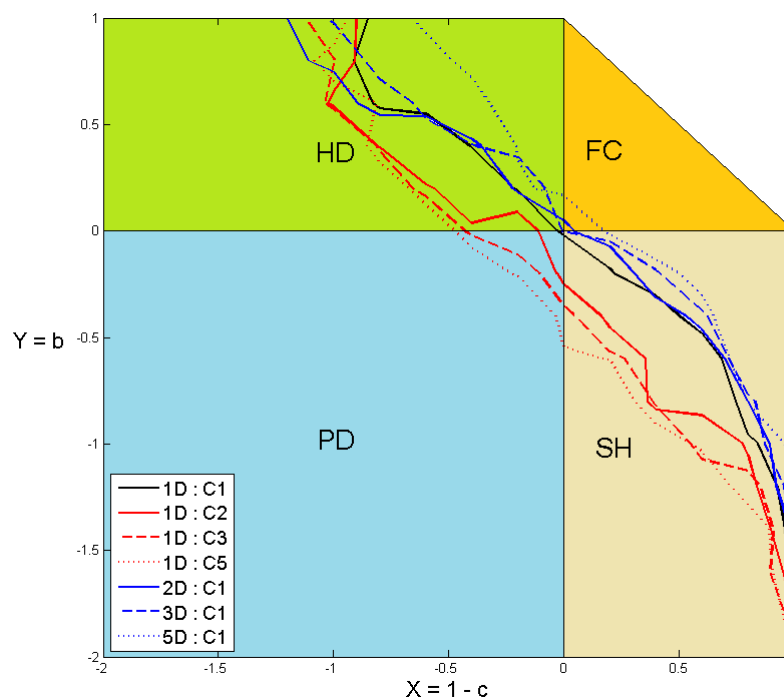
**Poznámka 5.4.1** Např. model  $5D : C1$ , znamená fixace nekooperující strategie na vrcholech modelu o délce 5 kol a fixace kooperující strategie na vrcholech modelu o délce 1 kola, tzn., že vrcholy s nekooperující strategií se mohou rozhodnout změnit svoji strategii vždy po 5 kolech a vrcholy s kooperující strategií se mohou rozhodnout změnit svoji strategii v každém kole.

V následujících kapitolách budeme uvažovat aktualizační pravidla **AP1**, resp. aktualizační pravidlo **AP2**, která jsou popsána v Kapitole 5.1.

### 5.4.1 Agregovaná užitková funkce

Nyní porovnáme modely z Tabulky 5.1 v případě pravidla **AP1**.

Podíváme-li se na následující Obrázek 5.11, tak fixace kooperativní a nekooperativní strategie naznačuje menší vliv na hodnotu kooperačního poměru, než jak tomu bylo v Kapitole 5.2.1, kde jsme porovnávali model **MR1** a **MR2**.



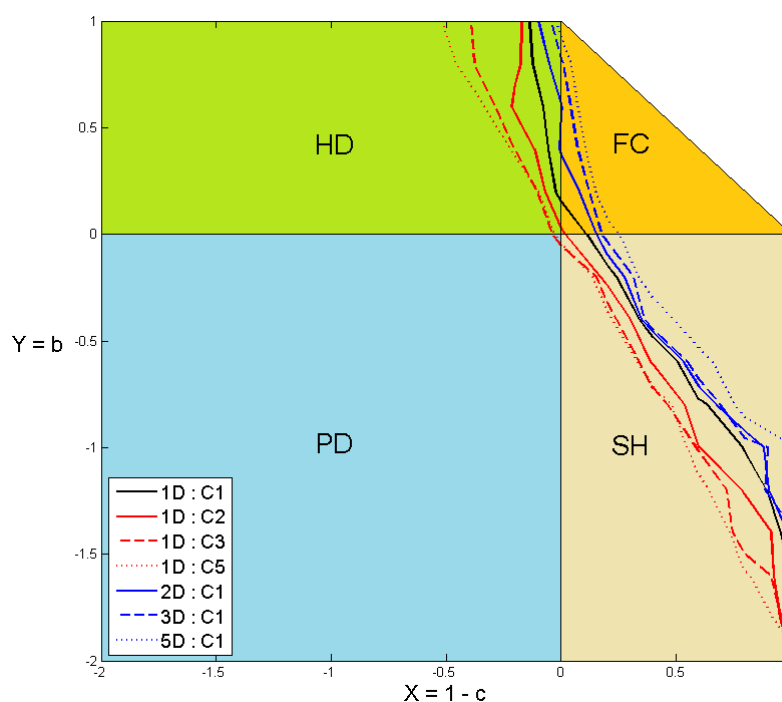
Obrázek 5.11: Vliv rigidity strategie pro různé modely u aktualizacího pravidla založeného na agregované užitkové funkci

V případě fixace kooperativní strategie (modely 1D : C2, 1D : C3 a 1D : C5) na vrcholech modelu se vrstevnice posune více doleva, tzn., že se rozšíří oblast kooperativní strategie, a v případě fixace nekooperativní strategie (modely 2D : C1, 3D : C1 a 5D : C1) se vrstevnice zásadně od **Základního modelu** neliší, tzn., že rigidita nekooperativní strategie nemá takový vliv na kooperační poměr jako rigidita kooperativní strategie.

## 5.4.2 Průměrná užitková funkce

Nyní porovnáme modely z Tabulky 5.1 v případě pravidla **AP2**.

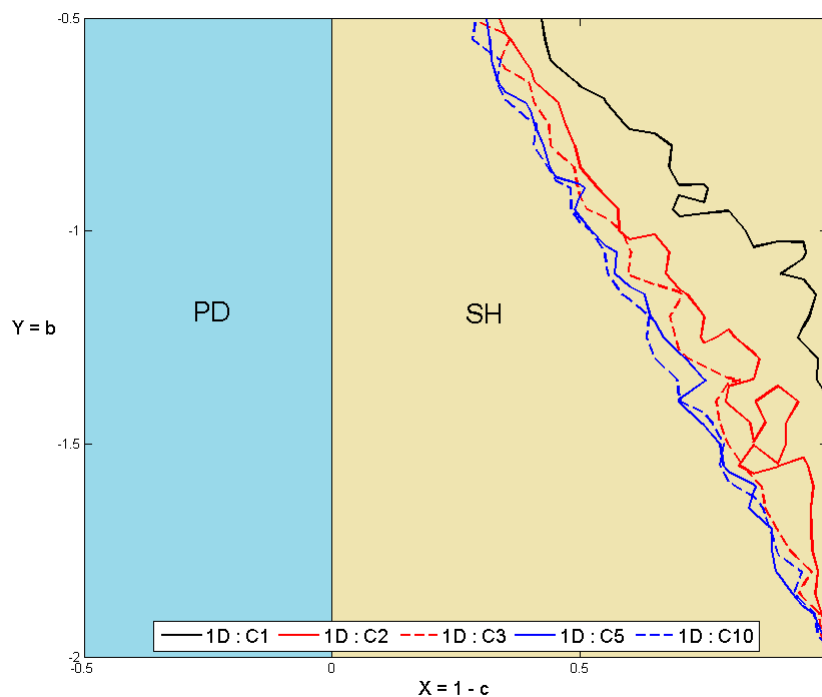
Podíváme-li se na následující Obrázek 5.12, tak oproti Kapitole 5.2.2, kde jsme porovnávali model **MR1** a **MR2** a hodnoty kooperčního poměru zůstaly prakticky stejné, tak fixace kooperativní a nekooperativní strategie nyní naznačuje vliv na hodnotu kooperčního poměru i v případě průměrné užitkové funkce.



Obrázek 5.12: Vliv rigidity strategie pro různé modely u aktualizacího pravidla založeného na agregované užitkové funkci

V případě fixace kooperativní strategie (modely 1D : C2, 1D : C3 a 1D : C5) na vrcholech modelu se vrstevnice posune více doleva, tzn., že se rozšíří oblast kooperativní strategie, a v případě fixace nekooperativní strategie (modely 2D : C1, 3D : C1 a 5D : C1) se vrstevnice posune doprava, tzn., že se zmenší oblast kooperativní strategie.

Nyní se zaměříme na fixaci kooperativní strategie z Tabulky č. 5.1 a rozšíříme o model 1D : C10. Zaměříme se na oblast scénáře **Lov jelena (SH)**.



Obrázek 5.13: Vliv rigidity strategie pro různé modely u aktualizačního pravidla založeného na agregované uživatkové funkci

Na Obrázku 5.13 je naznačen vliv rigidity kooperativní strategie. Porovnáme-li tento výsledek s modelem **MR1** z Kapitoly 5.2.2 tak získáváme rozdílný závěr, což je překvapivé zjištění. Vliv rigidity vrcholu s nejvyšším stupněm u **AP2** na vývoj kooperativní strategie nebyl zaznamenán, avšak v případě fixace kooperativní strategie na určitý počet kol vliv zaznamenán byl.

## 6 Závěr

Závěry z předešlých kapitol můžeme shrnout do následující přehledové tabulky, která nám odpovídá na hlavní otázky, které jsme si v práci stanovili.

**Aktualizační pravidla založené na:**

	<b>Agregované užitkové funkci</b>	<b>Průměrné užitkové funkci</b>
Má počet vrcholů modelu vliv na vývoj kooperativní strategie?	NE Kapitola 5.1.1	NE Kapitola 5.1.2
Má rigidita vrcholu s nejvyšším stupněm vliv na vývoj kooperativní strategie?	ANO Kapitola 5.2.1	NE Kapitola 5.2.2
Má rigidita strategie vliv na vývoj kooperativní strategie?	ANO Kapitola 5.4.1	ANO Kapitola 5.4.2

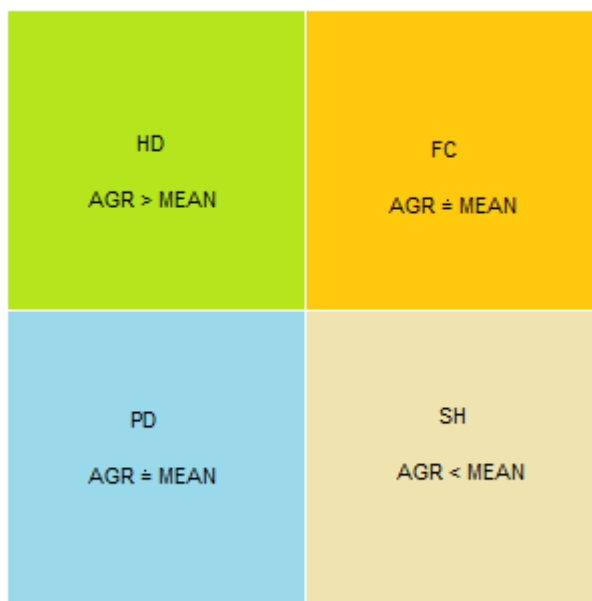
Tabulka 6.1: Přehledová tabulka zjištěných závěrů.

Nezávislost vývoje kooperativní strategie na počtu vrcholů modelu má pro nás pozitivní výsledek. Reálné systémy typu WWW, elektrických rozvodných sítí apod. můžeme při zachování vlastností systému zkoumat na modelech menších rozměrů. Tato skutečnost nám urychlí výpočetní čas simulací.

V případě vlivu rigidity vrcholu s nejvyšším stupněm na vývoj kooperativní strategie jsou získány předpokládané výsledky. V případě agregované užitkové funkce, vrchol s nejvyšším stupněm dokázal ovlivnit strategii ostatních vrcholů a „přesvědčil“ je ke své strategii. U průměrné užitkové funkce vrchol tento vliv ztrácí a to díky „normování“ užitku stupněm vrcholů.

Překvapivý a velmi zajímavý výsledek je zjištěn v případě rigidity strategie na vrcholech modelu, kde u agregované a hlavně i u průměrné užitkové funkce tento vliv na vývoj kooperativní strategie je zaznamenán.

Dalším zajímavým výstupem je případ, kdy porovnáme hodnoty kooperačního poměru pro modely založené na agregované užitkové funkci s modely založené na průměrné užitkové funkci. Na následujícím Obrázku 6.1 je naznačena převaha modelu pro konkrétní scénář.



Obrázek 6.1: Porovnání hodnot kooperačního poměru pro modely založené na agregované (AGR), resp. průměrné (MEAN) užitkové funkci pro jednotlivé scénáře: FC - Plná spolupráce, HD - Jestřáb a hrdlička, PD - Vězňovo dilema a SH - Lov jelena.

V případě, kdy je uvažován model s rigiditou - 1, tj. fixace kooperativní strategie na vrcholu s nejvyšším stupněm, tak převaha agregované užitkové funkce ve scénáři Jestřáb a hrdlička (HD) se zvýšila a částečně se rozšířila i do scénáře Vězňova dilematu (PD).



# Seznam tabulek

2.1	Nashovo ekvilibrium pro čtyři různé scénáře . . . . .	18
5.1	Modely simulace pro různé fixace strategií . . . . .	42
6.1	Přehledová tabulka zjištěných závěrů. . . . .	46

# Seznam obrázků

2.1	Vliv parametru $p$ na strukturu vazeb v náhodném grafu. . . . .	6
2.2	Mocninný zákon . . . . .	11
2.3	Vliv velikosti grafu na hodnotu průměrné cesty v scale - free grafu. . . . .	13
2.4	Jednotlivé scénáře v závislosti na hodnotě $X$ a $Y$ . . . . .	18
4.1	Jednotlivé scénáře v závislosti na hodnotě $X = 1 - c$ a $Y = b$ . . . . .	25
5.1	Agregovaná užitková funkce. Vrstevnice rozdělující hodnoty kooperačního poměru v poměru 80 : 20 pro různé velikosti základního modelu. . . . .	29
5.2	Průměrná užitková funkce. Vrstevnice rozdělující hodnoty kooperačního poměru v poměru 80 : 20 pro různé velikosti základního modelu. . . . .	30
5.3	Barevný odstín v závislosti na hodnotě kooperačního poměru. . . . .	32
5.4	Teplotní mapy - Model bez rigidity, s rigiditou 1, resp. 0 pro agregovanou užitkovou funkci. . . . .	33
5.5	Agregovaná užitková funkce. Vrstevnice rozdělující hodnoty kooperačního poměru v poměru 80 : 20 pro základní model (model bez rigidity), model s rigiditou - 1 a model s rigiditou - 0. . . . .	34

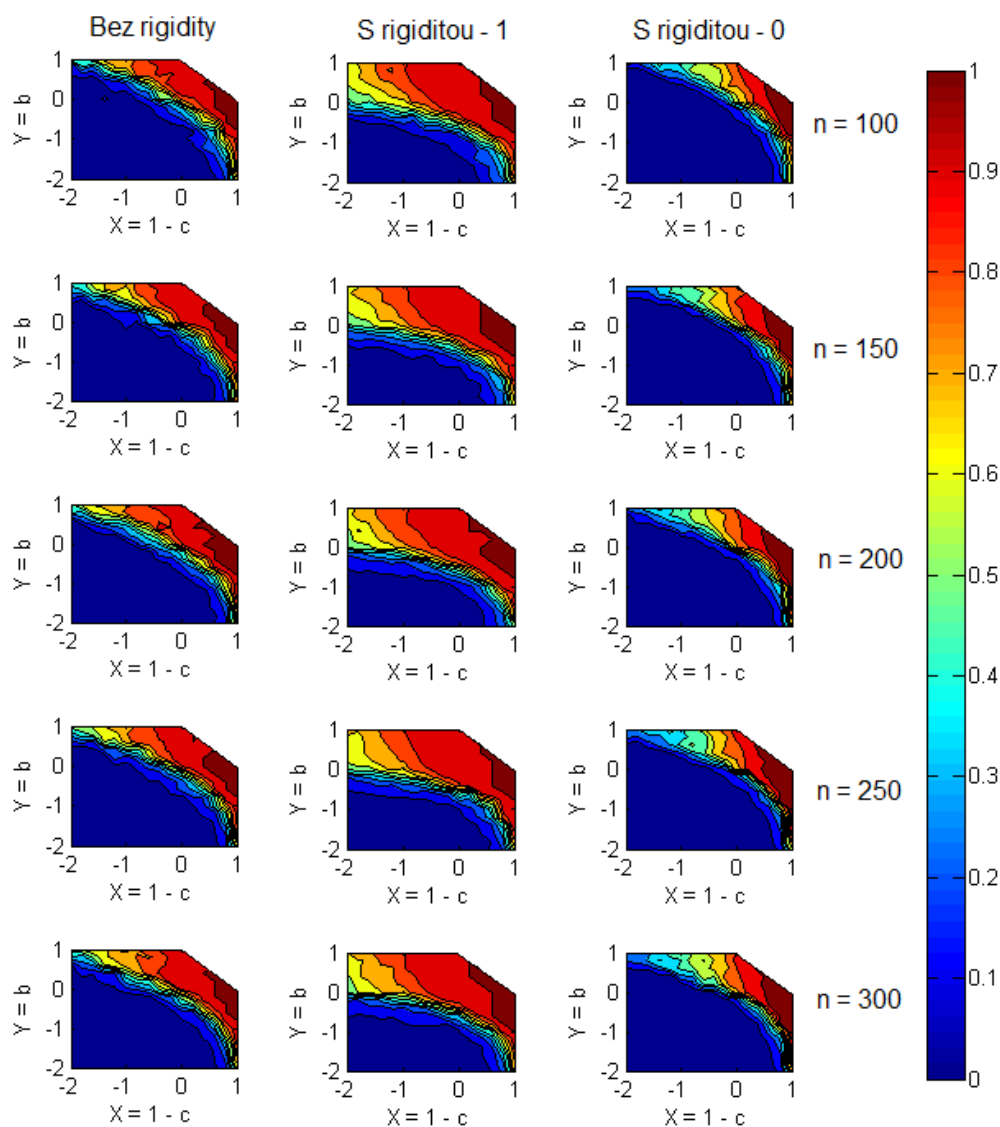
5.6	Teplotní mapy - Model bez rigidity, s rigiditou 1, resp. 0 pro průměrnou užítkovou funkci. . . . .	36
5.7	Průměrná užítková funkce. Vrstevnice rozdělující hodnoty kooperačního poměru v poměru 80 : 20 pro základní model (model bez rigidity), model s rigiditou - 1 a model s rigiditou - 0. . . . .	37
5.8	Porovnání hodnot kooperačního poměru pro agregovanou a průměrnou užítkovou funkci u základního modelu. . . . .	39
5.9	Porovnání hodnot kooperačního poměru pro agregovanou a průměrnou užítkovou funkci u modelu s rigiditou - 1. . . . .	40
5.10	Porovnání hodnot kooperačního poměru pro agregovanou a průměrnou užítkovou funkci u modelu s rigiditou - 0. . . . .	41
5.11	Vliv rigidity strategie pro různé modely u aktualizačního pravidla založeného na agregované užítkové funkci . . . . .	43
5.12	Vliv rigidity strategie pro různé modely u aktualizačního pravidla založeného na agregované užítkové funkci . . . . .	44
5.13	Vliv rigidity strategie pro různé modely u aktualizačního pravidla založeného na agregované užítkové funkci . . . . .	45
6.1	Agregovaná vs. průměrná užítková funkce. Přehledový obrázek. 47	
A.1	Teplotní mapy (vícebarevné) - Model bez rigidity, s rigiditou 1, resp. 0 pro agregovanou užítkovou funkci. . . . .	53
A.2	Teplotní mapy (dvoubarevné) - Model bez rigidity, s rigiditou 1, resp. 0 pro agregovanou užítkovou funkci. . . . .	54
B.1	Teplotní mapy - Model bez rigidity, s rigiditou 1, resp. 0 pro agregovanou užítkovou funkci. . . . .	55
B.2	Teplotní mapy - Model bez rigidity, s rigiditou 1, resp. 0 pro průměrnou užítkovou funkci. . . . .	56

# Literatura

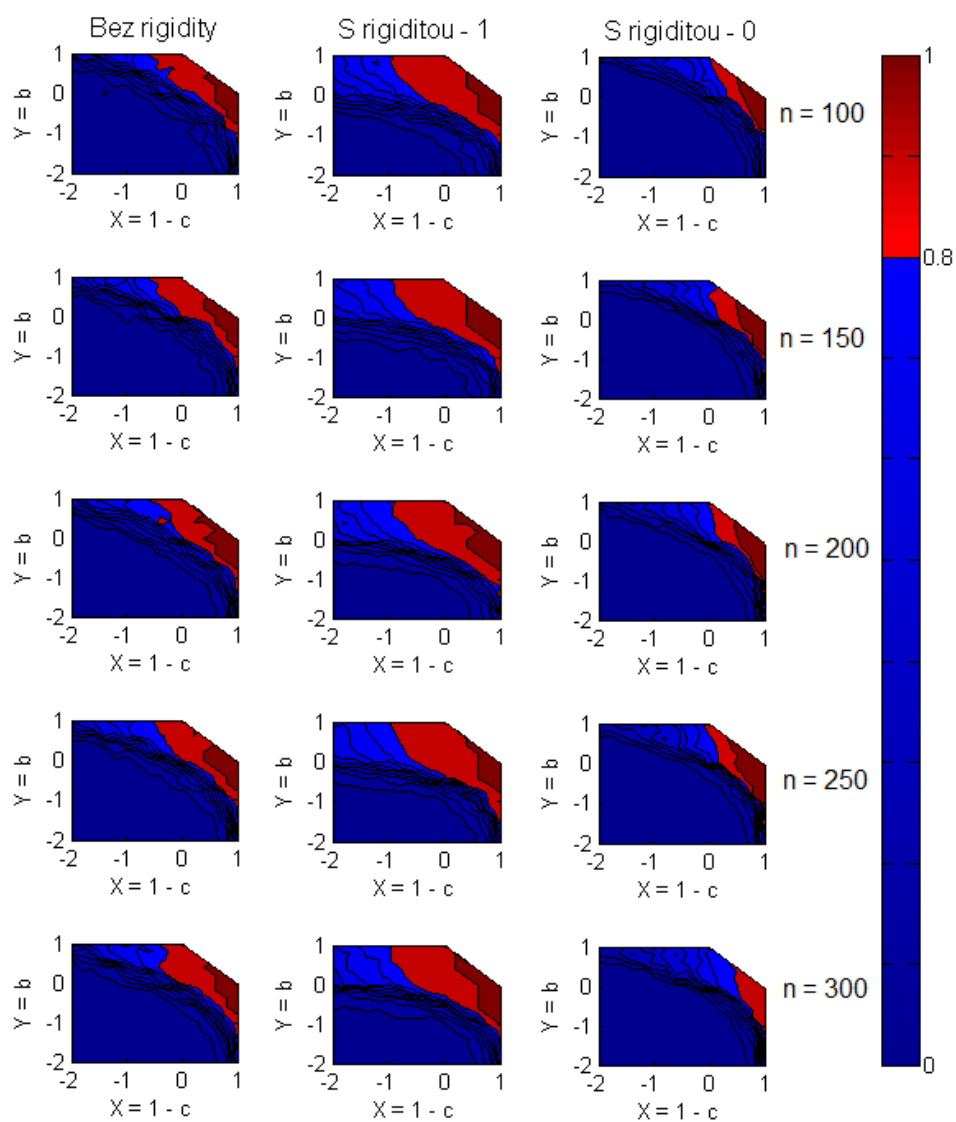
- [1] A. L. BARABÁSI, *Linked: The New Science of Network*, Perseus Pub., 2002.
- [2] A. L. BARABÁSI AND R. ALBERT, *Emergency of scaling in random networks*, *Science*, 286 (1999), pp. 509–512.
- [3] —, *Statistical mechanics of complex networks*, *Reviews of modern physics*, 74 (2002), pp. 47–97.
- [4] A. L. BARABÁSI AND E. BONABEAU, *Scale - free networks*, *Scientific American Magazin*, (2003), pp. 50–59.
- [5] R. COHEN AND S. HAVLIN, *Scale-free networks are ultrasmall*, *Phys. Rev. Lett.*, 90 (2003).
- [6] J. EPPERLEIN, S. SIEGMUND, AND P. STEHLÍK, *Analytical approach to evolutionary games on graphs*, (2012).
- [7] P. ERDÖS AND A. RÉNYI, *On random graph*, *Publ. Math. Debrecen*, 6 (1959), pp. 290–297.
- [8] L. EULER, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*, *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 8 (1736), pp. 128–140.
- [9] J. GROSS AND J. YELLEN, *Graph Theory and its applications*, CRC Press, 1999.
- [10] D. KÖNIG, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, 1936.
- [11] J. NEŠETŘIL, *Teorie grafů*, SNTL Praha, 1979.

- [12] M. A. NOWAK, *Evolutionary Dynamics: Exploring the Equations of Life*, Harvard University Press, 2006.
- [13] ———, *Five rules for the evolution of cooperation*, *Science*, 314 (2006), pp. 1560–1563.
- [14] H. OHTSUKI AND M. A. NOWAK, *Evolutionary stability on graphs*, *J. Theor. Biol.*, 251 (2008), pp. 698–707.
- [15] J. M. SMITH, *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, 1982.
- [16] J. M. SMITH AND G. R. PRICE, *The logic of animal conflict*, *Nature*, 246 (2003), pp. 15–18.
- [17] G. SZABÓ AND G. FÁTH, *Evolutionary games on graphs*, *Physic Reports*, 446 (2007), pp. 97–216.
- [18] J. VON NEUMANN AND O. MORGENSTERN, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 1944.
- [19] J. N. WEBB, *Game Theory: Decisions, Interaction and Evolution*, Springer Undergraduate Mathematics Series, 2006.

# A Příloha

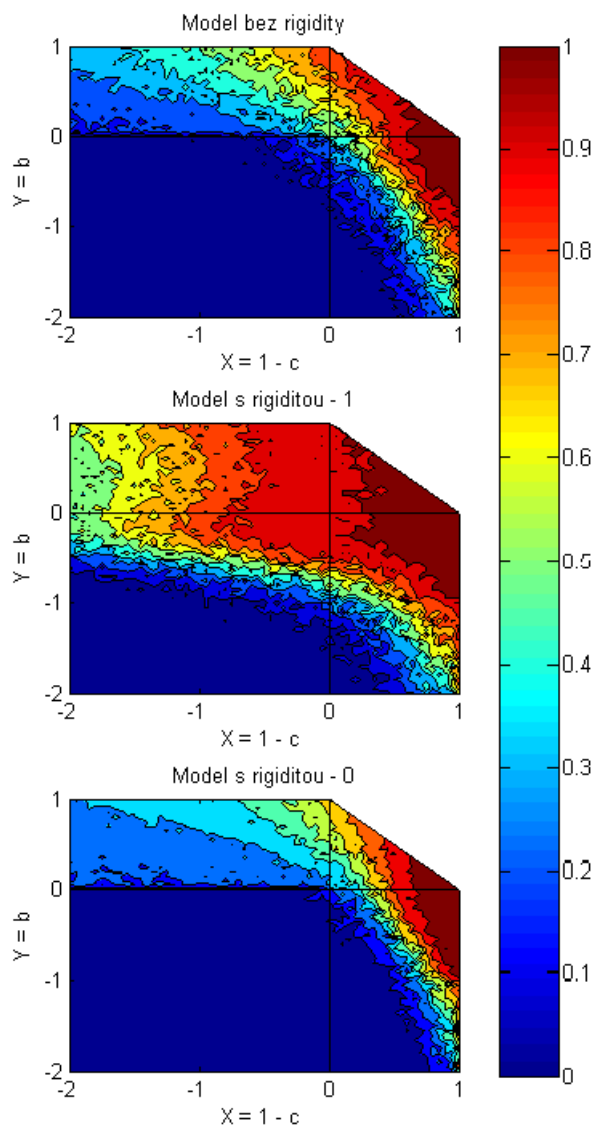


Obrázek A.1: Teplotní mapy pro aktualizací pravidlo založené na agregované uživatkové funkci, vícebarevný rozsah. Rozložení kooperačního poměru v závislosti na parametrech uživatkové matice  $X = 1 - c$  a  $Y = b$  s krokem 0,2 pro základní model (model bez rigidity), model s rigiditou - 1 a model s rigiditou - 0 a pro různý počet vrcholů modelu.



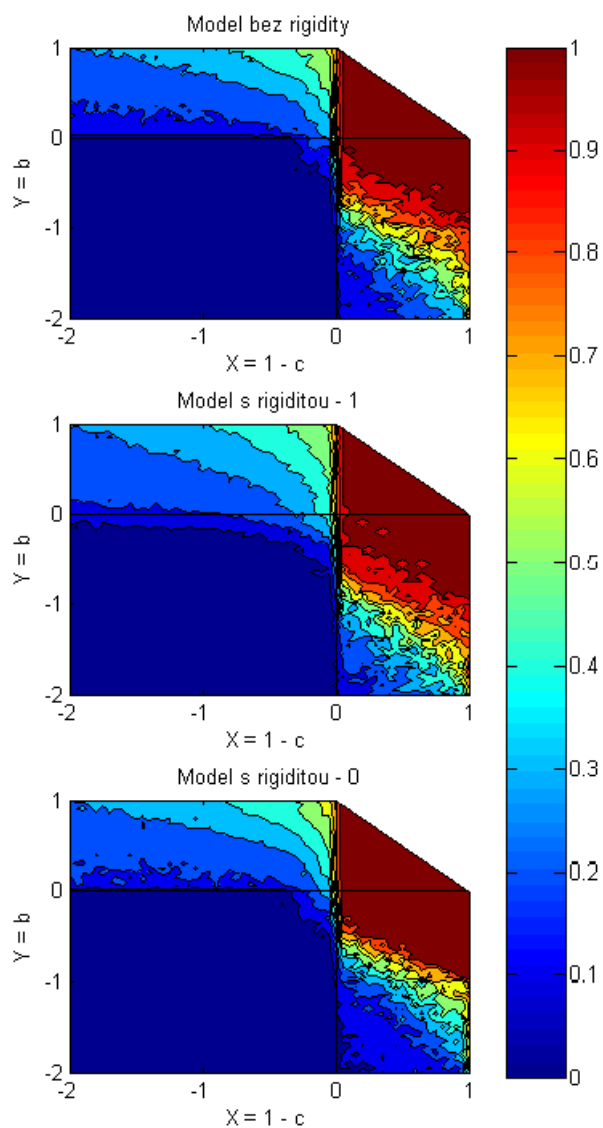
Obrázek A.2: Teplotní mapy pro aktualizací pravidlo založené na agregované uživatkové funkci, dvoubarevný rozsah. Rozložení kooperacího poměru v závislosti na parametrech uživatkové matice  $X = 1 - c$  a  $Y = b$  s krokem 0,2 pro základní model (model bez rigidity), model s rigiditou - 1 a model s rigiditou - 0 a pro různý počet vrcholů modelu.

## B Příloha



Obrázek B.1: Agregovaná uživatková funkce. Rozložení kooperačního poměru v závislosti na parametrech uživatkové matice  $X = 1 - c$  a  $Y = b$  s krokem 0,05 pro základní model (model bez rigidity), model s rigidity - 1 a model s rigidity - 0.





Obrázek B.2: Průměrná užitková funkce. Rozložení kooperačního poměru v závislosti na parametrech užitkové matice  $X = 1 - c$  a  $Y = b$  s krokem 0,05 pro základní model (model bez rigidity), model s rigiditou - 1 a model s rigiditou - 0.

# C Příloha

Přílohou této práce je CD, které je členěno do dvou základních adresářů:

`DP_Text`: obsahující samotný text diplomové práce.

`DP_Simulace`: obsahující spustitelné soubory v MATLABU R2010a a vygenerovaná data.

Nyní se zaměříme na adresář `DP_Simulace`:

Adresář `Kapitola_5`. Tento adresář obsahuje spustitelné soubory a vygenerovaná data pro Kapitoly 5.1, 5.2 a 5.3. Adresář je členěn následovně:

- podadresáře s názvy jednotlivých kapitol<sup>1</sup> obsahují vygenerovaná data pro příslušnou kapitolu a skripty, které vykreslují grafy.

Každá sada výsledků je ve vlastním souboru a identifikována je jeho názvem. Ukázkový název souboru a vysvětlení jednotlivých částí:

`100_MR1_AP2_0_05.mat`

Název souboru začíná číslem, které odpovídá počtu vrcholu modelu simulace. V tomto případě je velikost modelu 100. Další část charakterizuje o který typ modelu se jedná:

- ZM - Základní model (viz. Kapitola 5.1),
- MR1 - Model s rigiditou - 1 (viz. Kapitola 5.2),
- MR0 - Model s rigiditou - 0. (viz. Kapitola 5.2).

Zde se jedná o model s rigiditou - 1. Předposlední část charakterizuje aktualizací pravidlo (viz. Kapitola 5.1):

- AP1 - Aktualizační pravidlo č. 1,
- AP2 - Aktualizační pravidlo č. 2.

Zbytek názvu odpovídá kroku podle kterého se budou měnit parametry  $b$  a  $c$  užitečné matice (2.11).

---

<sup>1</sup>Např. podadresář `Kapitola_5_1_1/Vystup/` obsahuje data a skripty generující grafy pro Kapitulu 5.1.1

- samotný adresář Kapitola\_5 obsahuje spustitelné soubory<sup>2</sup> v programu MATLAB.

Dynamika_bez.m	Simulace_bez_rigidity.m
Dynamika_s.m	Simulace_s_rigiditou.m
Main.m	StupneGrafu.m
MaxStupen.m	Uzitkova_funkce_AGR.m
ScaleFreeGenerating.m	Uzitkova_funkce_MEAN.m

Adresář Kapitola\_5\_4. Tento adresář obsahuje spustitelné soubory a vygenerovaná data pro Kapitolu 5.4. Adresář je členěn následovně:

- podadresáře s názvy jednotlivých kapitol obsahují vygenerovaná data příslušné kapitoly a skripty, které vykreslují grafy.

Nyní část názvu souboru, která charakterizuje o který typ modelu se jedná, je jiná vzhledem k předchozímu popisu souboru.

100\_Nekoop\_AP2\_0\_05.mat

- Koop - fixace kooperativní strategie na vrcholech modelu,
- Nekoop - fixace nekooperativní strategie na vrcholech modelu.

Ostatní části názvu souboru o počtu vrcholů modelu, aktualizacím pravidlu a kroku jsou zachována.

- podadresář Koop, resp. NeKoop obsahuje spustitelné soubory v programu MATLAB, pro případ fixace kooperativní, resp. nekooperativní strategie na vrcholech modelu.

Dynamika01.m	Simulace_NeKoop_modelu.m
Main.m	StupneGrafu.m
MaxStupen.m	Uzitkova_funkce_AGR.m
ScaleFreeGenerating.m	Uzitkova_funkce_MEAN.m
Simulace_Koop_modelu.m	Zmena.m

---

<sup>2</sup>Každý spustitelný soubor (m-file) obsahuje jeho podrobný popis, popis vstupních a výstupních parametrů, dále je okomentovaný i zdrojový kód pro lepší orientaci. Z tohoto důvodu je zde nebudeme podrobně popisovat.